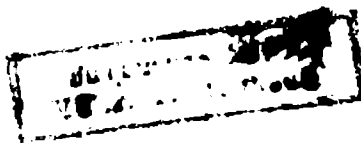


51
Բ-36

Երևանի պետական ժողովրդական տնտեսության ինստիտուտ

ԲԱՐՁՐԱԳՈՒՅՆ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ՁԵՌՆԱՐԿ

II մաս



«Տնտեսագետ»

ՂՏՅ 51(07)
ԳՄԴ 22.1 ց73
Բ 362

Հրատարակության է ներկայացրել
ԵրԺՏԻ բարձրագույն մաթեմատիկայի ամբիոնը

Կազմողներ՝

ԵրԺՏԻ դոցենտ, ֆ.մ.գ.թ. Ռ.Գալոյան
ԵրԺՏԻ դոցենտ, ֆ.մ.գ.թ. Ա.Հայրապետյան
ԵրԺՏԻ դոցենտ, Մ.Գյուլգյուլյան
Մասնագետ խմբագիր

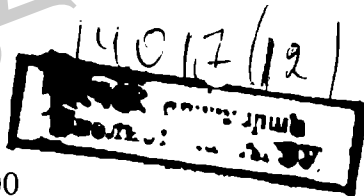
Տ.Գ.Դ., պրոֆեսոր, բարձրագույն դպրոցի ԳՄԱ
ակադեմիկոս Ա.Միտոյան

Հրատարակվում է կազմողների միջոցներով

Բ 362 Բարձրագույն մաթեմատիկայի խնդիրների լուծմա
ծեղնարկ.- եր. Տնտեսագետ- 108 էջ:

Սույն ձեռնարկում բերված են անհրաժեշտ տեսակա
տեղեկություններ և բանաձևեր, տիպային խնդիրների և վարժու
թյունների լուծումներ, տրված են առաջադրանքներ ինքնուրույն
լուծելու համար, որոնք ուղեկցված են ցուցումներով և պատաս
խաններով:

Նախատեսված է տնտեսագիտական ԲՈՒՀ-երի ուսանողության
համար:



Բ 160201000
719(01) - 97

ԳՄԴ 22.1ց73

ՀՊՏՀ գրադարան

©. «Տնտեսագետ»,



000024906

ԳԼՈՒԽ VIII

Մի քանի փոփոխականների ֆունկցիաներ

§1. Հիմնական գաղափարներ

u փոփոխականը կոչվում է $x; y; \dots, t$ անկախ փոփոխականների ֆունկցիա, եթե թույլատրելի $(x; y; \dots, t)$ համախմբին ինչ-որ օրենքով համապատասխանում է u փոփոխականի մեկ որոշակի արժեք:

Այդպիսի բացահայտ կախվածությունը գրվում է $u = F(x; y; \dots, t)$ տեսքով: Մի քանի փոփոխականների ֆունկցիաների հետագա ուսումնասիրությունը սովորաբար կատարվում է ամենապարզ դեպքում, երբ z ֆունկցիան կախված է երկու անկախ փոփոխականներից՝ $z = f(x; y)$, կամ $z = f(M)$, որտեղ M -ը $(x; y)$ կոորդինատներ ունեցող կետն է: Թույլատրելի $M(x; y)$ կետերը XOY կոորդինատային հարթության վրա կազմում են $z = f(x; y)$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթը, իսկ $z = f(x; y)$ թվերի բազմությունը կոչվում է ֆունկցիայի փոփոխման տիրույթ:

Եթե c -ն պատկանում է $z = f(x; y)$ ֆունկցիայի փոփոխման տիրույթին, ապա $f(x; y) = c$ կորը, որն իրենից ներկայացնում է $z = f(x; y)$ մակերևույթի և $z = c$ հարթության հատման գծի պրոեկցիան XOY կոորդինատային հարթության վրա, կոչվում է $z = f(x; y)$ ֆունկցիայի մակարդակի գիծ: Մակարդակի գծերի օգնությամբ հեշտանում է $z = f(x; y)$ մակերևույթի տեսքի մասին պատկերացում կազմելը:

1. Հաշվել $f(x; y) = \frac{x + y}{x^2 + y^2}$ ֆունկցիայի արժեքները $M_1(1; 1)$,

$M_2(-3; 2)$, $M_3(0; 4)$ կետերում:

Լուծում.

$$f(M_1) = f(1; 1) = \frac{1 + 1}{1^2 + 1^2} = 1;$$

$$f(M_2) = f(-3;2) = \frac{-3+2}{(-3)^2+2^2} = -\frac{1}{13} ;$$

$$f(M_3) = f(0;4) = \frac{0+4}{0^2+4^2} = \frac{1}{4} ;$$

† 2. Հաշվել $f(x; y; z) = \frac{3xyz}{x+y+z}$ ֆունկցիայի արժեքները

$M_1(-2;0;1)$ և $M_2(1;2;3)$ կետերում:

Լուծում.

$$f(M_1) = f(-2;0;1) = \frac{3 \cdot (-2) \cdot 0 \cdot 1}{-2+0+1} = \frac{0}{-1} = 0 ,$$

$$f(M_2) = f(1;2;3) = \frac{3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3}{1+2+3} = \frac{18}{6} = 3 :$$

† 3. Հաշվել $f(4;-3)$, $f(1;0)$ և $f(12;3)$ արժեքները, եթե

$$f(x; y) = \sqrt{x^2 + y^2} :$$

4. Հաշվել $f(1;2)$, $f(3;6)$ և $f(5;10)$ արժեքները, եթե

$$f(x; y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2} :$$

† 5. Գտնել $f(x; -y)$, $f(-x; y)$, $f\left(\frac{1}{x}; \frac{1}{y}\right)$ արտահայտություն-

ները, եթե $f(x; y) = \frac{x^2 - y}{y^2 - x} :$

6. Հաշվել $f(3; -2; 5)$, $f(7; 1; 0)$ թվերը, եթե

$$f(x; y; z) = \ln(x + y^2 + 5z) :$$

7. Գտնել $z = x^2 + y^2$ ֆունկցիայի մակարդակի գծերը:

Լուծում. տրված ֆունկցիայի փոփոխման տիրույթն է $z \geq 0$ կիսատարածությունը, մակարդակի գծերն են $x^2 + y^2 = c$ ($c \geq 0$) շրջանագծերը:

8. Գտնել հետևյալ ֆունկցիաների մակարդակի գծերը.

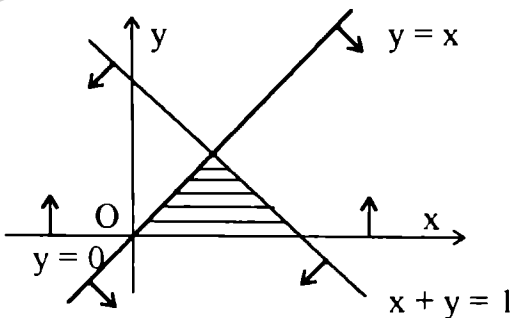
$$1) z = 2x + y; \quad 2) z = \frac{x}{y}; \quad 3) z = \ln \sqrt{\frac{y}{x}}; \quad 4) z = \frac{1}{x^2 + y^2};$$

$$5) z = e^{xy}; \quad 6) z = a^2 + x^2 - y^2; \quad 7) z = \frac{1}{x^2 - y^2}$$

9. Կառուցել այն D տիրույթը, որին պատկանող $M(x; y)$ կետերի կոորդինատները բավարարում են հետևյալ անհավասարություններին.

$$\begin{cases} x > y \\ x + y < 1 \\ y > 0 \end{cases}$$

Լուծում. $x > y$ պայմանին բավարարում են $y = x$ ուղղից ներքև ընկած կիսահարթության կետերը, $x + y < 1$ անհավասարությանը բավարարում են $x + y = 1$ ուղղից ներքև ընկած կիսահարթության կետերը, իսկ $y > 0$ պայմանը նշանակում է, որ այդ տիրույթը ընկած է վերին կիսահարթությունում: Այսպիսով, տիրույթը կունենա հետևյալ տեսքը.



† 10. Կառուցել այն D տիրույթը, որին պատկանող $M(x,y)$ կետերի կոորդինատները բավարարում են հետևյալ անհավասարություններին.

$$1) 2 \leq x \leq 6, \quad 1 \leq y \leq 3; \quad 2) x^2 + y^2 > 4;$$

$$3) 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9; \quad 4) \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} < 1:$$

11. Գտնել $z = \frac{x+y}{2x-y}$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթը:

Լուծում. ֆունկցիան որոշված կլինի, եթե հայտարարը հավասար չլինի զրոյի, այսինքն $2x - y \neq 0$: Նշանակում է որոշման տիրույթին պատկանում են հարթության բոլոր կետերը, բացի $y = 2x$ ուղղի կետերից:

12. Գտնել $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթը:

Լուծում. այստեղ ֆունկցիայի որոշված լինելու համար պետք է, որ $16 - x^2 - y^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 16$: Այս անհավասարությանը բավարարում են $R = 4$ շառավղով կոորդինատների սկզբնակետը կենտրոն ունեցող շրջանի կետերը և $x^2 + y^2 = 16$ շրջանագծի կետերը:

13. Գտնել $u = \ln(3x + 2y + z - 6)$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթը:

Լուծում. լոգարիթմական ֆունկցիայի գոյության համար անհրաժեշտ է, որ $3x + 2y + z - 6 > 0$: Այս անհավասարությանը բավարարում են $3x + 2y + z - 6 = 0$ հարթությունից վերև ընկած կիսատարածության կետերը:

14. Գտնել $z = \arcsin \frac{y}{x}$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթը:

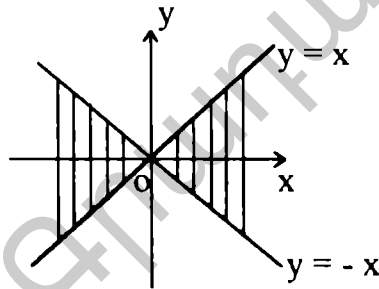
Լուծում. $\arcsin t$ ֆունկցիայի սահմանման համաձայն ունենք՝

$$\left| \frac{y}{x} \right| \leq 1: \text{ Այստեղ վերցնելով միայն հավասարման նշանը, կստանանք}$$

որոշման տիրույթի եզրագծի հավասարումը՝ $|y| = |x|$ կամ $y = \pm x$:

Սրանք կոորդինատային անկյունների կիսորդներն են, իսկ $|y| \leq |x|$ անհավասարությունով որոշվող տիրույթը կլինի այդ կիսորդների միջև ընկած տիրույթը:

Նշենք, որ $y = x$ և $y = -x$ ուղիղները ևս մտնում են որոշման տիրույթի մեջ, բացի $O(0;0)$ սկզբնակետից:



15. Գտնել հետևյալ ֆունկցիաների որոշման տիրույթները.

$$1) z = a^2 - x^2 - 2y^2; \quad 2) z = \frac{1}{x^2 + y^2}; \quad 3) z = \frac{1}{x^2 - y^2};$$

$$4) z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}; \quad 5) z = \sqrt{3x} - \frac{5}{\sqrt{y}}; \quad 6) z = \frac{3xy}{x + y};$$

$$7) z = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}; \quad 8) z = \frac{1}{\ln(x + y)}; \quad 9) z = \arccos(x + y);$$

$$10) u = \sqrt{x + y + z}; \quad 11) u = \ln(x^2 + y^2 + z^2 - 4);$$

§2. Մի քանի փոփոխականների ֆունկցիայի սահմանը և անընդհատությունը

A թիվը կոչվում է $z = f(M) = f(x; y)$ ֆունկցիայի սահման, երբ $M(x; y)$ կետը ձգտում է $M_0(x_0; y_0)$ կետին, եթե կամայական $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ այնպես, որ $MM_0 < \delta$ անհավասարությունից հետևում է $|f(M) - A| < \varepsilon$ անհավասարությունը: Այս փաստը գրվում է

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = A \text{ կամ } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x; y) = A \text{ տեսքով:}$$

Բացի այսպիսի սահմանային անցումից, կարելի է դիտարկել նաև հաջորդական սահմաններ, երբ նախ $x \rightarrow x_0$ հաստատում y -ի ($y \neq y_0$) դեպքում, որից հետո $y \rightarrow y_0$ կամ ընդհակառակը.

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \left[\lim_{x \rightarrow x_0} f(x; y) \right] \text{ կամ } \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\lim_{y \rightarrow y_0} f(x; y) \right]:$$

$z = f(x; y)$ ֆունկցիան կոչվում է անընդհատ $M_0(x_0; y_0)$ կետում, եթե տեղի ունի

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = f(M_0) \text{ կամ } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x; y) = f(x_0; y_0)$$

հավասարությունը: Ֆունկցիան կոչվում է անընդհատ D տիրույթում, եթե այն անընդհատ է D տիրույթի յուրաքանչյուր կետում: Եթե որևէ կետում անընդհատության պայմանը տեղի չունի, ապա այդ կետը կոչվում է $z = f(x; y)$ ֆունկցիայի խզման կետ:

Մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի սահմանի և անընդհատության վերաբերյալ ունեցած բոլոր թեորեմները որոշ վերաձևակերպումներով ուժի մեջ են նաև մի քանի փոփոխականների ֆունկցիաների համար:

16. Հաշվել սահմանը $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\operatorname{tg} xy}{y}$:

Լուծում. համոզվելով, որ սահմանային $(3; 0)$ կետում ֆունկցիան որոշված չէ (հակառակ դեպքում ուղղակի կտեղադրենք $x = 3$ և $y = 0$), կատարենք հետևյալ ձևափոխությունները.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\operatorname{tg} xy}{y} = \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\operatorname{tg} xy}{xy} \cdot x = \left(\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\operatorname{tg} xy}{xy} \right) \left(\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ y \rightarrow 0}} x \right) = 1 \cdot 3 = 3 :$$

17. Ապացուցել, որ $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ սահմանը գոյություն չունի:

Լուծում. եթե $M(x; y)$ կետը ձգտի $O(0; 0)$ կետին մնալով $y = x$ ուղղի վրա, ապա $\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = 0$, ուրեմն սահմանային արժեքն էլ

կլինի զրո, իսկ եթե $M(x; y)$ կետը ձգտի $O(0; 0)$ կետին մնալով OX առանցքի վրա, ապա $\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = 1$ և այս դեպքում մասնակի

սահմանը կլինի 1: Սա արդեն նշանակում է, որ $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ սահմանը գոյություն չունի:

18. Հաշվել հետևյալ սահմանները.

$$+1) \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow -1}} (3xy - x^2 + y^2 + 1); \quad 2) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{xy};$$

$$3) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2 - \sqrt{4 - xy}}{xy}; \quad +4) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{xy}{\sin xy}; \quad +5) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2x^3 + 3y^2}{x^2 + y^2};$$

$$6) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (1 + xy)^{\frac{3}{xy}}; \quad 7) \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow \infty}} \operatorname{arctg} \frac{x}{y}; \quad 8) \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x + y}{x^2 + y^2};$$

19. Հետազոտել $z = \frac{x + y}{x - y}$ ֆունկցիայի անընդհատությունը և

խզումները:

Լուծում. որպես տարրական ֆունկցիա, տրված ֆունկցիան անընդհատ է իր որոշման տիրույթում, երբ $x - y \neq 0$: Այսպիսով,

ֆունկցիան անընդհատ է հարթության բոլոր կետերում, բացի $y = x$ ուղղի կետերից: Այդ ուղղի կետերում ֆունկցիան ունի երկրորդ սեռի խզում:

20. Հետազոտել հետևյալ ֆունկցիաների անընդհատությունը և խզումները.

$$1) z = \frac{1}{x^2 + y^2}; \quad 2) z = \frac{1}{(x - y)^2}; \quad 3) z = \ln(1 - x^2 - y^2);$$

$$4) z = e^{\frac{1}{x^2 + y^2}}; \quad 5) z = \frac{1}{\sin x \sin y};$$

§3. Մասնակի ածանցյալներ և լրիվ դիֆերենցիալ

1. Մասնակի ածանցյալներ

$z = f(x; y)$ ֆունկցիայի առաջին կարգի մասնակի ածանցյալները սահմանվում են հետևյալ կերպ.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x; y) - f(x; y)}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x} \equiv f'_x(x; y) \equiv z'_x;$$

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x; y + \Delta y) - f(x; y)}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y} \equiv f'_y(x; y) \equiv z'_y;$$

Այս սահմանումներից հետևում է, որ z'_x -ը հաշվելու ժամանակ y -ը դիտարկվում է որպես հաստատուն և կատարվում է սովորական դիֆերենցում x -ի նկատմամբ: Նույն ձևով z'_y -ը հաշվելու ժամանակ x -ը դիտարկվում է որպես հաստատուն: Մասնակի ածանցյալների համար ածանցման կանոնները և բանաձևերը համընկնում են մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի համար մատնանշված կանոնների հետ:

z'_x և z'_y մասնակի ածանցյալները իրենց հերթին կարող են ունենալ մասնակի ածանցյալներ, որոնք $z = f(x; y)$ ֆունկցիայի համար կկոչվեն երկրորդ կարգի մասնակի ածանցյալներ:

$(z'_x)'_x = z''_{xx} \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ - երկրորդ կարգի մասնակի ածանցյալ ըստ x -ի,

$(z'_y)'_y = z''_{yy} \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ - երկրորդ կարգի մասնակի ածանցյալ ըստ y -ի,

$(z'_x)'_y = z''_{xy}$ և $(z'_y)'_x = z''_{yx}$ - երկրորդ կարգի խառը ածանցյալներ, որոնք անընդհատության կետերում իրար հավասար են:

† 21. Գտնել $z = x^2 - 5xy + 2y^2 - 3x + y + 7$ ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալները $M_0(-1;2)$ կետում:

Լուծում. հաշվենք մասնակի ածանցյալները.

$$z'_x = 2x - 5y - 3, \quad z'_y = -5x + 4y + 1$$

$$z'_x(-1;2) = -2 - 10 - 3 = -15, \quad z'_y(-1;2) = 5 + 8 + 1 = 14:$$

† 22. Ցույց տալ, որ $z = \ln(x^2 + xy + y^2)$ ֆունկցիան բավարարում է հետևյալ հավասարմանը $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2$:

Լուծում. գտնենք մասնակի ածանցյալները.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x^2 + xy + y^2} (x^2 + xy + y^2)'_x = \frac{2x + y}{x^2 + xy + y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x^2 + xy + y^2} (x^2 + xy + y^2)'_y = \frac{x + 2y}{x^2 + xy + y^2}:$$

Տեղադրենք մասնակի ածանցյալների արժեքները տրված հավասարման մեջ:

$$x \frac{2x + y}{x^2 + xy + y^2} + y \frac{x + 2y}{x^2 + xy + y^2} = 2 \Rightarrow \frac{2x^2 + 2xy + 2y^2}{x^2 + xy + y^2} = 2,$$

$$2 = 2:$$

Ստացված նույնությունը ապացուցում է, որ տրված ֆունկցիան իրոք բավարարում է նշված հավասարմանը:

✦ 23. Գտնել $u = \sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z}$ ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալները $M_0(0;0;\frac{\pi}{4})$ կետում:

Լուծում.

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{2 \sin x \cos x}{2\sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z}} \Rightarrow \frac{\partial u(M_0)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{2 \sin y \cos y}{2\sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z}} \Rightarrow \frac{\partial u(M_0)}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{2 \sin z \cos z}{2\sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z}} \Rightarrow \frac{\partial u(M_0)}{\partial z} = \frac{1}{\sqrt{2}}:\end{aligned}$$

24. Գտնել հետևյալ ֆունկցիաների առաջին կարգի մասնակի ածանցյալները.

$$\begin{aligned}\text{✦ 1) } z &= 2x^2y^2 + 3xy^2 + y^3; & \text{✦ 2) } z &= (5x^3y^2 + 1)^3; \\ \text{✦ 3) } z &= 2y\sqrt{x} + 3x^2\sqrt[3]{y}; & \text{✦ 4) } z &= \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2}); \\ \text{✦ 5) } z &= \sin \frac{x}{y}; & \text{✦ 6) } z &= e^{xy(x^2+y^2)}; & \text{✦ 7) } u &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \\ \text{✦ 8) } u &= \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}; & \text{9) } u &= (x-y)(x-z)(y-z): \end{aligned}$$

✦ 25. Գտնել $z = \sin xy$ ֆունկցիայի առաջին և երկրորդ կարգի մասնակի ածանցյալները:

Լուծում. $z'_x = y \cos xy, \quad z'_y = x \cos xy,$
 $z''_{xx} = -y^2 \sin xy, \quad z''_{yy} = -x^2 \sin xy,$
 $z''_{xy} = \cos xy + y(-x \sin xy) = \cos xy - xy \sin xy:$

26. Գտնել հետևյալ ֆունկցիաների երկրորդ կարգի մասնակի ածանցյալները.

1) $z = x^3y + y^3x;$ ✦ 2) $z = \ln(x^2 + y^2):$

✚ 27. Ցույց տալ, որ $z = \frac{x^2}{2y} + \frac{x}{2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$ ֆունկցիան բավարարում է $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^3}{y}$ հավասարմանը:

2. Լրիվ դիֆերենցիալ

$z = f(x, y)$ ֆունկցիայի լրիվ ած $M(x, y)$ կետում կոչվում է $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ տարբերությունը: $z = f(x, y)$ ֆունկցիան կոչվում է (x, y) կետում դիֆերենցելի, եթե այդ կետում լրիվ ածը կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով.

$$\Delta z = A \Delta x + B \Delta y + O(\rho),$$

որտեղ $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, իսկ A և B թվերը կախում չունեն Δx և Δy ածերից: $z = f(x, y)$ ֆունկցիայի լրիվ դիֆերենցիալ կոչվում է Δz լրիվ ածի գծային մասը, այսինքն $dz = A \Delta x + B \Delta y$: Ֆունկցիայի լրիվ դիֆերենցիալը ներկայացվում է հետևյալ բանաձևով.

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy :$$

Նման ձևով երեք արգումենտների համար $u = f(x, y, z)$ ֆունկցիայի դիֆերենցիալը կլինի

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz :$$

✚ 28. Գտնել $z = 3x^2y^5$ ֆունկցիայի լրիվ դիֆերենցիալը $M_0(2; 1)$ կետում:

Լուծում. հաշվենք մասնակի ածանցյալները M_0 կետում.

$$z'_x = 6xy^5 \Rightarrow z'_x(2; 1) = 12; \quad z'_y = 15x^2y^4 \Rightarrow z'_y(2; 1) = 60;$$

$$dz = z'_x dx + z'_y dy = 12dx + 60dy:$$

✚ 29. Գտնել $z = \sin(x^2 + y^2)$ ֆունկցիայի լրիվ դիֆերենցիալը:

Լուծում.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos(x^2 + y^2)(x^2 + y^2)'_x = 2x \cos(x^2 + y^2),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \cos(x^2 + y^2)(x^2 + y^2)'_y = 2y \cos(x^2 + y^2):$$

Հաշվենք լրիվ դիֆերենցիալը.

$$dz = 2x \cos(x^2 + y^2) dx + 2y \cos(x^2 + y^2) dy:$$

30. Հաշվել հետևյալ ֆունկցիաների լրիվ դիֆերենցիալները.

✚ 1) $z = xy + x^2 + y^2$; ✚ 2) $z = \arctg \frac{y}{x}$; ✚ 3) $z = xe^y + ye^x$;

✚ 4) $z = x \sin y + y \sin x$; ✚ 5) $z = \ln(x + \ln y)$; ✚ 6) $z = xy \sin xy$:

§4. Բարդ ֆունկցիայի ածանցյալը: Ածանցյալ տվյալ ուղղությամբ: Գրադիենտ

Դիցուք $z = f(x; y)$, որտեղ $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ և գոյություն ունի $z = f(\varphi(t); \psi(t))$ բարդ ֆունկցիան: Եթե $f(x; y)$, $\varphi(t)$ և $\psi(t)$ ֆունկցիաները դիֆերենցելի են, ապա $z = f(\varphi(t); \psi(t))$ բարդ ֆունկցիայի ածանցյալը հաշվվում է հետևյալ բանաձևով.

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}:$$

Եթե L ուղղությունը OX առանցքի հետ կազմում է α անկյուն և $z = f(x; y)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է, ապա նրա ածանցյալը L ուղղությամբ հաշվվում է հետևյալ բանաձևով.

$$\frac{\partial z}{\partial L} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \alpha:$$

$$\left(\frac{\partial z(M_0)}{\partial x}, \frac{\partial z(M_0)}{\partial y} \right) \text{ կոորդինատներով վեկտորը կոչվում է}$$

$z = f(M)$ ֆունկցիայի գրադիենտ M_0 կետում.

$$\text{grad } z = \frac{\partial z}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \vec{j} :$$

Եթե L ուղղությունը համընկնում է $\text{grad } z$ -ի ուղղության հետ, ապա $\frac{\partial z}{\partial L}$ ածանցյալը ընդունում է իր ամենամեծ արժեքը այդ կետում ($\text{grad } z \neq 0$) :

† 31. Գտնել $\frac{dz}{dt}$ -ն , եթե $z = 3x^2 - xy + y^3$, $x = t^3$, $y = t^2$:

Լուծում.
$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= (6x - y) \cdot 3t^2 + (-x + 3y^2) \cdot 2t = \\ &= (6t^3 - t^2) \cdot 3t^2 + (-t^3 + 3t^4) \cdot 2t = 24t^5 - 5t^4; \end{aligned}$$

32. Գտնել $\frac{dz}{dt}$ -ն , եթե

1) $z = x^2 + xy + y^2$, $x = t^2$, $y = t^3$;

† 2) $z = e^{2(x^2 - y^2)}$, $x = \cos t$, $y = \sin t$;

3) $z = \ln \sin \frac{x}{\sqrt{y}}$, $x = 3t^2$, $y = \sqrt{1 + t^2}$;

† 33. Գտնել $z = x^2 - 5y^2$ ֆունկցիայի ածանցյալը $M_0(2;1)$ կետում OX առանցքի հետ 30° անկյուն կազմող L ուղղությամբ:

Լուծում. Գտնում ենք մասնակի ածանցյալները $M_0(2;1)$ կետում

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \Rightarrow \frac{\partial z(M_0)}{\partial x} = 2 \cdot 2 = 4 ,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -10y \Rightarrow \frac{\partial z(M_0)}{\partial y} = -10 \cdot 1 = -10 :$$

Հաշվենք ածանցյալը L ուղղությամբ

$$\frac{\partial z}{\partial L} = 4 \cos 30^\circ - 10 \sin 30^\circ = 2\sqrt{3} - 5 :$$

† 34. Հաշվել $z = x^3 \sqrt{y^3}$ ֆունկցիայի ածանցյալը $M_0(-2;4)$ կետում OX առանցքի հետ $\alpha = 60^\circ$ անկյուն կազմող L ուղղությամբ:

35. Հաշվել $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ֆունկցիայի ածանցյալը $M_0(3;4)$

կետում $\overline{M_0 M_1}$ վեկտորի ուղղությամբ, որտեղ $M_1(5;6)$ կետն է:

† 36. Գտնել $z = 3x^2 + xy - y^2$ ֆունկցիայի գրադիենտը $M_0(-2;1)$ կետում:

Լուծում. հաշվում ենք մասնակի ածանցյալները $M_0(-2;1)$ կետում.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x + y \Rightarrow \frac{\partial z(M_0)}{\partial x} = -11 ,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x - 2y \Rightarrow \frac{\partial z(M_0)}{\partial y} = -4 :$$

Տեղադրում ենք գրադիենտի բանաձևի մեջ.

$$\text{grad } z = -11 \vec{i} - 4 \vec{j} :$$

37. Գտնել հետևյալ ֆունկցիաների գրադիենտները նշված կետերում.

1) $z = x^2 + y^3 - 3xy$, $M_0(2;5)$;

2) $z = \sqrt{x^2 - y^2}$, $M_0(5;3)$;

† 3) $z = \ln \cos \frac{x}{y}$, $M_0\left(\frac{\pi}{4}; 1\right)$;

4) $u = xyz$, $M_0(-2;1;3)$:

§ 5. Մի քանի փոփոխականների ֆունկցիաների էքստրեմումները

$M_0(x_0; y_0)$ կետի $z = f(x; y)$ ֆունկցիայի համար կոչվում է մաքսիմումի (մինիմումի) կետ, եթե գոյություն ունի M_0 կետի այնպիսի շրջակայք, որ այդ շրջակայքին պատկանող բոլոր $M(x; y)$ ($M \neq M_0$) կետերի համար $f(x_0; y_0) > f(x; y)$ ($f(x_0; y_0) < f(x; y)$):

Մաքսիմումի և մինիմումի կետերը միասին կոչվում են էքստրեմումի կետեր: Եթե $z = f(x; y)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է, ապա նրա մասնակի ածանցյալները էքստրեմումի կետերում հավասար են զրոյի.

$$\frac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial y} = 0 :$$

Դիֆերենցելի ֆունկցիաների համար այս պայմանները հանդիսանում են էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանները: Այս պայմաններին բավարարող կետերը կոչվում են ստացիոնար կետեր: Ձևակերպենք էքստրեմումի բավարար պայմանը ստացիոնար կետերի համար:

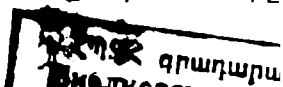
Դիցուք $M_0(x_0; y_0)$ կետը ստացիոնար կետ է: Նշանակենք

$$A = \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x^2}, \quad B = \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x \partial y}, \quad C = \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial y^2} :$$

Եթե $\Delta = AC - B^2 > 0$, ապա $z = f(x; y)$ ֆունկցիան M_0 կետում ունի էքստրեմում, ընդ որում $A < 0$ դեպքում մաքսիմում, իսկ $A > 0$ դեպքում մինիմում: Եթե $\Delta = AC - B^2 < 0$, ապա M_0 -ն էքստրեմումի կետ չէ: Եթե $\Delta = 0$, ապա պետք է կատարել լրացուցիչ ուսումնասիրություններ:

Գործնականում հաճախ պահանջվում է գտնել $z = f(x; y)$ ֆունկցիայի էքստրեմումները այն պայմանի դեպքում, որ x և y փոփոխականները բավարարում են նաև $\varphi(x; y) = 0$ հավասարմանը (կապի հավասարում): Այսպիսի էքստրեմումները կոչվում են պայմանական էքստրեմումներ: Պայմանական էքստրեմումները գտնելու հարցը բերվում է

$$F = f(x; y) + \lambda \varphi(x; y) :$$



Լագրանժի ֆունկցիայի սովորական էքստրեմումների գտնելու հարցին, որտեղ λ -ն անորոշ գործակից է: Լագրանժի ֆունկցիայի համար էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանները ունեն հետևյալ տեսքը.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\ \varphi(x; y) = 0 \end{cases} .$$

38. Գտնել $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$ ֆունկցիայի էքստրեմումները:

Լուծում. գտնում ենք առաջին կարգի մասնակի ածանցյալները:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y - 3, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x + 2y - 6 :$$

Համաձայն էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանի

$$\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x + 2y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0, \quad y = 3$$

Այսպիսով, $M_0(0;3)$ կետը ստացիոնար կետ է: Հաշվում ենք երկրորդ կարգի մասնակի ածանցյալները $M_0(0;3)$ կետում:

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2; \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2; \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1$$

$$\Delta = AC - B^2 = 2 \cdot 2 - 1 = 3 > 0, \quad A = 2 > 0:$$

Ստացվեց, որ $M_0(0;3)$ կետում տված ֆունկցիան ունի մինիմում $z_{\min} = -9$:

39. Գտնել հետևյալ ֆունկցիաների էքստրեմումները.

$$+ 1) z = x^3 + y^3 - 3xy;$$

$$2) z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y;$$

$$+ 3) z = x^2 + y^2 - 2x^2 + 4xy - 2y^2;$$

$$4) z = x^3 y^2 (6 - x - y);$$

$$75) z = \frac{1}{2}xy + (47 - x - y)\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{4}\right):$$

40. Գտնել $z = xy$ ֆունկցիայի էքստրեմումը, եթե x -ը և y -ը բավարարում են $2x + 3y - 5 = 0$ կապի հավասարմանը:

Լուծում. նախ նշենք, որ եթե կապի հավասարումից հնարավոր է y -ը արտահայտել x -ով, ապա պայմանական էքստրեմումի հարցը լուծվում է ավելի պարզ ձևով, առանց Լագրանժի ֆունկցիայի: Տվյալ դեպքում ունենք.

$$2x + 3y - 5 = 0 \Rightarrow y = \frac{5 - 2x}{3} \Rightarrow z = xy = \frac{5x - 2x^2}{3} :$$

Գտնում ենք այս ֆունկցիայի սովորական էքստրեմումները.

$$z' = \frac{5 - 4x}{3} = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{4}; \quad z'' = -\frac{4}{3} < 0;$$

ուրեմն $x = \frac{5}{4}$ կետը $z = \frac{5x - 2x^2}{3}$ ֆունկցիայի մաքսիմումի կետ

է: $x = \frac{5}{4}$ արժեքի համար կապի հավասարումից կստանանք $y = \frac{5}{6}$

և այսպիսով $\left(\frac{5}{4}; \frac{5}{6}\right)$ կետը $z = xy$ ֆունկցիայի պայմանական մաքսիմումի կետն է:

Այժմ լուծենք խնդիրը Լագրանժի ֆունկցիայի միջոցով: Ունենք՝

$$F = xy + \lambda(2x + 3y - 5) \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} = y + 2\lambda, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = x + 3\lambda :$$

Կազմում ենք էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանը.

$$\begin{cases} y + 2\lambda = 0 \\ x + 3\lambda = 0 \\ 2x + 3y - 5 = 0 \end{cases}$$

Լուծելով համակարգը, ստանում ենք.

$$\lambda = -\frac{5}{12} ; \quad x = \frac{5}{4} ; \quad y = \frac{5}{6} :$$

Նորից ստացվեց նույն $\left(\frac{5}{4}; \frac{5}{6}\right)$ մաքսիմումի կետը:

41. Գտնել հետևյալ ֆունկցիաների պայմանական էքստրեմումները.

$$+1) z = x^2 + y^2, \text{ եթե } \frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1 ;$$

$$+2) z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \text{ եթե } x + y = 2 ;$$

$$+3) z = 2x + y, \text{ եթե } x^2 + y^2 = 1 :$$

ԳԼՈՒԽ IX

Ինտեգրալներ

§1. Անորոշ ինտեգրալ

1. Նախնական ֆունկցիա և անորոշ ինտեգրալ:
Ինտեգրման հիմնական բանաձևերը

$F(x)$ ֆունկցիան կոչվում է $y = f(x)$ ֆունկցիայի նախնական ֆունկցիա X տիրույթում, եթե

$$F'(x) = f(x) \text{ կամ } dF(x) = f(x)dx, \quad x \in X :$$

Ամեն մի անընդհատ $f(x)$ ֆունկցիա ունի անվերջ բազմությամբ տարբեր նախնական ֆունկցիաներ, որոնք իրարից տարբերվում են առնվազն հաստատուն գումարելիով:

Եթե $F(x)$ -ը $f(x)$ -ի նախնական է, ապա $F(x) + C$ ֆունկցիան, որտեղ C -ն կամայական հաստատուն է, նորից $f(x)$ -ի նախնական է, քանի որ

$$[F(x) + C]' = F'(x) = f(x) :$$

$f(x)$ ֆունկցիայի բոլոր նախնականների համախմբությունը կոչվում է $f(x)$ ֆունկցիայի անորոշ ինտեգրալ և նշանակվում է հետևյալ սիմվոլով $\int f(x)dx$: Այսպիսով, սահմանման համաձայն

$$\int f(x)dx = F(x) + C \Leftrightarrow F'(x) = f(x) :$$

Անորոշ ինտեգրալի հատկությունները.

$$\text{I. } \left[\int f(x)dx \right]' = f(x) \quad \text{կամ} \quad d \int f(x)dx = f(x)dx :$$

$$\text{II. } \int F'(x)dx = F(x) + C \quad \text{կամ} \quad \int dF(x) = F(x) + C :$$

$$\text{III. } \int af(x)dx = a \int f(x)dx, \text{ որտեղ } a - \text{ն հաստատուն է (} a \neq 0 \text{):}$$

$$\text{IV. } \int [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx :$$

Ինտեգրման հիմնական բանաձևերը.

$$1. \int u^{\alpha} du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1 :$$

$$1'. \int 1 \cdot dx = \int dx = x + C :$$

$$2. \int u^{-1} du = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C :$$

$$3. \int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C :$$

$$3'. \int e^u du = e^u + C :$$

$$4. \int \sin u du = -\cos u + C :$$

$$5. \int \cos u du = \sin u + C :$$

$$6. \int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tgu} + C :$$

$$7. \int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctgu} + C :$$

$$8. \int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C = -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{u}{a} + C :$$

$$9. \int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C :$$

$$10. \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C = -\arccos \frac{u}{a} + C :$$

$$11. \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 + a} \right| + C :$$

Այս բանաձևերում a -ն հաստատուն է, u -ն անկախ փոփոխական է կամ դիֆերենցելի ֆունկցիա անկախ փոփոխականից, իսկ C -ն կամայական հաստատուն է:

42. Հաշվել հետևյալ ինտեգրալը $\int (4x^3 - 5x^2 + 9x - 2)dx$:

Լուծում. օգտվելով անորոշ ինտեգրալի IV և III հատկություններից և (1.) բանաձևից, կստանանք.

$$\begin{aligned}\int (4x^3 - 5x^2 + 9x - 2)dx &= 4 \int x^3 dx - 5 \int x^2 dx + 9 \int x dx - 2 \int dx = \\ &= 4 \frac{x^4}{4} - 5 \frac{x^3}{3} + 9 \frac{x^2}{2} - 2x + C = x^4 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 2x + C :\end{aligned}$$

43. Հաշվել հետևյալ ինտեգրալները.

1) $\int 5^x dx$; 2) $\int \frac{dt}{t^2 + 7}$; 3) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 3}}$:

Լուծում.

1) $\int 5^x dx = \frac{5^x}{\ln 5} + C$, համաձայն (3.) բանաձևի;

2) $\int \frac{dt}{t^2 + 7} = \frac{1}{\sqrt{7}} \arctg \frac{t}{\sqrt{7}} + C$, համաձայն (8.) բանաձևի;

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 3}} = \ln|x + \sqrt{x^2 - 3}| + C$, համաձայն (11.) բանաձևի: —

Ինտեգրման ճշտությունը ստուգվում է դիֆերենցման (ածանցման) միջոցով, քանի որ ինտեգրումը և դիֆերենցումը հակադարձ գործողություններ են:

44. Գտնել հետևյալ ինտեգրալները և արդյունքները ստուգել դիֆերենցելով.

✱ 1) $\int \frac{dx}{x^4}$; ✱ 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{2 - x^2}}$; ✱ 3) $\int \sqrt{y + 5} dy$:

Լուծում.

$$1) \int \frac{dx}{x^4} = \int x^{-4} dx = \frac{x^{-3}}{-3} + C = C - \frac{1}{3x^3} :$$

Ստուգում. գտնում ենք ստացված ֆունկցիայի դիֆերենցիալը և համոզվում ենք, որ այն հավասար է ընդհանուր ածականին.

$$d\left(C - \frac{1}{x^3}\right) = -\frac{1}{3}(x^{-3})' dx = -\frac{1}{3}(-3)x^{-4} dx = x^{-4} dx = \frac{dx}{x^4} :$$

$$2) \int \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{\sqrt{2}} + C :$$

Ստուգում.

$$d\left(\arcsin \frac{x}{\sqrt{2}} + C\right) = \left(\arcsin \frac{x}{\sqrt{2}}\right)' dx = \frac{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}} dx = \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}} ;$$

$$3) \int \sqrt{y+5} dy = \int (y+5)^{1/2} d(y+5) = \frac{(y+5)^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2}{3}(y+5)^{3/2} + C :$$

Ստուգում.

$$d\left[\frac{2}{3}(y+5)^{3/2} + C\right] = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}(y+5)^{1/2} dy = \sqrt{y+5} dy$$

Նշենք ինտեգրալ հաշվելու ևս մի կանոն.

$$\text{եթե } \int f(t) dt = F(t) + C, \text{ ապա } \int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C :$$

Բերենք այս կանոնը կիրառելու մի քանի օրինակներ:

45. Հաշվել հետևյալ ինտեգրալները.

$$1) \int \frac{dx}{3x+7}; \quad 2) \int \sin 5x \, dx; \quad 3) \int e^{4x-3} \, dx:$$

Լուծում.

$$1) \int \frac{dx}{3x+7} = \frac{1}{3} \ln|3x+7| + C;$$

$$2) \int \sin 5x \, dx = -\frac{1}{5} \cos 5x + C;$$

$$3) \int e^{4x-3} \, dx = \frac{1}{4} e^{4x-3} + C:$$

Հաճախ ինտեգրման բանաձևերը կիրառելու համար նախ հարկ է կատարել այսպես կոչված արտադրիչը դիֆերենցիալի նշանի տակ տանելու գործողությունը. Անորոշ ինտեգրալի առաջին հատկությունը

$$f(x) \, dx = d\left(\int f(x) \, dx\right)$$

ցույց է տալիս, որ այդ գործողությունը կատարելիս դիֆերենցիալի նշանի տակ ստացվում է $f(x)$ -ի նախնականը: Օրինակ

$$dx = d(x + c), \quad adx = d(ax + b), \quad e^x dx = de^x,$$

$$2x dx = dx^2, \quad \cos x \, dx = d \sin x \quad \text{և այլն:}$$

46. Հաշվել հետևյալ ինտեգրալները.

$$1) \int \frac{3x^2 dx}{x^3 + 5}; \quad 2) \int x^2 (3 - 4x^3)^6 dx; \quad 3) \int \frac{5 \sin x dx}{\sqrt{4 + 3 \cos x}}:$$

Լուծում.

1) $3x^2$ արտադրիչը տանենք դիֆերենցիալի նշանի տակ
 $3x^2 dx = dx^3 = d(x^3 + 5)$: Հետևաբար, (2.) բանաձևի շնորհիվ

կատանանք.

$$\int \frac{3x^2 dx}{x^3 + 5} = \int \frac{d(x^3 + 5)}{x^3 + 5} = \ln|x^3 + 5| + C ;$$

$$\begin{aligned} 2) \int x^2(3 - 4x^3)^6 dx &= -\frac{1}{12} \int (3 - 4x^3)^6 d(3 - 4x^3) = \\ &= -\frac{(3 - 4x^3)^7}{84} + C ; \end{aligned}$$

3) ունենք՝ $\sin x \, dx = -d \cos x = -\frac{1}{3} d(4 + 3 \cos x)$: Այժմ կիրառելով (1.) բանաձևը, կատանանք.

$$\int \frac{5 \sin x dx}{\sqrt{4 + 3 \cos x}} = -\frac{5}{3} \int \frac{d(4 + 3 \cos x)}{\sqrt{4 + 3 \cos x}} = -\frac{10}{3} \sqrt{4 + 3 \cos x} + C ;$$

Կատարել ինտեգրումը:

✦ 47. $\int \frac{dx}{x^3} ;$

✦ 48. $\int (ax^2 + bx + c) dx ;$

✦ 49. $\int x^3(3x^2 - 5x + 2) dx ;$

✦ 50. $\int (3 + 2x^5)^2 dx ;$

✦ 51. $\int x^5 \sqrt{x^2} dx ;$

✦ 52. $\int \sqrt[3]{x}(1 - \sqrt{x}) dx ;$

✦ 53. $\int \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \sqrt[4]{x^3} \right) dx ;$

✦ 54. $\int \sqrt{5x} \, dx ;$

✦ 55. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x}} ;$

✦ 56. $\int \frac{5x^2 + 4x^2 - 3}{x^2} dx ;$

✦ 57. $\int (5x + 2)^4 dx ;$

✦ 58. $\int \frac{8dx}{(3x + 2)^7} ;$

✦ 59. $\int \sqrt{2 + 5x} \, dx ;$ ✦ 60. $\int \frac{dx}{\sqrt{2 - 3x}} ;$ ✦ 61. $\int \frac{5x^2 dx}{(x^3 + 2)^2} ;$

✦ 62. $\int x^3(4 - 5x^4)^5 dx ;$

✦ 63. $\int x^2 \sqrt{4x^3 + 3} \, dx ;$

$$\begin{aligned}
 & \text{†64. } \int 5x\sqrt{7x^2+8} \, dx; & \text{†65. } \int \frac{7x \, dx}{\sqrt[4]{3x^2-4}}; \\
 & \text{†66. } \int \sqrt[3]{x} \left(3x^{\frac{4}{3}} + 5 \right)^{\frac{7}{3}} \, dx; & \text{†67. } \int \frac{dx}{3x}; & \text{†68. } \int \frac{dx}{2+5x}; \\
 & \text{†69. } \int \frac{3x \, dx}{5-x^2}; & \text{†70. } \int \frac{2x^2 \, dx}{4x^3+5}; & \text{†71. } \int \frac{e^x \, dx}{5+e^x}; \\
 & \text{†72. } \int \frac{3e^{2x} \, dx}{4+5e^{2x}}; & \text{†73. } \int \frac{(4+\ln x)^3}{x} \, dx; & \text{†74. } \int \sin^5 x \cos x \, dx; \\
 & \text{†75. } \int \frac{5 \sin x \, dx}{3+2 \cos x}; & \text{†76. } \int \frac{e^x + \cos x}{e^x + \sin x} \, dx; & \text{†77. } \int \frac{3 \cos 2x \, dx}{4-3 \sin 2x}; \\
 & \text{†78. } \int \frac{dx}{(2-3 \operatorname{tg} x) \cos^2 x}; & \text{†79. } \int \frac{\operatorname{tg} 5x \, dx}{\cos^2 5x}; \\
 & \text{†80. } \int \frac{dx}{(4+\operatorname{tg} 3x) \cos^2 3x}; & \text{81. } \int \frac{4 \cos x \, dx}{\sqrt{5-3 \sin x}}; & \text{82. } \int \frac{dx}{\sin x}.
 \end{aligned}$$

Կատարել ցուցադրված ֆունկցիաների ինտեգրում.

$$\begin{aligned}
 & \text{†83. } \int 5^x e^x \, dx; & \text{†84. } \int 5e^{3x} \, dx; & \text{†85. } \int 3e^{\frac{x}{2}} \, dx; \\
 & \text{†86. } \int \frac{dx}{e^{2x}}; & \text{†87. } \int (e^{2x} + 3x) \, dx; & \text{†88. } \int \left(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} \right) \, dx; \\
 & \text{†89. } \int \left(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} \right)^2 \, dx; & \text{†90. } \int \sqrt[3]{e^x} \, dx; & \text{91. } \int (e^x - e^{-x})^3 \, dx; \\
 & \text{†92. } \int e^{\cos x} \sin x \, dx; & \text{†93. } \int e^{\sin x} \cos x \, dx; & \text{†94. } \int x^2 e^{x^3} \, dx; \\
 & \text{†95. } \int \frac{e^{\sqrt{x}} \, dx}{\sqrt{x}}; & \text{†96. } \int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \, dx; & \text{†97. } \int \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{x^3} \, dx; \\
 & \text{†98. } \int \frac{4x^3}{e^{x^4}} \, dx; & \text{†99. } \int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3} \, dx; & \text{†100. } \int \frac{e^{4x}+3}{e^{4x}} \, dx;
 \end{aligned}$$

$$\nabla 101. \int \frac{5e^{\lg 3x}}{\cos^2 3x} dx; \quad \nabla 102. \int \frac{e^{\cos x} \sin x}{e^{\cos x} + 4} dx; \quad \nabla 103. \int \frac{5 \cdot 3^{\ln x}}{x} dx;$$

2. Ինտեգրում տեղադրման կամ փոփոխականի փոխարինման եղանակով

Ինտեգրման կարևորագույն մեթոդներից ճեկը փոփոխականի փոխարինման մեթոդն է: Այն կայանում է հետևյալում. եթե $\int f(x)dx = F(x) + C$, ապա

$$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C:$$

Այստեղ ենթադրվում է $f(\varphi(t))$ ֆունկցիայի գոյությունը, $f(x)$, $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$ ֆունկցիաների անընդհատությունը:

φ ֆունկցիան աշխատում ենք ընտրել այնպես, որ $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ ֆունկցիան ինտեգրելու համար ավելի հարմար լինի, քան $f(x)$ -ը:

104. Հաշվել $\int x\sqrt{x-1} dx$ ինտեգրալը:

Լուծում. հարմար է վերցնել $t = \sqrt{x-1}$, որտեղից $x = t^2 + 1$, $dx = 2t dt$, հետևաբար

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{x-1} dx &= \int (t^2 + 1)t \cdot 2tdt = 2 \int (t^4 + t^2)dt = \frac{2}{5}t^5 + \frac{2}{3}t^3 + C = \\ &= \frac{2}{5}(x-1)^{5/3} + \frac{2}{3}(x-1)^{3/2} + C: \end{aligned}$$

105. Հաշվել $\int x^3 e^{x^4} dx$ ինտեգրալը:

Լուծում. նշանակենք $u = x^4 \Rightarrow du = 4x^3 dx \Rightarrow x^3 dx = \frac{1}{4} du$, այդ պատճառով

$$\int x^3 e^{x^4} dx = \frac{1}{4} \int e^u du = \frac{1}{4} e^u + C = \frac{1}{4} e^{x^4} + C:$$

Նշենք եռանկյունաչափական տեղադրումների որոշ դասեր.

ա) եթե ինտեգրալը պարունակում է $\sqrt{a^2 - x^2}$ արտահայտությունը, ապա հարմար է տեղադրել $x = a \sin t$ կամ $x = a \cos t$, այդ դեպքում

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} = a\sqrt{1 - \sin^2 t} = a\sqrt{\cos^2 t} = a \cos t :$$

բ) եթե ինտեգրալը պարունակում է $\sqrt{x^2 - a^2}$ արտահայտությունը, ապա հարմար է տեղադրել $x = a \sec t$, որտեղից.

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2 \sec^2 t - a^2} = a\sqrt{\sec^2 t - 1} = a \operatorname{tg} t :$$

գ) եթե ինտեգրալը պարունակում է $\sqrt{x^2 + a^2}$ արտահայտությունը, ապա հարմար է տեղադրել $x = a \operatorname{tg} t$ կամ $x = a \operatorname{ctg} t$, որտեղից.

$$\sqrt{x^2 + a^2} = \sqrt{a^2 \operatorname{tg}^2 t + a^2} = a\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t} = a \sec t :$$

106. Ինտեգրել, կատարելով նշված տեղադրումները.

$$+1) \int \frac{x^2 dx}{x^6 - 6x^3 + 13}, \quad x^3 - 3 = t ;$$

$$+2) \int \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x} dx, \quad 1 + \ln x = t ;$$

$$+3) \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 2}}, \quad x = \frac{1}{t} ;$$

$$+4) \int \frac{x dx}{\sqrt{x+1}}, \quad t = \sqrt{x+1} ;$$

$$+5) \int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}, \quad t = \sin x :$$

107. Հարմար տեղադրում կատարելով, հաշվել հետևյալ ինտեգրալները.

- 1) $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}} dx$; 2) $\int \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$;
- 3) $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}} dx$; 4) $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}}$;
- 5) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$; 6) $\int \frac{\sin^3 x dx}{\sqrt{\cos x}}$;
- 7) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$; 8) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$:

3. Մասերով ինտեգրման եղանակ

Եթե $u = u(x)$ -ը և $v = v(x)$ -ը դիֆերենցելի ֆունկցիաներ են, ապա նրանց արտադրյալի համար ունենք՝ $d(uv) = u dv + v du$, որն ինտեգրելով, կստանանք

$$\int u dv = uv - \int v du :$$

Այս բանաձևը կոչվում է մասերով ինտեգրման բանաձև: Տրված ինտեգրալի նկատմամբ այս եղանակը կիրառելու համար պետք է կարողանալ ընդհանուր առաջադրությունը տրոհել երկու արտադրիչների, որոնցից մեկը նշանակել u -ով, մյուսը՝ dv -ով:

Երբեմն կարիք է լինում մասերով ինտեգրման բանաձևը կիրառել հաջորդաբար մի քանի անգամ:

Ամենից բեղմնավոր կիրառումներն այն դեպքերում են, երբ ընդհանուր առաջադրության մեջ որպես բազմապատկիչներ կան ցուցալին, լոգարիթմական, եռանկյունաչափական և հակադարձ եռանկյունաչափական ֆունկցիաներ:

108. Հաշվել հետևյալ ինտեգրալները.

- 1) $\int x \sin 5x dx$; 2) $\int x^2 e^{5x} dx$; 3) $\int x^4 \ln x dx$; 4) $\int x \arctg x dx$:

Լուծում.

1) նշանակենք $u = x$, $dv = \sin 5x dx$, կունենանք.

$$du = dx, v = \int \sin 5x dx = \frac{1}{5} \int x \sin 5x d(5x) = -\frac{\cos 5x}{5} ;$$

Տեղադրենք $\int u dv = uv - \int v du$ բանաձևում

$$\begin{aligned} \int x \sin 5x dx &= -\frac{x}{5} \cos 5x + \frac{1}{5} \int \cos 5x dx = \\ &= -\frac{x}{5} \cos 5x + \frac{1}{25} \sin 5x + C ; \end{aligned}$$

2) նշանակենք $u = x^2$, $dv = e^{5x} dx$, կունենանք. $du = 2x dx$,

$$v = \int e^{5x} dx = \frac{1}{5} e^{5x}, \text{ ուրեմն}$$

$$\int x^2 e^{5x} dx = \frac{1}{5} x^2 e^{5x} - \frac{2}{5} \int x e^{5x} dx :$$

Ինտեգրումը շարունակենք, երկրորդ անգամ կիրառելով մասերով ինտեգրման եղանակը: Նշանակենք $u = x$, $dv = e^{5x} dx$, կունենանք

$$du = dx, v = \int e^{5x} dx = \frac{1}{5} e^{5x}, \text{ հետևաբար.}$$

$$\int x e^{5x} dx = \frac{1}{5} x e^{5x} - \frac{1}{5} \int e^{5x} dx = \frac{1}{5} x e^{5x} - \frac{1}{25} e^{5x} + C :$$

Վերջնականապես կստանանք

$$\int x^2 e^{5x} dx = \frac{1}{5} x^2 e^{5x} - \frac{2x e^{5x}}{25} + \frac{2 e^{5x}}{125} + C ;$$

3) նշանակենք $u = \ln x$, $dv = x^4 dx$, կունենանք $du = \frac{dx}{x}$, $v = \frac{x^5}{5}$

տեղադրենք $\int u dv = uv - \int v du$ բանաձևում.

$$\int x^4 \ln x dx = \frac{x^5}{5} \ln x - \frac{1}{5} \int x^5 \frac{1}{x} dx = \frac{x^5}{5} \ln x - \frac{x^5}{25} + C ;$$

4) նշանակելով $u = \arctg x$, $dv = x dx$, կունենանք՝

$$du = \frac{dx}{1+x^2}, \quad v = \frac{x^2}{2} : \text{Այսպիսով՝}$$

$$\begin{aligned} \int x \arctg x dx &= \frac{x^2}{2} \arctg x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \frac{x^2}{2} \arctg x - \\ &- \frac{1}{2} \int \frac{(1+x^2)-1}{1+x^2} dx = \frac{x^2}{2} \arctg x - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \arctg x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \arctg x + C : \end{aligned}$$

Մասերով ինտեգրման եղանակով հաշվել հետևյալ ինտեգրալները.

- $\neq 109. \int x \cos x dx ; \neq 110. \int x \sin 3x dx ; \quad 111. \int x \cos 2x dx ;$
 $112. \int x^2 \cos 3x dx ; \quad 113. \int x \sin^2 x dx ; \quad 114. \int 3x e^{3x} dx ;$
 $115. \int 6x e^{2x} dx ; \quad 116. \int (5x-2) e^{3x} dx ; \neq 117. \int (4x-3) e^{-2x} dx ;$
 $118. \int \arcsin x dx ; \neq 119. \int \arccos x dx ; \quad 120. \int \arctg x dx ;$
 $\neq 121. \int \operatorname{arctg} x dx ; \quad 122. \int x \arcsin x dx ; \quad 123. \int x \arccos x dx ;$
 $124. \int x \arctg x dx ; \quad 125. \int \ln x dx ; \quad \neq 126. \int x^3 \ln x dx ;$
 $127. \int \frac{\ln x}{x^2} dx ; \quad 128. \int e^x \sin x dx ; \quad 129. \int e^{2x} \sin 3x dx ;$
 $\neq 130. \int e^x \cos x dx ; \quad 131. \int e^{3x} \cos 2x dx ; \quad 132. \int e^{-2x} \sin 5x dx ;$
 $\neq 133. \int e^{-3x} \cos 4x dx :$

4. Ուղղանկյուն ֆունկցիաների ինտեգրումը

Եթե $P_n(x)$ -ը n -րդ կարգի բազմանդամ է, իսկ $Q_m(x)$ -ը m -րդ կարգի, ապա

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

կոտորակը կոչվում է ուղղանկյուն ֆունկցիա: Եթե $n \geq m$, ապա $R(x)$ -ը կոչվում է անկանոն ուղղանկյուն կոտորակ, իսկ $n < m$ դեպքում կանոնավոր: Անկանոն ուղղանկյուն կոտորակից կարելի է բաժանման միջոցով անջատել ամբողջ մասը՝

$$R(x) = M(x) + \frac{r_k(x)}{Q_m(x)},$$

որտեղ $M(x)$ -ը ամբողջ բազմանդամ է, հետևաբար նրա ինտեգրումը դժվարություն չի ներկայացնում, իսկ $r_k(x)$ -ը ($k < m$) մնացորդն է:

Այսպիսով, ցանկացած ուղղանկյուն ֆունկցիայի ինտեգրումը հանգում է կանոնավոր ուղղանկյուն կոտորակի ինտեգրմանը, որն, իր հերթին, բերվում է պարզ կոտորակների ինտեգրմանը:

Պարզ (տարրական) կոտորակները ունեն հետևյալ տեսքը

$$\text{I. } \frac{A}{(x-a)^m}, \quad m \in \mathbb{N}; \quad \text{II. } \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

որտեղ $\frac{p^2}{4} - q < 0$, այսինքն $x^2 + px + q$ քառակուսի եռանդամը չունի իրական արմատներ:

Բոլոր դեպքերում էլ ենթադրվում է, որ A , B , p , q , և a -ն իրական թվեր են:

Առաջին տիպի պարզ կոտորակները ինտեգրվում են (1.) և (2.) բանաձևերով.

$$\text{ա) } m = 1 \Rightarrow \int \frac{A dx}{x-a} = A \ln|x-a| + C,$$

$$\text{բ) } m > 1 \Rightarrow \int \frac{A dx}{(x-a)^m} = -\frac{A}{m-1} \cdot \frac{1}{(x-a)^{m-1}} + C:$$

Ցույց տանք **II** տիպի պարզ կոտորակի ինտեգրման եղանակը $n = 1$ դեպքում: Ունենք.

$$\int \frac{Ax + B}{x^2 + px + q} dx, \quad \frac{p^2}{4} - q < 0:$$

Համարիչում անջատենք հայտարարի եռանդամի ածանցյալը.

$$Ax + B = (2x + p) \frac{A}{2} - \frac{Ap}{2} + B:$$

Այսպիսով.

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax + B}{x^2 + px + q} dx &= \frac{A}{2} \int \frac{2x + p}{x^2 + px + q} dx + \left(B - \frac{Ap}{2} \right) \int \frac{dx}{x^2 + px + q} = \\ &= \frac{A}{2} \int \frac{d(x^2 + px + q)}{x^2 + px + q} + \left(B - \frac{Ap}{2} \right) \int \frac{d\left(x + \frac{p}{2}\right)}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q - p^2}{4}} = \\ &= \frac{A}{2} \ln(x^2 + px + q) + \frac{2B - Ap}{\sqrt{4q - p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + C: \end{aligned}$$

Նշենք, որ $n > 1$ դեպքում երկրորդ տիպի պարզ կոտորակը ինտեգրվում է անդրադարձ բանաձևի օգնությամբ:

134. Հաշվել հետևյալ ինտեգրալները.

$$\begin{aligned} 1) \int \frac{3x+7}{4-x} dx; \quad 2) \int \frac{dx}{x^2+6x+25}; \quad 3) \int \frac{dx}{2x^2-2x+3}; \\ 4) \int \frac{3x-1}{x^2-4x+8} dx; \quad 5) \int \frac{dx}{(x^2+2x+10)^2}; \end{aligned}$$

Լուծում.

1) ընդհանուրապես ֆունկցիան անկանոն ռացիոնալ կոտորակ է, անջատելով ամբողջ մասը, կստանանք.

$$\frac{3x+7}{4-x} = \frac{-3(4-x)+19}{4-x} = -3 + \frac{19}{4-x};$$

Այսպիսով՝

$$\int \frac{3x+7}{4-x} dx = \int \left(-3 + \frac{19}{4-x} \right) dx = -3x - 19 \ln|4-x| + C ;$$

2) հայտարարում անջատում ենք երկանդամի լրիվ քառակուսին.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2+6x+25} &= \int \frac{dx}{(x+3)^2+16} = \int \frac{d(x+3)}{(x+3)^2+16} = \\ &= \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{x+3}{4} + C ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \int \frac{dx}{2x^2-2x+3} &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2-x+\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\right)} = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} + C = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{5}} + C ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \int \frac{3x-1}{x^2-4x+8} dx &= \int \frac{\frac{3}{2}(2x-4)-1+6}{x^2-4x+8} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x-4}{x^2-4x+8} dx + \\ &+ 5 \int \frac{dx}{x^2-4x+8} = \frac{3}{2} \ln(x^2-4x+8) + 5 \int \frac{dx}{(x-2)^2+2^2} = \\ &= \frac{3}{2} \ln(x^2-4x+8) + \frac{5}{2} \operatorname{arctg} \frac{x-2}{2} + C ; \end{aligned}$$

5) նշանակելով $x+1=t$, կստանանք.

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 10)^2} &= \int \frac{d(x+1)}{((x+1)^2 + 9)^2} = \int \frac{dt}{(t^2 + 9)^2} = \\
&= \frac{1}{9} \int \frac{(t^2 + 9) - t^2}{(t^2 + 9)^2} dt = \frac{1}{9} \int \frac{dt}{t^2 + 9} - \frac{1}{9} \int \frac{t^2 dt}{(t^2 + 9)^2} = \\
&= \frac{1}{27} \operatorname{arctg} \frac{t}{3} - \frac{1}{18} \int \frac{td(t^2 + 9)}{(t^2 + 9)^2} = \frac{1}{27} \operatorname{arctg} \frac{t}{3} + \\
&+ \frac{1}{18} \int td\left(\frac{1}{t^2 + 9}\right) = \frac{1}{27} \operatorname{arctg} \frac{t}{3} + \frac{1}{18} \left(\frac{t}{t^2 + 9} - \int \frac{dt}{t^2 + 9} \right) = \\
&= \frac{1}{27} \operatorname{arctg} \frac{t}{3} + \frac{t}{18(t^2 + 9)} - \frac{1}{54} \operatorname{arctg} \frac{t}{3} + C = \\
&= \frac{1}{18} \cdot \frac{x+1}{x^2 + 2x + 10} + \frac{1}{54} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{3} + C :
\end{aligned}$$

135. Հաշվել հետևյալ ինտեգրալները.

$$1) \int \frac{5x^3 + 2}{x^3 - 5x^2 + 4x} dx; \quad 2) \int \frac{x^3 + x + 1}{x(x^2 + 1)} dx :$$

Լուծում.

1) ընդհանուրապես ֆունկցիան անկանոն կոտորակ է, ամբողջ մասը անջատենք բազմանդամների բաժանման միջոցով:

$$\begin{array}{r|l}
\frac{5x^3 + 2}{x^3 - 5x^2 + 4x} & \frac{x^3 - 5x^2 + 4x}{5} \\
\hline
\frac{5x^3 - 25x^2 + 20x}{25x^2 - 20x + 2} & 5
\end{array}$$

Հետևաբար՝
$$\frac{5x^3 + 2}{x^3 - 5x^2 + 4x} = 5 + \frac{25x^2 - 20x + 2}{x^3 - 5x^2 + 4x} .$$

$$\int \frac{5x^3 + 2}{x^3 - 5x^2 + 4x} dx = \int 5dx + \int \frac{25x^2 - 20x + 2}{x^3 - 5x^2 + 4x} dx : \quad (*)$$

Չաշվենք $\int \frac{25x^2 - 20x + 2}{x^3 - 5x^2 + 4x} dx$ ինտեգրալը: Ընդհանտեգրալ կանոնավոր ռացիոնալ ֆունկցիայի վերլուծումը պարզ կոտորակների գումարի փոխարենը հետևյալ նույնության տեսքով.

$$\frac{25x^2 - 20x + 2}{x^3 - 5x^2 + 4x} = \frac{25x^2 - 20x + 2}{x(x-1)(x-4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-4} :$$

Աջ կողմում գումարելով կոտորակները և հավասարեցնելով աջ և ձախ մասերի համարիչները, կստանանք

$$(A + B + C)x^2 + (-5A - 4B - C)x + 4A \equiv 25x^2 - 20x + 2 :$$

Հավասարեցնենք x -ի միևնույն աստիճանների գործակիցները,

$$\begin{cases} A + B + C = 25 \\ -5A - 4B - C = -20 : \\ 4A = 2 \end{cases}$$

Լուծելով համակարգը կստանանք $A = \frac{1}{2}$; $B = -\frac{7}{3}$; $C = \frac{161}{6}$

Չետևաբար.

$$\begin{aligned} \int \frac{25x^2 - 20x + 2}{x^3 - 5x^2 + 4x} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x} - \frac{7}{3} \int \frac{dx}{x-1} + \frac{161}{6} \int \frac{dx}{x-4} = \\ &= \frac{1}{2} \ln|x| - \frac{7}{3} \ln|x-1| + \frac{161}{6} \ln|x-4| + C , \end{aligned}$$

տեղադրելով այս ինտեգրալի արժեքը (*)-ի մեջ, կստանանք.

$$\int \frac{5x^3 + 2}{x^3 - 5x^2 + 4x} dx = 5x + \frac{1}{2} \ln|x| - \frac{7}{3} \ln|x-1| + \frac{161}{6} \ln|x-4| + C :$$

2) նախ անջատենք ընդհանտեգրալ ռացիոնալ անկանոն կոտորակի ամբողջ մասը.

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3 + x + 1}{x(x^2 + 1)} dx &= \int \left(1 + \frac{1}{x(x^2 + 1)} \right) dx = \int dx + \int \frac{dx}{x(x^2 + 1)} = \\ &= x + \int \frac{1}{x(x^2 + 1)} dx : \quad (**)\end{aligned}$$

Հաշվենք ստացված ինտեգրալը: Ընդհանուրապես կանոնավոր ռացիոնալ ֆունկցիայի վերլուծումը պարզ կոտորակների փոխարենը հետևյալ նույնության տեսքով.

$$\frac{1}{x(x^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} :$$

Այս կողմում գումարելով կոտորակները և հավասարեցնելով աջ և ձախ մասերի համարիչները, կստանանք.

$$A(x^2 + 1) + x(Bx + C) \equiv 1 :$$

Հավասարեցնելով x -ի միևնույն աստիճանների գործակիցները կստանանք հավասարումների հետևյալ համակարգը.

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ C = 0 \\ A = 1 \end{cases}$$

Լուծելով համակարգը կստանանք՝ $A = 1$, $B = -1$, $C = 0$:
Հետևաբար.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x(x^2 + 1)} dx &= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{xdx}{x^2 + 1} = \ln|x| - \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = \\ &= \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C ,\end{aligned}$$

ստեղծարարելով $(**)$ -ի մեջ, կստանանք՝

$$\int \frac{x^3 + x + 1}{x(x^2 + 1)} dx = x + \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C = x + \ln \left| \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right| + C :$$

Հաշվել հետևյալ ինտեգրալները.

136. $\int \frac{dx}{x^2 - 2x + 2}$; 137. $\int \frac{dx}{x^2 + 6x + 25}$; 138. $\int \frac{dx}{x^2 - 8x + 1}$;
 139. $\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 13}$; 140. $\int \frac{dx}{9x^2 - 6x - 8}$; 141. $\int \frac{dx}{4x^2 - 4x + 17}$;
 142. $\int \frac{dx}{25x^2 + 10x + 37}$; 143. $\int \frac{xdx}{x^4 + 4x^2 - 5}$;
 144. $\int \frac{xdx}{x^4 + 6x^2 + 25}$; 145. $\int \frac{dx}{(x+1)(x-2)(x+3)}$;
 146. $\int \frac{dx}{x(x^2 + 1)}$; 147. $\int \frac{dx}{x^4 - x^2}$; 148. $\int \frac{dx}{x^3 - x}$;
 149. $\int \frac{dx}{x^3 - 9x}$; 150. $\int \frac{dx}{x^4 + x^2}$; 151. $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$;
 152. $\int \frac{dx}{x(x+1)(x+2)}$; 153. $\int \frac{dx}{(x-2)(x^2 + 1)}$;
 154. $\int \frac{x^2 - 3}{(x-1)(x-2)(x+3)} dx$; 155. $\int \frac{dx}{x(x-5)^2}$;
 156. $\int \frac{2x+3}{x^3 - x^2 + x - 1} dx$:

5. Եռանկյունաչափական ֆունկցիաների մի քանի դասերի ինտեգրումը

Եթե $R(u; v)$ -ն երկու փոփոխականի ռացիոնալ ֆունկցիա է, ապա $R(\sin x; \cos x)dx$ դիֆերենցիալի ինտեգրումը բերվում է ռացիոնալ ֆունկցիաների ինտեգրման $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ փոփոխականի փոխարինմամբ:

Եթե $R(u)$ -ն u -ի ռացիոնալ ֆունկցիա է, ապա $R(\sin x)\cos x$ կամ $R(\cos x)\sin x$ ֆունկցիաների ինտեգրումը բերվում է ռացիոնալ

Ֆունկցիաների ինտեգրման ավելի պարզ $\sin x = t$ կամ $\cos x = t$ փոփոխականի փոխարինմամբ:

157. Հաշվել հետևյալ ինտեգրալը. $\int \frac{dx}{4 \sin x + 3 \cos x + 5} :$

Լուծում. նշանակենք $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \Rightarrow x = 2 \arctg t, dx = \frac{2dt}{1+t^2},$

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Տեղադրելով տրված ինտեգրալի մեջ և կատարելով պարզ ձևափոխություններ, կստանանք

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{4 \sin x + 3 \cos x + 5} &= \int \frac{dt}{t^2 + 4t + 4} = \int \frac{dt}{(t+2)^2} = \\ &= -\frac{1}{t+2} + C = -\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2} + C : \end{aligned}$$

158. Հաշվել հետևյալ ինտեգրալը. $\int \frac{\sin x \cos x}{3 \sin^2 x + 4} dx :$

Լուծում. նշանակելով $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$, կստանանք

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin x \cos x}{3 \sin^2 x + 4} dx &= \int \frac{t dt}{3t^2 + 4} = \frac{1}{2} \int \frac{dt^2}{3t^2 + 4} = \frac{1}{6} \int \frac{d(3t^2 + 4)}{3t^2 + 4} = \\ &= \frac{1}{6} \ln(3t^2 + 4) + C = \frac{1}{6} \ln(3 \sin^2 x + 4) + C : \end{aligned}$$

$\int \sin ax \cos bxdx, \int \sin ax \sin bxdx, \int \cos ax \cos bxdx$ ինտեգրալները հաշվելիս օգտվում ենք եռանկյունաչափական ֆունկցիաների արտադրյալը գումարի վերածելու բանաձևերից.

$$\sin ax \cos bx = \frac{1}{2} [\sin(a+b)x + \sin(a-b)x],$$

$$\sin ax \sin bx = \frac{1}{2} [\cos(a-b)x - \cos(a+b)x],$$

$$\cos ax \cos bx = \frac{1}{2} [\cos(a-b)x + \cos(a+b)x]:$$

159. Հաշվել հետևյալ ինտեգրալը. $\int \sin 7x \sin 3x dx$:

Լուծում.

$$\begin{aligned} \int \sin 7x \sin 3x dx &= \frac{1}{2} \int (\cos 4x - \cos 10x) dx = \frac{1}{2} \int \cos 4x dx - \\ &- \frac{1}{2} \int \cos 10x dx = \frac{1}{8} \int \cos 4x d(4x) - \frac{1}{20} \int \cos 10x d(10x) = \\ &= \frac{1}{8} \sin 4x - \frac{1}{20} \sin 10x + C: \end{aligned}$$

Եռանկյունաչափական ֆունկցիաները ինտեգրելիս հաճախ կիրառում են նաև.

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} (1 - \cos 2x), \quad \cos^2 x = \frac{1}{2} (1 + \cos 2x),$$

բանաձևերը ինչպես նաև այլ պարզագույն ձևափոխություններ:

160. Հաշվել հետևյալ ինտեգրալները.

$$1) \int \sin^4 x dx : \quad 2) \int \cos^3 x \sin^4 x dx : \quad 3) \int \operatorname{tg}^4 x dx : \quad 4) \int \operatorname{ctg}^3 x dx :$$

Լուծում.

$$\begin{aligned} 1) \int \sin^4 x dx &= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{4} \left[\int dx - 2 \int \cos 2x dx + \right. \\ &+ \left. \int \cos^2 2x dx \right] = \frac{1}{4} \left[x - \sin 2x + \int \frac{1 + \cos 4x}{2} dx \right] = \end{aligned}$$

$$= \frac{\sin 4x}{16} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{3x}{8} + C ;$$

$$\begin{aligned} 2) \int \cos^3 x \sin^4 x \, dx &= \int \cos x \cos^2 x \sin^4 x \, dx = \\ &= \int (1 - \sin^2 x) \sin^4 x \, d(\sin x) = \int (\sin^4 x - \sin^6 x) d(\sin x) = \\ &= \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7} + C ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \int \operatorname{tg}^4 x \, dx &= \int \operatorname{tg}^2 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \int \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x} dx - \int \operatorname{tg}^2 x \, dx = \\ &= \int \operatorname{tg}^2 x \, d(\operatorname{tg} x) - \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x + x + C ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \int \operatorname{ctg}^3 x \, dx &= \int \operatorname{ctg} x \operatorname{ctg}^2 x \, dx = \int \operatorname{ctg} x \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) dx = \\ &= \int \frac{\operatorname{ctg} x}{\sin^2 x} dx - \int \operatorname{ctg} x \, dx = - \int \operatorname{ctg} x \, d(\operatorname{ctg} x) - \int \frac{\cos x \, dx}{\sin x} = \\ &= - \frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2} - \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = - \frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2} - \ln |\sin x| + C ; \end{aligned}$$

Կատարել ինտեգրում.

$$161. \int \sin 3x \, dx ; \quad 162. \int \sin \frac{x}{3} \, dx ; \quad 163. \int \cos 2x \, dx ;$$

$$164. \int \cos \frac{x}{5} \, dx ; \quad 165. \int \operatorname{tg} 5x \, dx ; \quad 166. \int \operatorname{ctg} \frac{x}{4} \, dx ;$$

$$167. \int \frac{dx}{\cos^2 5x} ; \quad 168. \int \frac{dx}{\sin^2 3x} ; \quad + 169. \int \frac{x \, dx}{\cos^2 (1 - x^2)}$$

170. $\int \frac{5x^2 dx}{\sin^2(4-x^3)}$; 171. $\int \frac{\cos \frac{1}{x} dx}{x^2}$; 172. $\int \frac{\sin \sqrt{5x}}{\sqrt{5x}} dx$;
173. $\int x^2 \operatorname{tg}(x^3) dx$; 174. $\int 5x^3 \operatorname{ctg}(x^4) dx$; 175. $\int e^{3x} \sin(e^{3x}) dx$;
176. $\int \sin^4 x \cos x dx$; 177. $\int (x^2 - \sin 3x) dx$;
178. $\int \frac{\sin 5x}{\sqrt{2 + \cos 5x}} dx$; 179. $\int \sin^3 \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} dx$;
180. $\int \sin 5x \cos 5x dx$; 181. $\int \sin 3x \cos 5x dx$;
182. $\int \sin 2x \cos 7x dx$; 183. $\int \sin 5x \sin 3x dx$;
184. $\int \sin 4x \sin 7x dx$; 185. $\int \cos 3x \cos 2x dx$;
186. $\int \cos 8x \cos 10x dx$; 187. $\int \sin^2 x dx$;
188. $\int \cos^2 x dx$; 189. $\int \sin^2 \frac{x}{3} dx$; 190. $\int \cos^2 \frac{x}{4} dx$;
191. $\int \sin^3 x dx$; 192. $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$; 193. $\int \sin^4 x \cos^3 x dx$;
194. $\int \sin^3 x \cos^4 x dx$; 195. $\int \sin^2 x \cos^5 x dx$; 196. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$;
197. $\int \cos^3 x dx$; 198. $\int \sin^2 2x \cos^2 2x dx$; 199. $\int \sin^4 x dx$;
200. $\int \cos^4 x dx$; 201. $\int \operatorname{tg}^2 x dx$; 202. $\int \operatorname{tg}^3 x dx$;
203. $\int \operatorname{ctg}^2 x dx$; 204. $\int \operatorname{ctg}^3 x dx$; 205. $\int \operatorname{tg}^4 x dx$;
206. $\int \operatorname{tg}^5 x dx$; 207. $\int \operatorname{ctg}^4 x dx$; 208. $\int \operatorname{ctg}^5 x dx$;

6. Պարզագույն իռացիոնալ ֆունկցիաների ինտեգրումը

Սովորաբար պարզ իռացիոնալ արտահայտությունների ինտեգրալները տարրական ձևափոխություններով կամ ինտեգրման տարբեր մեթոդներով բերվում են աղյուսակային ինտեգրալների: Նշենք իռացիոնալ արտահայտությունների ինտեգրման մի քանի եղանակներ:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} \quad \text{և} \quad \int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx \quad \text{ինտեգրալները}$$

հաշվվում են ճիշտ նույն ձևով ինչպես որ $N^{\circ} 134$. վարժության 3) և 4) ինտեգրալները:

209. Հաշվել հետևյալ ինտեգրալները.

$$\begin{aligned} 1) \int \frac{dx}{\sqrt{3+12x-4x^2}}; \quad 2) \int \frac{xdx}{\sqrt{x^4+8x^2+25}}; \\ 3) \int \frac{(3x+5)dx}{\sqrt{4x^2+3}}; \quad 4) \int \frac{(x-5)dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}; \end{aligned}$$

Լուծում.

1) հայտարարի եղանդամից անջատում ենք երկանդամի լրիվ քառակուսի՝ $3+12x-4x^2=12-(2x-3)^2$: Այժմ, (10.) բանաձևի շնորհիվ, կստանանք.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{3+12x-4x^2}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{12-(2x-3)^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{d(2x-3)}{\sqrt{12-(2x-3)^2}} = \\ &= \frac{1}{2} \arcsin \frac{2x-3}{2\sqrt{3}} + C; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \int \frac{xdx}{\sqrt{x^4+8x^2+25}} &= \int \frac{xdx}{\sqrt{(x^2+4)^2+9}} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+4)}{\sqrt{(x^2+4)^2+9}} = \\ &= \frac{1}{2} \ln |x^2+4+\sqrt{x^4+8x^2+25}| + C; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \int \frac{(3x+5)dx}{\sqrt{4x^2+3}} &= \frac{3}{8} \int \frac{8xdx}{\sqrt{4x^2+3}} + \int \frac{5dx}{\sqrt{4x^2+3}} = \\
 &= \frac{3}{8} \int \frac{d(4x^2+3)}{\sqrt{4x^2+3}} + \frac{5}{2} \int \frac{d(2x)}{\sqrt{4x^2+3}} = \\
 &= \frac{3}{8} \cdot 2\sqrt{4x^2+3} + \frac{5}{2} \ln|2x + \sqrt{4x^2+3}| + C ;
 \end{aligned}$$

4) պարզ ձևափոխություններով համարիչում առանձնացնում ենք հայտարարի եռանդամի ածանցյալը $2 - 2x$:

$$x - 5 = -\frac{1}{2}(-2x + 10) = -\frac{1}{2}(-2x + 2 + 8) = -\frac{1}{2}(2 - 2x) - 4 :$$

Այժմ ունենք ((1.) և (10.) բանաձևեր).

$$\begin{aligned}
 \int \frac{(x-5)dx}{\sqrt{3+2x-x^2}} &= \int \frac{-\frac{1}{2}(2-2x)-4}{\sqrt{3+2x-x^2}} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{(2-2x)dx}{\sqrt{3+2x-x^2}} - \\
 &- \int \frac{4dx}{\sqrt{3+2x-x^2}} = -\frac{1}{2} \int \frac{d(3+2x-x^2)}{\sqrt{3+2x-x^2}} - 4 \int \frac{d(x-1)}{\sqrt{4-(x-1)^2}} = \\
 &= -\sqrt{3+2x-x^2} - 4 \arcsin \frac{x-1}{2} + C :
 \end{aligned}$$

$x^m(a+bx^n)^p dx$ դիֆերենցիալները (m, n, p թվերը ռացիոնալ են), որոնք կոչվում են բինոմական դիֆերենցիալներ, ինտեգրվում են միայն հետևյալ դեպքերում

ա) եթե p -ն ամբողջ թիվ է, ապա բինոմական դիֆերենցիալի ինտեգրումը բերվում է ռացիոնալ ֆունկցիայի ինտեգրման $t = \sqrt[n]{x}$ տեղադրումով, որտեղ k -ն m և n կոտորակների հայտարարների ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկն է:

բ) եթե $\frac{m+1}{n}$ թիվն է ամբողջ, ապա նշանակում ենք

$t = \sqrt[k]{a+bx^n}$, որտեղ k -ն p կոտորակի հայտարարն է:

գ) եթե $\frac{m+1}{n} + p$ թիվն է ամբողջ, ապա $t = \sqrt[n]{ax^{-n} + b}$:

210. Հաշվել հետևյալ ինտեգրալը. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx$:

Լուծում. այստեղ $m = -\frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{4}$, $p = \frac{1}{3}$, $k = 3$, $\frac{m+1}{n} = 2$,

ուրեմն ըստ բ) դեպքի.

$$t = \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}} \Rightarrow x = (t^3 - 1)^4, dx = 12t^2(t^3 - 1)^3 dt :$$

Կատարելով փոփոխականի փոխարինումը, կստանանք.

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx &= 12 \int (t^6 - t^3) dt = 12 \left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^4}{4} \right) + C = \\ &= \frac{12}{7} (1 + \sqrt[4]{x})^{7/3} - 3(1 + \sqrt[4]{x})^{4/3} + C : \end{aligned}$$

$\int R(x; \sqrt[n]{ax+b}) dx$ տեսքի ինտեգրալները, որտեղ $R(x; y)$ -ը երկու փոփոխականի ռացիոնալ ֆունկցիա է, հաշվվում են $ax + b = t^n$ տեղադրման միջոցով:

211. Գտնել $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{x-1}+1}$ ինտեգրալը:

Լուծում. նշանակենք $x - 1 = t^3 \Rightarrow x = t^3 + 1, dx = 3t^2 dt$, հետևաբար

$$\begin{aligned} \int \frac{xdx}{\sqrt[3]{x-1}+1} &= \int \frac{(t^3+1) \cdot 3t^2 dt}{t+1} = 3 \int t^2(t^2 - t + 1) dt = \\ &= 3 \int (t^4 - t^3 + t^2) dt = \frac{3}{5} t^5 - \frac{3}{4} t^4 + t^3 + C : \end{aligned}$$

Վերադառնալով նախկին փոփոխականին, կստանանք.

$$\int \frac{x dx}{\sqrt[3]{x-1}+1} = \frac{3}{5} \sqrt[3]{(x-1)^5} - \frac{3}{4} \sqrt[3]{(x-1)^4} + x + C :$$

Հաշվել հետևյալ ինտեգրալները.

$$212. \int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} ; \quad 213. \int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+5x}} ;$$

$$214. \int \frac{5dx}{\sqrt{9-8x-7x^2}} ; \quad 215. \int \frac{2dx}{\sqrt{3-2x-x^2}} ;$$

$$216. \int \frac{6x+5}{\sqrt{9x^2+1}} dx ; \quad 217. \int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x}} dx ;$$

$$218. \int \frac{1-2x}{\sqrt{1-4x^2}} dx ; \quad 219. \int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}} dx ;$$

$$220. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} ; \quad 221. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}} ;$$

$$222. \int \sqrt{x^3+x^4} dx ; \quad 223. \int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2} dx ;$$

$$224. \int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}} dx ; \quad 225. \int x\sqrt{1-x} dx ;$$

$$226. \int \frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}} ; \quad 227. \int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} ;$$

$$228. \int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}} dx ; \quad 229. \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{4-x^2}} ;$$

§ 2. Որոշյալ ինտեգրալ

1. Որոշյալ ինտեգրալի սահմանումը, Նյուտոն-Լայբնիցի բանաձևը

Դիցուք $y = f(x)$ սահմանափակ ֆունկցիան որոշված է $[a ; b]$ հատվածի վրա: $[a ; b]$ հատվածը x_i կետերով տրոհենք կամայական n մասերի: Նշանակենք

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{n-1} < x_n = b,$$

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}; \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$\lambda = \max_i \{\Delta x_i\}:$$

Ամեն մի $[x_{i-1}; x_i]$ հատվածից վերցնելով մի ξ_i կետ, կազմենք հետևյալ գումարը.

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = f(\xi_1) \Delta x_1 + f(\xi_2) \Delta x_2 + \dots + f(\xi_n) \Delta x_n$$

S_n գումարը կոչվում է $y = f(x)$ ֆունկցիայի ինտեգրալային գումար $[a ; b]$ հատվածում:

Եթե գոյություն ունի $\lim_{\lambda \rightarrow 0} S_n = S$ վերջավոր սահմանը, անկախ

$[a ; b]$ հատվածի տրոհման եղանակից և ξ_i կետերի ընտրությունից, ապա $f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է ինտեգրելի $[a ; b]$ հատվածում, իսկ S վերջավոր սահմանը կոչվում է $y = f(x)$ ֆունկցիայի որոշյալ ինտեգրալ $[a ; b]$ հատվածում և նշանակվում է հետևյալ սիմվոլով

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx:$$

a և b թվերը կոչվում են ինտեգրալի համապատասխանաբար ստորին և վերին սահմաններ:

Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է $[a ; b]$ միջակայքում: Այդ դեպքում այդ միջակայքում գոյություն ունի $f(x)$ ֆունկցիայի անորոշ ինտեգրալը

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

և տեղի ունի հետևյալ բանաձևը.

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) :$$

Այս բանաձևը կոչվում է Նյուտոն-Լայբնիցի բանաձև: Այսպիսով, $[a ; b]$ հատվածում անընդհատ $f(x)$ ֆունկցիայի որոշյալ ինտեգրալը հաշվելու համար նախ գտնում ենք նրա նախնականը (անորոշ ինտեգրալը), ապա տեղադրում սահմանները:

230. Հաշվել հետևյալ որոշյալ ինտեգրալները.

$$1) \int_1^3 x^3 dx ; \quad 2) \int_0^2 x^2 \sqrt{x^3 + 1} dx ; \quad 3) \int_{e^2}^{e^3} \frac{\ln^2 x dx}{x} :$$

Լուծում.

$$1) \int_1^3 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_1^3 = \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = \frac{80}{4} = 20 ;$$

$$2) \int_0^2 x^2 \sqrt{x^3 + 1} dx = \frac{1}{3} \int_0^2 \sqrt{x^3 + 1} d(x^3 + 1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{(x^3 + 1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_0^2 = \frac{52}{9} ;$$

$$3) \int_{e^2}^{e^3} \frac{\ln^2 x dx}{x} = \int_{e^2}^{e^3} \ln^2 x d(\ln x) = \frac{\ln^3 x}{3} \Big|_{e^2}^{e^3} = \frac{1}{3} (\ln^3 e^3 - \ln^3 e^2) = \frac{19}{3} ;$$

Հաշվել Նյուտոն-Լայբնիցի բանաձևով.

$$-231. \int_{-2}^1 x^2 dx ; \quad \neq 232. \int_0^8 (\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x^2}) dx ; \quad +233. \int_0^{\pi} \sin x dx ;$$

$$\textcircled{234.} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx ; \quad 235. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} ; \quad 236. \int_0^1 (3x-2)^4 dx ;$$

$$\begin{aligned}
 & \textcircled{237} \int_e^{e^2} \frac{2 \ln x + 1}{x} dx ; \quad \textcircled{238} \int_0^5 \sqrt{4+x} dx ; \quad \textcircled{239} \int_{-3}^{-1} \frac{dx}{(10+3x)^3} ; \\
 & \textcircled{240} \int_0^1 x \sqrt{1-x^2} dx ; \quad \textcircled{241} \int_0^{16} \frac{dx}{\sqrt{x+9} - \sqrt{x}} ; \quad \textcircled{242} \int_0^4 x \sqrt{x^2+9} dx ; \\
 & \textcircled{243} \int_e^{e^2} \frac{\ln^3 x dx}{x} ; \quad \textcircled{244} \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^3}} ; \quad \textcircled{245} \int_{\ln 6}^{\ln 22} \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x+3}} ; \\
 & \textcircled{246} \int_1^{e^3} \frac{dx}{x \sqrt{1+\ln x}} ; \quad \textcircled{247} \int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5} ; \quad \textcircled{248} \int_0^2 x e^{x^2} dx ; \\
 & \textcircled{249} \int_{e^2}^{e^5} \frac{\ln x - 1}{x \sqrt{\ln x - 1}} dx ; \quad \textcircled{250} \int_1^{e^3} \frac{dx}{x(1+\ln x)} .
 \end{aligned}$$

2. Մասերով ինտեգրման եղանակը որոշյալ ինտեգրալի համար

Ենթադրենք $u = u(x)$ և $v = v(x)$ ֆունկցիաները իրենց ածանցյալների հետ միասին անընդհատ են $[a ; b]$ հատվածում: Դիֆերենցելով uv արտադրյալը, կստանանք. $d(uv) = u dv + v du$: Ինտեգրենք այս բանաձևի երկու կողմերը a -ից մինչև b .

$$\int_a^b d(uv) = \int_a^b u dv + \int_a^b v du :$$

Նյուտոն-Լայբնիցի բանաձևի համաձայն

$$\int_a^b d(uv) = (uv) \Big|_a^b ,$$

հետևաբար. $(uv) \Big|_a^b = \int_a^b u dv + \int_a^b v du$, այստեղից էլ կստացվի

մասերով ինտեգրման բանաձևը որոշյալ ինտեգրալի համար

$$\int_a^b u dv = (uv)\Big|_a^b - \int_a^b v du :$$

251. Հաշվել մասերով ինտեգրման եղանակով հետևյալ ինտեգրալները.

$$1) \int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}} dx; \quad 2) \int_1^e x \ln x dx :$$

Լուծում.

1) Աշխատենք $u = \arcsin x$, $dv = \frac{dx}{\sqrt{1+x}}$, կունենանք.

$$du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad v = \int \frac{dx}{\sqrt{1+x}} = \int \frac{d(1+x)}{\sqrt{1+x}} = 2\sqrt{1+x},$$

հետևաբար.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}} dx &= 2\sqrt{1+x} \arcsin x \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 \frac{\sqrt{1+x} dx}{\sqrt{1-x^2}} = \\ &= 2\sqrt{2} \arcsin 1 - 2\sqrt{1} \arcsin 0 - 2 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \\ &= 2\sqrt{2} \cdot \frac{\pi}{2} - 0 + 2 \int_0^1 \frac{d(1-x)}{\sqrt{1-x}} = \pi\sqrt{2} + 4\sqrt{1-x} \Big|_0^1 = \\ &= \pi\sqrt{2} + 4\sqrt{1-1} - 4\sqrt{1} = \pi\sqrt{2} - 4; \end{aligned}$$

2) Աշխատենք $u = \ln x$, $dv = x dx$, կունենանք $du = \frac{dx}{x}$, $v = \frac{x^2}{2}$,

$$\begin{aligned} \text{հետևաբար } \int_1^e x \ln x dx &= \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x^2 \frac{dx}{x} = \\ &= \frac{e^2}{2} \ln e - \frac{1}{2} \ln 1 - \frac{1}{2} \int_1^e x dx = \frac{e^2}{2} - \frac{x^2}{4} \Big|_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2 + 1}{4}. \end{aligned}$$

Հաշվել մասերով ինտեգրման եղանակով.

$$+ 252. \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx ; \quad (253) \int_0^{\pi} x^2 \cos x dx ; \quad 254. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{x dx}{\sin^2 x} ;$$

$$255. \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin^2 x dx ; \quad (256) \int_1^2 x^3 \ln x dx ; \quad 257. \int_e^1 x \ln x dx ;$$

$$+ 258. \int_0^1 \arctg x dx ; \quad 259. \int_0^1 x e^{3x} dx ; \quad (260) \int_0^1 e^x x^2 dx ;$$

$$+ 261. \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{3x} \cos x dx ;$$

3. Փոփոխականի փոխարինումը որոշյալ ինտեգրալում

Դիցուք $y = f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է $[a ; b]$ հատվածում, $x = \varphi(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$) ֆունկցիայի արժեքները դուրս չեն գալիս $[a ; b]$ հատվածից, ընդ որում $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, $[a ; b]$ հատվածում $\varphi(t)$ ֆունկցիան ունի անընդհատ $\varphi'(t)$ ածանցյալ: Այս պայմանների դեպքում տեղի ունի հետևյալ բանաձևը

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt :$$

262. Հաշվել որոշյալ ինտեգրալները փոփոխականի փոխարինման եղանակով.

$$1) \int_1^6 \frac{dx}{1 + \sqrt{3x - 2}} ; \quad 2) \int_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{dx}{\sqrt{e^x + 1}} ;$$

Լուծում.

1) Կատարենք $3x - 2 = t^2$ տեղադրումը.

$$x = \frac{t^2 + 2}{3}; \quad dx = \frac{2t}{3} dt; \quad t = \sqrt{3x - 2}.$$

Երբ $x = 1 \Rightarrow t = \sqrt{3 - 2} = 1$, երբ $x = 6 \Rightarrow t = \sqrt{18 - 2} = 4$,
հետևաբար.

$$\begin{aligned} \int_1^6 \frac{dx}{1 + \sqrt{3x - 2}} &= \frac{2}{3} \int_1^4 \frac{t dt}{1 + t} = \frac{2}{3} \int_1^4 \frac{(1 + t) - 1}{1 + t} dt = \frac{2}{3} \int_1^4 \left(1 - \frac{1}{1 + t}\right) dt = \\ &= \frac{2}{3} (t - \ln(1 + t)) \Big|_1^4 = \frac{2}{3} (4 - \ln 5 - 1 + \ln 2) = \frac{2}{3} \left(3 + \ln \frac{2}{5}\right); \end{aligned}$$

2) նշանակենք $e^x + 1 = t^2 \Rightarrow t = \sqrt{e^x + 1}$, $x = \ln(t^2 - 1) \Rightarrow$

$$\Rightarrow dx = \frac{2t dt}{t^2 - 1}; \quad \text{Երբ } x = \ln 3 \Rightarrow t = \sqrt{e^{\ln 3} + 1} = \sqrt{3 + 1} = 2,$$

Երբ $x = \ln 8 \Rightarrow t = \sqrt{e^{\ln 8} + 1} = \sqrt{8 + 1} = 3$, հետևաբար.

$$\begin{aligned} \int_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{dx}{\sqrt{e^x + 1}} &= \int_2^3 \frac{2t dt}{t(t^2 - 1)} = 2 \int_2^3 \frac{dt}{t^2 - 1} = 2 \cdot \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t - 1}{t + 1} \right| \Big|_2^3 = \\ &= \ln \frac{2}{4} - \ln \frac{1}{3} = \ln \frac{1}{2} - \ln \frac{1}{3} = \ln \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Հաշվել ինտեգրալները, կատարելով նշված տեղադրումները.

$$263. \int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}, \quad \sqrt{x} = t; \quad 264. \int_0^2 \sqrt{16 - 6x} dx, \quad 16 - 6x = t^2;$$

$$265. \int_0^3 x \sqrt{x^2 + 16} dx, \quad x^2 + 16 = t^2;$$

$$266. \int_0^{\ln 5} \sqrt{e^x - 1} dx, \quad e^x - 1 = t^2;$$

$$\begin{aligned}
 & \textcircled{267.} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \alpha \sin^4 \alpha d\alpha, \sin \alpha = t; & 268. \int_0^1 \frac{dx}{1+e^{2x}}, x = \ln t; \\
 & \textcircled{269.} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cos^5 x dx, \cos x = t; & 270. \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \frac{dx}{x^2 \sqrt{1+x^2}}, x = \operatorname{tg} t; \\
 & 271. \int_0^3 \sqrt{25-3x} dx, 25-3x = t^2; & 272. \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2} dx}{x^2}, x = \cos t;
 \end{aligned}$$

4. Անհսկական ինտեգրալներ

Ենթադրենք, որ $y = f(x)$ ֆունկցիան որոշված է $[a; +\infty)$ միջակայքում և ցանկացած $A > a$ թվի համար ինտեգրելի է $[a; A]$

հատվածում: Եթե գոյություն ունի $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx$ սահմանը, ապա

այն կոչվում է $f(x)$ ֆունկցիայի անհսկական ինտեգրալ $[a; +\infty)$ միջակայքում և նշանակվում է հետևյալ տեսքով

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx:$$

Եթե այդ սահմանը վերջավոր է, ապա $y = f(x)$ ֆունկցիան կոչվում

է ինտեգրելի $[a; +\infty)$ միջակայքում, իսկ $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ ինտեգրալը

կոչվում է զուգամետ: Հակառակ դեպքում, եթե այդ սահմանը անվերջ է, կամ գոյություն չունի, այդ ինտեգրալը կոչվում է տարամետ: Նման ձևով էլ սահմանվում են անհսկական ինտեգրալները $(-\infty; a]$ և $(-\infty; +\infty)$ միջակայքներում:

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^a f(x) dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\substack{A \rightarrow -\infty \\ B \rightarrow +\infty}} \int_A^B f(x) dx:$$

Այժմ սահմանենք անհսկական ինտեգրալ այնպիսի ֆունկցիայի համար, որը $[a ; b]$ հատվածում սահմանափակ չէ:

Դիցուք $y = f(x)$ ֆունկցիան որոշված է $[a ; b)$ կիսաբաց միջակայքում, ընդ որում $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = \infty$ (այս դեպքում $x = b$ կետը

կոչվում է $f(x)$ ֆունկցիայի եզակի կետ): Ենթադրենք նաև, որ ցանկացած $\varepsilon > 0$ թվի համար ($0 < \varepsilon < b - a$) $y = f(x)$ ֆունկցիան ինտեգրելի է $[a; b - \varepsilon]$ հատվածում: Եթե գոյություն

ունի $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$ սահմանը, ապա այն կոչվում է $y = f(x)$

ֆունկցիայի անհսկական ինտեգրալ $[a ; b]$ միջակայքում և նշանակվում է.

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx :$$

Այստեղ ևս, եթե այս սահմանը վերջավոր է, ապա անհսկական ինտեգրալը կոչվում է զուգամետ, հակառակ դեպքում տարամետ:

Եթե $y = f(x)$ ֆունկցիայի եզակի կետը հատվածի ձախ ծայրն է, կամ $[a ; b]$ հատվածի ներքին C կետը, ապա համապատասխանաբար անհսկական ինտեգրալները սահմանվում են հետևյալ ձևով.

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx, \\ \int_a^b f(x) dx &= \lim_{\substack{\delta \rightarrow +0 \\ \varepsilon \rightarrow +0}} \left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\delta}^b f(x) dx \right] : \end{aligned}$$

273. Հաշվել հետևյալ անհսկական ինտեգրալները.

$$1) \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}, a > 1; \quad 2) \int_0^{+\infty} \frac{\arctg x}{1+x^2} dx; \quad 3) \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{1+x^2}; \quad 4) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} :$$

Լուծում.

$$1) \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A \frac{dx}{x \ln^2 x} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A \frac{d(\ln x)}{\ln^2 x} =$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{\ln x} \right) \Big|_a^A = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{\ln A} + \frac{1}{\ln a} \right) = \frac{1}{\ln a};$$

$$\begin{aligned} 2) \int_0^{+\infty} \frac{\arctg x}{1+x^2} dx &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{\arctg x}{1+x^2} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \arctg x d(\arctg x) = \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{(\arctg x)^2}{2} \Big|_0^A = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\frac{(\arctg A)^2}{2} - \frac{\arctg 0}{2} \right) = \frac{\pi^2}{8}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{1+x^2} &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2} \cdot \int_0^A \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} \right] = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right] \Big|_0^A = \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2} \ln(1+A^2) - \frac{1}{2} \ln 1 \right] = +\infty, \text{ ինտեգրալը տարամետ է:} \end{aligned}$$

4) $x = 1$ կետը եզակի կետն է: Ուրեմն, ըստ սահմանման.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \arcsin x \Big|_0^{1-\varepsilon} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (\arcsin(1-\varepsilon) - \arcsin 0) = \frac{\pi}{2}; \end{aligned}$$

Հաշվել հետևյալ անիսկական ինտեգրալները.

274. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2};$

275. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2};$

276. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2};$

277. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};$

278. $\int_0^2 \frac{2dx}{\sqrt{4-x^2}};$

279. $\int_0^{+\infty} e^{-3x} dx;$

280. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x dx}{1+x^4};$

281. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2};$

$$282. \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x - 2};$$

$$283. \int_0^1 \ln x dx :$$

5. Որոշյալ ինտեգրալի կիրառությունները

ա) հարթ պատկերի մակերեսի հաշվումը:

Եթե կորագիծ սեղանը սահմանափակված է վերևից $y = f(x) \geq 0$ անընդհատ կորով, ներքևից OX առանցքով և կողքերից $x = a$, $x = b$ ուղիղներով, ապա կորագիծ սեղանի մակերեսը որոշվում է

$$S = \int_a^b f(x) dx \text{ բանաձևով:}$$

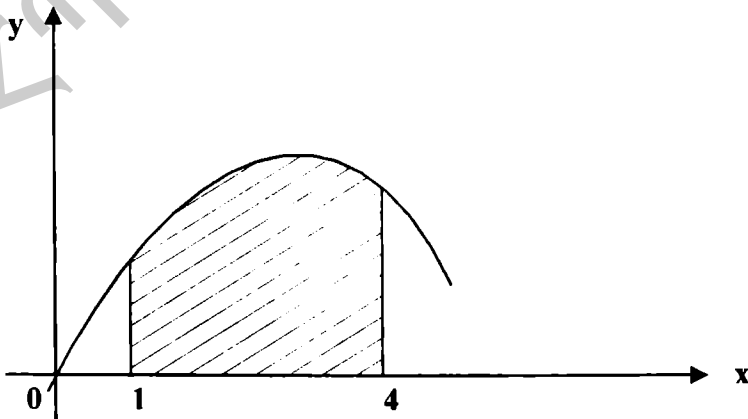
Ընդհանուր դեպքում, երբ հարթ պատկերը սահմանափակված է $y = f_1(x)$ և $y = f_2(x)$ ($f_2(x) \geq f_1(x)$, $a \leq x \leq b$) կորերով, ապա այդ պատկերի մակերեսը հաշվվում է հետևյալ բանաձևով.

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx :$$

284. Հաշվել այն պատկերի մակերեսը, որը սահմանափակված է

$$y = \frac{6x - x^2}{3}, \text{ կորով, } x = 1, x = 4 \text{ ուղիղներով և } OX \text{ առանցքով:}$$

Լուծում.

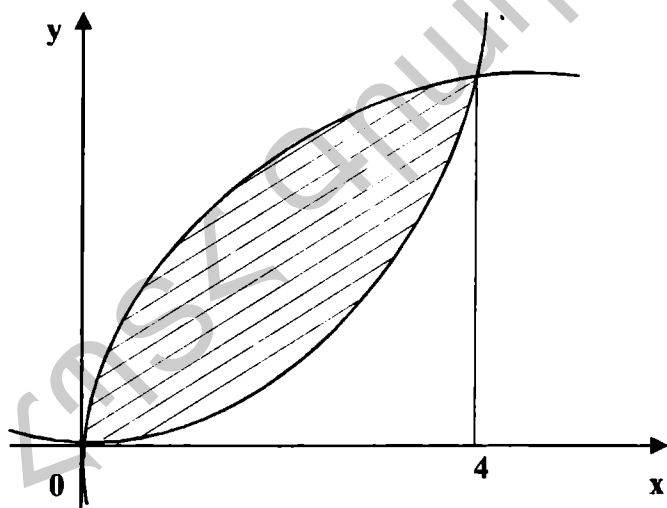


$$S = \int_1^4 \frac{6x - x^2}{3} dx = \frac{1}{3} \left(3x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_1^4 = \left(16 - \frac{64}{9} \right) - \left(1 - \frac{1}{9} \right) = 8 :$$

285. Հաշվել $x^2 = 4y$ և $y^2 = 4x$ գծերով սահմանափակված հարթ պատկերի մակերեսը:

Լուծում. տրված կորերի հատման կետերի արագիսները գտնում ենք լուծելով համակարգը.

$$\begin{cases} y = \frac{1}{4}x^2 \\ y^2 = 4x \end{cases} \Rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = 4 :$$



Երբ x -ը փոխվում է $[0 ; 4]$ միջակայքում, միշտ $2\sqrt{x} \geq \frac{1}{4}x^2$, ուստի՝

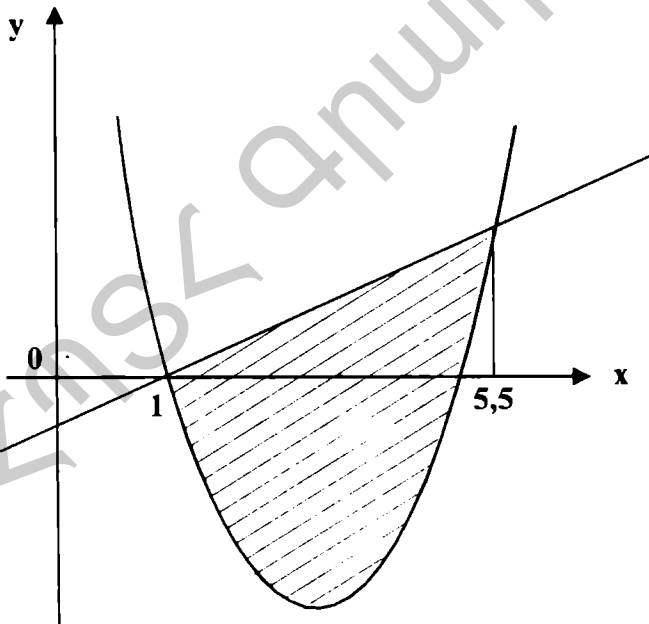
$$S = \int_0^4 \left(2\sqrt{x} - \frac{1}{4}x^2 \right) dx = \left(\frac{4x^{3/2}}{3} - \frac{x^3}{12} \right) \Big|_0^4 =$$

$$= \frac{4}{3} 4^{3/2} - \frac{4^3}{12} - 0 + 0 = \frac{4 \cdot 8}{3} - \frac{64}{12} = \frac{32}{3} - \frac{16}{3} = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3} :$$

286. Գտնել $y = x^2 - 6x + 5$ և $2y - x + 1 = 0$ կորերով սահմանափակված պատկերի մակերեսը:

Լուծում. նախ գտնում ենք հատման կետերի աբսցիսները.

$$\begin{cases} y = x^2 - 6x + 5 \\ y = \frac{x-1}{2} \end{cases} \Rightarrow x_1 = 1, \quad x_2 = 5,5 :$$



Այսպիսով՝

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{13}{2} x^2 - 11x - \frac{2}{3} x^3 \right) \Big|_1^{5.5} = 15 \frac{3}{16} :$$

Գտնել տրված գծերով սահմանափակված հարթ պատկերների մակերեսները.

➤ 287. $y = x^2$, $x = 2$, $x = 4$, $y = 0$;

288. $y = x^2 - 6x$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$;

289. $y = 3 - 2x - x^2$, $y = 0$;

290. $x^2 - 2y = 0$, $x + y - 4 = 0$;

291. $y = 3x^2 + 1$, $y = 3x + 7$;

292. $y = 3 + 2x - x^2$, $y + x - 3 = 0$;

293. $y = x^2$, $y = 6 - 2x^2$;

294. $y = x^2 - 2$, $y = 6 - x^2$;

295. $xy = 4$, $y + x - 5 = 0$;

296. $xy = 6$, $y = 7 - x$;

297. $y = \frac{a^3}{x^2 + a^2}$, $y = 0$;

298. $y = \ln x$, $y = 0$, $x = 1$, $x = e$;

299. $y^2 + 8x = 16$, $y^2 - 24x = 48$;

300. $y = \frac{1}{1 + x^2}$, $y = \frac{x^2}{2}$:

բ) աղեղի երկարության հաշվումը:

Անընդհատ դիֆերենցելի $y = f(x)$ ($a \leq x \leq b$) կորի աղեղի երկարությունը հաշվվում է հետևյալ բանաձևով.

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx :$$

301. Հաշվել $y = x^{1.5}$ կորի աղեղի երկարությունը $0 \leq x \leq 4$ հատվածում:

Լուծում. $y' = \frac{3}{2}\sqrt{x}$, $(y')^2 = \frac{9}{4}x$, տեղադրելով բանաձևի մեջ կստանանք.

$$\begin{aligned} L &= \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} \, dx = \frac{4}{9} \int_0^4 \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{1}{2}} d\left(\frac{9}{4}x + 1\right) = \\ &= \frac{4}{9} \cdot \frac{\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \bigg|_0^4 = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} \cdot (10^{3/2} - 1) = \frac{8}{27} (10\sqrt{10} - 1) : \end{aligned}$$

Գտնել հետևյալ կորերի աղեղների երկարությունները:

302. $y^2 = 8x$, $0 \leq x \leq \frac{1}{4}$;

303. $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x$, $1 \leq x \leq e$;

304. $y = \ln \cos x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{12}$;

գ) Պտտման մարմնի ծավալի հաշվումը:

$y = f(x)$ ֆունկցիայի կորագիծ սեղանը OX առանցքի շուրջը պտտելուց առաջացած մարմինը կոչվում է պտտման մարմին:

Պտտման մարմնի ծավալը որոշվում է հետևյալ բանաձևով.

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) \, dx :$$

Ընդհանուր դեպքում, $x = a$ և $x = b$ հարթությունների միջև ընկած մարմնի ծավալը հաշվվում է

$$V = \int_a^b S(x) dx$$

բանաձևով, որտեղ $S(x)$ -ը այդ մարմնի և x կետում OX առանցքին ուղղահայաց հարթության հատույթի մակերեսն է:

305. Գտնել այն մարմնի ծավալը, որն առաջանում է $y = \sin x$, $y = 0$, $x = \pi$ գծերով սահմանափակված հարթ պատկերը պտտելով առանցքի շուրջը:

Լուծում.

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \pi \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{\pi}{2} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^{\pi} = \\ &= \frac{\pi}{2} \left(\pi - \frac{1}{2} \sin 2\pi - 0 + \frac{1}{2} \sin 0 \right) = \frac{\pi^2}{2} : \end{aligned}$$

Դիցուք պահանջվում է հաշվել այն մարմնի ծավալը, որն առաջանում է $y = f_1(x)$ և $y = f_2(x)$ կորերի միջև գտնվող հարթ պատկերը OX առանցքի շուրջը պտտելուց:

Որոշելի ծավալը կարելի է դիտել որպես երկու սեղանակերպերի պտտումից առաջացած ծավալների տարբերություն $[f_1(x) \leq f_2(x)]$.

$$V = \pi \int_a^b [(f_2(x))^2 - (f_1(x))^2] dx :$$

306. Հաշվել այն մարմնի ծավալը, որն առաջանում է $y = x^2 + 1$ և $y = 2x + 1$ գծերով սահմանափակված հարթ պատկերը պտտելով OX առանցքի շուրջը:

Լուծում. հատման կետերի արքսիսները գտնելու համար լուծենք այդ կորերի հավասարումները:

$$\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = 2x + 1 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = 2 :$$

Երբ x -ը փոխվում է $[0;2]$ միջակայքում, միշտ $2x+1 \geq x^2+1$, ուստի

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^2 \left[(2x+1)^2 - (x^2+1)^2 \right] dx = \\ &= \pi \int_0^2 (4x^2 + 4x + 1 - x^4 - 2x^2 - 1) dx = \pi \int_0^2 (4x - x^4 + 2x^2) dx = \\ &= \pi \left(2x^2 + \frac{2x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^2 = \pi \left(8 + \frac{16}{3} - \frac{32}{5} \right) = \frac{104\pi}{15} : \end{aligned}$$

Գտնել այն մարմնի ծավալը, որն առաջանում է տրված գծերով սահմանափակված հարթ պատկերը պտտելով կոորդինատային առանցքներից մեկի շուրջը.

ա) OX առանցքի շուրջը.

307. $y = x^2 + 1, \quad x = 1, y = 0, x = 0;$

+ 308. $y = x^2 + 2, \quad 2x - y + 2 = 0;$

309. $xy = 9, y = 10 - x;$ + 310. $y = x^2 + 4, x = 3, y = 0, x = 0;$

+ 311. $y = \sqrt{x-5}, x = 9, y = 0;$ + 312. $y = \sqrt{x-3}, x = 7, y = 0;$

313. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$

314. $y^2 = 9x, y = 3x;$

315. $y^2 = 9x, x^2 = 9y;$

316. $y^2 = 4x, x^2 = 4y;$

բ) OY առանցքի շուրջը.

317. $y = e^{-x}, y = 0, 0 \leq x < +\infty;$

318. $y^2 = 4 - x, x = 0:$

ԳԼՈՒԽ X

Շարքեր

§1. Թվային շարքեր

1. Հիմնական գաղափարներ

Հետևյալ տեսքի արտահայտությանը՝

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

որտեղ $a_1, a_2, a_3, \dots$ մի որևէ անվերջ հաջորդականության անդամներն են, կոչվում է անվերջ շարք կամ պարզապես շարք:

a_n -ը ($n = 1, 2, \dots$) կոչվում է շարքի n -րդ անդամ կամ ընդհանուր անդամ: Նշանակենք. $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ ($n = 1, 2, \dots$):

S_n -ը կոչվում է շարքի n -րդ մասնակի գումար:

Շարքը կոչվում է զուգամետ, եթե S_n հաջորդականությունը ունի վերջավոր S սահմանը, այսինքն՝

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S.$$

ընդ որում S թիվը կոչվում է շարքի գումար:

Շարքը կոչվում է տարամետ, եթե S_n հաջորդականությունը տարամետ է, այսինքն նրա սահմանը գոյություն չունի կամ հավասար է ∞ :

319. Շարքերի զուգամիտության սահմանման միջոցով պարզել հետևյալ շարքերի զուգամիտության հարցը և զուգամիտության դեպքում գտնել շարքի գումարը:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots ;$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots ;$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots;$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^{n-1} + \dots;$$

Լուծում.

$$1) \text{ քանի որ } a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \text{ ուրեմն}$$

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1},$$

որտեղից՝ $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$: Շարքը զուգամետ է և նրա գումարը հավասար է մեկի:

2) Երկրաչափական պրոգրեսիայի առաջին n անդամների գումարի բանաձևի համաձայն՝

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{2} \right)^n - 1 \right)}{\frac{1}{2} - 1} = 1 - \frac{1}{2^n},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 1 - 0 = 1:$$

Շարքը զուգամետ է և

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = 1:$$

$$3) S_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}, \quad \text{այդ պատճառով}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$, հետևաբար շարքը տարամետ է:

$$4) S_n = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^{n-1} = \begin{cases} 0, & \text{եթե } n\text{-ը զույգ է} \\ 1, & \text{եթե } n\text{-ը կենտ է} \end{cases}$$

Ակնհայտ է, որ գոյություն չունի $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, ուրեմն շարքը տարամետ է:

Հայտնի է, որ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ շարքը զուգամետ է, եթե $\alpha > 1$ և տարամետ է, եթե $\alpha \leq 1$:

Պարզել հետևյալ շարքերի վարքը և զուգամիտության դեպքում հաշվել նրանց գումարները:

$$\begin{aligned} & \text{† 320. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}; \text{ † 321. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}; \text{ † 322. } \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n; \\ & 323. \sum_{n=0}^{\infty} q^n, |q| < 1; \quad 324. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{2} \cdot n: \end{aligned}$$

2. Շարքի զուգամիտության անհրաժեշտ պայմանը

Եթե շարքը զուգամետ է, ապա նրա ընդհանուր անդամը ձգտում է 0-ի, հակառակն, ընդհանրապես ասած, ճիշտ չէ: Օրինակ՝

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{շարքի համար} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0, \quad \text{բայց շարքը տարամետ է:}$$

$$325. \text{ Պարզել } \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{n} \quad \text{շարքի վարքը:}$$

$$\text{Լուծում.} \quad a_n = n \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{n},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1,$$

ուրեմն շարքը տարամետ է, քանի որ նրա ընդհանուր անդամը չի ձգտում զրոյի:

Պարզել, հետևյալ շարքերի համար զուգամիտության անհրաժեշտ պայմանը բավարարված է, թե ոչ:

$$326. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^3+1}}; \quad 327. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{(n+1)(n+2)}}; \quad 328. \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{1}{n};$$

$$329. \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{1}{\sqrt{n}}; \quad 330. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3n}.$$

3. Դրական անդամներով շարքեր, բաղդատման հայտանիշները

Բաղդատման առաջին հայտանիշը:

Դիցուք, տրված են (1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n > 0$) և (2) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ($b_n > 0$)

շարքերը: Եթե $a_n \leq b_n$, $n = 1, 2, \dots$, ապա (2) շարքի զուգամիտությունից հետևում է (1) շարքի զուգամիտությունը, իսկ (1) շարքի տարամիտությունից հետևում է (2) շարքի տարամիտությունը:

$$331. \text{Պարզել } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} \text{ շարքի վարքը:}$$

Լուծում. ակնհայտ է, որ

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} \geq \frac{1}{\sqrt[3]{n+n}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{n}}.$$

Քանի որ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ շարքը տարամետ է, ուրեմն տրված շարքը նույնպես տարամետ է:

$$332. \text{Պարզել } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} \text{ շարքի վարքը:}$$

Լուծում. պարզ է, որ $\ln n < n$, ուրեմն $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$: Քանի որ

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ շարքը տարամետ է, տրված շարքը ևս տարամետ կլինի:

333. Պարզել $\sum \frac{1}{\sqrt{(n+1)^3}}$ շարքի վարքը:

Լուծում. $\frac{1}{\sqrt{(n+1)^3}} < \frac{1}{\sqrt{n^3}}$, քանի որ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}}$ շարքը

գումարանք է, ապա տրված շարքը նույնպես գումարանք է:

Բաղդատման I հայտանիշի օգնությամբ պարզել հետևյալ շարքերի վարքը.

$$\begin{aligned} +334. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}; & \quad +335. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}; & \quad 336. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}; \\ +337. \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{1}{n}; & \quad +338. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+1}; & \quad +339. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}: \end{aligned}$$

Բաղդատման երկրորդ հայտանիշը:

Եթե գոյություն ունի $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = C$ ($0 < C < +\infty$) ապա (1) և (2) շարքերը միաժամանակ են գումարանք կամ տարամետ:

340. Պարզել հետևյալ շարքերի վարքը.

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)}}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}:$$

Լուծում.

1) համեմատենք $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ տարամետ շարքի հետ.

$$a_n = \frac{n}{\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)}} , \quad b_n = \frac{1}{\sqrt{n}} ,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{\sqrt{n^3(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})(1+\frac{3}{n})}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{n}}{n^{\frac{3}{2}} \sqrt{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})(1+\frac{3}{n})}} = 1 ,$$

հետևաբար տրված շարքը տարամետ է:

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$, հետևաբար շարքը տարամետ է, քանի որ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty :$$

Բաղդատման II հայտանիշի օգնությամբ պարզել հետևյալ շարքերի վարքը.

341. $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{1}{\sqrt{n}}$; 342. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$; 343. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n} \right)$;

344. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}}$; 345. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n(n+2)(n+3)}}$; 346. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{n^2+1}$:

Դալամբերի հայտանիշը:

Եթե դրական անդամներով շարքի համար գոյություն ունի

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = D$$

վերջավոր սահմանը, ապա $D < 1$ դեպքում շարքը զուգամետ է, $D > 1$ դեպքում՝ տարամետ, իսկ $D = 1$ դեպքում զուգամիտության հարցը բաց է մնում:

347. Դալամբերի հայտանիշի օգնությամբ պարզել հետևյալ շարքերի զուգամիտությունը.

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} :$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!} :$$

Լուծում.

$$1) a_n = \frac{2n-1}{2^n}, \quad a_{n+1} = \frac{2(n+1)-1}{2^{n+1}} = \frac{2n+1}{2^{n+1}},$$

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n-1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \text{շարքը զուգամետ է:}$$

$$2) a_n = \frac{3^n}{n!}, \quad a_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!},$$

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{3^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n+1} = 0 < 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ շարքը զուգամետ է:

Օգտվելով Դալամբերի հայտանիշից, պարզել հետևյալ շարքերի վարքը.

$$348. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{(n-1)!};$$

$$349. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(n+1)!};$$

$$350. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!};$$

$$351. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n^2-1}}{2^{n^2} \sqrt{n}};$$

$$352. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!};$$

$$353. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n$$

Կոշիի հայտանիշը:

Եթե իրական անդամներով շարքի համար գոյություն ունի $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = k$ վերջավոր սահմանը, ապա $k < 1$ դեպքում շարքը

զուգամետ է, $k > 1$ դեպքում տարամետ, իսկ $k = 1$ դեպքում զուգամիտության հարցը բաց է մնում:

354. Կոշիի հայտանիշի օգնությամբ պարզել հետևյալ շարքերի զուգամիտությունը.

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+1} \right)^n; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \sin^n \frac{\pi}{n}.$$

Լուծում.

$$1) a_n = \left(\frac{n}{3n+1} \right)^n, \quad k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{3n+1} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3n+1} = \frac{1}{3} < 1,$$

ուրեմն շարքը զուգամետ է:

$$2) a_n = \sin^n \frac{\pi}{n}, \quad k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sin^n \frac{\pi}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi}{n} = 0 < 1:$$

Շարքը զուգամետ է:

Օգտվելով Կոշիի հայտանիշից պարզել հետևյալ շարքերի վարքը.

$$355. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{n^n}; \quad 356. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{2}{5} \right)^n; \quad 357. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2};$$

$$358. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+1}{3n^2-1} \right)^n; \quad 359. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2}; \quad 360. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3^n}{n+1} \right)^{n^2}$$

Կոշիի ինտեգրալային հայտանիշը:

Դիցուք $y = f(x) > 0$, ֆունկցիան անընդհատ է և մոնոտոն նվազող $[1; +\infty)$ միջակայքում, $f(n) = a_n$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$: Այս

պայմանների դեպքերում $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ շարքը և $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ անիսկական

ինտեգրալը միաժամանակ են զուգամետ կամ տարամետ:

361. Պարզել շարքերի զուգամիտությունը Կոշիի ինտեգրալային հայտանիշով.

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} ;$$

$$2) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} ;$$

Լուծում.

1) նշանակենք $f(x) = \frac{1}{x^2}$: Այս ֆունկցիան բավարարում է ինտեգրալային հայտանիշի բոլոր պայմաններին: Հաշվենք անհսկական ինտեգրալը.

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{dx}{x^2} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} \Big|_1^A \right) = - \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{A} - 1 \right) = 1 :$$

Անհսկական ինտեգրալը զուգամետ է, ուրեմն շարքը զուգամետ է:

2) $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$, $x \in [2; +\infty)$ ֆունկցիան բավարարում է թեորեմի բոլոր պայմաններին:

$$\begin{aligned} \int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_2^A \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_2^A \frac{d \ln x}{\ln x} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\ln \ln x \Big|_2^A \right) = \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} (\ln \ln A - \ln \ln 2) = +\infty, \end{aligned}$$

ուրեմն շարքը տարամետ է:

Օգտվելով ինտեգրալային հայտանիշից պարզել հետևյալ շարքերի վարքը.

$$362. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3+n^2}; \quad 363. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n+1}}; \quad 364. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n (\ln n)^2};$$

$$365. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt{\ln n}}; \quad 366. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}; \quad 367. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}};$$

§2. Կամայական շարքեր

Այն շարքերը, որոնց անդամների նշանները հերթականությամբ են փոխվում, կոչվում են նշանափոխ շարքեր: Օրինակ.

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}, \text{ կամ}$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} :$$

Դիտարկենք հետևյալ նշանափոխ շարքը.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} C_n = C_1 - C_2 + C_3 - C_4 + \dots + (-1)^{n-1} C_n + \dots,$$

որտեղ $C_n > 0$:

Լայբնիցի թեորեմը նշանափոխ շարքերի վերաբերյալ:

Եթե 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = 0$. 2) $C_{n+1} < C_n$, ($n = 1, 2, 3, \dots$),

ապա նշանափոխ շարքը զուգամետ է:

368. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ շարքի զուգամիտությունը պարզել Լայբնիցի

թեորեմի օգնությամբ:

Լուծում. ունենք $C_n = \frac{1}{n} \Rightarrow C_{n+1} = \frac{1}{n+1}$:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$; 2) $C_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = C_n$:

Լայբնիցի թեորեմի պայմանները բավարարված են, ուրեմն շարքը զուգամետ է:

Օգտվելով Լայբնիցի թեորեմից, պարզել հետևյալ նշանափոխ շարքերի վարքը.

$$369. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}};$$

$$370. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)};$$

$$371. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln \ln n};$$

$$372. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{(2n+1)^n};$$

$$373. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{\pi}{\sqrt{n}};$$

$$374. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{2^n}.$$

Բացարձակ և պայմանական զուգամիտություն:

Դիտարկենք (A) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ և (B) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ շարքերը:

Եթե (A) շարքը զուգամետ է, իսկ (B) շարքը տարամետ է, ապա (A) շարքը կոչվում է պայմանական զուգամետ:

Եթե (B) շարքը զուգամետ է, ապա (A) շարքը կոչվում է բացարձակ զուգամետ:

Նշենք, որ (B) շարքի զուգամիտությունից հետևում է (A) շարքի զուգամիտությունը:

375. Պարզել հետևյալ շարքի զուգամիտության բնույթը.

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n};$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

Լուծում.

1) այս շարքը զուգամետ է (վարժություն N° 368), իսկ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

շարքը տարամետ է, հետևաբար տված շարքը կլինի պայմանական զուգամետ:

2) քանի որ $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, իսկ այս շարքը զուգամետ է,

ուրեմն տված շարքը կլինի բացարձակ զուգամետ:

Հետևյալ շարքերը ուսումնասիրել բացարձակ զուգամիտության առումով.

$$376. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{1}{n};$$

$$377. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2 + 1};$$

$$378. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}};$$

$$379. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \sin \frac{1}{n^2};$$

$$380. \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n \ln^2 n};$$

$$381. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n};$$

§3. Աստիճանային շարքեր

Աստիճանային շարք կոչվում է հետևյալ տեսքի շարքը.

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

որտեղ $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ թվերը հաստատուններ են, իսկ x -ը փոփոխական է: Աստիճանային շարքը կոչվում է զուգամետ x_0 ,

կետում, եթե զուգամետ է $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ թվային շարքը:

Աստիճանային շարքի զուգամիտության տիրույթ է կոչվում այն x -երի բազմությունը, որոնց համար շարքը զուգամետ է: Աստիճանային շարքը բացարձակ զուգամետ է $(-R; R)$ տեսքի միջակայքում: R -ը կոչվում է աստիճանային շարքի զուգամիտության շառավիղ: Այն հաշվվում է հետևյալ բանաձևով

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad \text{կամ} \quad R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}};$$

եթե $R = +\infty$, ապա աստիճանային շարքը բացարձակ զուգամետ է ամբողջ առանցքի վրա, իսկ եթե $R = 0$, ապա աստիճանային

շարքը զուգամետ է միայն $x = 0$ կետում: Եթե $0 < R < +\infty$, ապա $x = \pm R$ կետերում շարքի զուգամիտությունը ստուգում ենք առանձին:

382. Գտնել $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$ աստիճանային շարքի զուգամիտության տիրույթը:

Լուծում. ունենք $a_n = \frac{1}{n \cdot 2^n}$.

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{n \cdot 2^n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \cdot \sqrt[n]{n} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 2.$$

հետևաբար $(-2; 2)$ միջակայքում շարքը բացարձակ զուգամետ է: Ստուգենք շարքի զուգամիտությունը միջակայքի ծայրակետերում.

$x = 2$ կետում ստացվում է $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ տարամետ շարքը, իսկ

$x = -2$ կետում ստացվում է $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

զուգամետ շարքը: Այսպիսով, աստիճանային շարքը զուգամետ է $(-2; 2)$ միջակայքում:

Գտնել հետևյալ աստիճանային շարքերի զուգամիտության տիրույթները.

$$383. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(2n+1)};$$

$$384. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 x^n}{(2n)!};$$

$$385. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2} \frac{x^{2n}}{3^n};$$

$$386. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2} x^n;$$

$$387. \sum_{n=1}^{\infty} x^n \operatorname{tg} \frac{1}{n};$$

$$388. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{\ln n};$$

§4. Ֆունկցիայի վերլուծումը աստիճանային շարքի

Եթե $f(x)$ ֆունկցիան a կետի շրջակայքում կարելի է վերլուծել աստիճանային շարքի, ապա այդ շարքը ունի հետևյալ տեսքը.

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots \\ \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots :$$

Այս շարքը կոչվում է $f(x)$ -ի Թեյլորի շարք: Եթե $a = 0$, ապա Թեյլորի շարքը անվանում են մաև Մակլորենի շարք

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots \quad (*)$$

Նշենք հիմնական վերլուծությունները.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (-\infty < x < +\infty),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \quad (-\infty < x < +\infty),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad (-\infty < x < +\infty),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots \quad (-1 < x \leq 1),$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \dots \\ (-1 < x < 1):$$

389. Գտնել $f(x) = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ ֆունկցիայի վերլուծությունը Մակլորենի շարքի:

Լուծում. գտնում ենք տրված ֆունկցիայի ածանցյալները $x = 0$ կետում:

$$f'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x, \quad f''(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x \quad \text{և այլն:}$$

Պարզ է որ $f^{(k)}(x) = \operatorname{sh} x$, եթե k -ն զույգ է և $f^{(k)}(x) = \operatorname{ch} x$, եթե k -ն կենտ է, ուրեմն $f^{(k)}(0) = 0$, եթե k -ն զույգ է և $f^{(k)}(0) = 1$, եթե k -ն կենտ է: Տեղադրելով $(*)$ -ի մեջ, կստանանք.

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots:$$

Դժվար չէ ստուգել, որ այս աստիճանային շարքը զուգամետ է $(-\infty; +\infty)$ ինտերվալում:

390. Գտնել $\frac{3x-5}{x^2-4x+3}$ ֆունկցիայի վերլուծությունը x -ի աստիճաններով և գտնել այդ շարքի զուգամիտության տիրույթը:

Լուծում. տրված ֆունկցիան վերածենք պարզ կոտորակների գումարի.

$$\frac{3x-5}{x^2-4x+3} = \frac{3x-5}{(x-3)(x-1)} = \frac{2}{x-3} + \frac{1}{x-1}:$$

Ըստ անվերջ երկրաչափական պրոգրեսիայի գումարի բանաձևի

$$\frac{1}{x-1} = -\frac{1}{1-x} = -(1+x+x^2+\dots) = -\sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x| < 1,$$

$$\frac{2}{x-3} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{3}} = -\frac{2}{3} \left(1 + \frac{x}{3} + \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \dots \right) = -\frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n, \quad \left|\frac{x}{3}\right| < 1,$$

Գումարելով իրար այս երկու վերլուծությունները, կստանանք.

$$\begin{aligned}\frac{3x-5}{x^2-4x+3} &= \frac{2}{x-3} + \frac{1}{x-1} = -\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n + \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n}\right) = \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{2}{3^{n+1}}\right) x^n:\end{aligned}$$

Քանի որ առաջին շարքը զուգամետ էր $-1 < x < 1$ տիրույթում, իսկ երկրորդը $-3 < x < 3$ տիրույթում, ուրեմն ստացված վերլուծությունը ճիշտ է $-1 < x < 1$ ինտերվալում:
Գտնել հետևյալ ֆունկցիաների վերլուծությունների առաջին երեք գրոյից տարբեր անդամները.

$$\begin{array}{lll}391. e^{\cos x}, & 392. \sec x, & 393. \operatorname{tg} x, \\ 394. \operatorname{arctg} x, & 395. \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), & 396. \operatorname{th} x:\end{array}$$

Օգտվելով հիմնական վերլուծություններից և անվերջ երկրա-
չափական պրոգրեսիայի գումարի բանաձևից, հետևյալ
ֆունկցիաները վերլուծել աստիճանային շարքերի և գտնել այդ
շարքերի զուգամիտության շառավիղները:

$$\begin{array}{lll}397. \frac{3}{1+x-2x^2}, & 398. \cos 2x, & 399. xe^{-2x}, \\ 400. \sqrt[3]{8+x}, & 401. \ln \frac{1+x}{1-x}, & 402. \sin^2 x \cos^2 x:\end{array}$$

ԳԼՈՒԽ XI

Դիֆերենցիալ հավասարումներ

§1. Հիմնական գաղափարներ

Սովորական դիֆերենցիալ հավասարում է կոչվում այնպիսի հավասարումը, որի մեջ մասնակցում են x անկախ փոփոխականը, $y = y(x)$ անհայտ ֆունկցիան (որի գտնելը դիֆերենցիալ հավասարման լուծման խնդիրն է) և նրա ածանցյալները կամ դիֆերենցիալները: Այդպիսի դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր տեսքը կլինի՝

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0:$$

Դիֆերենցիալ հավասարման մեջ մասնակցող ածանցյալների ամենաբարձր n կարգը կոչվում է դիֆերենցիալ հավասարման կարգ: Այսպես, $y'' - 3y' = x$ դիֆերենցիալ հավասարումը երկրորդ կարգի է, $y'' = \sin x$ դիֆերենցիալ հավասարումը չորրորդ կարգի է և այլն: Եթե $y = \varphi(x)$ ֆունկցիան բավարարում է դիֆերենցիալ հավասարմանը, ապա այդ ֆունկցիան կոչվում է դիֆերենցիալ հավասարման լուծում:

403. Ստուգել, որ $y = -x \ln|x|$ ֆունկցիան $y' - \frac{y}{x} + 1 = 0$

առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարման լուծում է:

Լուծում. $y = -x \ln|x|$ ֆունկցիան տեղադրում ենք տրված հավասարման մեջ և համոզվում, որ ստացել ենք նույնություն.

$$\begin{aligned} (-x \ln|x|)' - \frac{(-x \ln|x|)}{x} + 1 &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow -\ln|x| - 1 + \ln|x| + 1 &= 0 \Rightarrow 0 = 0: \end{aligned}$$

404. Ստուգել, որ տրված դիֆերենցիալ հավասարումների համար տրված ֆունկցիաները լուծում են:

$$1) \quad xyy' = 1 - 2x, \quad y = \sqrt[3]{3x - 3x^2};$$

$$2) \quad xy' + y = y^2, \quad y = \frac{1}{1-x};$$

$$3) \quad x^2y'' - 2xy' + 2y = 0, \quad y = 2x;$$

$$4) \quad y'' + 9y = 0, \quad y = \sin 3x + \cos 3x;$$

Եթե n -րդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարման լուծումը պարունակում է n հատ կամայական հաստատուններ, ապա այդպիսի լուծումը կոչվում է դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծում

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n):$$

Եթե ընդհանուր լուծումը ստացվում է անբացահայտ տեսքով

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0,$$

ապա այն անվանում են դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր ինտեգրալ:

405. Ստուգել, որ $y = C_1e^x + C_2e^{-x}$ ֆունկցիան $y'' - y = 0$ երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումն է:

Լուծում. տրված ֆունկցիան տեղադրում ենք $y'' - y = 0$ դիֆերենցիալ հավասարման մեջ և ստանում ենք նույնություն ցանկացած C_1 և C_2 հաստատունների համար:

$$(C_1e^x + C_2e^{-x})'' - (C_1e^x + C_2e^{-x}) = 0 \Rightarrow 0 = 0:$$

406. Գտնել $y' - 3y = 0$ դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր ինտեգրալը:

Լուծում.

$$y' - 3y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3y \Rightarrow \frac{dy}{y} = 3dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = 3 \int dx \Rightarrow \ln|y| - 3x = C:$$

Ստացանք տրված հավասարման ընդհանուր ինտեգրալը: Գտնելով այստեղից y -ը որպես x -ի ֆունկցիա, կստանանք հավասարման ընդհանուր լուծումը $y = C_1 e^{3x}$:

Ընդհանուր լուծման (ինտեգրալի) մեջ մտնող կամայական հաստատուններին տալով տարբեր թվային արժեքներ, ընդհանուր լուծումից ստանում ենք մասնակի լուծումներ (ինտեգրալներ): Դիֆերենցիալ հավասարման որոշակի մասնակի լուծում ստանալու համար տրված են լինում այսպես կոչված սկզբնական պայմաններ:

407. Գտնել $y' = x - \sin 2x$ դիֆերենցիալ հավասարման այն մասնակի լուծումը, որը բավարարում է $y(0) = 4,5$ սկզբնական պայմանին:

Լուծում. տրված դիֆերենցիալ հավասարման լուծումը հանգում է $x - \sin 2x$ ֆունկցիայի նախնականը գտնելուն, այսինքն

$$y = \int (x - \sin 2x) dx = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x + C :$$

Համաձայն սկզբնական պայմանի.

$$y(0) = 0 + \frac{1}{2} \cos 0 + C = 4,5 \Rightarrow C = 4 :$$

Այսպիսով, տրված սկզբնական պայմանին բավարարող մասնակի

լուծումը կլինի $y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x + 4$ ֆունկցիան:

Նշենք նաև, որ եթե առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարումը բացահայտորեն չի պարունակում x կամ y փոփոխականը, ապա այդպիսի հավասարումը լուծվում է անմիջական ինտեգրման միջոցով, ինչպես դա արվեց 406. և 407. խնդիրների լուծման մեջ:

§2. Առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարումներ

Ածանցյալի նկատմամբ լուծված առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր տեսքն է

$$y' = f(x; y) : \quad (*)$$

Այս հավասարման լուծման եղանակները կախված են $f(x; y)$ ֆունկցիայի բնույթից:

1. Անջատվող փոփոխականներով դիֆերենցիալ հավասարումներ

Եթե $(*)$ -ի մեջ $f(x; y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$, ապա ստացված $y' = f_1(x) \cdot f_2(y)$, հավասարումը կոչվում է անջատվող փոփոխականներով դիֆերենցիալ հավասարում: Ցույց տանք այս հավասարման լուծման եղանակը:

$$y' = f_1(x) \cdot f_2(y) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f_1(x) \cdot f_2(y) \Rightarrow \frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x) dx :$$

Փոփոխականները անջատվեցին, ինտեգրում ենք հավասարման երկու կողմերը.

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x) dx :$$

Ինտեգրումը կատարելուց հետո կստանանք հավասարման ընդհանուր ինտեգրալը:

408. Լուծել $y' = y(1 + \cos x)$ դիֆերենցիալ հավասարումը:

Լուծում.

$$y' = y(1 + \cos x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y(1 + \cos x) \Rightarrow \frac{dy}{y} = (1 + \cos x) dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int (1 + \cos x) dx \Rightarrow \ln |y| = x + \sin x + C \Rightarrow y = e^{x + \sin x + C}$$

409. Լուծել հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումները.

$$1) 2yy' = 3x;$$

$$2) y^2 y' + x^2 = 1;$$

$$3) y' = e^{x+y};$$

$$4) y' \operatorname{tg} x = y;$$

$$5) y' + \frac{x \sin x}{y \cos y} = 0;$$

$$6) ye^{2x} dx - (1 + e^{2x}) dy = 0;$$

$$7) dy - 2\sqrt{y} \ln x dx = 0;$$

$$8) y' = \cos(x + y);$$

410. Գտնել տրված սկզբնական պայմաններին բավարարող մասնակի լուծումները :

$$1) (1 + y^2) dx - xy dy = 0, \quad y(1) = 0;$$

$$2) y' \sin x = y \ln y, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e;$$

2. Առաջին կարգի համասեռ դիֆերենցիալ հավասարումներ

Եթե $(*)$ -ի մեջ $f(x; y)$ ֆունկցիան զրո կարգի համասեռ ֆունկցիա է, այսինքն բոլոր թույլատրելի t թվերի համար տեղի ունի $f(tx; ty) = f(x; y)$ պայմանը, ապա $(*)$ հավասարումը կոչվում է համասեռ հավասարում: Նշենք, որ զրո կարգի համասեռ ֆունկցիան կախված է միայն արգումենտների հարաբերությունից,

այսինքն համասեռ հավասարումը գրվում է $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ տեսքով և

$\frac{y}{x} = u(x)$ նշանակումով բերվում է անջատվող փոփոխականներով

դիֆերենցիալ հավասարման:

$$411. \text{ Լուծել } y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2} \text{ դիֆերենցիալ հավասարումը:}$$

Լուծում. տրված հավասարման աջ մասը զրո կարգի համասեռ ֆունկցիան է, նշանակենք $y = xu \Rightarrow y' = u + xu'$: Տեղադրենք տրված հավասարման մեջ, կունենանք.

$$\begin{aligned}
 xu' + u &= \frac{2x \cdot xu}{x^2 - x^2 u^2} \Rightarrow x \frac{du}{dx} = \frac{u + u^3}{1 - u^2} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{(1 - u^2) du}{u + u^3} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int \frac{(1 - u^2) du}{u + u^3} \Rightarrow \ln|x| = \int \left(\frac{1}{u} - \frac{2u}{u^2 + 1} \right) du \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \frac{x(u^2 + 1)}{u} = C :
 \end{aligned}$$

Վերադառնալով նախկին y փոփոխականին $u = \frac{y}{x}$ հակառակ տեղադրման միջոցով, կստանանք տրված հավասարման ընդհանուր ինտեգրալը $x^2 + y^2 - Cy = 0$:

412. Լուծել հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումները.

$$1) y' = \frac{x - y}{y + x}; \quad 2) (x - y)dx + xdy = 0;$$

$$3) y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}; \quad 4) xy' = y \ln \frac{y}{x};$$

$$5) x(y' + e^x) = y; \quad 6) xy' - y = \sqrt{x^2 - y^2};$$

$$7) (2x - y + 4) dy + (x - 2y + 5) dx = 0;$$

$$8) (x + y + 1) dx + (2x + 2y - 1) dy = 0;$$

413. Գտնել տրված սկզբնական պայմաններին բավարարող մասնակի լուծումները :

$$1) y' = \frac{y^2 - 2xy - x^2}{y^2 + 2xy - x^2}, \quad y(1) = -1;$$

$$2) (\sqrt{xy} - x) dy + ydx = 0, \quad y(1) = 1:$$

3. Առաջին կարգի գծային դիֆերենցիալ հավասարումներ

Առաջին կարգի գծային դիֆերենցիալ հավասարում է կոչվում հետևյալ տեսքի հավասարումը.

$$y' + p(x)y = q(x) :$$

Այս հավասարման լուծումը փնտրենք $y = u(x)v(x)$ տեսքով: Տեղադրելով հավասարման մեջ, կստանանք.

$$\begin{aligned} (u(x)v(x))' + p(x)u(x)v(x) &= q(x) \Rightarrow \\ \Rightarrow u'(x)v(x) + (v'(x) + p(x)v(x))u(x) &= q(x) : \end{aligned}$$

$v(x)$ անհայտ ֆունկցիան ընտրենք այնպես, որ

$$v'(x) + p(x)v(x) = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = -p(x)v(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{v(x)} = -p(x) dx \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = -\int p(x) dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|v| = -\int p(x) dx \Rightarrow v = e^{-\int p(x) dx} :$$

Այսպես ընտրված $v(x)$ ֆունկցիայի համար տրված դիֆերենցիալ հավասարումը կընդունի $u'(x)v(x) = q(x)$ տեսքը: Սա նույնպես անջատվող փոփոխականներով դիֆերենցիալ հավասարում է, որը լուծելով գտնում ենք $u(x)$ ֆունկցիան և հետևաբար $y = u(x)v(x)$ ընդհանուր լուծումը:

414. Լուծել $y' - y \operatorname{ctg} x = \sin x$ գծային դիֆերենցիալ հավասարումը:

Լուծում. նշանակենք $y = uv \Rightarrow y' = u'v + v'u$: Տեղադրելով տրված հավասարման մեջ, կունենանք.

$$u'v + v'u - uv \operatorname{ctg} x = \sin x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u'v + u(v' - v \operatorname{ctg} x) = \sin x :$$

$v = v(x)$ ֆունկցիան որոշենք $v' - v \operatorname{ctg} x = 0$ պայմանից.

$$v' - v \operatorname{ctg} x = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = \operatorname{ctg} x dx \Rightarrow v = \sin x :$$

Տեղադրելով հիմնական հավասարման մեջ, կստանանք.

$$u' \cdot \sin x = \sin x \Rightarrow u' = 1 \Rightarrow u = x + C :$$

Այսպիսով, տրված դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը կլինի $y = (x + C) \sin x$ ֆունկցիան:

415. Լուծել հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումները.

1) $y' + 2y = 4x ;$

2) $y' + 2xy = xe^{-x^2} ;$

3) $(1 + x^2)y' = 2xy + (1 + x^2)^2 ;$

4) $y' + \frac{y}{x} = 2 \ln x + 1 ;$

5) $y' = \frac{2y}{x+1} + e^x(1+x)^2 ;$

6) $xy' + x^2 + xy = y ;$

7) $y' + \frac{y}{x} + xy^2 = 0 ;$

8) $2xyy' - y^2 + x = 0 :$

416. Գտնել տրված սկզբնական պայմաններին բավարարող մասնակի լուծումները :

1) $y' + y \operatorname{tg} x = \sec x ,$

$y(0) = 0 ;$

2) $xy' - \frac{y}{x+1} = x ,$

$y(1) = 0 :$

4. Լրիվ դիֆերենցիալով հավասարումներ

Առաջին կարգի հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումը

$$P(x ; y)dx + Q(x ; y)dy = 0 :$$

կոչվում է լրիվ դիֆերենցիալով հավասարում, եթե $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} :$

Այս պայմանի դեպքում հավասարման ձախ մասը հանդիսանում է ինչ-որ $u(x ; y)$ ֆունկցիայի լրիվ դիֆերենցիալ և այդ պատճառով դիֆերենցիալ հավասարումը կգրվի $du = 0$ տեսքով: Այս հավասարման ընդհանուր ինտեգրալը կլինի $u(x ; y) = C$, որտեղ C -ն կամայական հաստատուն է: Այսպիսով, որպեսզի լուծենք լրիվ

դիֆերենցիալով հավասարումը, պետք է գտնենք նշված $u(x; y)$ ֆունկցիան, որը որոշվում է

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x; y) \quad \text{և} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x; y)$$

հավասարումներից, շնորհիվ $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ պայմանի:

417. Լուծել $(3x^2 - 2y)dx + 2(y - x)dy = 0$ դիֆերենցիալ հավասարումը:

Լուծում. այստեղ $P(x; y) = 3x^2 - 2y$, $Q(x; y) = 2(y - x)$,
 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = -2$, ուրեմն տրված է լրիվ դիֆերենցիալով

հավասարում: Գտնենք այն $u(x; y)$ ֆունկցիան, որի համար
 $(3x^2 - 2y)dx + 2(y - x)dy = du$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 3x^2 - 2y \Rightarrow u(x; y) = x^3 - 2xy + \varphi(y) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} &= -2x + \varphi'(y) = 2y - 2x \Rightarrow \varphi'(y) = 2y \Rightarrow \\ &\Rightarrow \varphi(y) = y^2 + C: \end{aligned}$$

Այսպիսով $u(x; y) = x^3 - 2xy + y^2 + C$ և տրված դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր ինտեգրալը կլինի $x^3 - 2xy + y^2 = C$:

418. Լուծել հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումները, նախօրոք ստուգելով, որ նրանք լրիվ դիֆերենցիալով հավասարումներ են:

- 1) $(1 - 6xy^2) dx + (3y^2 - 6x^2y) dy = 0$;
- 2) $(x + y) dx + (x + 2y) dy = 0$;
- 3) $(2x^3 - xy^2) dx + (2y^3 - x^2y) dy = 0$;
- 4) $(3x^2 + 6xy - 2y^2) dx + (3x^2 - 4xy - 3y^2) dy = 0$;

$$5) \quad xdx + ydy = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}; \quad 6) \quad \left(y + \frac{2}{x^2}\right) dx + \left(x - \frac{3}{y^2}\right) dy = 0;$$

$$7) \quad (2x - ye^{-x})dx + e^{-x}dy = 0;$$

$$8) \quad \left(\sin y - y \sin x + \frac{1}{x}\right) dx + \left(x \cos y + \cos x - \frac{1}{y}\right) dy = 0;$$

419. Գտնել տրված սկզբնական պայմաններին բավարարող մասնակի ինտեգրալները :

$$1) \quad (10xy - 8y + 1) dx + (5x^2 - 8x + 3) dy = 0, \quad y(3) = 1;$$

$$2) \quad \left(x + e^{\frac{x}{y}}\right) dx + e^{\frac{x}{y}} \left(1 - \frac{x}{y}\right) dy = 0, \quad y(0) = 2;$$

§3. Երկրորդ կարգի գծային դիֆերենցիալ հավասարումներ հաստատուն գործակիցներով

Այդպես են կոչվում $y'' + py' + qy = f(x)$ տեսքի դիֆերենցիալ հավասարումներ, ընդ որում եթե $f(x) \equiv 0$, ապա ստացված $y'' + py' + qy = 0$ հավասարումը կոչվում է համասեռ, հակառակ դեպքում ոչ համասեռ: Եթե r_1 -ը և r_2 -ը բնութագրիչ $r^2 + pr + q = 0$ հավասարման արմատներն են, ապա համասեռ հավասարման ընդհանուր լուծումը գրվում է հետևյալ տեսքով.

$$ա) \quad y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}, \text{ եթե } D = p^2 - 4q > 0, \quad r_1 \neq r_2;$$

$$բ) \quad y = e^{r_1 x} (C_1 + C_2 x), \text{ եթե } D = p^2 - 4q = 0, \quad r_1 = r_2;$$

$$գ) \quad y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x), \text{ եթե } D = p^2 - 4q < 0, \\ r_{1,2} = \alpha \pm i\beta:$$

420. Գտնել հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումների ընդհանուր լուծումները :

1) $y'' + 3y' - 10y = 0$; 2) $4y'' + 4y' + y = 0$;

3) $y'' - 8y' + 41y = 0$:

Լուծում.

1) Կազմենք բնութագրիչ հավասարումը.

$$r^2 + 3r - 10 = 0 \Rightarrow r_1 = -5, \quad r_2 = 2 :$$

Հետևաբար, ընդհանուր լուծումն է՝ $y = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{2x}$:

2) $4r^2 + 4r + 1 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = -0,5$, ուրեմն՝

$$y = e^{-0,5x} (C_1 + C_2 x) :$$

3) $r^2 - 8r + 41 = 0 \Rightarrow r = 4 \pm \sqrt{16 - 41} = 4 \pm \sqrt{-25} = 4 \pm 5i$:

Ընդհանուր լուծումը $y = e^{4x} (C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x)$ ֆունկցիան է:

421. Լուծել հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումները.

1) $y'' - 5y' + 6y = 0$;

2) $y'' + 4y' - 21y = 0$;

3) $3y'' - 5y' + 2y = 0$;

4) $y'' - 7y = 0$;

5) $y'' + 2y' + y = 0$;

6) $4y'' - 12y' + 9y = 0$;

7) $y'' + y = 0$;

8) $y'' - 4y' + 13y = 0$:

422. Գտնել տրված սկզբնական պայմաններին բավարարող մասնակի լուծումները:

1) $y'' - 5y' + 4y = 0$,

$y(0) = y'(0) = 1$;

2) $y'' - 2y' + y = 0$,

$y(2) = 1$, $y'(2) = -2$:

Ոչ համասեռ հավասարման ընդհանուր լուծումը գրվում է $y = \bar{y}(x) + y_0(x)$ տեսքով, որտեղ $\bar{y}(x)$ -ը համապատասխան համասեռ հավասարման ընդհանուր լուծումն է, իսկ $y_0(x)$ -ը

տրված ոչ համասեռ հավասարման որևէ մասնակի լուծումը: Այդ մասնակի լուծումը փնտրում ենք ելնելով $f(x)$ -ի հատուկ տեսքից, կամ ավելի ընդհանուր՝ հաստատունի վարիացիայի մեթոդով:

423. Գտնել հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումների ընդհանուր լուծումները:

$$1) 12y'' + y' - y = 3x^2 + 7; \quad 2) y'' - y' - 6y = e^x + \sin 3x:$$

Լուծում.

1) Նախ գտնում ենք համապատասխան համասեռ հավասարման ընդհանուր լուծումը.

$$12r^2 + r - 1 = 0 \Rightarrow r_1 = -\frac{1}{3}, \quad r_2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \bar{y} = C_1 e^{-\frac{x}{3}} + C_2 e^{\frac{x}{4}}:$$

Տրված հավասարման աջ մասը երկրորդ կարգի բազմանդամ է, այդ պատճառով $y_0(x)$ մասնակի լուծումը փնտրում ենք անորոշ գործակիցներով երկրորդ կարգի բազմանդամի տեսքով

$$y_0(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow y'_0(x) = 2ax + b \Rightarrow y''_0(x) = 2a:$$

Տեղադրենք տրված հավասարման մեջ.

$$12 \cdot 2a + 2ax + b - (ax^2 + bx + c) = 3x^2 + 7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -ax^2 + (2a - b)x + 24a + b - c = 3x^2 + 7:$$

Որպեսզի ստացվածը լինի նույնություն, x -ի համապատասխան աստիճանների գործակիցները պետք է լինեն իրար հավասար

$$\begin{cases} -a = 3 \\ 2a - b = 0 \\ 24a + b - c = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = -6 \\ c = -85 \end{cases} \Rightarrow y_0(x) = -3x^2 - 6x - 85:$$

Այսպիսով, տրված հավասարման ընդհանուր լուծումը կլինի

$$y = C_1 e^{-\frac{x}{3}} + C_2 e^{\frac{x}{4}} - 3x^2 - 6x - 85:$$

2) բնութագրիչ հավասարումը կլինի $r^2 - r - 6 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow r_1 = 3, \quad r_2 = -2, \text{ ուրեմն } \bar{y} = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-2x}:$$

Դժվար չէ համոզվել, որ

$$y'' - y' - 6y = e^x \quad \text{և} \quad y'' - y' - 6y = \sin 3x$$

հավասարումների մասնակի լուծումների գումարը կլինի տրված դիֆերենցիալ հավասարման համար մասնակի լուծում: Առաջինի համար մասնակի լուծումը փնտրում ենք $y_{01}(x) = ae^x$ տեսքով

$$(ae^x)'' - (ae^x)' - 6ae^x = e^x \Rightarrow a = -\frac{1}{6} \Rightarrow y_{01}(x) = -\frac{1}{6}e^x :$$

Երկրորդի համար

$$y_{02}(x) = b \sin 3x + d \cos 3x \Rightarrow y'_{02}(x) = 3b \cos 3x - 3d \sin 3x \Rightarrow \\ \Rightarrow y''_{02}(x) = -9b \sin 3x - 9d \cos 3x :$$

Տեղադրելով կստանանք

$$-9b \sin 3x - 9d \cos 3x - 3b \cos 3x + 3d \sin 3x - \\ - 6b \sin 3x - 6d \cos 3x = \sin 3x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3d - 15b) \sin 3x - 3(5d + b) \cos 3x = \sin 3x :$$

Հավասարեցնելով $\sin 3x$ -ի և $\cos 3x$ -ի գործակիցները, կստանանք հետևյալ համակարգը

$$\begin{cases} 3d - 15b = 1 \\ 5d + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -\frac{5}{78} \\ d = \frac{1}{78} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_{02}(x) = -\frac{5}{78} \sin 3x + \frac{1}{78} \cos 3x :$$

Տրված դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումն է

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-2x} - \frac{1}{6} e^x - \frac{5}{78} \sin 3x + \frac{1}{78} \cos 3x \quad \text{Ֆունկցիան:}$$

424. Գտնել հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումների ընդհանուր լուծումները :

1) $y'' + 4y' - 5y = 1;$

2) $y'' - 2y' + 2y = 2x;$

3) $y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3;$

4) $2y'' + 5y' = 5x^2 - 2x - 1;$

5) $y'' - 7y' + 6y = \sin x;$

6) $2y'' + y' - y = 2e^x;$

425. Գտնել տրված սկզբնական պայմաններին բավարարող մասնակի լուծումները:

1) $y'' - 2y' + 10y = 10x^2 + 18x + 6$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3,2$;

2) $4y'' + 16y' + 15y = 4e^{-\frac{3}{2}x}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 5,5$:

Պատասխաններ

$$3. f(4; -3) = 5, f(1; 0) = 1, f(12; 3) = \sqrt{153} : 4. f(1; 2) = f(3; 6) = f(5; 10) = 0,8 : 5. f(x; -y) = \frac{x^2 + y}{y^2 - x}, f(-x; y) = \frac{x^2 - y}{y^2 + x},$$

$$f\left(\frac{1}{x}; \frac{1}{y}\right) = \frac{y^2 - x^2 y}{x^2 - y^2 x} : 6. f(3; -2; 5) = 5 \ln 2, f(7; 1; 0) = 3 \ln 2 :$$

15. 1) XOY հարթությունը; 2) XOY հարթությունը, բացի O(0;0) կետից; 3) XOY հարթությունը, բացի $y = \pm x$ ուղիղների կետերը; 4) XOY հարթությունը, բացի $x^2 + y^2 < 1$ շրջանի ներքին կետերը; 5) առաջին քառորդի կետերը, բացի OX դրական կիսառանցքը ($y > 0$); 6) XOY հարթությունը, բացի $y = -x$ ուղղի կետերը; 7) $x^2 + y^2 < 4$ շրջանի ներքին կետերը (բաց շրջան); 8) $y = -x$ կիսորդից վերև ընկած կիսահարթությունը, բացի $x + y = 1$ ուղղի կետերը; 9) $x + y = -1$ և $x + y = 1$ ուղիղների միջև ընկած շերտը այդ ուղիղների հետ միասին; 10) $x + y + z = 0$ հարթությունից վերև ընկած կիսատարածությունը այդ հարթության հետ միասին; 11) $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ գնդի արտաքին մասը:

$$18. 1) -8; 2) 0; 3) 0,25; 4) 1; 5) \text{ սահմանը գոյություն չունի}; 6) e^3; 7) 0; 8) 0: 24. 1) z'_x = 4xy^2 + 3y^2, z'_y = 4x^2y + 6xy + 3y^2; 2) z'_x = 45x^2y^2(5x^3y^2 + 1)^2, z'_y = 30x^3y(5x^3y^2 + 1)^2;$$

$$3) z'_x = \frac{y}{\sqrt{x}} + 6x\sqrt[3]{y}, z'_y = 2\sqrt{x} + \frac{x^2}{\sqrt[3]{y^2}}; 4) z'_x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$z'_y = \frac{y}{x^2 + y^2 + x\sqrt{x^2 + y^2}}; 5) z'_x = \frac{1}{y} \cos \frac{x}{y}, z'_y = -\frac{x}{y^2} \cos \frac{x}{y};$$

$$6) z'_x = e^{xy(x^2+y^2)}(3x^2y + y^3), z'_y = e^{xy(x^2+y^2)}(3xy^2 + x^3);$$

$$7) u'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, u'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$u'_z = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}};$$

$$8) u'_x = \frac{1}{y} - \frac{z}{x^2}, \quad u'_y = \frac{1}{z} - \frac{x}{y^2},$$

$$u'_z = \frac{1}{x} - \frac{y}{z^2};$$

$$9) u'_x = (y - z)(2x - y - z),$$

$$u'_y = (z - x)(2y - x - z),$$

$$u'_z = (x - y)(2z - x - y);$$

$$26. 1) z''_{x^2} = 6xy, \quad z''_{y^2} = 6xy,$$

$$z''_{xy} = 3x^2 + 3y^2;$$

$$2) z''_{x^2} = \frac{2y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$z''_{y^2} = \frac{2x^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$z''_{xy} = -\frac{4xy}{(x^2 + y^2)^2};$$

$$30. 1) dz = (y + 2x)dx + (x + 2y)dy;$$

$$2) dz = -\frac{ydx}{x^2 + y^2} + \frac{x dy}{x^2 + y^2}; 3) dz = (e^y + ye^x)dx + (xe^y + e^x)dy;$$

$$4) dz = (\sin y + y \cos x)dx + (x \cos y + \sin x)dy; 5) dz = \frac{dx}{x + \ln y} +$$

$$+ \frac{dy}{y(x + \ln y)}; 6) dz = (y \sin xy + xy^2 \cos xy)dx + (x \sin xy +$$

$$+ x^2 y \cos xy)dy; 32. 1) \frac{dz}{dt} = 6t^5 + 5t^4 + 4t^3;$$

$$2) \frac{dz}{dt} = -4e^{2 \cos 2t} \cdot \sin 2t; 3) \frac{dz}{dt} = \frac{3t(4 + 3t^2)}{2\sqrt{1+t^2}(1+t^2)} \operatorname{ctg} \frac{3t^2}{\sqrt{1+t^2}};$$

$$34. 48 - 12\sqrt{3}; 35. 0,7\sqrt{2}; 37. 1) \operatorname{grad} z = -11\vec{i} + 69\vec{j};$$

$$2) \operatorname{grad} z = 1,25\vec{i} - 0,75\vec{j}; 3) \operatorname{grad} z = -\vec{i} + 0,25\pi\vec{j};$$

$$4) \operatorname{grad} u = 3\vec{i} - 6\vec{j} - 2\vec{k}; 39. 1) z_{\min} = z(1; 1) = -1;$$

$$2) z_{\min} = z(1; 0) = -1; 3) z_{\min} = z(\sqrt{2}; -\sqrt{2}) = z(-\sqrt{2}; \sqrt{2}) = -8;$$

$$4) z_{\max} = z(3; 2) = 108; 5) z_{\max} = z(21; 20) = 282;$$

$$41. 1) z_{\min} = 5,76, \text{ при } x = 1,44, y = 1,92; 2) z_{\min} = 2, \text{ при}$$

$x = y = 1$; 3) $z_{\min} = -\sqrt{5}$, таке $x = -0,4\sqrt{5}$, $y = -0,2\sqrt{5}$ та

$z_{\max} = \sqrt{5}$, таке $x = 0,4\sqrt{5}$, $y = 0,2\sqrt{5}$: 47. $-\frac{1}{2x^2} + C$:

48. $\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx + C$: 49. $\frac{x^6}{2} - x^5 + \frac{x^4}{4} + C$: 50. $9x + 2x^6 +$

$+\frac{4}{11}x^{11} + C$: 51. $\frac{5}{12}x^{\frac{12}{5}} + C$: 52. $\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} - \frac{6}{11}x^{\frac{11}{6}} + C$:

53. $\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + \frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}} + C$: 54. $\frac{2}{15}(5x)^{\frac{3}{2}} + C$: 55. $\frac{2}{3}\sqrt{3x} + C$:

56. $\frac{5}{2}x^2 + 4x + \frac{3}{x} + C$: 57. $\frac{(5x+2)^5}{25} + C$: 58. $-\frac{4}{9(3x+2)^9} + C$:

59. $\frac{2}{15}(2+5x)^{\frac{3}{2}} + C$: 60. $-\frac{2}{3}\sqrt{2-3x} + C$: 61. $C - \frac{5}{3(x^3+2)}$:

62. $C - \frac{(4-5x^4)^6}{120}$: 63. $\frac{1}{18}(4x^3+3)^{\frac{3}{2}} + C$:

64. $\frac{5}{21}(7x^2+8)^{\frac{3}{2}} + C$: 65. $\frac{14}{9}(3x^2-4)^{\frac{3}{4}} + C$:

66. $\frac{3}{40}(3x^3+5)^{\frac{10}{3}} + C$: 67. $\frac{1}{3}\ln|x| + C$:

68. $\frac{1}{5}\ln|2+5x| + C$: 69. $-\frac{3}{2}\ln|5-x^2| + C$: 70. $\frac{1}{6}\ln|5+4x^3| + C$:

71. $\ln|5+e^x| + C$: 72. $\frac{3}{10}\ln|4+5e^{2x}| + C$: 73. $\frac{(4+\ln x)^4}{4} + C$:

74. $\frac{\sin^6 x}{6} + C$: 75. $-\frac{5}{2}\ln|3+2\cos x| + C$: 76. $\ln|e^x + \sin x| + C$:

77. $-\frac{1}{2}\ln|4-3\sin 2x| + C$: 78. $-\frac{1}{3}\ln|2-3\operatorname{tg} x| + C$:

79. $\frac{1}{10} \operatorname{tg}^2 5x + C$; 80. $\frac{1}{3} \ln |4 + \operatorname{tg} 3x| + C$; 81. $-\frac{8}{5} \sqrt{5 - 3 \sin x} + C$;
 82. $\ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C$; 83. $\frac{5^x e^x}{1 + \ln 5} + C$; 84. $\frac{5}{3} e^{3x} + C$; 85. $6e^{\frac{x}{2}} + C$;
 86. $-\frac{1}{2e^{2x}} + C$; 87. $\frac{1}{2} e^{2x} + \frac{3x^2}{2} + C$; 88. $2 \cdot (e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}) + C$;
 89. $e^x - 2x - e^{-x} + C$; 90. $3e^{\frac{x}{3}} + C$; 91. $\frac{1}{3} (e^{3x} - e^{-3x}) -$
 $-3 \cdot (e^x + e^{-x}) + C$; 92. $-e^{\cos x} + C$; 93. $e^{\sin x} + C$; 94. $\frac{1}{3} \dot{e}^{x^3} + C$;
 95. $2e^{\sqrt{x}} + C$; 96. $C - e^{\frac{1}{x}}$; 97. $C - \frac{1}{2} e^{\frac{1}{x^2}}$; 98. $C - e^{-x^4}$;
 99. $\frac{1}{2} \ln(e^{2x} + 3) + C$; 100. $x - \frac{3}{4} e^{-4x} + C$; 101. $\frac{5}{3} e^{\operatorname{tg} 3x} + C$;
 102. $C - \ln(e^{\cos x} + 4)$; 103. $\frac{5 \cdot 3^{\ln x}}{\ln 3} + C$; 106. 1) $\frac{1}{6} \operatorname{arctg} \frac{x^3 - 3}{2} + C$;
 2) $\frac{2}{3} (1 + \ln x)^{\frac{3}{2}} + C$; 3) $C - \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{\sqrt{2}}{|x|}$;
 4) $\frac{2}{3} (x+1)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{x+1} + C$; 5) $\ln(\sin x + \sqrt{1 + \sin^2 x}) + C$;
 107. 1) $2(\frac{\sqrt{x^3}}{3} - \frac{x}{2} + 2\sqrt{x} - 2 \ln |1 + \sqrt{x}|) + C$; 2) $\frac{(\arcsin x)^3}{3} + C$;
 3) $\frac{2}{3} (e^x - 2)\sqrt{e^x + 1} + C$; 4) $\ln \left| \frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1} \right| + C$;
 5) $2 \operatorname{arctg} \sqrt{e^x - 1} + C$; 6) $\frac{2}{5} (\cos^2 x - 5)\sqrt{\cos x} + C$;

$$7) \ln \left| \frac{x}{1 + \sqrt{x^2 + 1}} \right| + C;$$

$$8) C - \arcsin \frac{1}{|x|};$$

$$109. x \sin x + \cos x + C; \quad 110. -\frac{1}{3}x \cos x + \frac{1}{9} \sin 3x + C;$$

$$111. \frac{x}{2} \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C;$$

$$112. \frac{1}{3}x^2 \sin 3x + \frac{2}{9}x \cos 3x - \frac{2}{27} \sin 3x + C;$$

$$113. \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4} \sin 2x - \frac{1}{8} \cos 2x + C; \quad 114. xe^{3x} - \frac{1}{3}e^{3x} + C;$$

$$115. 3xe^{2x} - \frac{3}{2}e^{2x} + C; \quad 116. \frac{5}{3}xe^{3x} - \frac{11}{9}e^{3x} + C; \quad 117. -2xe^{-2x} +$$

$$+ \frac{1}{2}e^{-2x} + C; \quad 118. x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C; \quad 119. x \arccos x -$$

$$- \sqrt{1-x^2} + C; \quad 120. x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C; \quad 121. x \operatorname{arcc} \operatorname{tg} x +$$

$$+ \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C; \quad 122. \frac{1}{4} \left[(2x^2 - 1) \arcsin x + x \sqrt{1-x^2} \right] + C;$$

$$123. \frac{1}{4} \left[(2x^2 - 1) \arccos x - x \sqrt{1-x^2} \right] + C; \quad 124. \frac{1}{2} \left[(x^2 + 1) \operatorname{arctg} x -$$

$$- x \right] + C; \quad 125. x \ln(x-1) + C; \quad 126. \frac{x^4}{16} (4 \ln x - 1) + C;$$

$$127. -\frac{1}{x} (\ln x + 1) + C; \quad 128. \frac{(\sin x - \cos x)e^x}{2} + C;$$

$$129. \frac{(2 \sin 3x - 3 \cos 3x)e^{2x}}{13} + C; \quad 130. \frac{(\cos x + \sin x)e^x}{2} + C;$$

$$131. \frac{(3 \cos 2x + 2 \sin 2x)e^{3x}}{13} + C; \quad 132. \frac{(-2 \sin 5x - 5 \cos 5x)e^{-2x}}{29} +$$

$$+ C: \quad 133. \frac{(-3 \cos 4x + 4 \sin 4x)e^{-3x}}{25} + C: \quad 136. \operatorname{arctg}(x-1) + C:$$

$$137. \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{x+3}{4} + C: \quad 138. \frac{1}{2\sqrt{15}} \ln \left| \frac{x-4-\sqrt{15}}{x-4+\sqrt{15}} \right| + C:$$

$$139. \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{3} + C: \quad 140. \frac{1}{18} \ln \left| \frac{3x-4}{3x+2} \right| + C:$$

$$141. \frac{1}{8} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{4} + C: \quad 142. \frac{1}{30} \operatorname{arctg} \frac{5x+1}{6} + C:$$

$$143. \frac{1}{12} \ln \left| \frac{x^2-1}{x^2+5} \right| + C: \quad 144. \frac{1}{8} \operatorname{arctg} \frac{x^2+3}{4} + C:$$

$$145. \frac{1}{10} \ln |x+3| + \frac{1}{15} \ln |x-2| - \frac{1}{6} \ln |x+1| + C:$$

$$146. \ln \frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}} + C: \quad 147. \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C:$$

$$148. \frac{1}{2} \ln |x^2-1| - \ln |x| + C: \quad 149. \frac{1}{18} \ln |x^2-9| - \frac{1}{9} \ln |x| + C:$$

$$150. C - \frac{1}{x} - \operatorname{arctg} x: \quad 151. \frac{1}{x+1} + \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + C:$$

$$152. \frac{1}{2} \ln |x^2+2x| - \ln |x+1| + C: \quad 153. \frac{1}{5} \ln |x-2| -$$

$$-\frac{1}{10} \ln(x^2+1) - \frac{2}{5} \operatorname{arctg} x + C: \quad 154. \frac{1}{2} \ln |x-1| + \frac{1}{5} \ln |x-2| +$$

$$+\frac{3}{10} \ln |x+3| + C: \quad 155. \frac{1}{25} \ln \left| \frac{x}{x-5} \right| - \frac{1}{5(x-5)} + C:$$

$$156. \frac{5}{2} \ln |x-1| - \frac{5}{4} \ln(x^2+1) - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C:$$

$$161. C - \frac{1}{3} \cos 3x: \quad 162. C - 3 \cos \frac{x}{3}: \quad 163. \frac{1}{2} \sin 2x + C:$$

164. $5 \sin \frac{x}{5} + C$: 165. $C - \frac{1}{5} \ln |\cos 5x|$: 166. $4 \ln \left| \sin \frac{x}{4} \right| + C$:
167. $\frac{1}{5} \operatorname{tg} 5x + C$: 168. $C - \frac{1}{3} \operatorname{ctg} 3x$: 169. $C - \frac{1}{2} \operatorname{tg}(1 - x^2)$:
170. $\frac{5}{3} \operatorname{ctg}(4 - x^3) + C$: 171. $C - \sin \frac{1}{x}$: 172. $C - \frac{2}{5} \cos \sqrt{5x}$:
173. $C - \frac{1}{3} \ln |\cos x^3|$: 174. $\frac{5}{4} \ln |\sin x^4| + C$: 175. $C - \frac{1}{3} \cos(e^{3x})$:
176. $\frac{1}{5} \sin^5 x + C$: 177. $\frac{x^3}{3} + \frac{1}{3} \cos 3x + C$: 178. $C - \frac{2}{5} \sqrt{2 - \cos 5x}$:
179. $\frac{1}{2} \sin^4 \frac{x}{2} + C$: 180. $\frac{1}{10} \sin^2 5x + C$: 181. $C - \frac{1}{16} \cos 8x +$
 $+\frac{1}{4} \cos 2x$: 182. $C - \frac{1}{18} \cos 9x + \frac{1}{10} \cos 5x$: 183. $\frac{1}{4} \sin 2x -$
 $-\frac{1}{16} \sin 8x + C$: 184. $\frac{1}{6} \sin 3x - \frac{1}{22} \sin 11x + C$: 185. $\frac{1}{2} \sin x +$
 $+\frac{1}{10} \sin 5x + C$: 186. $\frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{36} \sin 18x + C$: 187. $\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x +$
 $+ C$: 188. $\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + C$: 189. $\frac{x}{2} - \frac{3}{4} \sin \frac{2x}{3} + C$:
190. $\frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} + C$: 191. $C - \cos x + \frac{\cos^3 x}{3}$:
192. $C - \frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5}$: 193. $\frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7} + C$:
194. $C - \frac{\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^7 x}{7}$: 195. $\frac{\sin^3 x}{3} - \frac{2 \sin^5 x}{5} + \frac{\sin^7 x}{7} + C$:
196. $\frac{1}{3 \cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C$: 197. $\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$:
198. $\frac{x}{8} - \frac{\sin 8x}{64} + C$: 199. $\frac{3x}{8} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C$:

200. $\frac{3x}{8} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C$: 201. $\operatorname{tg} x - x + C$: 202. $\frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x +$
 $+ \ln |\cos x| + C$: 203. $C - \operatorname{ctg} x - x$: 204. $C - \frac{1}{2} \operatorname{ctg}^2 x - \ln |\sin x|$:
 205. $\frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x + C$: 206. $\frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x - \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x - \ln |\cos x| + C$:
 207. $C - \frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 x + \operatorname{ctg} x + x$: 208. $C - \frac{1}{4} \operatorname{ctg}^4 x + \frac{1}{2} \operatorname{ctg}^2 x + \ln |\sin x|$:
 212. $\arcsin(x-1) + C$: 213. $\frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| x\sqrt{3} + \frac{5}{2\sqrt{3}} + \sqrt{3x^2 + 5x} \right| + C$:
 214. $\frac{5}{\sqrt{7}} \arcsin \frac{7x+4}{\sqrt{79}} + C$: 215. $2 \arcsin \frac{x+1}{2} + C$:
 216. $\frac{2}{3} \sqrt{9x^2 + 1} + \frac{5}{3} \ln |3x + \sqrt{9x^2 + 1}| + C$: 217. $\sqrt{x^2 + x} +$
 $+ 2 \ln |x+1 + \sqrt{x^2 + 2x}| + C$: 218. $\frac{1}{2} \arcsin 2x + \frac{1}{2} \sqrt{1-4x^2} + C$:
 219. $C - 2\sqrt{1-x-x^2} - 9 \arcsin \frac{2x+1}{\sqrt{5}}$: 220. $C - \ln \left| \frac{1 + \sqrt{x^2 + 1}}{x} \right|$:
 221. $C - \ln \left| \frac{x+2 + 2\sqrt{x^2 + x+1}}{x} \right|$: 222. $\frac{1}{3} \sqrt{(x+x^2)^3} -$
 $-\frac{(1+2x)\sqrt{x+x^2}}{8} + \frac{1}{8} \ln(\sqrt{x} + \sqrt{1+x}) + C \quad (x > 0)$: 223. $\frac{6}{5} x^{\frac{5}{6}} -$
 $-4\sqrt{x} + 18 \sqrt[3]{x} + \frac{3 \sqrt[6]{x}}{1 + \sqrt[3]{x}} - 2 \operatorname{arctg} \sqrt[6]{x} + C$: 224. $\frac{1}{15} \sqrt[3]{(3x+1)^5} +$
 $+\frac{1}{3} \sqrt[3]{(3x+1)^2} + C$: 225. $C - \frac{2}{3} \sqrt{(1-x)^3} + \frac{2}{5} \sqrt{(1-x)^5}$:

226. $\frac{3}{5}(1 + \sqrt[3]{x^2})^{\frac{5}{2}} - 2(1 + \sqrt[3]{x^2})^{\frac{3}{2}} + 3\sqrt{1 + \sqrt[3]{x^2}} + C$;
227. $\frac{1}{4} \ln \frac{\sqrt[4]{1+x^4} + x}{\sqrt[4]{1+x^4} - x} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x} + C$; 228. $2\sqrt{x-2} +$
 $+\sqrt{2} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x-2}{2}} + C$; 229. $C - 4\sqrt{4-x^2} - \frac{\sqrt{(4-x^2)^3}}{3}$; 231. 3;
232. $40\frac{8}{15}$; 233. 2; 234. 2; 235. $\frac{\pi}{3}$; 236. $2\frac{1}{5}$; 237. 4; 238. $12\frac{2}{3}$;
239. $\frac{8}{49}$; 240. $\frac{1}{3}$; 241. 12; 242. $32\frac{2}{3}$; 243. $3\frac{3}{4}$; 244. $\frac{2}{3}(\sqrt{2}-1)$;
245. 4; 246. 2; 247. $\operatorname{arctg} 3 - \operatorname{arctg} 2$; 248. $\frac{1}{2}(e^4 - 1)$; 249. $4\frac{2}{3}$;
250. $2 \ln 2$; 252. 1; 253. -2π ; 254. $\frac{(9-4\sqrt{3})\pi}{36} + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$;
255. $\frac{\pi^2 + 4}{16}$; 256. $4 \ln 2 - \frac{15}{16}$; 257. $\frac{(5e^4 - 1)e^2}{4}$; 258. $\frac{\pi - 2 \ln 2}{4}$;
259. $\frac{2e^3 + 1}{9}$; 260. $e - 2$; 261. $\frac{e^{\frac{3\pi}{2}} - 3}{10}$; 263. $2(2 - \ln 3)$;
264. $6\frac{2}{9}$; 265. $20\frac{1}{3}$; 266. $2(2 - \operatorname{arctg} 2)$; 267. $\frac{1}{5}$;
268. $1 + \frac{1}{2} \ln \frac{2}{1+e^2}$; 269. $\frac{2}{7}$; 270. $2 - \sqrt{2}$; 271. $13\frac{5}{9}$;
272. $1 - \frac{\pi}{4}$; 274. $\frac{1}{2}$; 275. $\frac{\pi}{2}$; 276. π ; 277. π ; 278. π ;
279. $\frac{1}{3}$; 280. 0; 281. π ; 282. $\frac{2}{3} \ln 2$;

283. -1 : 287. $18\frac{2}{3}$: 288. 24 : 289. $10\frac{2}{3}$: 290. 18 : 291. $13,5$:
 292. $4,5$: 293. $8\sqrt{2}$: 294. $21\frac{1}{3}$: 295. $7,5 - 4\ln 4$: 296. $17,5 -$
 $-6\ln 6$: 297. πa^2 : 298. 1 : 299. $\frac{32}{3}\sqrt{6}$: 300. $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$: 302. $\frac{3}{2} +$
 $+2\ln 2$: 303. $\frac{e^2 + 1}{4}$: 304. $\ln \operatorname{tg} \frac{7\pi}{24}$: 307. $\frac{28\pi}{15}$: 308. $9,6\pi$:
 309. $\frac{512\pi}{3}$: 310. $\frac{843\pi}{5}$: 311. 8π : 312. 8π : 313. $\frac{4}{3}\pi ab^2$:
 314. $\frac{3}{2}\pi$: 315. $218,7\pi$: 316. $\frac{96\pi}{5}$: 317. 2π : 318. $\frac{512\pi}{15}$:
 320. $\frac{3}{4}$: 321. $\frac{1}{2}$: 322. 2 : 323. $\frac{1}{1-q}$: 324. տարամետ է:
 326. այո: 327. ոչ: 328. ոչ: 329. այո: 330. ոչ: 334. տարամետ է:
 335. զուգամետ է: 336. զուգամետ է: 337. տարամետ է:
 338. տարամետ է: 339. տարամետ է: 341. տարամետ է:
 342. տարամետ է: 343. զուգամետ է: 344. տարամետ է:
 345. տարամետ է: 346. զուգամետ է: 348. զուգամետ է:
 349. զուգամետ է: 350. զուգամետ է: 351. տարամետ է:
 352. տարամետ է: 353. զուգամետ է: 355. զուգամետ է:
 356. զուգամետ է: 357. տարամետ է: 358. զուգամետ է:
 359. տարամետ է: 360. տարամետ է: 362. զուգամետ է:
 363. տարամետ է: 364. զուգամետ է: 365. տարամետ է:
 366. զուգամետ է: 367. տարամետ է: 369. զուգամետ է:
 370. զուգամետ է: 371. զուգամետ է: 372. զուգամետ է:
 373. զուգամետ է: 374. զուգամետ է: 376. պայմանական
 զուգամետ է: 377. պայմանական զուգամետ է: 378. պայմանական
 զուգամետ է: 379. բացարձակ զուգամետ է: 380. բացարձակ
 զուգամետ է: 381. պայմանական զուգամետ է: 383. $[-1; 1]$:

$$384. (-4; 4) : 385. (-3e; 3e) : 386. \left(-\frac{1}{e}; \frac{1}{e}\right) : 387. [-1; 1) :$$

$$388. [-1; 1) : 391. e^{\cos x} = e \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} - \dots\right) : 392. \sec x =$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + \dots : 393. \operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \dots :$$

$$394. \operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots : 395. \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = x - \frac{x^3}{6} +$$

$$+ \frac{3}{40}x^5 - \dots : 396. \operatorname{th} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \dots :$$

$$397. \sum_{n=0}^{\infty} [1 - (-2)^{n+1}] x^n, \quad R = 1 : 398. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n}{(2n)!} x^{2n}, \quad R = +\infty :$$

$$399. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n!} x^{n+1}, \quad R = +\infty :$$

$$400. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - 1\right) \left(\frac{1}{3} - 2\right) \cdots \left(\frac{1}{3} - n + 1\right)}{n! \cdot 2^{3n-1}} x^n, \quad R = 8 :$$

$$401. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2n-1} x^{2n-1}, \quad R = 1 : 402. \frac{1}{8} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{16^n}{(2n)!} x^{2n},$$

$$R = +\infty : 409. 1) 2y^2 - 3x^2 = C ; 2) y^3 + x^3 - 3x = C ;$$

$$3) e^x + e^{-y} = C ; 4) y = C \sin x ; 5) y \sin y + \cos y - x \cos x +$$

$$+ \sin x = C ; 6) y = C \sqrt{1 + e^{2x}} ; 7) \sqrt{y} + x(1 - \ln x) = C, y = 0 ;$$

$$8) \operatorname{tg} \frac{x+y}{2} - x = C : 410. 1) x^2 - y^2 = 1 ; 2) y = e^{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} ;$$

$$412. 1) x^2 - 2xy - y^2 = C ; 2) x e^{\frac{y}{x}} = C, x = 0 ; 3) x^2 + y^2 = Cy ;$$

$$4) y = x e^{1+Cx} ; 5) e^{-e^{-\frac{y}{x}}} = Cx ; 6) y = x \sin(\ln|x| + C), y = \pm x ;$$

$$7) (x + y - 1)^3 = C(x - y + 3); \quad 8) x + 2y + 3 \ln |x + y - 2| = C,$$

$$x + y = 2; \quad 413. \quad 1) y = -x; \quad 2) \ln |y| + 2 \sqrt{\frac{x}{y}} = 2;$$

$$415. \quad 1) y = Ce^{-2x} + 2x - 1; \quad 2) y = e^{-x^2} \left(C + \frac{x^2}{2} \right);$$

$$3) y = (x + C)(1 + x^2); \quad 4) y = x \ln x + \frac{C}{x}; \quad 5) y = (x + 1)^2 (e^x + C);$$

$$6) y = x(Ce^{-x} - 1); \quad 7) y(x^2 + Cx) = 1; \quad 8) y^2 = x \ln \frac{C}{x};$$

$$416. \quad 1) y = \sin x; \quad 2) y = \frac{x}{x+1} (x - 1 + \ln |x|);$$

$$418. \quad 1) x - 3x^2y^2 + y^3 = C; \quad 2) x^2 + 2xy + 2y^2 = C;$$

$$3) x^4 - x^2y^2 + y^4 = C; \quad 4) x^3 + 3x^2y - 2xy^2 - y^3 = C;$$

$$5) x^2 + y^2 - 2 \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = C; \quad 6) xy - \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = C;$$

$$7) x^2 + ye^{-x} = C; \quad 8) x \sin y + y \cos x + \ln \left| \frac{x}{y} \right| = C;$$

$$419. \quad 1) 5x^2y - 8xy + x + 3y = 27; \quad 2) x^2 + 2ye^{\frac{x}{y}} = 4;$$

$$421. \quad 1) y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}; \quad 2) y = C_1 e^{-7x} + C_2 e^{3x};$$

$$3) y = C_1 e^x + C_2 e^{\frac{2}{3}x}; \quad 4) y = C_1 e^{-x\sqrt{7}} + C_2 e^{x\sqrt{7}};$$

$$5) y = e^{-x} (C_1 + C_2 x); \quad 6) y = e^{\frac{3}{2}x} (C_1 + C_2 x);$$

$$7) y = C_1 \cos x + C_2 \sin x; \quad 8) y = e^{2x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x);$$

$$422. \quad 1) y = e^x; \quad 2) y = (7 - 3x)e^{x-2};$$

424. 1) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-5x} - 0,2$; 2) $y = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x) + x + 1$; 3) $y = e^{3x} (C_1 + C_2 x) + \frac{2}{9} x^2 + \frac{5}{27} x + \frac{11}{27}$; 4) $y = C_1 + C_2 e^{-\frac{5}{2}x} + \frac{1}{3} x^3 - \frac{3}{5} x^2 + \frac{7}{25} x$; 5) $y = C_1 e^x + C_2 e^{6x} + \frac{1}{74} (5 \sin x + 7 \cos x)$; 6) $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{\frac{x}{2}} + e^x$;

425. 1) $y = e^x (0,16 \cos 3x + 0,28 \sin 3x) + x^2 + 2,2x + 0,84$;

2) $y = (1+x)e^{-\frac{3}{2}x} + 2e^{-\frac{5}{2}x}$;

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Գլուխ VIII. Մի քանի փոփոխականների ֆունկցիաներ.....	3
§1. Հիմնական գաղափարներ.....	3
§2. Մի քանի փոփոխականների ֆունկցիայի սահմանը և անընդհատությունը.....	8
§3. Մասնակի ածանցյալներ և լրիվ դիֆերենցիալ.....	10
§4. Բարդ ֆունկցիայի ածանցյալը: Ածանցյալ տվյալ ուղղությամբ: Գրադիենտ.....	14
§5. Մի քանի փոփոխականների ֆունկցիաների էքստրեմումները.....	17
Գլուխ IX. Ինտեգրալներ.....	21
§1. Անորոշ ինտեգրալ.....	21
§2. Որոշյալ ինտեգրալ.....	48
Գլուխ X. Շարքեր.....	64
§1. Թվային շարքեր.....	64
§2. Կամայական շարքեր.....	73
§3. Աստիճանային շարքեր.....	75
Գլուխ XI. Դիֆերենցիալ հավասարումներ.....	80
§1. Հիմնական գաղափարներ.....	80
§2. Առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարումներ.....	83
§3. Երկրորդ կարգի գծային դիֆերենցիալ հավասարումներ հաստատուն գործակիցներով.....	89
Պատասխաններ.....	94

Ռոբերտ Գալոյան
Արկադի Հայրապետյան
Սկրտիչ Գյուլգյուլյան

Բարձրագույն մաթեմատիկայի խնդիրների ձեռնարկ

Հրատ. խմբագիր Յ. Համբարձումյան
Սրբագրիչ Գ. Հովհաննիսյան

Ստորագրված է տպագրության 22.05.97թ.:
Հանձնված է արտադրության 28.05.97թ.:
Չափսը՝ 60x84 1/16: Թիւղթ տպագրական:
6,3 պայմ. տպ. մամ., 4,8 հրատ. մամ.:
Տպաքանակ՝