

Յ 1
Խ 435

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՏՆՏԵՍԱԳԻՏԱԿԱՆ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ

Մ. Լ. Աղալովյան, Մ. Մ. Գյուլգյուլյան

ԲԱՐՁՐԱԳՈՒՅՆ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ԴԱՍԸՆԹԱՑԻ
ՄԵԹՈԴԱԿԱՆ ՑՈՒՑՈՒՄՆԵՐ ԵՎ ՍՏՈՒԳՈՂԱԿԱՆ
ԱՇԽԱՏԱՆՔՆԵՐ

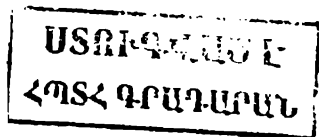
(հեռակա ուսուցման համակարգում սովորող
ուսանողների համար)



ԵՐԵՎԱՆ
ՏՆՏԵՍԱԳԻՏ
2006

ՀՏԴ 51 (07)
ԳՄԴ 22. 11 47
Ա 435

Հրատարակության և ներկայացրել է ՊՏԻ
բարձրագույն մաթեմատիկայի ամբիոնը



Կազմողներ

Ֆ.մ.գ.թ. Մ.Լ. Աղալովյան
Մ.Ս. Գյուլգյուլյան

Մասն. խմբագիր

ԵՊՏԻ բարձրագույն մաթեմատիկայի
ամբիոնի վարիչ,
Ֆ.մ.գ.թ., դոցենտ Ա.Ն. Հայրապետյան

Ա 435

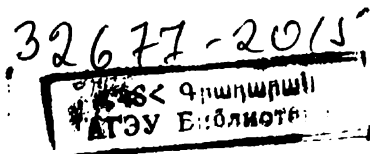
Մ.Լ. Աղալովյան, Մ.Ս. Գյուլգյուլյան
Բարձրագույն մաթեմատիկայի դասընթացի մեթոդական
ցուցումներ և ստուգողական աշխատանքներ
(հեռակա ուսուցման համակարգում սովորող ուսանողների
համար). - Եր.: Տնտեսագետ, 2006. - 54 էջ:

Սույն ծեռնարկը նախատեսված է հեռակա ուսուցման համակարգում
սովորող ուսանողների համար: Այն պարունակում է բարձրագույն
մաթեմատիկայի դասընթացի ծրագիրը, ստուգողական աշխատանքների
տարբերակները, ինչպես նաև տիպային խնդիրների և առաջադրանքների
լուծումներ և ցուցումներ, որոնք կհետաքննեն ուսանողների ինքնուրույն
աշխատանքը:

Ա $\frac{1602010000}{719(01) - 2006}$ 2006

ԳՄԴ 22.11 47

ISBN 99941-51-19-3



ՀՊՏՀ գրադարան

«Տնտեսագետ» հրատարակչություն, 2006



000035361

ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

Դժվար է թերագնահատել բարձրագույն մաթեմատիկայի դերը կրթված մարդու գիտելիքների համակարգում: Մաթեմատիկայի մեթոդները և հասկացությունները հնարավորություն են տալիս մոդելավորելու մարդկային գործունեության գրեթե բոլոր ոլորտները և ուսումնասիրելու դիտարկվող երևույթները:

Մաթեմատիկական տեսության կառուցման խստությունը հանդիսանում է դասական օրինակ տրամաբանորեն կատարյալ տեսության կառուցման համար: Մաթեմատիկական առարկաների ուսումնասիրությունը կանոնակարգում է մարդու մտածողության համակարգը, ներարկում է ինքնուրույն տրամաբանական մտածելակերպի հմտություններ:

Բարձրագույն մաթեմատիկայի ուսուցման նպատակը կայանում է նրա հիմնական հասկացությունների, դրույթների և մեթոդների հետ ծանոթացումը, չիականող և տրամաբանական դատողությունների միջոցով մաթեմատիկական ապացույցների ստացումը, կիրառական խնդիրների լուծումը և այլն:

Բարձրագույն մաթեմատիկայի դասընթացի հիմնական խնդիրները հանդիսանում են անալիտիկ երկրաչափության և գծային հանրահաշվի, դիֆերենցիալ և ինտեգրալ հաշիվների, թվային և աստիճանային շարքերի, դիֆերենցիալ հավասարումների ապարատների և մեթոդների յուրացումը, ինչպես նաև այդ մեթոդների տարբեր կիրառությունների հետ ծանոթությունը:

Տրված դասընթացը հանդիսանում է դպրոցում դասավանդվող մաթեմատիկայի ուսումնասիրության շարունակությունը և խորացումը:

Բարձրագույն մաթեմատիկայի դասընթացի ուսումնասիրման ընթացքում ձեռք բերված հիմնարար գիտելիքները հանդիսանում են կարևոր հիմք, այնպիսի առարկաներ ուսումնասիրելիս ինչպիսիք են՝ հավանականությունների տեսությունը և մաթեմատիկական վիճակագրությունը, ինֆորմատիկայի հիմունքները, մաթեմատիկական մեթոդները և մոդելները տնտեսագիտության մեջ և այլն:

Մաթեմատիկայի լավ իմացությունը հնարավորություն է ընձեռում լավագույնս ընկալելու տնտեսագիտական առարկաների ժամանա-

կակից նոր դասագրքերը, որոնք լեցուն են մաթեմատիկական ֆորմուլաներով և գրաֆիկներով:

Մաթեմատիկական մեթոդների լավ տիրապետումը հետագայում հնարավորություն կտա ապագա մասնագետին կարդալ և հասկանալ ակտուալ գիտական մակարդակով գրված աշխատանքներ, կատարել ինքնուրույն հետազոտություններ նշված բնագավառում:

Հաշվի առնելով, որ հեռակա ուսուցման համակարգում սովորող ուսանողները հիմնականում առարկայի հետ ծանոթանում են ինքնուրույն, այդ իսկ պատճառով ձեռնարկում մանրամասն ներկայացրել ենք բարձրագույն մաթեմատիկայի դասընթացի ծրագիրը և գրականության ընդարձակ ցանկ, որից նրանք կարող են օգտվել: Ուսանողները կարող են օգտվել նաև բարձրագույն մաթեմատիկայի ցանկացած այլ դասագրքերից, որոնք պարունակում են ծրագրում նշված բաժինները:

Ձեռնարկում զետեղված են նաև հեռակա ուսուցման ուսումնական պլաններով նախատեսված բարձրագույն մաթեմատիկայի ստուգողական աշխատանքների տարբերակները, ինչպես նաև տարբերակներում առկա առաջադրանքների նման խնդիրների լուծումը և մեթոդական ցուցումներ, որոնք հուսով ենք օգտակար կլինեն ուսանողներին:

ԲԱՐՁՐԱԳՈՒՅՆ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ԴԱՍԵՆԹԱՅԻ ԾՐԱԳԻՐԸ

Բարձրագույն մաթեմատիկայի դասընթացը հանդիսանում է ժամանակակից տնտեսագիտական բուհերում ուսումնասիրվող կարևոր դասընթացներից մեկը: Այն բաղկացած է անալիտիկ երկրաչափության և գծային հանրահաշվի, մաթեմատիկական անալիզի ներածության, մեկ և մի քանի փոփոխականի ֆունկցիաների դիֆերենցիալ և ինտեգրալ հաշիվների, թվային և աստիճանային շարքերի և դիֆերենցիալ հավասարումների բաժիններից, որոնց լավագույնս ուսումնասիրումը կնպաստի հետագայում դասավանդվող հավանականությունների տեսություն և մաթեմատիկական վիճակագրություն, ինֆորմատիկայի հիմունքներ, մաթեմատիկական մեթոդները և մոդելները տնտեսագիտության մեջ և այլ առարկաների լավ յուրացմանը:

1. ԱՆԱԼԻՏԻԿ ԵՐԿՐԱՇԱՓՈՒՅԱՆ ԵՎ ՎԵԿՏՈՐԱԿԱՆ ԿԱՆՐԱՀԱՇՎԻ ԽԱՐՐԵՐԸ.

Թեմա 1. Կոորդինատական համակարգեր հարթության և տարածության մեջ: Բևեռային կոորդինատներ: Վեկտորները հարթության վրա և տարածության մեջ: Համագիծ և համահարթ վեկտորներ: Վեկտորի երկարությունը և պրոյեկցիան: Գործողություններ վեկտորների հետ, սկալյար արտադրյալ: Հատվածի բաժանումը տրված հարաբերությամբ: Գիծը որպես կետերի երկրաչափական տեղ: Ուղղի հավասարումը տարբեր տեսքերով: Երկու ուղիղների կազմած անկյունը, նրանց զուգահեռության և ուղղահայացության պայմանները: Ուղղի նորմալ հավասարումը: Կետի հեռավորությունը ուղղից: Երկրորդ կարգի կորեր: Շրջանագիծ, էլիպս, հիպերբոլ և պարաբոլ նրանց կանոնական հավասարումները և տեսքը: Կոորդինատական առանցքների ձևափոխություն, զուգահեռ տեղափոխություն և պտույտ: Գծային անհավասարությունների համակարգերի երկրաչափական մեկնաբանությունը:

Թեմա 2. Անալիտիկ երկրաչափությունը տարածության մեջ: Հարթության հավասարումը տարբեր տեսքերով (նորմալ, ընդհանուր և այլն): Երկու հարթությունների կազմած անկյունը, նրանց

զուգահեռության և ուղղահայացության պայմանները: Ուղղի հավասարումները տարածության մեջ: Ուղղի և հարթության կազմած անկյունը, նրանց փոխադարձ դիրքերը:

2. Գծային հանրահաշվի տարրերը.

Թեմա 3. Գծային և վեկտորական տարածություններ: Վեկտորների գծորեն կախվածությունը և անկախությունը: Գծային տարածության բազիս, տարածության չափողականությունը: Վեկտորի վերլուծությունը ըստ տրված բազիսի: Սկալյար արտադրյալի տեսքը կորորդինատներով: Օրթոգոնալ բազիս:

Թեմա 4. Որոշիչներ, նրանց հատկությունները և հաշվումը: Մատրիցներ, գործողություններ նրանց հետ: Մատրիցների արտադրյալը: Հակադարձ մատրից, մատրիցի ռանգ: Գծային հավասարումների համակարգեր: ռ անհայտով ռ գծային հավասարումների համակարգերի լուծման Կրամերի կանոնը: Անհայտների արտաքսման կամ Գաուսի մեթոդը: Գծային հավասարումների համակարգերի մատրիցային գրառումը և լուծումը հակադարձ մատրիցի օգնությամբ: ռ անհայտով և m հավասարումներով գծային համակարգի համատեղելիության Կրոնեկեր-Կապելիի թեորեմը: Համասեռ համակարգեր:

3. Մաթեմատիկական անալիզի ներածություն.

Թեմա 5. Թվային բազմություններ, նրանց եզրերը: Գաղափար կոմպլեքս թվերի մասին, գործողություններ նրանց հետ: Թվային հաջորդականություններ և նրանց սահմանը: Անվերջ փոքր և անվերջ մեծ մեծություններ: Անվերջ փոքրերի հատկությունները: Ձուգամետ հաջորդականությունների հատկությունները: Գործողություններ սահմանների հետ և սահմանային անցումներ: Մոնոտոն հաջորդականության սահմանը: e թիվը: Անընդհատ տոկոսների հաշվումը:

Թեմա 6. Ֆունկցիայի գաղափարը, հիմնական տարրական ֆունկցիաները: Ձույզ, կենտ, պարբերական ֆունկցիաներ: Հակադարձ ֆունկցիա: Ֆունկցիայի սահմանի գաղափարը: Աջակողմյան և ձախակողմյան սահմաններ: Նշանավոր սահմանների հաշվումը: Ֆունկցիայի անընդհատությունը, թեորեմներ անընդհատ ֆունկցիաների հատկությունների մասին: Տարրական ֆունկցիաների անընդ-

հատությունը: Անընդհատության օգտագործումը սահմաններ հաշվելիս:

4. Մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի դիֆերենցիալ հաշիվ.

Թեմա 7. Ֆունկցիայի ածանցյալը, նրա մեխանիկական, երկրաչափական և տնտեսագիտական իմաստները: Ածանցման կանոնները: Տարրական ֆունկցիաների ածանցյալները: Բարդ ֆունկցիայի և հակադարձ ֆունկցիայի ածանցյալները: Աստիճանա-ցուցչային ֆունկցիայի ածանցյալը: Ֆունկցիայի դիֆերենցիալ, նրա երկրաչափական իմաստը: Դիֆերենցիալը, որպես մոտավոր հաշվման բանաձև: I կարգի դիֆերենցիալի տեսքի ինվարիանտությունը: Բարձր կարգի ածանցյալներ և դիֆերենցիալներ: Սահմանային մեծությունները տնտեսագիտության մեջ: Դիֆերենցիալ հաշվի հիմնական թեորեմները Ֆերմա, Ռոլլ, Լագրանժ, Կոշի: Լոպիտալի կանոնը: Թեյլորի բանաձևը բազմանդամների և ֆունկցիաների համար: Մի քանի ֆունկցիաների Մակլորենի բանաձևերը:

Թեմա 8. Ֆունկցիայի մոնոտոնության պայմանը: Ֆունկցիայի հաստատունության պայմանը: Էքստրեմումներ, էքստրեմումի գոյության անհրաժեշտ պայմանը: Էքստրեմումի գոյության բավարար պայմանները, առաջին և երկրորդ կանոնները: Ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները: Ուռուցիկ ֆունկցիաներ: Ուռուցիկության և գոգավորության պայմանները ածանցյալի միջոցով, շրջման կետ: Ասիմպտոտներ, ֆունկցիայի գրաֆիկի կառուցումը:

5. Մի քանի փոփոխականների ֆունկցիաներ.

Թեմա 9. Մի քանի փոփոխականներից կախված ֆունկցիաներ, որոշման տիրույթ, մակարդակի գծեր և մակերևույթներ: Երկու փոփոխականի ֆունկցիայի գրաֆիկական պատկերումը: Գաղափար իզոքվանտների և անտարբերության կորերի վերաբերյալ: Մի քանի փոփոխականներից կախված ֆունկցիայի սահմանը և անընդհատությունը: Հաջորդական սահմաններ: Մասնակի ածանցյալներ, լրիվ դիֆերենցիալ: Բարդ ֆունկցիայի ածանցյալը: Ածանցյալ տրված ուղղությամբ, գրադիենտ: Բարձր կարգի ածանցյալներ և դիֆերենցիալներ, խառը ածանցյալների թեորեմը: Համասեռ ֆունկցիաներ, էյլերի բանաձևը: Մի քանի փոփոխականներից կախված

Ֆունկցիայի էքստրեմումները, անհրաժեշտ պայմանը, բավարար պայմանը երկու փոփոխականների ֆունկցիայի համար: Պայմանական, հարաբերական էքստրեմումները, Լագրանժի ֆունկցիան: Էմպիրիկ բանաձևեր, փոքրագույն քառակուսիների մեթոդը: Մի քանի փոփոխականների ֆունկցիաների տնտեսագիտական օրինակներ և կիրառություններ:

6. Ինտեգրալ հաշիվ.

Թեմա 10. Նախնական ֆունկցիա: Անորոշ ինտեգրալի սահմանումը և հատկությունները: Ինտեգրման պարզագույն մեթոդները: Ինտեգրալների բանաձևերի ցանկը: Պարզ կոտորակների, ռացիոնալ ֆունկցիաների ինտեգրումը: Եռանկյունաչափական ֆունկցիաներ պարունակող արտահայտությունների և պարզագույն իռացիոնալ արտահայտությունների ինտեգրումը: Փոփոխականի փոխարինման և մասերով ինտեգրման բանաձևերը անորոշ ինտեգրալներում:

Թեմա 11. Որոշյալ ինտեգրալի սահմանումը, նրա երկրաչափական և տնտեսագիտական իմաստները: Որոշյալ ինտեգրալի հատկությունները: Միջին արժեքի թեորեմը: Որոշյալ ինտեգրալը որպես փոփոխական վերին սահմանի ֆունկցիա, Նյուտոն-Լայբնիցի բանաձևը: Մասերով ինտեգրումը և փոփոխականի փոխարինումը որոշյալ ինտեգրալների համար: Որոշյալ ինտեգրալի կիրառությունները տնտեսագիտության մեջ: Որոշյալ ինտեգրալի մոտավոր հաշվման բանաձևերը: Կորի աղեղի, հարթ պատկերի մակերեսի և պտտման մարմնի ծավալի հաշվումները որոշյալ ինտեգրալի միջոցով: Անիսկական ինտեգրալներ: Կրկնակի ինտեգրալների սահմանումը և հատկությունները: Կրկնակի ինտեգրալների հաշվման եղանակները, բերումը հաջորդական ինտեգրալների և փոփոխականների փոխարինումը:

7. Շարքեր.

Թեմա 12. Թվային շարքեր, հիմնական գաղափարները: Շարքերի զուգամիտության անհրաժեշտ պայմանը: Զուգամետ շարքերի հատկությունները: Դրական անդամներով շարքեր, հարմոնիկ շարքի հետազոտումը: Դրական անդամներով շարքերի բաղդատման

հայտանիշները: Կոշու, Դալամբերի և Կոշու ինտեգրալային հայտանիշները: Կամայական անդամներով շարքեր, բացարձակ և պայմանական զուգամիտություն: Նշանափոխ շարքեր, Լայբնիցի հայտանիշը:

Թեմա 13. Աստիճանային շարքեր, Աբելի թեորեմը: Աստիճանային շարքի զուգամիտության տիրույթը և շառավիղը: Աստիճանային շարքերի անդամ առ անդամ ինտեգրումը և դիֆերենցումը: Տարրական ֆունկցիաների վերլուծությունը Թեյլորի կամ Մակլորենի շարքերի: Աստիճանային շարքերը, որպես մոտավոր հաշվման բանաձևեր:

8. Դիֆերենցիալ հավասարումներ.

Թեմա 14. Դիֆերենցիալ հավասարումներ, հիմնական գաղափարները: Խնդիրներ, որոնց լուծումը հանգում է դիֆերենցիալ հավասարումների: Առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարումներ, Կոշու խնդիրը: Առաջին կարգի անջատվող փոփոխականներով դիֆերենցիալ հավասարումներ: Առաջին կարգի համասեռ դիֆերենցիալ հավասարումներ: Առաջին կարգի գծային դիֆերենցիալ հավասարումներ: Երկրորդ կարգի գծային համասեռ դիֆերենցիալ հավասարումներ, նրա լուծումների հատկությունները: Երկրորդ կարգի հաստատուն գործակիցներով գծային համասեռ և անհամասեռ հավասարումներ: Դիֆերենցիալ հավասարումների կիրառությունը տնտեսագիտության մեջ:

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. Ի.Ի.Պրիվալով «Անալիտիկ երկրաչափություն», Երևան, 1965թ.:
2. Կուրոշ Ա.Գ. «Բարձրագույն հանրահաշվի դասընթաց», Երևան, 1965թ.:
3. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. "Краткий курс высшей математики", Москва "Наука", 1986г.:
4. Карасев А.И., Аксютин З.М., Савельева Т.И. "Курс высшей математики для экономических вузов" часть I и II, Москва "Высшая школа", 1982г.:
5. Սաղաթեյան Վ.Վ. «Բարձրագույն մաթեմատիկայի դասընթաց», մաս I և II, Երևան, 1969թ.:
6. Фихтенгольц Г.М. "Основы математического анализа" Т.1-3, Москва, "Наука" (любого года издания):
7. Никишкин В.А., Максюков Н.И., Малахов А.П. "Высшая математика", Москва, 2000г.:
8. "Общий курс высшей математики для экономистов", под редакцией Ермакова, коллектив авторов, Москва, 2002г.:
9. "Высшая математика для экономистов" под редакцией Н.Ш. Кремера, коллектив авторов, Москва, 2003г.:
10. Սուրադյան Մ.Յ. «Բարձրագույն մաթեմատիկա տնտեսագետների համար, մաթեմատիկական անալիզ» Երևան, 2005թ.:
11. Պողոսյան Ա., Դավթյան Վ. «Անալիտիկ երկրաչափություն և զծային հանրահաշիվ» Երևան, 2005թ.:
12. Ռ.Գալոյան, Ա.Հայրապետյան, Վ.Դավթյան, Հ.Ակրտչյան «Բարձրագույն մաթեմատիկայի խնդիրների ծեռնարկ» I մաս, Երևան, 1997թ.:
13. Ռ.Գալոյան, Ա.Հայրապետյան, Մ.Գյուլգյուլյան «Բարձրագույն մաթեմատիկայի խնդիրների ծեռնարկ», II մաս, Երևան, 1997թ.:
14. Սուրադյան Մ. «Բարձրագույն մաթեմատիկա տնտեսագետների համար, շատ փոփոխականի ֆունկցիաներ», Երևան, 2002թ.:

Բարձրագույն մաթեմատիկայի դասընթացի ստուգողական աշխատանքների տարբերակները

Հեռակա ուսուցման ուսումնական պլաններով նախատեսված է բարձրագույն մաթեմատիկայի ստուգողական աշխատանքներ, որոնք նպաստում են տեսական գիտելիքների լավ յուրացմանը և ցույց են տալիս ուսանողի պատրաստվածության աստիճանը:

Ուսանողներին խորհուրդ է տրվում նախքան տարբերակներում եղած առաջադրանքների կատարումը լավ ծանոթանալ և սովորել տվյալ թեմային վերաբերվող տեսական նյութը, հասկանալ խնդիրների լուծման մեթոդները, լուծել նմանատիպ վարժություններ դասագրքերից և ուսումնական ձեռնարկներից:

Տարբերակ 1

1. Տրված են եռանկյան $A(1;1)$, $B(7;4)$ և $C(4;5)$ գագաթները: Գտնել.

ա) B գագաթից տարված բարձրության հավասարումը;

բ) C գագաթից տարված միջնագծի հավասարումը և նրա երկարությունը:

2. Կազմել այն կետերի երկրաչափական տեղի հավասարումը, որոնց հեռավորությունը $A(5;-2)$ կետից երեք անգամ մեծ է $B(2;3)$ կետից ունեցած հեռավորությունից:

3. Տրված են $\vec{P_1}$, $\vec{P_2}$, $\vec{P_3}$, $\vec{P}$ վեկտորները: Ցույց տալ, որ $\vec{P_1}$, $\vec{P_2}$, $\vec{P_3}$ վեկտորները կազմում են բազիս եռաչափ տարածության մեջ և գտնել $\vec{P}$ վեկտորի վերլուծությունը այդ բազիսում.

$$\vec{P_1}=(4;1;1), \vec{P_2}=(-3;2;1), \vec{P_3}=(-3;1;2), \vec{P}=(5;0;3):$$

4. Գտնել տրված մատրիցի հակադարձ մատրիցը: Ստուգել արդյունքը, հաշվելով տրված և ստացված մատրիցների արտադրյալը.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix};$$

5. Հաշվել հետևյալ սահմանները.

$$\text{ա) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2x}}{\sqrt{5x-4} - \sqrt{3x}}, \quad \text{բ) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+2}{3n-4} \right)^{2n-7}$$

6. Որոշել հետևյալ ֆունկցիաների ածանցյալները.

$$\text{ա) } y = \left(7x^3 + 4\sqrt{x^5} - 11 \right)^4; \quad \text{բ) } y = \sin^3 x^5 - x \operatorname{tg} 2x :$$

7. Հաշվել ֆունկցիայի լրիվ դիֆերենցիալը.

$$z = \ln \sqrt{x^2 + 5xy + y^3} :$$

8. Գտնել անորոշ ինտեգրալները.

$$\text{ա) } \int \frac{\sin 3x \, dx}{\sqrt{1+2\cos 3x}}; \quad \text{բ) } \int \frac{(3x-2)dx}{x^2+6x+9}; \quad \text{գ) } \int x e^{5x} \, dx :$$

9. Նյուտոն-Լայբնիցի բանաձևով հաշվել որոշյալ ինտեգրալը.

$$\int_{-1}^3 \frac{dx}{\sqrt{7-2x}} :$$

10. Հաշվել տրված գծերով սահմանափակված պատկերի մակերեսը.

$$y = x^2 - 6x + 7 \quad \text{և} \quad y = x + 1:$$

11. Գտնել այն մարմնի ծավալը, որն առաջանում է տրված գծերով սահմանափակված հարթ պատկերը պտտելով OX առանցքի շուրջ.

$$y = 2x^2 + 1, \quad x = 0, \quad x = 1, \quad y = 0:$$

12. Պարզել թվային շարքը զուգամեծ է, թե տարամեծ.

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \frac{7}{2^4} + \dots:$$

13. Գտնել աստիճանային շարքի զուգամիտության տիրույթը.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n \cdot 3^n}:$$

14. Գտնել դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը և այն մասնավոր լուծումը, որը բավարարում է նշված սկզբնական պայմանին.

$$y' - y \sin x = e^{-\cos x} \sin 2x; \quad y_0 = 3 \quad \text{երբ} \quad x_0 = \frac{\pi}{2}:$$

15. Գտնել դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը.

$$y'' - 5y' + 6y = 2x + 3:$$

Տարբերակ 2

1. Տրված է ABC եռանկյունը $A(6;4)$, $B(-3;5)$ և $C(-2;-6)$ գագաթներով: Գտնել.

ա) A գագաթից տարված բարձրության հավասարումը;

բ) B գագաթով անցնող և $x + 2y + 7 = 0$ ուղղին զուգահեռ ուղղի հավասարումը:

2. Գտնել այն կետերի երկրաչափական տեղի հավասարումը, որոնց հեռավորությունների հարաբերությունը $C(-1;7)$ և $D(3;4)$ կետերից հավասար է $\sqrt{2}$:

3. Տրված են $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$, $\vec{P}$ վեկտորները: Ցույց տալ, որ $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$ վեկտորները կազմում են բազիս եռաչափ տարածության մեջ և գտնել $\vec{P}$ վեկտորի վերլուծությունը այդ բազիսում.

$$\vec{P}_1 = (6; 3; 2), \quad \vec{P}_2 = (7; 1; 2), \quad \vec{P}_3 = (3; 0; 1), \quad \vec{P} = (5; 1; 2):$$

4. Գտնել տրված մատրիցի հակադարձ մատրիցը: Ստուգել արդյունքը, հաշվելով տրված և ստացված մատրիցների արտադրյալը.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \\ 10 & 16 & 7 \end{pmatrix};$$

5. Հաշվել հետևյալ սահմանները.

$$\text{ա) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^4 - 1)(x^5 + x^4 - x - 1)}{(x^3 + 1)^3}; \quad \text{բ) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 5x};$$

6. Որոշել հետևյալ ֆունկցիաների ածանցյալները.

$$\text{ա) } y = \left(3x^4 - 2\sqrt[5]{x^3} + 7 \right)^2; \quad \text{բ) } y = e^{\sin 3x} + \ln 4x^2;$$

7. Հաշվել ֆունկցիայի լրիվ դիֆերենցիալը.

$$z = \sin^3(4x^2 - xy^2):$$

8. Գտնել անորոշ ինտեգրալները.

$$\text{ա) } \int \frac{(3x-5)dx}{\sqrt{9+6x-3x^2}}; \quad \text{բ) } \int \sin^3 2x dx; \quad \text{գ) } \int 3x \ln x dx;$$

9. Նյուտոն-Լայբնիցի բանաձևով հաշվել որոշյալ ինտեգրալը.

$$\int_1^3 \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{x^3} dx:$$

10. Հաշվել տրված զօերով սահմանափակված պատկերի մակերեսը.

$$y = -x^2 + 6x - 5 \quad \text{և} \quad y = x - 5:$$

11. Գտնել այն մարմնի ծավալը, որն առաջանում է տրված գծերով սահմանափակված հարթ պատկերը պտտելով OX առանցքի շուրջ.

$$y = 3x + 4, \quad x = 1, \quad x = 3, \quad y = 0:$$

12. Պարզել թվային շարքը զուգամեծ է, թե տարամեծ.

$$1 + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 3^2} + \frac{1}{4 \cdot 3^3} + \dots:$$

13. Գտնել աստիճանային շարքի զուգամիտության տիրույթը.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{(2n+1)^2 \sqrt{3^n}}:$$

14. Գտնել դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը և այն մասնավոր լուծումը, որը բավարարում է նշված սկզբնական պայմանին.

$$xy' + y = \frac{2x}{1+x^2}; \quad y_0 = 0 \quad \text{երբ} \quad x_0 = 1:$$

15. Գտնել դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը.

$$y'' - 7y' + 10y = 3e^{2x}:$$

Տարբերակ 3

1. Տրված են եռանկյան $A(7;2)$, $B(4;5)$ և $C(1;-1)$ գագաթները: Գտնել.

ա) C գագաթից տարված բարձրության հավասարումը;

բ) B գագաթի հեռավորությունը A գագաթից տարված միջնագծից:

2. Գտնել այն կետերի երկրաչափական տեղի հավասարումը, որոնք հավասարահեռ են $A(-2;3)$ և $B(4;6)$ կետերից:

3. Տրված են $\vec{P_1}$, $\vec{P_2}$, $\vec{P_3}$, $\vec{P}$ վեկտորները: Ցույց տալ, որ $\vec{P_1}$, $\vec{P_2}$, $\vec{P_3}$ վեկտորները կազմում են բազիս եռաչափ տարածության մեջ և գտնել $\vec{P}$ վեկտորի վերլուծությունը այդ բազիսում.

$$\vec{P_1} = (1; -2; 3), \quad \vec{P_2} = (2; 3; -4), \quad \vec{P_3} = (1; -3; 5), \quad \vec{P} = (8; -5; 10):$$

4. Գտնել տրված մատրիցի հակադարձ մատրիցը: Ստուգել արդյունքը, հաշվելով տրված և ստացված մատրիցների արտադրյալը.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix};$$

5. Հաշվել հետևյալ սահմանները.

$$\text{ա) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{6x^2 + 13x + 7}{3x^2 + 8x + 5}; \quad \text{բ) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\arcsin 2x};$$

6. Որոշել հետևյալ ֆունկցիաների ածանցյալները.

$$\text{ա) } y = \left(\frac{1}{6}x^6 + 5x\sqrt[4]{x} - 2 \right)^3; \quad \text{բ) } y = \arctg \sqrt{x^2 - 2} + 2^{\sin x};$$

7. Հաշվել ֆունկցիայի լրիվ դիֆերենցիալը.

$$z = 2\sqrt{x^2 - y^2};$$

8. Գտնել անորոշ ինտեգրալները.

$$\text{ա) } \int \frac{x^2 + 2x - 1}{(x-3)^2(x+1)} dx; \quad \text{բ) } \int \frac{\sqrt{\arctg 2x}}{1+4x^2} dx; \quad \text{գ) } \int x^2 \sin 3x dx;$$

9. Նյուտոն-Լայբնիցի բանաձևով հաշվել որոշյալ ինտեգրալը.

$$\int_e^{e^2} \frac{3 \ln x + 2}{x} dx;$$

10. Հաշվել տրված գծերով սահմանափակված պատկերի մակերեսը.

$$y = x^2 + 6x + 7 \quad \text{և} \quad y = x + 7:$$

11. Գտնել այն մարմնի ծավալը, որն առաջանում է տրված գծերով սահմանափակված հարթ պատկերը պտտելով ՕՑ առանցքի շուրջ.

$$y = 2x + 3, \quad x = 0, \quad x = 2, \quad y = 0 :$$

12. Պարզել թվային շարքը զուգամեջ տ է, թե տարամետ.

$$1 + \frac{3}{2!} + \frac{3^2}{3!} + \frac{3^3}{4!} + \dots :$$

13. Գտնել աստիճանային շարքի զուգամիտության տիրույթը.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{\sqrt{2^n}} :$$

14. Գտնել դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը և այն մասնավոր լուծումը, որը բավարարում է նշված սկզբնական պայմանին.

$$y' \cos x - 2y \sin x = 2; \quad y_0 = 3 \quad \text{երբ} \quad x_0 = 0 :$$

15. Գտնել դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը.

$$y'' - 4y' + 4y = 3x - 5 :$$

Տարբերակ 4

1. Տրված են եռանկյան $A(6;4)$, $B(3;5)$ և $C(0;1)$ գագաթները: Գտնել.

ա) B գագաթից տարված բարձրության հավասարումը;

բ) AB կողմի շարունակության վրա այնպիսի D կետ, որ $DB=4AD$:

2. Կազմել այն կետերի երկրաչափական տեղի հավասարումը, որոնց հեռավորությունը $A(3;2)$ կետից երկու անգամ մեծ է $y=-2$ ուղղից ունեցած հեռավորությունից:

3. Տրված են $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \vec{P}$ վեկտորները: Ցույց տալ, որ $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$ վեկտորները կազմում են բազիս եռաչափ տարածության մեջ և գտնել $\vec{P}$ վեկտորի վերլուծությունը այդ բազիսում.

$$\vec{P}_1 = (3; -2; 2), \vec{P}_2 = (-1; 1; -1), \vec{P}_3 = (0; 1; 4), \vec{P} = (2; 1; 5):$$

4. Գտնել տրված մատրիցի հակադարձ մատրիցը: Ստուգել արդյունքը, հաշվելով տրված և ստացված մատրիցների արտադրյալը.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} :$$

5. Գտնել հետևյալ սահմանները.

$$\text{ա) } \lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{x-3} - \sqrt{9-x}}{x-6}; \text{ բ) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n-3}{5n+4} \right)^{n+4}$$

6. Գտնել ֆունկցիաների ածանցյալները.

$$\text{ա) } y = \left(3x^4 - \frac{5}{\sqrt[4]{x}} + 2 \right)^5; \text{ բ) } y = 3^{\cos^2 x} - \arcsin 5x :$$

7. Հաշվել ֆունկցիայի լրիվ դիֆերենցիալը.

$$z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} :$$

8. Գտնել անորոշ ինտեգրալները.

$$\text{ա) } \int x \operatorname{arctg} x dx; \text{ բ) } \int \frac{dx}{x^2 - x - 12}; \text{ գ) } \int \frac{7 \sin 3x}{\sqrt{5 + \cos 3x}} dx :$$

9. Նյուտոն-Լայբնիցի բանաձևով հաշվել որոշյալ ինտեգրալը.

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx :$$

10. Հաշվել տրված գծերով սահմանափակված պատկերի մակերեսը.

$$y = x^2 - 6x + 1 \text{ և } y = 9 - x^2 :$$

11. Գտնել այն մարմնի ծավալը, որն առաջանում է տրված զօեքով սահմանափակված հարթ պատկերը պտտելով OX առանցքի շուրջ.

$$y = 4 - x^2 \text{ և } 2x + y - 4 = 0:$$

12. Ստուգել շարքի զուգամիտությունը.

$$1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \frac{4}{7} + \dots:$$

13. Գտնել աստիճանային շարքի զուգամիտության տիրույթը.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}:$$

14. Գտնել դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը և այն մասնավոր լուծումը, որը բավարարում է նշված սկզբնական պայմանին.

$$y' - \frac{2}{x}y = 2x^3; \quad y_0 = 5 \text{ երբ } x_0 = 1:$$

15. Գտնել դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը.

$$y'' + 2y' - 8y = 3 \sin x:$$

Տարբերակ 5

1. Տրված են եռանկյան $A(2;-3)$, $B(-1;-1)$ և $C(5;2)$ գագաթները: Գտնել.

ա) C գագաթից տարված բարձրության հավասարումը;

բ) D կետ AB կողմի շարունակության վրա, այնպիսին, որ $AD=5BD$:

2. Գտնել այն կետերի երկրաչափական տեղի հավասարումը, որոնք հավասարահեռ են $A(2;4)$ կետից և $x=-1$ ուղղից:

3. Տրված են $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \vec{P}$ վեկտորները: Ցույց տալ, որ $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$ վեկտորները կազմում են բազիս եռաչափ տարածության մեջ և գտնել $\vec{P}$ վեկտորի վերլուծությունը այդ բազիսում.

$$\vec{P}_1 = (3;2;1), \vec{P}_2 = (0;1;-2), \vec{P}_3 = (-1;1;-3), \vec{P} = (5;4;1):$$

4. Գտնել տրված մատրիցի հակադարձ մատրիցը: Ստուգել արդյունքը, հաշվելով տրված և ստացված մատրիցների արտադրյալը.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 11 & 17 & -12 \end{pmatrix};$$

5. Գտնել հետևյալ սահմանները.

$$\text{ա) } \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{x - 8}; \text{ բ) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x + 2}{3x + 1} \right)^{x+2};$$

6. Գտնել ֆունկցիաների ածանցյալները.

$$\text{ա) } y = \left(8x^3 - \frac{4\sqrt{x}}{x^3} + 5 \right)^4; \text{ բ) } y = \cos^3 x^2 - 4^{\operatorname{ctg} x};$$

7. Հաշվել ֆունկցիայի լրիվ դիֆերենցիալը.

$$z = \ln \sin \frac{x^2 + 5}{\sqrt{y}};$$

8. Գտնել անորոշ ինտեգրալները.

$$\text{ա) } \int \frac{3x + 2}{x^2 - 3x + 8} dx; \text{ բ) } \int \frac{5 \sin 2x dx}{\sqrt{3 + \cos^2 x}}; \text{ գ) } \int e^{2x} \cos 3x dx;$$

9. Նյուտոն-Լայբնիցի բանաձևով հաշվել որոշյալ ինտեգրալը.

$$\int_1^{e^2} \frac{dx}{x \sqrt{3 + \ln x}};$$

10. Հաշվել տրված գծերով սահմանափակված պատկերի մակերեսը.

$$y = 5 - x^2 \text{ և } y = x^2 + 4x + 5:$$

11. Գտնել այն մարմնի ծավալը, որն առաջանում է տրված գծերով սահմանափակված հարթ պատկերը պտտելով OX առանցքի շուրջ:

$$y = x^2 + 1 \text{ և } y = 3x + 1:$$

12. Ստուգել շարքի զուգամիտությունը.

$$1 + \frac{3}{4} + \frac{5}{9} + \frac{7}{16} + \dots:$$

13. Գտնել աստիճանային շարքի զուգամիտության տիրույթը.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n^2 5^n}:$$

14. Գտնել դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը և այն մասնավոր լուծումը, որը բավարարում է նշված սկզբնական պայմանին.

$$xy' + y = \frac{2x}{1+x^2}; \quad y_0 = 0 \text{ երբ } x_0 = 1:$$

15. Գտնել դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը.

$$y'' + y' - 6y = x^2 - 1:$$

Տարբերակ 6

1. Տրված են եռանկյան գագաթները՝ $A(3;4)$, $B(-1;7)$ և $C(15;9)$: Գտնել.

ա) C գագաթից տարված բարձրության երկարությունը;

բ) A գագաթից տարված բարձրության հավասարումը:

2. Կազմել այն գծի հավասարումը, որի յուրաքանչյուր կետը հավասարապես է հեռացած $A(3;3)$ կետից և $y = -2$ ուղղից:

3. Տրված են $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \vec{P}$ վեկտորները: Ցույց տալ, որ $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$ վեկտորները կազմում են բազիս եռաչափ տարածության մեջ և գտնել $\vec{P}$ վեկտորի վերլուծությունը այդ բազիսում.

$$\vec{P}_1 = (1; 2; 5), \vec{P}_2 = (3; 1; 1), \vec{P}_3 = (-3; 1; -4), \vec{P} = (-8; 10; 7):$$

4. Գտնել տրված մատրիցի հակադարձ մատրիցը: Ստուգել արդյունքը, հաշվելով տրված և ստացված մատրիցների արտադրյալը.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}:$$

5. Գտնել հետևյալ սահմանները.

$$\text{ա) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{5x+1}-4}{x^2-9}; \quad \text{բ) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 4x}{x \sin 3x}:$$

6. Գտնել ֆունկցիաների ածանցյալները.

$$\text{ա) } y = \left(5x^2 + 4\sqrt[4]{x^5} + 3 \right)^3; \quad \text{բ) } y = 2^{\lg x} + x \sin 2x:$$

7. Ապացուցել, որ $z=f(x;y)$ ֆունկցիան բավարարում է տրված առնչությանը.

$$z = \frac{x^3}{x-y}; \quad x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2z:$$

8. Գտնել անորոշ ինտեգրալները.

$$\text{ա) } \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^3}}; \quad \text{բ) } \int \frac{dx}{x^2+4x+13}; \quad \text{գ) } \int x \cos 2x dx:$$

9. Նյուտոն-Լայբնիցի բանաձևով հաշվել որոշյալ ինտեգրալը.

$$\int_0^1 \frac{x dx}{1+x^4}:$$

10. Հաշվել տրված զծերով սահմանափակված պատկերի մակերեսը.

$$xy = 4 \quad \text{և} \quad x + y - 5 = 0:$$

11. Գտնել այն մարմնի ծավալը, որն առաջանում է տրված գծերով սահմանափակված հարթ պատկերը պտտելով OX առանցքի շուրջ:

$$y = x^2 + 2; y = 3x + 2:$$

12. Ստուգել շարքի զուգամիտությունը.

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{3}{27} + \frac{4}{81} + \dots:$$

13. Գտնել աստիճանային շարքի զուգամիտության տիրույթը.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{9^n \sqrt[3]{n}}:$$

14. Գտնել դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը և այն մասնավոր լուծումը, որը բավարարում է նշված սկզբնական պայմանին.

$$y' + \frac{y}{2x} = x^2, y_0 = 1, \text{ երբ } x_0 = 1:$$

15. Գտնել դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը.

$$y'' - 6y' + 8y = 2x - 5:$$

Տարբերակ 7

1. Տրված են եռանկյան գագաթները՝ $A(8;2)$, $B(14;10)$ և $C(-4;7)$: Գտնել.

ա) C գագաթից տարված բարձրության երկարությունը;

բ) A գագաթից տարված բարձրության հավասարումը:

2. Կազմել այն գծի հավասարումը, որի յուրաքանչյուր կետի $x=-4$ ուղղից և $F(-1;0)$ կետից ունեցած հեռավորությունների հարաբերությունը հավասար է 2-ի:

3. Տրված են $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \vec{P}$ վեկտորները: Ցույց տալ, որ $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$ վեկտորները կազմում են բազիս եռաչափ տարածության մեջ և գտնել $\vec{P}$ վեկտորի վերլուծությունը այդ բազիսում.

$$\vec{P}_1 = (-3; 2; -2), \vec{P}_2 = (3; -2; -1), \vec{P}_3 = (1; 1; -1), \vec{P} = (4; -1; -5):$$

4. Գտնել տրված մատրիցի հակադարձ մատրիցը: Ստուգել արդյունքը, հաշվելով տրված և ստացված մատրիցների արտադրյալը.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}:$$

5. Գտնել հետևյալ սահմանները.

$$\text{ա) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{7x+2} - 4}{6x - 12}; \quad \text{բ) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x \sin 3x}:$$

6. Գտնել ֆունկցիաների ածանցյալները.

$$\text{ա) } y = \left(\frac{1}{5}x^5 - 3x\sqrt[3]{x} - 4 \right)^4; \quad \text{բ) } y = 3^{\cos x} - x \sin 3x:$$

7. Ապացուցել, որ $z=f(x;y)$ ֆունկցիան բավարարում է տրված առնչությանը.

$$z = \sin^2(3x - 4y); \quad 4 \frac{\partial z}{\partial x} + 3 \frac{\partial z}{\partial y} = 0:$$

8. Գտնել անորոշ ինտեգրալները.

$$\text{ա) } \int \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x} dx; \quad \text{բ) } \int \frac{dx}{x^2 - 8x + 7}; \quad \text{գ) } \int x \sin 4x dx:$$

9. Նյուտոն-Լայբնիցի բանաձևով հաշվել որոշյալ ինտեգրալը.

$$\int_{\pi}^{2\pi} (1 + \sin 2x) dx:$$

10. Հաշվել տրված գծերով սահմանափակված պատկերի մակերեսը.

$$y = 3x^2 + 1 \text{ և } y = 3x + 7:$$

11. Գտնել այն մարմնի ծավալը, որն առաջանում է տրված գծերով սահմանափակված հարթ պատկերը պտտելով OX առանցքի շուրջ:

$$y = x^2 + 3x; y = 0:$$

12. Ստուգել շարքի զուգամիտությունը.

$$\frac{2}{1} + \frac{4}{2} + \frac{8}{3} + \frac{16}{4} + \dots:$$

13. Գտնել աստիճանային շարքի զուգամիտության տիրույթը.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot x^n}{(n+3) \cdot 3^n}:$$

14. Գտնել դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը և այն մասնավոր լուծումը, որը բավարարում է նշված սկզբնական պայմանին:

$$y' + \frac{3y}{x} = \frac{2}{x^3}, y_0 = 1, \text{ երբ } x_0 = 1:$$

15. Գտնել դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը:

$$y'' + 6y' + 5y = e^{2x}:$$

Տարբերակ 8

1. Տրված են եռանկյան գագաթները՝ A(5;-3), B(1;0) և C(17;2): Գտնել.

- ա) C գագաթից տարված բարձրության երկարությունը;
- բ) A գագաթից տարված բարձրության հավասարումը:

2. Կազմել այն կետերի երկրաչափական տեղի հավասարումը, որոնցից յուրաքանչյուրը երկու անգամ մոտ է գտնվում A(1;0) կետին քան B(-2;3) կետին:

3. Տրված են $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \vec{P}$ վեկտորները: Ցույց տալ, որ $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$ վեկտորները կազմում են բազիս եռաչափ տարածության մեջ և գտնել $\vec{P}$ վեկտորի վերլուծությունը այդ բազիսում.

$$\vec{P}_1 = (2; 2; 3), \vec{P}_2 = (1; 2; 3), \vec{P}_3 = (1; 1; 1), \vec{P} = (5; 7; 10):$$

4. Գտնել տրված մատրիցի հակադարձ մատրիցը: Ստուգել արդյունքը, հաշվելով տրված և ստացված մատրիցների արտադրյալը.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}:$$

5. Գտնել հետևյալ սահմանները.

$$\text{ա) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 10x + 3}{x^2 - 2x - 3}; \text{ բ) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n - 3}{5n + 6} \right)^{n-3}$$

6. Գտնել ֆունկցիաների ածանցյալները.

$$\text{ա) } y = \left(3x^8 + 5\sqrt{x^2 - 3} \right)^5; \text{ բ) } y = 5^x - x^2 \lg 4x:$$

7. Ապացուցել, որ $z=f(x;y)$ ֆունկցիան բավարարում է տրված առնչությանը.

$$z = \sqrt{x^2 - 3y^2}; \quad 3y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = 0:$$

8. Գտնել անորոշ ինտեգրալները.

$$\text{ա) } \int e^{\sin 3x} \cos 3x dx; \text{ բ) } \int \frac{dx}{9x^2 - 6x - 8}; \text{ գ) } \int x^4 \ln x dx:$$

9. Նյուտոն-Լայբնիցի բանաձևով հաշվել որոշյալ ինտեգրալը.

$$\int_2^3 \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3 + 9}}:$$

10. Հաշվել տրված գծերով սահմանափակված պատկերի մակերեսը.

$$y = x^2 + 1 \text{ և } y = 5 - x^2:$$

11. Գտնել այն մարմնի ծավալը, որն առաջանում է տրված գծերով սահմանափակված հարթ պատկերը պտտելով OX առանցքի շուրջ.

$$y = 5x + 2; x = 0; x = 2; y = 0:$$

12. Ստուգել շարքի զուգամիտությունը.

$$\frac{1}{1} + \frac{3}{2} + \frac{5}{4} + \frac{7}{8} + \dots:$$

13. Գտնել աստիճանային շարքի զուգամիտության տիրույթը.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n x^n}{\sqrt{n}}:$$

14. Գտնել դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը և այն մասնավոր լուծումը, որը բավարարում է նշված սկզբնական պայմանին.

$$y' - \frac{2y}{x+1} = e^x (x+1)^2, y_0 = 1, \text{ երբ } x_0 = 0:$$

15. Գտնել դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը.

$$y'' - 5y' + 4y = x^2 + 3x:$$

Տարբերակ 9

1. Տրված են եռանկյան գագաթները՝ $A(14;-6)$, $B(20;2)$ և $C(2;-1)$: Գտնել.

ա) C գագաթից տարված բարձրության երկարությունը;

բ) A գագաթից տարված բարձրության հավասարումը:

2. Կազմել այն գծի հավասարումը, որի յուրաքանչյուր կետի՝ $A(1;0)$ կետից և $B(4;0)$ կետից ունեցած հեռավորությունների հարաբերությունը հավասար է $1/2$ -ի:

3. Տրված են $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \vec{P}$ վեկտորները: Ցույց տալ, որ $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$ վեկտորները կազմում են բազիս եռաչափ տարածության մեջ և գտնել $\vec{P}$ վեկտորի վերլուծությունը այդ բազիսում.

$$\vec{P}_1 = (3;3;1), \vec{P}_2 = (2;-2;1), \vec{P}_3 = (2;1;1), \vec{P} = (9;0;4):$$

4. Գտնել տրված մատրիցի հակադարձ մատրիցը: Ստուգել արդյունքը, հաշվելով տրված և ստացված մատրիցների արտադրյալը.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix};$$

5. Գտնել հետևյալ սահմանները.

$$\text{ա) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 5x - 8}{2x^2 + 3x - 5}; \quad \text{բ) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\lg 2x};$$

6. Գտնել ֆունկցիաների ածանցյալները.

$$y = \left(\frac{1}{4}x^8 + 8\sqrt[8]{x^3} - 1 \right)^3; \quad \text{բ) } y = e^{3x} - 2x \lg 3x;$$

7. Ապացուցել, որ $z = f(x; y)$ ֆունկցիան բավարարում է տրված առնչությանը.

$$z = \ln(x^2 + xy + y^2); \quad x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2;$$

8. Գտնել անորոշ ինտեգրալները.

$$\text{ա) } \int \frac{\cos 2x dx}{\sqrt{1 + \sin 2x}}; \quad \text{բ) } \int \frac{dx}{x^2 + 6x + 25}; \quad \text{գ) } \int \arctg x dx;$$

9. Նյուտոն-Լայբնիցի բանաձևով հաշվել որոշյալ ինտեգրալը.

$$\int_0^1 \frac{\arctg x dx}{1 + x^2};$$

10. Հաշվել տրված գծերով սահմանափակված պատկերի մակերեսը.

$$y = x^2 + 2x \quad \text{և} \quad y = x + 2;$$

11. Գտնել այն մարմնի ծավալը, որն առաջանում է տրված գծերով սահմանափակված հարթ պատկերը պտտելով OX առանցքի շուրջ.

$$y = 4x - x^2; y = 0:$$

12. Ստուգել շարքի զուգամիտությունը.

$$\frac{2}{4} + \frac{4}{16} + \frac{6}{64} + \frac{8}{256} + \dots:$$

13. Գտնել աստիճանային շարքի զուգամիտության տիրույթը.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n x^n}{4^n \sqrt{n}}:$$

14. Գտնել դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը և այն մասնավոր լուծումը, որը բավարարում է նշված սկզբնական պայմանին.

$$y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 1+x^2, y_0 = 3, \text{ երբ } x_0 = 1:$$

15. Գտնել դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը.

$$y'' + 7y' + 12y = e^{3x}:$$

Տարբերակ 10

1. Տրված են եռանկյան գագաթները՝ $A(-1;2)$, $B(1;4)$ և $C(5;2)$:
Գտնել.

- ա) C գագաթից տարված բարձրության երկարությունը;
- բ) A գագաթից տարված բարձրության հավասարումը:

2. Կազմել այն կետերի երկրաչափական տեղի հավասարումը, որոնց հեռավորությունը $A(1;9)$ կետից երեք անգամ մեծ է $B(1;1)$ կետից ունեցած հեռավորություններից:

3. Տրված են $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \vec{P}$ վեկտորները: Ցույց տալ, որ $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$ վեկտորները կազմում են բազիս եռաչափ տարածության մեջ և գտնել $\vec{P}$ վեկտորի վերլուծությունը այդ բազիսում:

$$\vec{P}_1 = (1;1;1), \vec{P}_2 = (4;-3;2), \vec{P}_3 = (0;2;-2), \vec{P} = (3;1;5):$$

4. Գտնել տրված մատրիցի հակադարձ մատրիցը: Ստուգել արդյունքը, հաշվելով տրված և ստացված մատրիցների արտադրյալը.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix};$$

5. Գտնել հետևյալ սահմանները.

$$\text{ա) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + 11x + 10}{2x^2 + 5x + 2}; \quad \text{բ) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-4}{n+5} \right)^{5n+3} :$$

6. Գտնել ֆունկցիաների ածանցյալները.

$$\text{ա) } y = (11x^4 + 3\sqrt[3]{x} + 5)^5; \quad \text{բ) } y = 2^{x^2+1} - x \cos 4x :$$

7. Ապացուցել, որ $z=f(x;y)$ ֆունկցիան բավարարում է տրված առնչությանը.

$$z = \sqrt[3]{2y^2 - x^2}; \quad 2y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = 0:$$

8. Գտնել անորոշ ինտեգրալները.

$$\text{ա) } \int \frac{(4 + \ln x)^3}{x} dx; \quad \text{բ) } \int \frac{dx}{25x^2 + 10x + 3}; \quad \text{գ) } \int x e^{3x} dx :$$

9. Նյուտոն-Լայբնիցի բանաձևով հաշվել որոշյալ ինտեգրալը:

$$\int_0^1 \frac{e^x dx}{1 + e^{2x}} :$$

10. Հաշվել տրված գծերով սահմանափակված պատկերի մակերեսը.

$$y = 4 - x^2 \text{ և } y = x^2 + 2x :$$

11. Գտնել այն մարմնի ծավալը, որն առաջանում է տրված գծերով սահմանափակված հարթ պատկերը պտտելով OX առանցքի շուրջ:

$$y = 2x - 1; x = 1, x = 3, y = 0:$$

12. Ստուգել շարքի զուգամիտությունը.

$$\frac{3}{1} + \frac{9}{2} + \frac{27}{3} + \frac{81}{4} + \dots:$$

13. Գտնել աստիճանային շարքի զուգամիտության տիրույթը.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{5^n(n+2)}:$$

14. Գտնել դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը և այն մասնավոր լուծումը, որը բավարարում է նշված սկզբնական պայմանին.

$$y' - \frac{y}{x+2} = x^2 + 2x, y_0 = \frac{3}{2}, \text{ երբ } x_0 = -1:$$

15. Գտնել դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը.

$$y'' - 3y' = 2 - 6x:$$

Բարձրագույն մաթեմատիկայի ստուգողական աշխատանքների առաջադրանքների լուծումների օրինակներ և ցուցումներ

Հեռակա ուսուցման պայմաններում գիտելիքները յուրացվում են հիմնականում ուսանողների ինքնուրույն աշխատանքով: Ուստի շատ կարևոր է, որպեսզի հեռակայող ուսանողները սկզբից ևեթ իմանան, թե ինչպես պետք է կազմակերպեն իրենց աշխատանքը բարձրագույն մաթեմատիկան ինքնուրույն սովորելու համար:

Նրանք սկզբում պետք է շատ լավ սովորեն տեսական նյութը, խնդիրների լուծման եղանակները և մեթոդները, ինքնուրույն լուծեն խնդիրներ վերաբերվող համապատասխան բաժիններին և նոր միայն սկսեն կատարել ստուգողական աշխատանքների առաջադրանքները:

Ինքնուրույն լուծված խնդիրներն ու վարժությունները նպաստում են տեսական նյութի լավ յուրացմանը և բազմակողմանի ընկալմանը: Ուստի սխալվում են այն ուսանողները, որոնք ստուգողական աշխատանքի առաջադրանքը ստանալուն պես փորձում են դրանք լուծել, առանց համապատասխան տեսական նյութը սովորելու:

Տեսական նյութը հասկանալուց և լավ յուրացնելուց հետո, պետք է ուշադիր ուսումնասիրել այդ հարցի վերաբերյալ դասագրքերում և խնդրագրքերում լուծված վարժություններն ու խնդիրները, հասկանալ նրանց լուծման մեթոդները: Դրանից հետո գրքերում եղած նմանատիպ խնդիրներ և վարժություններ լուծելով, լավ վարժվելով, նոր ձեռնամուխ լինել ստուգողական աշխատանքի կատարմանը:

Հեռակայող ուսանողի ինքնուրույն աշխատանքը դյուրին դարձնելու համար ստորև ներկայացնում ենք բարձրագույն մաթեմատիկայի ստուգողական աշխատանքների տարբերակներում եղած նմանատիպ առաջադրանքների լուծումները: Հուսով ենք, որ դրանք օգտակար կլինեն ուսանողներին և կնպաստեն ստուգողական աշխատանքների նորմալ կատարմանը:

1. Տրված են եռանկյան $A(5;3)$, $B(2;-4)$ և $C(8;-1)$ գագաթները: Գտնել.

ա) C գագաթից տարված բարձրության հավասարումը;

բ) B գագաթից տարված բարձրության երկարությունը;

գ) AB կողմի շարունակության վրա այնպիսի D կետ, որ $AD=3BD$:

Լուծում. ա) Ունի գտնենք AB կողմով անցնող ուղղի հավասարումը, օգտվելով երկու կետերով անցնող ուղղի հավասարումից,

որի տեսքը հետևյալն է $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$, որտեղ $(x_1; y_1)$ և $(x_2; y_2)$

կետերն են կետերի կոորդինատներն են:

Այստեղ AB կողմով անցնող ուղղի հավասարումը կունենա
 $\frac{x-5}{2-5} = \frac{y+4}{-4-3}$ տեսքը, որից կստանանք ուղղի հավասարումը

անկյունային գործակցով $y = \frac{7}{3}x - \frac{26}{3}$: Հետևաբար AB կողմով

անցնող ուղղի անկյունային գործակիցը՝ $k_1 = \frac{7}{3}$: C գագաթից տար-

ված բարձրությունը ուղղահայաց է AB կողմով անցնող ուղղին:

Ուղղահայացության $k_1 \cdot k_2 = -1$ պայմանից կորոշենք C գագաթից

տարված բարձրության անկյունային գործակիցը $k_2 = -\frac{1}{k_1} = -\frac{3}{7}$:

Տրված կետով անցնող և տրված անկյունային գործակիցն ունեցող ուղղի հավասարումը ունի $y - y_0 = k(x - x_0)$ տեսքը: Հետևաբար

$C(8;-1)$ կետով անցնող և $K_2 = -\frac{3}{7}$ անկյունային գործակցով
 $y + 1 = -\frac{3}{7}(x - 8)$ ուղիղը կհանդիսանա C գագաթից տարված
 բարձրությունը:

բ) B գագաթից տարված բարձրության երկարությունը հավասար է B կետի հեռավորությանը AC կողմով անցնող ուղղից: Կետի

հեռավորությունը ուղղից որոշվում է $d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ բանաձևով.

որտեղ (x_0, y_0) կետի կոորդինատներն են, իսկ $ax + by + c = 0$ ուղղի ընդհանուր հավասարումը:

AC կողմով անցնող ուղղի հավասարումը որոշվում է $\frac{x-5}{8-5} = \frac{y-3}{-1-3}$ տեսքով, իսկ նրա ընդհանուր հավասարումը կլինի $-4(x-5) = 3(y-3)$ կամ $4x + 3y - 29 = 0$:

Հետևաբար B գագաթից տարված բարձրության երկարությունը կլինի. $d = \frac{|4 \cdot 2 + 3 \cdot (-4) - 29|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|8 - 12 - 29|}{\sqrt{25}} = \frac{33}{5}$:

զ) եթե $D(x; y)$ կետը գտնվում է $A(x_1, y_1)$ և $B(x_2, y_2)$ ծայրակետերով հատվածի կամ նրա շարունակության վրա և բավարարում է $\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \lambda$ պայմանին, ապա ասում են, որ D կետը տրոհում է AB հատվածը λ հարաբերությամբ: Ընդորում, եթե D կետը գտնվում է AB հատվածի վրա տրոհումը կոչվում է ներքին և $\lambda > 0$, իսկ եթե D կետը գտնվում է AB հատվածի շարունակության վրա տրոհումը կոչվում է արտաքին և $\lambda < 0$: Իսկ D կետի x և y կոորդինատները որոշվում են հետևյալ բանաձևերով. $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$;

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}:$$

Սեր դեպքում $\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \lambda = -3$ հաշվի առնելով, որ $AD = 3BD$:

Հետևաբար D կետի կոորդինատների համար կստանանք.

$$x = \frac{5 - 3 \cdot 2}{1 - 3} = \frac{1}{2}; y = \frac{3 - 3 \cdot (-4)}{1 - 3} = -\frac{15}{2}; D\left(\frac{1}{2}; -\frac{15}{2}\right):$$

2. Կազմել այն կետերի երկրաչափական տեղի հավասարումը, որոնց $A(3;4)$ կետից և $B(2;-1)$ կետից ունեցած հեռավորությունների հարաբերությունը հավասար է $\sqrt{3}$:

Լուծում. որոնելի կետը փնտրենք $M(x;y)$ ընթացիկ կետի տեսքով: Ըստ խնդրի պայմանի ունենք, որ $\frac{AM}{MB} = \sqrt{3} \Rightarrow$

$$AM = \sqrt{3}MB:$$

Օգտվենք $A(x_1, y_1)$ և $B(x_2, y_2)$ կետերի միջև եղած հեռավորության որոշման $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ բանաձևից: Զաշվենք AM և MB հեռավորությունները և գրենք պայմանը:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2} &= \sqrt{3}\sqrt{(x-2)^2 + (y-(-1))^2} \Rightarrow \\ x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 &= 3(x^2 - 4x + 4) + 3(y^2 + 2y + 1) \Rightarrow \\ 2x^2 - 6x + 2y^2 + 14y - 10 &= 0 \Rightarrow x^2 - 3x + y^2 + 7y - 5 = 0 \Rightarrow \\ \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + \left(y + \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} - 5 &= 0 \Rightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{39}{2}: \end{aligned}$$

3. Տրված են $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$, $\vec{P}$ վեկտորները: Ցույց տալ, որ $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$ վեկտորները կազմում են բազիս եռաչափ տարածության մեջ և գտնել $\vec{P}$ վեկտորի վերլուծությունը այդ բազիսում.

$$\vec{P}_1(2;1;-1), \quad \vec{P}_2(1;1;4), \quad \vec{P}_3(0;-3;2), \quad \vec{P}(-1;7;-4):$$

Լուծում. $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$ վեկտորները կլինեն գծորեն անկախ եթե նրանց գծային կոմբինացիան $\alpha_1\vec{P}_1 + \alpha_2\vec{P}_2 + \alpha_3\vec{P}_3$ դառնա զրո միայն այն դեպքում, երբ $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$:

$\alpha_1\vec{P}_1 + \alpha_2\vec{P}_2 + \alpha_3\vec{P}_3 = 0$ այս վեկտորական հավասարությունը գրենք կոորդինատներով: Կստանանք հետևյալ համակարգը.

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 + 0 \cdot \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 - 3\alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + 4\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \end{cases} :$$

Այն լուծելու համար երկրորդ հավասարումը բազմապատկենք երկուսով, իսկ երրորդը երեքով և արդյունքում գումարենք իրար:

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 6\alpha_3 = 0 \\ -3\alpha_1 + 12\alpha_2 + 6\alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ -\alpha_1 + 14\alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 29\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 = 14\alpha_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\alpha_2 = 0, \alpha_1 = 0, \alpha_3 = 0:$$

Այսինքն ստացանք, որ $\vec{P_1}, \vec{P_2}, \vec{P_3}$ վեկտորները գծորեն անկախ են, հետևաբար եռաչափ տարածության մեջ կազմում են բազիս: $\vec{P_1}, \vec{P_2}, \vec{P_3}$ այս չորս վեկտորները կազմում են գծորեն կախում համակարգ, հետևաբար ըստ հայտնի լեմմայի $\vec{P}$ վեկտորը կարելի է ներկայացնել մնացածների գծային կոմբինացիայի տեսքով: Գրենք $\vec{P}$ վեկտորի վերլուծությունը $\vec{P_1}, \vec{P_2}, \vec{P_3}$ բազիսում:

$$\vec{P} = x_1 \vec{P_1} + x_2 \vec{P_2} + x_3 \vec{P_3}:$$

Այս վեկտորական հավասարությունը գրենք կոորդինատներով, հավասարեցնելով աջ և ձախ մասերի համապատասխան կոորդինատները:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = -1 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 7 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -4 \end{cases} :$$

Այս համակարգը լուծենք օգտվելով գծային հավասարումների համակարգերի լուծման Կրամերի կանոնից: Հաշվենք Δ հիմնական որոշիչը համոզվենք, որ այն հավասար չէ զրոյի, այնուհետև հաշվենք Δ_1, Δ_2 և Δ_3 որոշիչները:

Դրա համար օգտվենք երրորդ կարգի որոշիչների հաշվման հետևյալ կանոնից:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} :$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) \cdot (-1) + 1 \cdot 4 \cdot 0 - 0 \cdot 1 \cdot (-1) - \\ - 2 \cdot (-3) \cdot 4 - 2 \cdot 1 \cdot 1 = 4 + 3 + 24 - 2 = 29 \neq 0 ;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 7 & 1 & -3 \\ -4 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 12 - 12 - 14 = -16 ;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 7 & -3 \\ -1 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 28 - 3 - 24 + 2 = 3 ;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 7 \\ -1 & 4 & -4 \end{vmatrix} = -8 - 7 - 4 - 1 - 56 + 4 = -72 :$$

Ստացված արժեքները տեղադրելով $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$ բանաձևի մեջ կստանանք հետևյալ արժեքները. $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{16}{29}$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{3}{29}$, $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -\frac{72}{29}$:

Իսկ $\vec{P}$ վեկտորի վերլուծությունը $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$ բազիսում կընդունի հետևյալ տեսքը. $\vec{P} = -\frac{16}{29}\vec{P}_1 + \frac{3}{29}\vec{P}_2 - \frac{72}{29}\vec{P}_3$:

4. Գտնել տրված մատրիցի հակադարձ մատրիցը: Ստուգել արդյունքը, հաշվելով տրված և ստացված մատրիցների արտադրյալը:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}:$$

Լուծում. հակադարձ ունի այն քառակուսի մատրիցան, որի որոշիչը հավասար չէ զրոյի:

Հաշվենք A մատրիցայի որոշիչը՝ $\det A$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 10 + 18 - 15 + 4 = 17 \neq 0:$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{մատրիցայի հակադարձ մատրիցան ունի}$$

հետևյալ տեսքը.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

որտեղ A_{ij} -ն A մատրիցայի a_{ij} էլեմենտի հանրահաշվական լրացումն է և որոշվում է $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ բանաձևով, իսկ M_{ij} -ն ստացվում է A մատրիցայի որոշիչից նրանից հեռացնելով i -րդ տողի և j -րդ սյան տարրերը:

Այժմ հաշվենք բոլոր հանրահաշվական լրացումները և ստանանք հակադարձ մատրիցան:

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 + 2 = 7$$

$$A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

$$A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4$$

$$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -15$$

$$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 11$$

$$A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 6$$

$$A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 10$$

$$A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

Հաշվի առնելով, որ մատրիցան թվով բազմապատկելիս այդ թվով բազմապատկվում են մատրիցայի բոլոր էլեմենտները, հակադարձ մատրիցայի համար կստանանք.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{17} & \frac{6}{17} & -\frac{15}{17} \\ -\frac{4}{17} & -\frac{1}{17} & \frac{11}{17} \\ \frac{1}{17} & -\frac{4}{17} & \frac{10}{17} \end{pmatrix} :$$

Այժմ ստուգենք, որ $A \cdot A^{-1} = E$, որտեղ E -ն միավոր մատրիցան է: Օգտվենք մատրիցաների բազմապատկման կանոնից, որը հետևյալն է:

Երկու մատրիցաներ $A = (a_{ij})$ և $B = (b_{ij})$ կարելի է բազմապատկել, եթե առաջինի սյուների քանակը հավասար է երկրորդի տողերի քանակին: Արդյունքում ստացվող $C = (c_{ij})$ արտադրյալ մատրիցան ունենում է այնքան տող, որքան առաջինը և այնքան սյուն, որքան երկրորդը, իսկ նրա c_{ij} տարրը որոշվում է հետևյալ բանաձևով.

$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$, այսինքն A մատրիցայի i -րդ տողի տարրերը բազմապատկվում են B մատրիցի j -րդ սյան համապատասխան տարրերով և ստացված արտադրյալները գումարում իրար:

Մեր դեպքում նշված պահանջը բավարարվում է և հաշվենք պահանջվող արտադրյալը.

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{7}{17} & \frac{6}{17} & -\frac{15}{17} \\ -\frac{4}{17} & -\frac{1}{17} & \frac{11}{17} \\ \frac{1}{17} & -\frac{4}{17} & \frac{10}{17} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot \frac{7}{17} + 0 \cdot \left(-\frac{4}{17}\right) + 3 \cdot \frac{1}{17} & \frac{12}{17} - \frac{12}{17} & -\frac{30}{17} + \frac{30}{17} \\ \frac{21}{17} - \frac{20}{17} - \frac{1}{17} & \frac{18}{17} - \frac{5}{17} + \frac{4}{17} & -\frac{45}{17} + \frac{55}{17} - \frac{10}{17} \\ \frac{7}{17} - \frac{8}{17} + \frac{1}{17} & \frac{6}{17} - \frac{2}{17} - \frac{4}{17} & -\frac{15}{17} + \frac{22}{17} + \frac{10}{17} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

5. Հաշվել հետևյալ սահմանները.

$$\begin{array}{ll} \text{ա) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 14x + 8}{2x^2 - 7x - 4}, & \text{բ) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x-2} - \sqrt{4-x}}{x-3}, \\ \text{գ) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n+1}{4n-3} \right)^{5n-1}, & \text{դ) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\sin 3x}: \end{array}$$

Լուծում. ա) ունենք $\frac{0}{0}$ տիպի անորոշություն, իսկ դա նշանակում

է, որ $x = 4$ հանդիսանում է համարիչում և հայտարարում գրված քառակուսի եռանդամների արմատ: Գտնենք մյուս արմատները և համարիչն ու հայտարարը վերլուծենք արտադրիչների, կրճատենք զրո դարձող արտադրիչները և անցնենք սահմանի.

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 14x + 8}{2x^2 - 7x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3(x-4)\left(x - \frac{2}{3}\right)}{2(x-4)\left(x + \frac{1}{2}\right)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x-2}{2x+1} = \frac{3 \cdot 4 - 2}{2 \cdot 4 + 1} = \frac{10}{9}:$$

բ) երբ $x \rightarrow 3$ ունենում ենք $\frac{0}{0}$ տիպի անորոշություն: Համարիչը և հայտարարը բազմապատկում ենք համարիչի համալուծով ($\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}$)-ով.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x-2} - \sqrt{4-x}}{x-3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x-2} - \sqrt{4-x})(\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x})}{(x-3)(\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-2-4+x}{(x-3)(\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2(x-3)}{(x-3)(\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}} = \frac{2}{2} = 1: \end{aligned}$$

գ) հաշվի առնելով, որ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+1}{4n-3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{1}{n}}{4 - \frac{3}{n}} = 1$ մեր

օրինակում ունենում ենք 1^∞ տիպի անորոշություն: Օգտվենք

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \text{հայտնի սահմանից և կատարենք}$$

համապատասխան ձևափոխություններ.

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n+1}{4n-3} \right)^{5n-1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n-3+4}{4n-3} \right)^{5n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{4n-3} \right)^{5n-1} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{4}{4n-3} \right)^{\frac{4n-3}{4}} \right]^{\frac{4(5n-1)}{4n-3}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{20n-4}{4n-3}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{20 - \frac{4}{n}}{4 - \frac{3}{n}}} = e^5 : \end{aligned}$$

դ) գործ ունենք $\frac{0}{0}$ տիպի անորոշության հետ: Այն հաշվելու

համար օգտվենք $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ հայտնի սահմանից, համարիչը և հայտարարը բաժանելով x -ի վրա կստանանք.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\sin 3x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\operatorname{tg} 5x}{x}}{\frac{\sin 3x}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \frac{\sin 5x}{\cos 5x} \cdot \frac{1}{x}}{3 \frac{\sin 3x}{x}} = \\ &= \frac{5 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos 5x}}{3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x}} = \frac{5}{3} : \end{aligned}$$

6. Որոշել հետևյալ ֆունկցիաների ածանցյալները.

$$\text{ա) } y = \left(5x^4 + 3\sqrt[7]{x^2} + 6 \right)^3, \quad \text{բ) } y = 2^{\sin 5x} + x \operatorname{tg}^2 3x :$$

Լուծում. օգտվենք բարդ ֆունկցիայի ածանցման կանոնից, որը հետևյալն է՝ եթե $y = f(u)$ և $u = \varphi(x)$ ֆունկցիաները ունեն ածանցյալներ ըստ իրենց արգումենտների, ապա գոյություն ունի $y = f(\varphi(x))$ բարդ ֆունկցիայի ածանցյալը ըստ x -ի և տեղի ունի հետևյալ բանաձևը $y'_x = y'_u \cdot u'_x$:

$$\text{ա) Նշանակենք } u = 5x^4 + 3\sqrt[7]{x^2} + 6, \quad f(u) = u^3 \text{ կստանանք}$$

$$\begin{aligned}
 y' &= \left[\left(5x^4 + 3\sqrt[7]{x^2} + 6 \right)^3 \right]' = 3 \left(5x^4 + 3\sqrt[7]{x^2} + 6 \right)^2 \left(5x^4 + 3x^{\frac{2}{7}} + 6 \right)' = \\
 &= 3 \left(5x^4 + 3\sqrt[7]{x^2} + 6 \right)^2 \left(5 \cdot 4x^3 + 3 \cdot \frac{2}{7} \cdot x^{\frac{2}{7}-1} \right) = \\
 &= 3 \left(5x^4 + 3\sqrt[7]{x^2} + 6 \right)^2 \left(20x^3 + \frac{6}{7\sqrt[7]{x^5}} \right):
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{բ) } y' &= (2^{\sin 5x} + x \operatorname{tg}^2 3x)' = (2^{\sin 5x})' + (x \operatorname{tg}^2 3x)' = \\
 &= 2^{\sin 5x} \ln 2 (\sin 5x)' + x' \operatorname{tg}^2 3x + x (\operatorname{tg}^2 3x)' = \\
 &= 2^{\sin 5x} \ln 2 \cdot \cos 5x \cdot 5 + \operatorname{tg}^2 3x + x \cdot 2 \operatorname{tg} 3x \cdot (\operatorname{tg} 3x)' = \\
 &= 5 \ln 2 \cdot \cos 5x 2^{\sin 5x} + \operatorname{tg}^2 3x + 6x \operatorname{tg} 3x \cdot \frac{1}{\cos^2 3x}:
 \end{aligned}$$

7. Հաշվել ֆունկցիայի լրիվ դիֆերենցիալը.

$$z = \ln(x^3 + 2xy^2 + 3y^4):$$

Լուծում. Եթե $z = f(x; y)$ երկու փոփոխականների ֆունկցիան դիֆերենցելի է, ապա նրա լրիվ դիֆերենցիալի համար տեղի ունի հետևյալ բանաձևը $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x^3 + 2xy^2 + 3y^4} (x^3 + 2xy^2 + 3y^4)'_x = \frac{3x^2 + 2y^2}{x^3 + 2xy^2 + 3y^4},$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{1}{x^3 + 2xy^2 + 3y^4} (x^3 + 2xy^2 + 3y^4)'_y = \frac{4xy + 12y^3}{x^3 + 2xy^2 + 3y^4} = \\
 &= \frac{4y(x + 3y^2)}{x^3 + 2xy^2 + 3y^4},
 \end{aligned}$$

$$dz = \frac{3x^2 + 2y^2}{x^3 + 2xy^2 + 3y^4} dx + \frac{4y(x + 3y^2)}{x^3 + 2xy^2 + 3y^4} dy :$$

8. Ապացուցել, որ $z = f(x; y)$ ֆունկցիան բավարարում է տրված առնչությանը.

$$z = \arctg \frac{y}{x}, \quad x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0 :$$

Լուծում. հաշվենք $z = f(x; y)$ ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալները և տեղադրենք առնչության մեջ:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \left(\frac{y}{x}\right)'_x = \frac{x^2}{x^2 + y^2} \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2 + y^2} ,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)'_y = \frac{x^2}{x^2 + y^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2} ,$$

$$x \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}\right) + y \frac{x}{x^2 + y^2} = 0 ,$$

$$-\frac{xy}{x^2 + y^2} + \frac{xy}{x^2 + y^2} = 0 :$$

9. Գտնել անորոշ ինտեգրալները.

$$\text{ա) } \int \frac{\cos x dx}{\sqrt{3 + 4 \sin x}}; \quad \text{բ) } \int x^3 \ln x dx; \quad \text{գ) } \int \frac{6x - 7}{x^2 + 3x + 4} dx :$$

Լուծում. ա) օգտվենք փոփոխականի փոխարինման կամ տեղադրման եղանակից, որը կայանում է հետևյալում. ենթադրվում է $f(\varphi(t))$ բարդ ֆունկցիայի գոյությունը, $f(x)$, $\varphi(t)$ և $\varphi'(t)$ ֆունկցիաների անընդհատությունը այդ դեպքում

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt:$$

Կատարենք հետևյալ նշանակումը $3+4\sin x=t$:

Այդ դեպքում $4\cos x dx = dt$ և

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{3+4\sin x}} &= \frac{1}{4} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{4} \int t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{4} \cdot 2t^{\frac{1}{2}} + c = \frac{1}{2} \sqrt{t} + c = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{3+4\sin x} + c:\end{aligned}$$

բ) կիրառենք մասերով ինտեգրման եղանակը: Եթե $u=u(x)$ և $v=v(x)$ ֆունկցիաները դիֆերենցելի են, ապա

$$\int u dv = uv - \int v du:$$

Նշանակենք $u=\ln x$, $dv=x^3 dx$, կունենանք $du=\frac{dx}{x}$ և $v=\frac{x^4}{4}$:

Օգտվելով մասերով ինտեգրման բանաձևից, կստանանք.

$$\begin{aligned}\int x^3 \ln x dx &= \int \ln x d\frac{x^4}{4} = \frac{x^4}{4} \ln x - \int \frac{x^4}{4} d \ln x = \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{1}{4} \int x^4 \frac{1}{x} dx = \\ &= \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{1}{4} \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{x^4}{16} + c:\end{aligned}$$

գ) հաշվի առնելով, որ $(x^2+3x+4)'=2x+3$, համարիչը կծափոխենք հետևյալ ձևով. $6x-7=3(2x+3)-16$: Այնուհետև հիմնական ինտեգրալը կներկայացնենք երկու ինտեգրալների տարբերության տեսքով, որոնք հաշվելու համար կօգտվենք

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c \text{ և } \int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a} \arctg \frac{u}{a} + c$$

բանաձևերից, նախորոք երկրորդ ինտեգրալի հայտարարում անջատելով երկանդամի լրիվ քառակուսի: Արդյունքում կստանանք.

$$\begin{aligned}
\int \frac{6x-7}{x^2+3x+4} dx &= \int \frac{3(2x+3)-16}{x^2+3x+4} dx = 3 \int \frac{2x+3}{x^2+3x+4} dx - \\
&- 16 \int \frac{dx}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 4} = 3 \int \frac{d\left(x+\frac{3}{2}\right)}{x^2+3x+4} - 16 \int \frac{d\left(x+\frac{3}{2}\right)}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} = \\
&= 3 \ln|x^2+3x+4| - 16 \cdot \frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{x+\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}} + c = 3 \ln(x^2+3x+4) - \\
&- \frac{32}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2x+3}{\sqrt{7}} + c :
\end{aligned}$$

10. Նյուտոն-Լայբնիցի բանաձևով հաշվել որոշյալ ինտեգրալը.

$$\int_{-1}^7 \frac{dx}{\sqrt{3x+4}} :$$

Լուծում. դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է $[a; b]$ միջակայքում և $F(x)$ ֆունկցիան էլ հանդիսանում է նրա նախնականը, այդ դեպքում ըստ Նյուտոն-Լայբնիցի բանաձևի

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a) :$$

Կիրառենք այն.

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^7 \frac{dx}{\sqrt{3x+4}} &= \frac{1}{3} \int_{-1}^7 (3x+4)^{-\frac{1}{2}} d(3x+4) = \frac{2}{3} (3x+4)^{\frac{1}{2}} \Big|_{-1}^7 = \\
&= \frac{2}{3} (\sqrt{3 \cdot 7 + 4} - \sqrt{3 \cdot (-1) + 4}) = \frac{2}{3} (5 - 1) = \frac{8}{3} :
\end{aligned}$$

11. Հաշվել տրված գծերով սահմանափակված պատկերի մակերեսը.

$$y=4-x^2 \text{ և } y=x^2-2x:$$

Լուծում. եթե պատկերը սահմանափակված է $y=f_1(x)$ և $y=f_2(x)$ կորերով, ընդ որում $f_2(x) \geq f_1(x)$ երբ $a \leq x \leq b$, ապա նրա մակերեսը հաշվվում է հետևյալ բանաձևով.

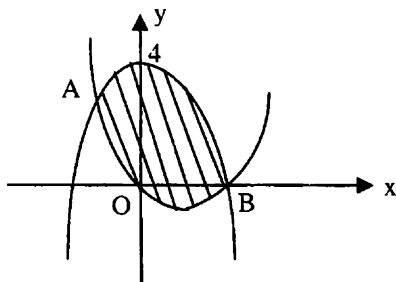
$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx:$$

Մեր դեպքում ունենք երկու պարաբոլներ, նախ որոշենք նրանց հատման կետերը, լուծելով հետոյալ համակարգը:

$$\begin{cases} y = 4 - x^2 \\ y = x^2 - 2x \end{cases}:$$

$$4 - x^2 = x^2 - 2x \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0, x_1 = -1, x_2 = 2:$$

Հետևաբար պարաբոլների հատման կետերը կլինեն $A(-1;3)$ և $B(2;0)$:



Երբ x -ը փոփոխվում է $[-1;2]$ միջակայքում $4 - x^2 \geq x^2 - 2x$:

Հաշվենք մակերեսը օգտվելով համապատասխան բանաձևից.

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^2 [4 - x^2 - (x^2 - 2x)] dx = \int_{-1}^2 (4 + 2x - 2x^2) dx = \left(4x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 \right) \Big|_{-1}^2 = \\ &= 8 + 4 - \frac{16}{3} - \left(-4 + 1 + \frac{2}{3} \right) = 9: \end{aligned}$$

12. Գտնել այն մարմնի ծավալը, որն առաջանում է տրված գծերով սահմանափակված հարթ պատկերը պտտելով OX առանցքի շուրջ.

$$y=x^2+3, x=0, x=2, y=0:$$

Լուծում. $y=f(x)$ կորով, $x=a$, $x=b$ և $y=0$ ուղիղներով սահմանափակված սեղանակերպը OX առանցքի շուրջ պտտելուց առաջացող տարածական մարմնի ծավալը որոշվում է

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx \text{ բանաձևով:}$$

Ուստի կունենանք.

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^2 (x^2 + 3)^2 dx = \pi \int_0^2 (x^4 + 6x^2 + 9) dx = \pi \left(\frac{x^5}{5} + 2x^3 + 9x \right) \Big|_0^2 = \\ &= \pi \left(\frac{32}{5} + 16 + 18 \right) = \frac{202}{5} \pi: \end{aligned}$$

13. Ստուգել շարքի զուգամիտությունը.

$$\frac{1}{2} + \frac{8}{4} + \frac{27}{8} + \frac{64}{16} + \dots$$

Լուծում. նախ որոշենք շարքի ընդհանուր անդամը, որը կլինի հետևյալը $a_n = \frac{n^3}{2^n}$:

Այսինքն պետք է պարզենք $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$ շարքի զուգամիտությունը:

Դրա համար օգտվենք Դալամբերի հայտանիշից, որը հետևյալն է.

$$\text{Եթե ունենք } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ դրական անդամներով շարքը և } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = D,$$

այապ եթե $D < 1$ շարքը զուգամետ է, $D > 1$ շարքը տարամետ է, իսկ երբ $D = 1$ հայտանիշը որոշակի պատասխան չի տալիս:

Հաշվենք a_{n+1} և կիրառենք Դալամբերի հայտանիշը:

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)^3}{2^{n+1}}:$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^3}{2^{n+1}}}{\frac{n^3}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\frac{n+1}{n} \right)^3 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^3 = \frac{1}{2} < 1:$$

Հետևաբար շարքը զուգամետ է:

14. Գտնել աստիճանային շարքի զուգամիտության տիրույթը.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{3^{n-1} \sqrt{n}}:$$

Լուծում. Նախ որոշենք աստիճանային շարքի զուգամիտության

շառավիղը օգտվելով հետևյալ բանաձևից $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$:

$$\text{Ունենք, որ } a_n = \frac{(-1)^n}{3^{n-1} \sqrt{n}}, a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{3^n \sqrt{n+1}}:$$

$$\text{Հետևաբար } R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(-1)^n}{3^{n-1} \sqrt{n}}}{\frac{(-1)^{n+1}}{3^n \sqrt{n+1}}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| 3 \sqrt{\frac{n+1}{n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| 3 \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \right| = 3:$$

$(-3; 3)$ միջակայքում աստիճանային շարքը կլինի բացարձակ զուգամետ: Այժմ լրացուցիչ ստուգենք շարքի վարքը $x=-3$ և $x=3$ կետերում:

$x=-3$ կետում կստանանք $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{n}}$ դրական անդամներով թվային

շարքը, որը կլինի տարամետ ըստ բաղդատման հայտանիշի: Քանի

որ $\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{n}$, իսկ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ հարմոնիկ շարքը տարամետ է, ուստի տարա-

մետ կլինի նաև $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ շարքը: Հաշվի առնելով, որ թվով բազմա-

պատկերիս շարքի վարքը չի փոխվում, հետևաբար տարամետ կլիմի

նաև $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{n}}$ շարքը:

$x = 3$ -ի դեպքում ստանում ենք $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3}{\sqrt{n}}$ նշանափոխ շարքը:

Ցույց տանք, որ այն բավարարում է նշանափոխ շարքերի Լայբնիցի հայտանիշի պայմաններին:

Ըստ Լայբնիցի հայտանիշի եթե ունենք $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n C_n$ նշանափոխ շարքը, որտեղ $C_n > 0$ և 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = 0$, 2) $C_{n+1} < C_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)

ապա շարքը զուգամետ է:

Մեր դեպքում $C_n = \frac{3}{\sqrt{n}}$: Հետևաբար $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{n}} = 0$ և

$C_{n+1} = \frac{3}{\sqrt{n+1}} < \frac{3}{\sqrt{n}} = C_n$, ուստի $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3}{\sqrt{n}}$ շարքը կլիմի զուգամետ:

Այսպիսով $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{3^{n-1} \sqrt{n}}$ աստիճանային շարքը կլիմի բացարձակ զուգամետ $(-3; 3)$ միջակայքում և պայմանական զուգամետ $x = 3$ կետում:

15. Գտնել դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը և այն մասնավոր լուծումը, որը բավարարում է նշված սկզբնական պայմանին.

$$y' + 2xy = xe^{-x^2}; \quad y_0 = 1 \text{ երբ } x_0 = 0:$$

Լուծում. ունենք առաջին կարգի գծային անհամասեռ դիֆերենցիալ հավասարում, որի լուծումը կփնտրենք $y = u \cdot v$ տեսքով: $y' = u'v + uv'$: Տեղադրելով այս արտահայտությունները հավասարման մեջ կստանանք.

$$u'v + uv' + 2x \cdot u \cdot v = xe^{-x^2} \quad \text{կամ} \quad u'v + u(v' + 2xv) = xe^{-x^2}:$$

v ֆունկցիան ընտրենք այնպես, որ $v' + 2xv = 0$: Որտեղից կստանանք $\frac{dv}{dx} = -2xv$, կամ փոփոխականները անջատելով $\frac{dv}{v} = -2x dx$: Ինտեգրելուց հետո $\int \frac{dv}{v} = -2 \int x dx$, կստանանք $\ln|v| = -x^2 + C_1$, որտեղից $|v| = e^{-x^2 + C_1}$ կամ $v = C_2 e^{-x^2}$: Վերցնենք $C_2 = 1$, հետևաբար $v = e^{-x^2}$: Տեղադրելով v -ի արժեքը սկզբնական հավասարման մեջ կստանանք $u'e^{-x^2} = xe^{-x^2}$, որտեղից $\frac{du}{dx} = x$, այսինքն $u = \frac{x^2}{2} + C$:

Վերջնական լուծումը կունենանք
 $y = u \cdot v = \left(\frac{x^2}{2} + C \right) e^{-x^2} = \frac{x^2}{2} \cdot e^{-x^2} + C e^{-x^2}$ տեսքով: Այն կլինի

հավասարման ընդհանուր լուծումը: Այժմ գտնենք այն մասնավոր լուծումը, որը բավարարում է $y(0) = 1$ պայմանին: Տեղադրելով կստանանք $1 = 0 + C$, հետևաբար մասնավոր լուծումը կունենա
 $y = e^{-x^2} \left(\frac{x^2}{2} + 1 \right)$ տեսքը:

16. Գտնել դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը.

$$y'' - 6y' + 8y = 3x^2 + 2x + 1:$$

Լուծում. ունենք երկրորդ կարգի հաստատուն գործակիցներով գծային անհամասեռ դիֆերենցիալ հավասարում, որի ընդհանուր լուծումը իրենից ներկայացնում է նրան համապատասխանող համասեռ հավասարման ($y'' - 6y' + 8y = 0$) ընդհանուր լուծման և անհամասեռի որևէ մասնավոր լուծման գումար՝ $y = y_{\text{ը}}(x) + y_{\text{ս}}(x)$:

Նախ լուծենք $y'' - 6y' + 8y = 0$ համասեռ հավասարումը, լուծումը փնտրելով $y = e^{kx}$ տեսքով: Ուստի $y' = k e^{kx}$, $y'' = k^2 e^{kx}$: Տեղադրելով կստանանք $k^2 e^{kx} - 6k e^{kx} + 8e^{kx} = 0$, կամ k -ի համար

$k^2 - 6k + 8 = 0$ բնութագրիչ հավասարումը, որտեղից $k_1 = 4$, $k_2 = 2$:

Հետևաբար համասեռ հավասարման ընդհանուր լուծումը կունենա $y_{\text{ը}}(x) = C_1 e^{4x} + C_2 e^{2x}$ տեսքը: Քանի որ անհամասեռ հավասարման աջ մասը երկրորդ կարգի բազմանդամ է, այդ պատճառով $y_{\text{ճ}}(x)$ մասնավոր լուծումը կփնտրենք անորոշ գործակիցներով երկրորդ կարգի բազմանդամի տեսքով $y_{\text{ճ}}(x) = Ax^2 + Bx + C$: Որտեղից $y'_{\text{ճ}}(x) = 2Ax + B$, իսկ $y''_{\text{ճ}}(x) = 2 \cdot A$: Տեղադրելով հավասարման մեջ կստանանք.

$$2A - 6(2Ax + B) + 8(Ax^2 + Bx + C) = 3x^2 + 2x + 1,$$

$$\text{կամ } 8Ax^2 + (8B - 12A)x + 2A - 6B + 8C = 3x^2 + 2x + 1:$$

Որպեսզի ստացվածը լինի նույնությոն, x -ի համապատասխան աստիճանների գործակիցները պետք է լինեն իրար հավասար, որտեղից կստանանք հետևյալ համակարգը.

$$\begin{cases} 8A = 3 \\ 8B - 12A = 2 \\ 2A - 6B + 8C = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{3}{8} \\ B = \frac{13}{16} \\ C = \frac{41}{64} \end{cases}:$$

$$\text{Հետևաբար մասնավոր լուծումը կլինի } y_{\text{ճ}}(x) = \frac{24x^2 + 52x + 41}{64},$$

$$\text{իսկ ընդհանուրը՝ } y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{2x} + \frac{1}{64}(24x^2 + 52x + 41):$$

**ՄԻԵՐ ԼԵՆՍԵՐԻ ԱՂԱԼՈՎՅԱՆ
ՍԿՐՈՒՄՆԻ ՄԻԻՐԱՆԻ ԳՅՈՒԼՈՂՈՒՄՆԵՐ**

**Բարձրագույն մաթեմատիկայի դասընթացի մեթոդական
ցուցումներ և ստուգողական աշխատանքներ**

(հեռակա ուսուցման համակարգում սովորող ուսանողների համար)

Համակարգչային ձևավորումը՝ Ա. Մարգարյանի

Պատվեր՝ 612: Չափս՝ 60x84¹/₁₆:

3 հեղ. մամուլ, 3,1 հրատ. մամուլ,

3,25 տպ. մամուլ, 3,2 տպ. պայմ. մամուլ:

Տպաքանակ՝ 150:

«Տնտեսագետ» հրատարակչություն

**Տպագրված է «Տնտեսագետ» հրատարակչության տպագրական
արտադրամասում**

Երևան 25, Նալբանդյան, 128