ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՏՆՏԵՍԱԳԻՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Բարձրագույն մաթեմատիկայի ամբիոն

Ավետիսյան Ա.Ե., Գալոյան Ռ.Ս., Հայրապետյան Ա.Ն.,
Մկրտչյան Հ.Հ., Դավթյան Վ.Ռ., Գյուլզյուլյան Մ.Մ.,
Մակարյան Մ.Մ., Մուրադյան Մ.Հ., Բեննեյան Ա.Հ.

ԲԱՐՁՐԱԳՈՒՅՆ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ՁԵՌՆԱՐԿ

Երևան
2014

ՀՏԴ 51(076.1)
ԳՄԴ 22.11g 7
Բ 362

Հրատարակվում է ՀՊՏՀ գիտական
խորհրդի որոշմամբ

Գրախոս՝ Մ.Մ. Միրզոյան
ֆ. մ. գ. թեկնածու, դոցենտ

Բարձրագույն մաթեմատիկայի խնդիրների ձեռնարկ
Բ 362 Ուսումնական ձեռնարկ / Ա.Ե. Ավետիսյան, Ռ.Ս. Գալոյան, Ա.Ն.Հայրապետյան, Հ.Հ. Մկրտչյան, Վ.Ռ. Դավթյան, Մ.Մ. Գյուլզյուլյան, Մ.Մ. Մակարյան, Մ.Հ. Մուրադյան, Ա.Հ.Բեննեյան - Եր.: «Տնտեսագետ», 2014.- 228 էջ:

Խնդրագիրքը կազմված է բուհի առաջին կուրսում դասավանդվող բարձրագույն մաթեմատիկայի ծրագրին համապատասխան: Նախատեսվում է անալիտիկ երկրաչափության, գծային հանրահաշվի և մաթեմատիկական անալիզի գործնական պարապմունքների համար:
Երկրորդ լրամշակված հրատարակություն:

ՀՏԴ 51(076.1)
ԳՄԴ 22.11g 7

ISBN 978-9939-61-101-3

ԳԼՈՒԽ I

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

§1. ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԵՎ ԳՈՐԾՈՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԴՐԱՆՑ ՀԵՏ

Բազմություն հասկացությունը մաթեմատիկայի հիմնարար հասկացություններից է, որը չի սահմանվում: Այդ պատճառով կսահմանափակվենք միայն բազմության նկարագրությամբ:

Բազմությունը օբյեկտների համախմբություն է: Օբյեկտները կոչվում են բազմության տարրեր: Խոսելով բազմության մասին, մենք ենթադրում ենք, որ ցանկացած օբյեկտի համար ճիշտ է հետևյալ պնդումներից մեկը և միայն մեկը՝ այդ օբյեկտը մեր բազմությունից է, կամ, ոչ:

Եթե a տարրը պատկանում է A բազմությանը, ապա գրում են $a\in A$: $a\notin A$ գրությունը նշանակում է a տարրը չի պատկանում A բազմությանը:

Այն բազմությունը, որը չի պարունակում ոչ մի տարր, կոչվում է դատարկ բազմություն և նշանակվում է $\varnothing$ սիմվոլով:

Բազմությունը կոչվում է թվային, եթե դրա տարրերը թվեր են:

Մի քանի կարևոր նշանակումներ և սիմվոլներ.

N – բոլոր բնական թվերի բազմությունը,

Z – բոլոր ամբողջ թվերի բազմությունը,

Q –բոլոր ռացիոնալ թվերի բազմությունը,

R – բոլոր իրական թվերի բազմությունը,

A բազմությունը կկոչվի B բազմության ենթաբազմություն՝ $A\subset B$, եթե A բազմության յուրաքանչյուր տարր պատկանում է B բազմությանը: Օրինակ, վերը նշված բազմությունների համար ունենք.

$$N \subset Z \subset Q \subset R:$$

A և B բազմությունները կոչվում են իրար հավասար, եթե A-ն հանդիսանում է B-ի ենթաբազմություն և հակառակը:

Այսինքն $A=B \Leftrightarrow A\subset B$ և $B\subset A$:

A և B բազմությունների $A\cup B$ միավորում կոչվում է այն նոր բազմությունը, որը բաղկացած է բոլոր այն տարրերից, որոնք պատկանում են A կամ B բազմություններից գոնե մեկին: Այսինքն՝

$$A\cup B=\{x;\ x\in A,\ \text{կամ}\ x\in B\}$$

A և B բազմությունների $A\cap B$ հատում կոչվում է այն նոր բազմությունը, որը բաղկացած է բոլոր այն տարրերից, որոնք միաժամանակ պատկանում են A և B բազմություններից յուրաքանչյուրին: Այսինքն՝

$$A\cap B = \{x;\ x\in A\ \text{և}\ x\in B\}:$$

A և B բազմությունների $A \setminus B$ տարբերություն կոչվում է A բազմության այն բոլոր տարրերի բազմությունը, որոնք B-ին չեն պատկանում: Այսինքն՝

$$A\setminus B=\{x;\ x\in A\ \text{և}\ x\notin B\}:$$

1. Ապացուցել հետևյալ առնչությունները.
1) $A\cup B=B\cup A$, 2) $A\cap B=B\cap A$, 3) $A\setminus B=A\setminus(A\cap B)$,
4) $(A\setminus B)\cup(B\setminus A)=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$:

2. Դիցուք $A=\{1,2,3,4,5,10,12\}$, $B=\{2,4,6,8,10\}$: Գտնել $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$ բազմությունները:

3. Ապացուցել հետևյալ պնդումների համարժեքությունը.
1) $A\cap B=B$ և $B\subset A$, 2) $A\cup B=B$ և $A\subset B$:

4. Դիցուք $A=(-3:2]$ և $B=[0:5)$: Գտնել $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$ և $B\setminus A$ բազմությունները:

5. Ցույց տալ, որ
1) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$,
2) $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$,
3) $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$,
4) $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$,
5) $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$,
6) $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$,

6. Հարթության վրա պատկերել հետևյալ բազմությունները.

1) $A=\{(x;y),\ x+y-4=0\}$,
2) $B=\{(x;y),\ x^2+y^2\leq 1\}$,
3) $C=\{(x;y),\ y\geq x^2\}$,
4) $D=\left\{(x;y),\ \frac{1}{x}>\frac{1}{y},\ x\neq 0,\ y\neq 0\right\}$

Սահմանում. f ֆունկցիան (օրենքը, կանոնը) A բազմությունը արտապատկերում է B բազմության մեջ, եթե A-ից վերցրած $\forall a$ տարրին f-ը համապատասխանեցնում է մեկ տարր B բազմությունից: Այդ տարրը կոչվում է a-ի պատկեր և նշանակվում է f(a) ($f(a)\in B$):

Այն որ f-ը արտապատկերում է A-ն B-ի մեջ նշանակում են այսպես՝ f $A\to B$: A-ն կոչվում է f ֆունկցիայի որոշման տիրույթ և նշանակվում է D(f) (A=D(f)) f(A)-ով նշանակենք հետևյալ բազմությունը

$$f(A)=\{f(a)\mid a\in A\}:$$

Այն կոչվում է f ֆունկցիայի արժեքների բազմություն $f(A)\subseteq B$: Եթե f(A)=B, ասում են, որ f-ը արտապատկերում է A-ն B-ի վրա:

Դիցուք f $A\to B$ և $\forall b$ տարրի համար, վերցրած f(A)-ից, $\exists$ միայն մեկ տարր՝ a A-ից այնպես, որ f(a)=b: Այս դեպքում f ֆունկցիան կոչվում է հակադարձելի, կամ ասում են որ $\exists$ f-ի հակադարձ ֆունկցիան: Ակնհայտ է, որ հակադարձ ֆունկցիայի գոյությունը f(A) որոշման տիրույթի վրա համարժեք է հետևյալին. A-ին պատկանող $\forall a_1,a_2$ ($a_1\neq a_2$) տարրերի համար $f(a_1)\neq f(a_2)$:f ֆունկցիայի հակադարձ ֆունկցիան նշանակում են f^{-1}: f^{-1} ֆունկցիան f(A) բազմությունը արտապատկերում է A բազմության վրա հետևյալ կերպ. f(A)-ին պատկանող $\forall b$-ի համար $\exists$ մեկ որոշակի a տարր A բազմությունից այնպես, որ f(a)=b և $f^{-1}(b)=a$: Այսպիսով՝ f(A)-ից վերցրած $\forall b$-ի համար $f(f^{-1}(b))=b$, ինչպես նաև A-ին պատկանող $\forall a$-ի համար $f^{-1}(f(a))=a$:

Ասում են որ f-ը փոխմիարժեք է արտապատկերում A-ն B-ի վրա, եթե f-ը հակադարձելի է և f(A)=B: A և B բազմությունները կոչվում են համարժեք, եթե $\exists$ f ֆունկցիա, որը A-ն փոխմիարժեք է արտապատկերում B-ի վրա:

Բնական թվերի N բազմությանը համարժեք բազմությունը կոչվում է հաշվելի բազմություն, իսկ եթե անվերջ բազմությունը համարժեք չէ բնական թվերի բազմությանը, ապա այդ բազմությունը կոչվում է ոչ հաշվելի:

7. Ապացուցել, որ ամբողջ թվերի Z բազմությունը հաշվելի է:

8. Ապացուցել, որ ռացիոնալ թվերի Q բազմությունը հաշվելի է:

9. Ցույց տալ, որ [0;1] և [3;10] հատվածները համարժեք են:

10. Ցույց տալ, որ [a;b] և [c;d] ցանկացած հատվածները համարժեք են:

11. Հաստատել փոխմիարժեք համապատասխանություն [0;1] հատվածի և (0;1) միջակայքի կետերի միջև:

12. Ապացուցել, որ վերջավոր բազմությունները համարժեք են այն և միայն այն դեպքում, եթե ունեն հավասար քանակով տարրեր:

13. Ապացուցել, որ բազմությունը ունի անվերջ քանակի տարրեր այն և միայն այն դեպքում, երբ այն համարժեք է իր հետ չհամընկնող իր որևէ ենթաբազմությանը:

14. Քանի՞ ենթաբազմություն ունի n տարրերից կազմված բազմությունը:

15. Ապացուցել, որ հետևյալ բազմությունները հաշվելի են.

1) $\{n \in N;\ n = 2k,\ k \in N\}$,

2) $\{n \in N;\ n = k^2 - k,\ k \in N\}$,

16. Ապացուցել, որ cos2x=1 հավասարման լուծումների բազմությունը հաշվելի է:

17. Ապացուցել, որ վերջավոր կամ հաշվելի թվով հաշվելի բազմությունների միավորումը հաշվելի է:

18. Ապացուցել, որ եթե A-ն ոչ հաշվելի բազմություն է, իսկ B-ն վերջավոր կամ հաշվելի, ապա A\B բազմությունը ոչ հաշվելի է:

19. Ապացուցել, որ [0;1] հատվածի կետերի բազմությունը հաշվելի չէ:

Թվային ոչ դատարկ X բազմությունը կոչվում է սահմանափակ վերևից, եթե ∃ M թիվ այնպես, որ X-ին պատկանող ∀ x տարրի համար՝ $x \le M$: Այդպիսի M թիվը կոչվում է X բազմության վերին եզր: Եթե ∃ m թիվ այնպես, որ X-ից վերցրած ∀ x-ի համար՝ $x \ge m$, ապա բազմությունը կոչվում է սահմանափակ ներքևից, իսկ m թիվը՝ ստորին եզր: Հնարավոր է ապացուցել, որ վերևից սահմանափակ բազմության վերին եզրերի թվում ∃ ամենափոքրը, իսկ ներքևից սահմանափակ բազմության ստորին եզրերի մեջ ∃ ամենամեծը: Վերին եզրերից ամենափոքրը կոչվում է ճշգրիտ վերին եզր, իսկ ստորին եզրերից ամենամեծը՝ ճշգրիտ ստորին եզր: Դրանք նշանակվում են supX, inf X: Եթե X բազմությունը վերևից սահմանափակ չէ, ապա ընդունված է գրել $\sup X=+\infty$, իսկ եթե ներքևից սահմանափակ չէ, ապա ընդունված է՝ $\inf X=-\infty$: Եթե բազմությունը սահմանափակ է վերևից և ներքևից, ապա այն կոչվում է սահմանափակ բազմություն:

20. Գտնել [2;3) բազմության ճշգրիտ վերին և ստորին եզրերը:

21. Հետևյալ բազմությունների համար գտնել ճշգրիտ վերին և ստորին եզրերը.

1) $X=\left\{\frac{1}{n},\ n\in N\right\}$, 2) $X=(-5;0]$,

3) $X=\left\{\frac{m}{n},\ m,n\in N, m<n\right\}$, 4) $X=\{3n+2,\ n\in N\}$:

22. Վերջավոր թվային բազմությունը կարո՞ղ է չունենալ ամենամեծ տարր: Կարո՞ղ են վերջավոր թվային բազմության ճշգրիտ եզրերը չպատկանել այդ բազմությանը:

23. Բերել բազմությունների օրինակներ, երբ դրանց ճշգրիտ եզրերը չեն պատկանում այդ բազմություններին և օրինակներ, երբ պատկանում են: Բերել անվերջ սահմանափակ բազմությունների օրինակներ: Գոյություն ունե՞ն արդյոք վերջավոր ոչ սահմանափակ բազմություններ:

§2. ՄԵԿ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ

Դիցուք $X \subseteq R$ և $Y \subseteq R$, իսկ f ֆունկցիան արտապատկերում է X-ը Y-ի մեջ: Այս դեպքում f-ը անվանում են թվային ֆունկցիա և այն նշանակում են y=f(x):

24. $f(x)=\dfrac{3x+2}{x-1}$: Գտնել f(2), f(–x), f(x+1), $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$, f(2x), f(t):

25. Գտնել հետևյալ ֆունկցիաների որոշման տիրույթները:

1) $f(x)=\sqrt{x+1}+\sqrt{5-x}$,
2) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$,

3) $f(x)=\log_2 \log_3 x$,
4) $f(x)=\arccos\dfrac{1-2x}{4}$,

5) $y=\ln(5-x)$
6) $y=\lg\dfrac{x^2-3x+2}{x+1}$,

7) $y=\sqrt{x+1}-\sqrt{7-x}$,
8) $y=\dfrac{1}{\ln(x+2)}+\sqrt{1-x}$,

9) $y=\log_x 3$,
10) $y=\sqrt{\cos x}$,

11) $y=\arccos\dfrac{x-1}{4-x}$,
12) $y=\sqrt{\arcsin(\ln x)}$,

13) $y=\sqrt{\sin x-1}$

26. Գտնել f(1), f(–1), f(100), եթե $f(x)=\lg x^2$:

27. Գտնել f(0), f(–x), f(x+1), f(x)+1, եթե $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$

28. $f(x)=2x^3-5x^2+x-7$: Գտնել $\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ և $\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$ ֆունկցիաները:

29. Ցույց տալ, որ $f(x)=kx+b$ ֆունկցիան բավարարում է $f(x+2)-2f(x+1)+f(x)=0$ ֆունկցիոնալ հավասարմանը:

30. Ցույց տալ, որ $f(x)=\ln x$ ֆունկցիան բավարարում է $f(x)+f(x+1)=f(x(x+1))$ ֆունկցիոնալ հավասարմանը:

31. Գտնել $y=f(x)$ ֆունկցիան, եթե

1) $f(x+1)=3x^2-x+2$, 2) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x+\dfrac{1}{x^2}$

32. $\mathrm{ch}x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$, $\mathrm{sh}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$, ապացուցել, որ

$$\mathrm{ch}^2x-\mathrm{sh}^2x=1,\ \mathrm{ch}^2x+\mathrm{sh}^2x=\mathrm{ch}2x:$$

Կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ համաչափ X տիրույթում որոշված f(x) ֆունկցիան կոչվում է զույգ ֆունկցիա, եթե $\forall x\in X$ թվի համար $f(-x)=f(x)$ և կենտ ֆունկցիա, եթե $f(-x)=-f(x)$:

f(x) ֆունկցիան կոչվում է սահմանափակ X տիրույթում, եթե դրա արժեքների բազմությունը սահմանափակ է, այսինքն $\exists$ M>0 այնպես, որ $\forall x\in X$ արժեքի համար տեղի ունի $|f(x)|\le M$ անհավասարությունը: f(x) ֆունկցիան կոչվում է մոնոտոն աճող (նվազող), եթե $x_2>x_1\Rightarrow f(x_2)>f(x_1)$ $(f(x_2)<f(x_1))$:

f(x) ֆունկցիան կոչվում է պարբերական, եթե $\exists$ 0-ից տարբեր այնպիսի T թիվ, որ D(f)-ից վերցրած $\forall x$-ի համար տեղի ունի

1) $x\pm T\in D(f)$ և 2) $f(x+T)=f(x)$:

Դրական փոքրագույն T պարբերությունը կոչվում է հիմնական պարբերություն:

33. Որոշել, թե տրված ֆունկցիաներից որոնք են զույգ, որոնք են կենտ և որոնք են ոչ զույգ, ոչ էլ կենտ:

1) $f(x)=x^4-2x^2+3$, 2) $f(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$,

3) $f(x)=x^3-x+1$, 4) $f(x)=\lg\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$,

5) $f(x)=x^2+3x^4$, 6) $f(x)=x^3-x$,

7) $f(x)=x^2+x$, 8) $f(x)=\text{const}$,

9) $f(x)=|2+x|+|2-x|$, 10) $f(x)=\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$,

11) $f(x)=\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}$ 12) $f(x)=|x|+x$:

34. Պարզել, թե տրված ֆունկցիաներից որոնք են պարբերական և եթե պարբերական է գտնել հիմնական պարբերությունը:

1) $f(x)=7\cos 5x$, 2) $f(x)=2\sin\dfrac{x}{3}$, 3) $f(x)=\cos(2x+3)$

4) $y=\sin ax$ $(a>0)$, 5) $f(x)=\sin^4 x+\cos^4 x$,

6) $f(x)=|\cos x|$, 7) $y=\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}-2\operatorname{tg}\dfrac{x}{3}$,

8) $y=\sin x^2$ 9) $f(x)=x+\sin x$:

35. Ապացուցել, որ եթե f(x)-ի որոշման տիրույթը համաչափ է սկզբնակետի նկատմամբ, ապա f(x)-ը հնարավոր է ներկայացնել $f(x)=\varphi_1(x)+\varphi_2(x)$ տեսքով, որտեղ $\varphi_1(x)$-ը զույգ ֆունկցիա է, իսկ $\varphi_2(x)$-ը՝ կենտ (տես N28 խնդիրը):

36. Ապացուցել, որ

$$f(x)=\begin{cases}1, & x-\text{ը ռացիոնալ է,}\\ 0, & x-\text{ը իռացիոնալ է,}\end{cases}$$

Դիրիխլեի ֆունկցիան պարբերական է $\forall$ ռացիոնալ թիվ պարբերությամբ:

37. Ապացուցել, որ եթե f(x) (D(f)=R) ֆունկցիայի համար $f(x+T)=kf(x)$, որտեղ k-ն և T-ն դրական թվեր են, ապա $f(x)=a^x\varphi(x)$, որտեղ a-ն հաստատուն է, իսկ $\varphi(x)$-ը՝ T պարբերությամբ ֆունկցիա. $\varphi(x+T)=\varphi(x)$:

38. Ապացուցել, որ եթե f(x) (D(f)=R) ֆունկցիայի համար տեղի ունի $f(x+T)=k+f(x)$ հավասարությունը, որտեղ k-ն և T-ն հաստատուններ են, ապա $f(x)=ax+\varphi(x)$, որտեղ a-ն հաստատուն է, իսկ $\varphi(x)$-ը T պարբերությամբ ֆունկցիա:

39. Գտնել հետևյալ ֆունկցիաների հակադարձ ֆունկցիաները և դրանց որոշման տիրույթները:

ա) $y=2x+3$,

բ) $y=x^4$, $D(y)=(-\infty,0]$,

գ) $y=x^4$, $D(y)=[0,+\infty)$,

դ) $y=\sqrt{4-x^2}$ $D(y)=[-2,0)$,

ե) $y=\sqrt{4-x^2}$ $D(y)=[0, 2]$,

զ) $y=\frac{1-x}{1+x}$, $D(y)=R\setminus\{-1\}$

է) $y=\begin{cases} x, & \text{եթե } x\in(-\infty,1) \\ x^2, & \text{եթե } x\in[1,4] \\ 2^x, & \text{եթե } x\in(4,+\infty) \end{cases}$

ը) $y=\begin{cases} \sqrt[3]{x}, & \text{եթե } x\in(-\infty,0) \\ 2x, & \text{եթե } x\in[0,2] \\ x^2, & \text{եթե } x\in(2,+\infty) \end{cases}$

Կառուցել հետևյալ ֆունկցիաների գրաֆիկները:

40. ա) $y=2x+3$, բ) $y=-\frac{x}{2}-1$, գ) $y=\sin(\arcsin x)$:

41. ա) $y=8x-2x^2$, բ) $y=x^2-3x+2$, գ) $y=-x^2+2x-1$, դ) $y=\frac{1}{2}x^2+x+1$:

42. $y=\frac{1}{x}$: **43.** $y=\frac{1}{x^2}$: **44.** $y=\sqrt{x}$

45. $y=\sqrt[3]{x}$ **46.** $y=\sqrt[3]{x^2}$ **47.** $y=|x|$:

48. $y=\sin nx$, եթե $n=1,2,3,\frac{1}{2}$:

49. $y=\cos(x+\varphi)$, եթե $\varphi=0,\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\pi$:

50. $y=\cos^2 x$: **51.** $y=\sin x+\cos x$: **52.** $y=\sin x^2$:

53. $y=e^{-x^2}$ **54.** $y=\lg x^2$ **55.** $y=\lg^2 x$:

56. $y=\lg\frac{1}{x}$:   **57.** $y=\lg(-x)$:   **58.** $y=\arcsin x$:

59. $y=\arccos x$:   **60.** $y=\mathrm{arctg}\, x$:   **61.** $y=x|x|$:

62. $y=\lg|x|$:   **62. 1)** $y=\mathrm{tg}|x|$,   **62.2)** $y=\arcsin(\sin x)$,

62.3) $y=x+|x|$,   **62.4)** $y=2^{-|x|}$,   **62.5)** $y=|\lg x|$

62.6) $y=|x^2-2x|$,   **62.7)** $y=x^2-2|x|$,   **62.8)** $y=|\sin x|$,

62.9) $y=\frac{1}{1+x^2}$,   **62.10)** $y=\frac{1}{1+x}$,   **62.11)** $y=\frac{x}{1+x}$,

62.12) $y=2^{\frac{1}{x}}$,   **62.13)** $y=2^{\sin x}$ **62.14)** $y=e^{\ln x}$

62.15) $y=\sin\frac{1}{x}$,   **62.16)** $y=x\sin\frac{1}{x}$,   **62.17)** $y=\mathrm{ch}x$

62.18) $y=\mathrm{sh}x$,   **62.19)** $y=\mathrm{th}x$,   **62.20)** $y=\frac{\sin x}{x}$:

ԳԼՈՒԽ II

ԱՆԱԼԻՏԻԿ ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԻ ՏԱՐՐԵՐԸ

§1. ԱՆԱԼԻՏԻԿ ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆԸ ՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՎՐԱ

1. Ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգը հարթության վրա, հատվածի բաժանումը տրված հարաբերությամբ, գծերի հավասարումները:

Թվային առանցքի վրա $A(x_1)$ և $B(x_2)$ կետերի միջև եղած հեռավորությունը որոշվում է $AB=|x_2-x_1|$ բանաձևով, իսկ հարթության վրա $A(x_1;y_1)$ և $B(x_2;y_2)$ կետերի միջև եղած հեռավորությունը ուղղանկյուն դեկարտյան կոորդինատային համակարգում որոշվում է

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

բանաձևով:

63. Եռանկյան գագաթներն են A(5;7), B(−7;2) և C(-3;1) կետերը: Գտնել այդ եռանկյան պարագիծը:

64. OX առանցքի վրա գտնել այն կետը, որը հավասարապես է հեռացած կոորդինատների սկզբնակետից և A(8;4) կետից:

65. Գտնել հետևյալ կետերի միջև եղած հեռավորությունը.

1) A(3;2) և B(−1;5),
2) C(4;7) և D(−1;0),
3) E(6;10) և F(0;4):

66. Եռանկյան գագաթներն են A(5;2), B(1;−1) և C(0;3): Գտնել եռանկյան պարագիծը:

67. Ապացուցել, որ A(4;11), B(6;3), C(9;6) գագաթներ ունեցող եռանկյունը ուղղանկյուն եռանկյուն է:

68. Ապացուցել, որ $A(-6;-1)$, $B(0;10)$, $C(4;-2)$ գագաթներ ունեցող եռանկյունը սուրանկյուն եռանկյուն է:

69. $A(-5;3)$, $B(9;8)$, $C(16;0)$ գագաթներ ունեցող եռանկյան ներքին անկյունների թվում կա՞ արդյոք բութ անկյուն:

70. Գտնել M կետի աբսցիսը, եթե նրա օրդինատը հավասար է -3-ի, իսկ $N(2;-1)$ կետից ունեցած հեռավորությունը հավասար է $\sqrt{29}$ -ի:

71. Օրդինատների առանցքի վրա գտնել այն կետը, որը $A(6;2)$ կետից հեռացած է 10 միավորով:

72. Աբսցիսների առանցքի վրա գտնել այն կետը, որը հավասարապես է հեռացած կոորդինատների սկզբնակետից և $A(1;3)$ կետից:

73. Գտնել այն կետը, որը հավասարապես է հեռացած կոորդինատային առանցքներից և $A(4;8)$ կետից:

74. Գտնել այն կետը, որը գտնվում է 15 միավոր հեռավորության վրա աբսցիսների առանցքից և $A(2;6)$ կետից:

Եթե $C(x;y)$ կետը գտնվում է $A(x_1;y_1)$ $B(x_2;y_2)$ ծայրակետերով հատվածի, կամ դրա շարունակության վրա այնպես, որ $\overline{AC} = \lambda\overline{CB}$, ապա կասենք որ C կետը AB հատվածը բաժանում է λ հարաբերությամբ: C կետի կոորդինատները որոշվում են հետևյալ բանաձևերով.

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}:$$

Մասնավորապես, եթե $\lambda=1$, ապա C-ն AB հատվածի միջնակետն է և նրա կոորդինատները կլինեն.

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}:$$

75. Գտնել $A(6;-1)$, $B(0;4)$ և $C(-3;2)$ գագաթներով եռանկյան AD միջնագծի երկարությունը:

76. Տրված են $A(-2;5)$, $B(6;0)$, $C(3;7)$ և $D(0;-4)$ կետերը: Գտնել AB և CD հատվածների միջնակետերի հեռավորությունը:

77. Գտնել $A(-2;-3)$, $B(2;5)$ և $C(7;0)$ գագաթներ ունեցող եռանկյան միջնագծերի երկարությունները:

78. Տրված են եռանկյան կողմերի միջնակետերը՝ $M(1;-2)$, $N(-2;2)$, $P(4;4)$: Գտնել այդ եռանկյան գագաթների կոորդինատները:

79. Գտնել եռանկյան գագաթները, եթե կողմերի միջնակետերն են $P(1;2)$, $K(-3;6)$ և $R(5;10)$ կետերը:

80. Հատվածի ծայրակետերն են $P(-6;8)$ $R(3;4)$ կետերը: Գտնել այդ հատվածը չորս հավասար մասերի բաժանող կետերի կոորդինատները:

81. $A(2;-6)$ և $B(8;6)$ կետերը միացնող հատվածը բաժանված է երեք հավասար մասերի: Գտնել բաժանման կետերի կոորդինատները:

82. $A(-5;-4)$ և $B(10;6)$ կետերը միացնող հատվածը բաժանված է հինգ հավասար մասերի: Գտնել բաժանման կետերի կոորդինատները:

83. $A(-1;4)$ և $B(3;7)$ ծայրակետերով հատվածի վրա որոշել C կետն այնպես, որ $AC = 4\,CB$:

84. $A(-3;-1)$ և $B(2;4)$ ծայրակետերով հատվածի շարունակության վրա գտնել այնպիսի C կետ, որ $CB = 3AC$:

85. $A(4;-2)$ և $B(6;0)$ ծայրակետերով հատվածի շարունակության վրա գտնել այնպիսի C կետ, որ $CB = 4\,AC$:

86. C(2;3) կետը հանդիսանում է A(x;−2) և B(5;y) ծայրակետերով հատվածի միջնակետը: Գտնել այդ կետերը:

87. Եռանկյան գագաթներն են՝ A(−4;−1), B(2;5), C(8;−3) կետերը: Գտնել այդ եռանկյան մակերեսը և C գագաթից տարված բարձրության երկարությունը:

88. Գտնել այն եռանկյան միջնագծերի հատման կետը, որի գագաթներն են՝ A(−5;2), B(6;8), C(11,−1) կետերը:

89. Գտնել $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$ և $C(x_3;y_3)$ գագաթներով եռանկյան միջնագծերի հատման M կետը (ծանրության կենտրոնը):

90. Գտնել եռանկյան միջնագծերի հատման կետի կոորդինատները, իմանալով դրա գագաթների կոորդինատները՝ A(1;4), B(−5;0), C(−2;−1):

91. Եռանկյան գագաթներն են՝ A(4;−3), B(7;8), C(−2;7) կետերը: Գտնել այն կետերը, որոնցով եռանկյան միջնագծերը բաժանվում են երեք հավասար մասերի:

92. Գտնել A(−7;2) և B(4;−3) ծայրակետեր ունեցող հատվածի միջնուղղահայացի հավասարումը:

93. Կազմել այն կետերի երկրաչափական տեղի հավասարումը, որոնք հավասարապես են հեռացած A(−2;−3) և B(6;5) կետերից:

94. Կազմել այն կետերի երկրաչափական տեղի հավասարումը, որոնք հավասարապես են հեռացած կոորդինատների սկզբնակետից և $x=-2$ ուղղից:

95. Կազմել այն կետերի երկրաչափական տեղի հավասարումը, որոնք հավասարապես են հեռացած A(2;2) կետից և OX առանցքից:

96. Կազմել այն կետերի երկրաչափական տեղի հավասարումը, որոնք հավասարապես են հեռացած A(−3;−1) կետից և $x=-1$ ուղղից:

97. Կազմել այն հատվածների միջնակետերի երկրաչափական տեղի հավասարումը, որոնց մի ծայրակետը $A(-2;6)$ կետն է, իսկ մյուսը գտնվում է OX առանցքի վրա:

98. Կազմել այն կետերի երկրաչափական տեղի հավասարումը, որոնց տրված $A(2;-4)$ և $B(-4;2)$ կետերից ունեցած հեռավորությունների հարաբերությունը հավասար է 2-ի:

99. Գտնել այն կետերի երկրաչափական տեղի հավասարումը, որոնց հեռավորությունը $A(0;9)$ կետից երեք անգամ մեծ է $B(0;1)$ կետից ունեցած հեռավորությունից:

100. Գտնել այն կետերի երկրաչափական տեղի հավասարումը, որոնց հեռավորությունը $A(-8;0)$ կետից երկու անգամ մեծ է $x=-2$ ուղղից ունեցած հեռավորությունից:

101. Գտնել այն կետերի երկրաչափական տեղի հավասարումը, որոնց $F_1(-2;0)$ և $F_2(2;0)$ կետերից ունեցած հեռավորությունների գումարը $2\sqrt{5}$ է:

102. Գտնել այն կետերի երկրաչափական տեղի հավասարումը, որոնց $F_1(-2;2)$ և $F_2(2;2)$ կետերից ունեցած հեռավորությունների տարբերությունը 4 է:

2. Ուղիղը հարթության վրա: Երկու ուղիղների կազմած անկյունը, դրանց ուղղահայացության և զուգահեռության պայմանները:

Եթե OX առանցքը ուղղի հետ կազմում է $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ անկյուն, իսկ OY առանցքը հատում է այն $(0;b)$ կետում, ապա ուղղի հավասարումն է $y=kx+b$, որտեղ $k=tg\alpha$ թիվը ուղղի անկյունային գործակիցն է: Այս հավասարումը կոչվում է ուղղի հավասարում անկյունային գործակցով:

Երկու փոփոխականներով առաջին աստիճանի հավասարումը՝ $Ax+Bx+C=0$ $(A^2+B^2\neq0)$ կոչվում է ուղղի ընդհանուր հավասարումը:

Ուղղի հավասարումը հատվածներով ունի հետևյալ տեսքը՝ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$: Այստեղ a-ն և b-ն ուղղի և համապատասխան կոորդինատային առանցքների հատման կետերի կոորդինատներն են:

Տրված $A(x_0;y_0)$ կետով անցնող և տրված k անկյունային գործակից ունեցող ուղղի հավասարումն է

$$y-y_0=k(x-x_0):$$

Տրված $A(x_1;y_1)$ և $B(x_2;y_2)$ երկու կետերով անցնող ուղղի հավասարումն է

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \quad (x_1\neq x_2, y_1\neq y_2):$$

Եթե տրված է ուղղի p հեռավորությունը սկզբնակետից և նրան ուղղահայաց միավոր $\overline{n_0}(\cos\alpha,\sin\alpha)$ վեկտորը (ուղղի նորմալ վեկտորը), ապա այդ ուղղի հավասարումն է $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$, որը կոչվում է ուղղի նորմալ հավասարում: Ուղղի ընդհանուր հավասարումը նորմալ տեսքի բերելու համար բազմապատկում են $\mu=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$ նորմավորող արտադրիչով, որի նշանը ընտրվում է C-ի նշանին հակառակ: Այս հավասարման միջոցով որոշվում է $(x_0;y_0)$ կետի հեռավորությունը $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$ ուղղից հետևյալ բանաձևով

$$h=|x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - p|, \quad \text{կամ}$$

$$h=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

$y=k_1x+b_1$ և $y=k_2x+b_2$ ուղիղների կազմած, կամ I ուղղի II հետ կազմած θ անկյունը, որը այն դրական ամենափոքր անկյունն է, որով պետք է պտտել I ուղիղը մինչև այն համընկնի II ուղղի հետ, որոշվում է $tg\theta=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$ բանաձևից:

Երկու ուղիղների զուգահեռության համար անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրանց անկյունային գործակիցները լինեն իրար հավասար՝ $k_1=k_2$, կամ երկուսն էլ չունենան անկյունային գործակից, այսինքն լինեն ուղղահայաց OX առանցքին: Երկու ուղիղների ուղղահայացության համար անհրաժեշտ է և բավարար $k_1k_2=-1$ պայմանը, կամ եթե ուղիղներից մեկը չունի անկյունային գործակից, ապա մյուսի անկյունային գործակիցը հավասար է 0-ի, այսինքն ուղիղը զուգահեռ է OX առանցքին:

103. Գտնել $5x-2y-7=0$ ուղղի անկյունային գործակիցը և կառուցել այդ ուղիղը.

104. $A(-1;4)$ և $B(11;3)$ կետերը միացնող ուղղի վրա գտնել այն կետը, որի աբսցիսը հավասար է 5-ի:

105. Որոշել, թե $y=3x-2$ ուղիղը անցնո՞ւմ է արդյոք $A(2;4)$, $B(-3;11)$, $C(2,5; -8)$, $D(1;1)$ կետերով:

106. Գտնել հետևյալ ուղիղների անկյունային գործակիցները և օրդինատների առանցքից կտրած հատվածների մեծությունները.

1) $5x-7y+14=0$,　　3) $6x-5=0$,

2) $2x+3y+9=0$,　　4) $4y-7x=0$:

107. Գտնել այն ուղղի հավասարումը, որն OY առանցքից կտրում է 4 միավոր մեծության հատված և OX առանցքի նկատմամբ թեքված է α անկյունով.

1) $\alpha=30^0$　　2) $\alpha=60^0$　　3) $\alpha=120^0$　　4) $\alpha=150^0$:

108. Գտնել այն ուղղի հավասարումը, որն անցնում է կոորդինատների սկզբնակետով և OX առանցքի նկատմամբ թեքված է

1) 45^0　　2) 60^0　　3) 135^0　　4) 180^0 անկյունով:

109. Գտնել $\sqrt{3x}-3y+5=0$ ուղղի թեքման անկյունն OX առանցքի նկատմամբ:

110. Գտնել այն ուղղի հավասարումը, որն OX և OY առանցքներից կտրում է համապատասխանաբար 4 և -5 մեծություններով հատվածներ:

111. Կազմել այն ուղիղների հավասարումները, որոնք OX և OY առանցքներից կտրում են համապատասխանաբար 2 և 5 երկարության հատվածներ:

112. Հետևյալ ուղիղների հավասարումները գրել հատվածներով.

1) $3x-5y=15$, 3) $y=3x-2$,

2) $2x+3y+8=0$, 4) $y=1-x$:

113. Գտնել այն եռանկյան մակերեսը, որը սահմանափակված է կոորդինատային առանցքներով և $2x+y=6$ ուղղով:

114. Կառուցել հետևյալ հավասարումներն ունեցող ուղիղները՝

1) $3x+7y-21=0$, 2) $2y-3x=6$, 3) $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$,

4) $2x-3y=0$, 5) $x-\frac{y}{2}=1$, 6) $3x-5=0$,

7) $3x=0$, 8) $2y+3=0$, 9) $2y=0$:

115. Գտնել այն ուղղի հավասարումը, որն անցնում է $(-3;1)$ կետով և աբսցիսների առանցքի նկատմամբ թեքված է 120^0 անկյունով:

116. Հաշվել հետևյալ ուղիղներով կազմված անկյունը ուղիղների յուրաքանչյուր զույգը դիտարկելով այն կարգով, ինչ կարգով դրանք տրված են:

1) $y=2x+3$ և $y=2x+5$, 2) $y=4x-1$ և $y=-\frac{1}{4}x+3$,

3) $y=-\frac{3}{4}x-2$ և $y=\frac{1}{7}x+5$, 4) $3x-2y+4=0$ և $6x-4y-1=0$,

5) $\sqrt{2}x+y=1$ և $2x-2\sqrt{2}y=-5$,

6) $2x-3y+5=0$ և $5x-y-3=0$, 7) $\frac{x}{5}-\frac{y}{3}=1$ և $\frac{x}{8}+\frac{y}{2}=1$

8) $5x+2y-3=0$ և $4x-3y-2=0$

9) $\sqrt{3}x-y-4=0$ և $3x+\sqrt{3}y+5=0$

117. Գտնել այն ուղղի հավասարումը, որն անցնում է $(-3;7)$ կետով և զուգահեռ է՝

1) OX առանցքին, 2) $3x+2=0$ ուղղին,
3) $5x-2y+1=0$ ուղղին, 4) $x+3y=4$ ուղղին:

118. Գտնել այն ուղղի հավասարումը, որն անցնում է $(2;5)$ կետով և ուղղահայաց է՝

1) $x+2y-1=0$ ուղղին, 2) $7x-3y+52=0$ ուղղին,
3) $4-3x=0$ ուղղին, 4) OX առանցքին:

119. Գտնել այն ուղղի հավասարումը, որն անցնում է $13x-7y-6=0$ և $4y-9x+5=0$ ուղիղների հատման կետով և

1) ուղղահայաց է առաջին ուղղին,
2) զուգահեռ է երկրորդ ուղղին:

120. $x+y-1=0$ և $3x-y-11=0$ ուղիղների հատման կետով տանել $x+6y-3=0$ ուղղին զուգահեռ ուղիղ:

121. $5x-4y+17=0$ և $7x+4y-5=0$ ուղիղների հատման կետով տանել $2x-3y+4=0$ ուղղին զուգահեռ ուղիղ:

122. $x-2y+7=0$ և $3x+y-7=0$ ուղիղների հատման կետով տանել $3x-2y-6=0$ ուղղին ուղղահայաց ուղիղ:

123. Ի՞նչ անկյան տակ է թեքված AB հատվածը OX առանցքի նկատմամբ, եթե՝

1) $A(-1;7)$, $B(2;4)$, 2) $A(2;3)$, $B(5;3+\sqrt{3})$,
3) $A(-2;5)$, $B(4;-3)$, 4) $A(2;1)$, $B(3;-8)$:

124. Գտնել այն ուղղի հավասարումը, որն անցնում է $(-2;5)$ կետով և ուղղահայաց է $(-4;-3)$ ու $(6;1)$ կետերը միացնող ուղղին:

125. Գտնել այն ուղղի հավասարումը, որն անցնում է $(6;-3)$ կետով և զուգահեռ է $(-1;7)$ ու $(5;-2)$ կետերը միացնող ուղղին:

126. Եռանկյան գագաթներն են՝ A(−2;−3), B(5;4), C(0;8): Գտնել C գագաթից AB կողմին տարված զուգահեռ ուղղի հավասարումը:

127. Եռանկյան գագաթներն են՝ A(−4;−2), B(4;1), C(8;7): Գտնել A գագաթից տարված բարձրության հավասարումը:

128. Գտնել A(−4;2), B(2;−5) և C(5;0) գագաթներով եռանկյան բարձրությունների հատման կետի կոորդինատները:

129. Գտնել $5x+2y-10=0$ ուղղին՝ կոորդինատային առանցքների հետ դրա հատման կետերում կանգնեցրած ուղղահայացների հավասարումները:

130. Եռանկյան գագաթներն են A(−1;−1), B(1;3) և C(4;2) կետերը: Գտնել եռանկյան կողմերի հավասարումները:

131. Գտնել եռանկյան կողմերի հավասարումները, եթե դրա գագաթներն են՝ A(6;1), B(−2;−1) և C(6;−3):

132. Գտնել եռանկյան միջնագծերի հավասարումները, եթե եռանկյան գագաթներն են M(4;3), N(1;−1) և P(−1;4) կետերը:

133. Գտնել եռանկյան միջին գծերի հավասարումները, եթե հայտնի են դրա գագաթների կոորդինատները՝ A(−6;1), B(−1;4), C(1;−3):

134. Քառանկյան կողմերի հավասարումներն են՝ $x=4$, $y=6$, $y=3x$, $y=x$: Գտնել անկյունագծերի հավասարումները:

135. Կազմել $y^2=9x$ և $x^2=9y$ կորերի հատման կետերով անցնող ուղղի հավասարումը:

136. Ապացուցել, որ A(−1;1), B(1;0), C(4;3), D(6;8) գագաթներ ունեցող քառանկյունը սեղան է:

137. Ապացուցել, որ A(0;2), B(1;1), C(−2;−4), D(−3;−3) գագաթներ ունեցող քառանկյունը զուգահեռագիծ է:

138. Կազմել այն ուղղի հավասարումը, որն անցնում է A(2;3) կետով և 45^0 անկյուն է կազմում $2x-3y-8=0$ ուղղի հետ:

139. Գտնել A(−1;1) կետով անցնող և $x+3y=6$ ուղղի հետ 135^0 անկյուն կազմող ուղղի հավասարումը:

140. Տրված են զուգահեռագծի երկու կողմերի հավասարումները՝ $y=3x$ և $x+y-4=0$ և դրա անկյունագծերի հատման կետը՝ (2;1): Կազմել մյուս երկու կողմերի հավասարումները:

141. $3x-7y-3=0$ ուղղի վրա գտնել այն կետը, որը հավասարապես է հեռացած (−3;−1) և (2;4) կետերից:

142. 5x+4ը−7=0 ուղղի վրա գտնել այն կետը, որը հավասարապես է հեռացված (−3;2) և (5;−1) կետերից:

143. Գտնել այն կետը, որը հավասարապես է հեռացած (9;3), (−3;3) և (11;1) կետերից:

144. Հետևյալ ուղիղների հավասարումներից որո՞նք ունեն նորմալ տեսք՝

1) $3x-4y+7=0$, 2) $\frac{2}{3}x-\frac{5}{7}y-5=0$,

3) $\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-2=0$, 4) $\frac{1}{2}x-y-3=0$,

5) $\frac{12}{13}x-\frac{5}{13}y-7=0$, 6) $\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y=0$:

145. Գտնել ուղղի հավասարումը հետևյալ պայմաններով. դրա հեռավորությունը կոորդինատների սկզբնակետից հավասար է 3 միավորի, իսկ OX առանցքը սկզբնակետից որոնելի ուղղին իջեցված ուղղահայացի հետ կազմում է

1) 45^0, 2) 120^0, 3) 315^0 անկյուն:

146. Հետևյալ ուղիղների հավասարումները բերել նորմալ տեսքի՝

1) $3x-4y-25=0$, 2) $6x-8y+13=0$,

3) $2x-y+5=0$, 4) $2\sqrt{2}x-2\sqrt{7}y-15=0$:

147. Գտնել կոորդինատների սկզբնակետից հետևյալ ուղղին իջեցրած ուղղահայացի երկարությունը և այդ ուղղահայացի հիմքի կոորդինատները.

1) $4x-2\sqrt{5}y-15=0$, 2) $3x+4y+40=0$:

148. Գտնել

1) $A(-2;3)$ կետի հեռավորությունը $6x+8y-7=0$ ուղղից,
2) $B(1;-3)$ կետի հեռավորությունը $7x-8y-31=0$ ուղղից,
3) $C(-2;-3)$ կետի հեռավորությունը $3x+5y+4=0$ ուղղից:

149. Եռանկյան գագաթը գտնվում է $A(3;-2)$ կետում, իսկ հիմքը՝ $B(-2;0)$ և $C(3;10)$ կետերը միացնող հատվածն է: Գտնել եռանկյան A գագաթից տարված բարձրության երկարությունը:

150. $A(1;2)$, $B(2;-2)$ և $C(6;1)$ գագաթներ ունեցող եռանկյան համար գտնել

1) (CD) բարձրության հավասարումը,
2) h=CD բարձրության երկարությունը,
3) (CD) բարձրության և (BM) միջնագծի կազմած θ անկյունը:

151. Տրված է $6x-8y-15=0$ ուղիղը: Գտնել այն ուղղի հավասարումը, որը տրվածին զուգահեռ է և դրանից ունի 4 միավոր հեռավորություն:

152. Տրված է $2\sqrt{6}x+5y=14$ ուղիղը: Գտնել այն ուղղի հավասարումը, որը տրվածին զուգահեռ է և դրանից ունի 5 միավոր հեռավորություն:

153. Գտնել հետևյալ զուգահեռ ուղիղների միջև եղած հեռավորությունը.

$$5x-3y+9=0 \quad \text{և} \quad 5x-3y-8=0$$

154. Գտնել հետևյալ զուգահեռ ուղիղների միջև եղած հեռավորությունը.

$$12x-5y+36=0 \quad և \quad 12x-5y-16=0$$

155. Տրված են սեղանի հիմքերի հավասարումները՝ $x-7y+15=0$ և $2x-14y-20=0$: Գտնել սեղանի բարձրությունը:

156. Գտնել $4x+3y-8=0$ և $9x-12y-5=0$ ուղիղներով կազմված անկյունների կիսորդների հավասարումները: Ցույց տալ, որ այդ կիսորդները միմյանց ուղղահայաց են:

157. Գտնել $2x+9y-13=0$ և $7x-6y-23=0$ ուղիղներով կազմված անկյունների կիսորդների հավասարումները:

158. Կազմել $M(13;0)$ կետից $x^2+y^2=25$ շրջանագծին տարված շոշափողների հավասարումները:

159. Կազմել $M(-6;2)$ կետից $x^2+y^2=4$ շրջանագծին տարված շոշափողների հավասարումները:

160. Տրված են զուգահեռագծի երկու կողմերը՝ $7x-24y-45=0$, $3x+4y-5=0$ և անկյունագծերի հատման $M(7;1)$ կետը: Գտնել զուգահեռագծի բարձրությունների երկարությունները:

161. Տրված են $A(12;-3)$ և $B(1;4)$ կետերը: Օրդինատների առանցքի վրա գտնել C կետն այնպես, որ (AC) և (CB) ուղիները լինեն իրար ուղղահայաց:

162. Տրված են եռանկյան $A(-2;4)$ և $B(2;1)$ երկու գագաթները և բարձրությունների հատման $D(1;3)$ կետը: Կազմել եռանկյան կողմերի հավասարումները:

163. Տրված են եռանկյան երկու միջնագծերի հավասարումները՝ $5x+4y=0$, $3x-y=0$ և մի գագաթի կոորդինատները $(-5;2)$: Կազմել եռանկյան կողմերի հավասարումները:

3. Կոորդինատների ձևափոխություն, գծային անհավասարումների համակարգեր:

Ընտրելով ուղղանկյուն դեկարտյան կոորդինատային նոր համակարգ այնպես, որ նոր սկզբնակետը գտնվի $O_1(a;b)$ կետում, իսկ նոր կոորդինատական առանցքները լինեն համուղղված սկզբնական առանցքներին, $M(x;y)$ կետի նոր $(x';y')$ կոորդինատները կորոշվեն $x'=x-a$ և $y'=y-b$ բանաձևերով: Կոորդինատների այսպիսի ձևափոխությունը կոչվում է զուգահեռ տեղափոխություն: Իսկ եթե կոորդինատների սկզբնակետերը թողնելով նույնը կատարենք կոորդինատային առանցքների պտույտ α անկյունով (ժամացույցի սլաքի հակառակ ուղղությամբ), ապա կոորդինատների ձևափոխության բանաձևերը կունենան հետևյալ տեսքը՝

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}$$

Վերջապես, ընդհանուր դեպքում, եթե կատարվել է զուգահեռ տեղափոխություն և առանցքների պտույտ, ապա կոորդինատների ձևափոխության բանաձևերը կունենան հետևյալ տեսքը՝

$$\begin{cases} x' = (x-a)\cos\alpha + (y-b)\sin\alpha \\ y' = -(x-a)\sin\alpha + (y-b)\cos\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha + a \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha + b \end{cases}$$

164. Կոորդինատների սկզբնակետը զուգահեռ տեղափոխությամբ տեղաշարժվել է $O_1(4;-3)$ կետը: Գտնել $A(8;7)$ կետի կոորդինատները նոր կոորդինատական համակարգում:

165. Կոորդինատական առանցքները պտտված են 30^0-ով: Գտնել $M(2\sqrt{3};2)$ կետի նոր կոորդինատները:

166. Կոորդինատական նոր համակարգի սկզբնակետը գտնվում է $O_1(3;4)$ կետում, իսկ նոր առանցքները սկզբնակետի նկատմամբ պտտված են 60^0-ով: Գտնել $5x-2y+7=0$ ուղղի հավասարումը նոր կոորդինատական համակարգում:

167. Կոորդինատական առանցքների զուգահեռ տեղափոխությամբ սկզբնակետը տեղափոխված է $O_1(-5;2)$ կետը: Գտնել $A(0;7)$, $B(-2;-1)$, $C(5;-4)$ կետերի նոր կոորդինատները:

168. Գտնել $A(4;3)$, $B(1;1)$, $C(8;0)$ կետերի նոր կոորդինատները, եթե կատարվել է կոորդինատային առանցքների պտույտը α անկյունով: Դիտարկել $\alpha=30^0$, $\alpha=45^0$, $\alpha=60^0$ դեպքերը:

169. Գտնել կոորդինատական առանցքների զուգահեռ տեղափոխությունը, որը $y=x^2+8x+11$ պարաբոլի հավասարումը բերում է $y'=(x')^2$ պարզագույն տեսքի:

170. Կոորդինատական առանցքների զուգահեռ տեղափոխությամբ պարզեցնել հետևյալ հավասարումները:

1) $y^2+4y=4x-16$, 2) $x^2+y^2-12x+18y-52=0$,

3) $x^2+4y^2-6x+8y=3$, 4) $x^2+y^2-12x+14y+60=0$,

171. Կոորդինատական առանցքների զուգահեռ տեղափոխությամբ պարզեցնել $y=\dfrac{4x-3}{3x+5}$ հավասարումը, նոր սկզբնակետ վերցնելով $\left(-\dfrac{5}{3};\dfrac{4}{3}\right)$ կետը:

172. Կոորդինատական առանցքները 45^0 անկյունով պտտելով պարզեցնել հետևյալ հավասարումները:

1) $5x^2-6xy+5y^2=32$, 2) $3x^2-10xy+3y^2+32=0$:

173. Ի՞նչ անկյունով պետք է պտտել կոորդինատական առանցքները, որպեսզի հետևյալ կորերի նոր հավասարումները չպարունակեն փոփոխականների արտադրյալը.

1) $x^2-xy+y^2=3$, 2) $5x^2-4xy+2y^2=24$:

Քանի որ $Ax+By+C=0$ հավասարմանը բավարարում են որոշակի ուղղի կետերը, ուրեմն $Ax+By+C>0$ կամ $Ax+By+C<0$ անհավասարություններին կբավարարեն ուղղին չպատկանող կետերը՝ կամ ուղղից վերև ընկած կիսահարթության կետերը, կամ ուղղից ներքև ընկած կիսահարթության կետե-րը: Նշենք, որ երկու կետերից ավելի վերև ընկած է համարվում մեծ օրդինատ ունեցող կետը: Եթե C>0 ապա Ax+By+C>0 անհավասարությանը կբավարարեն այն կիսահարթության կետերը, որը պարունակում է կոորդինատների սկզբնակետը:

Եթե կիսահարթության գոնե մեկ կետ բավարարում է նշված անհավասարությանը, ապա այդ կիսահարթության բոլոր կետերը կբավարարեն անհավասարությանը:

174. Գտնել այն կիսահարթությունները, որոնք բավարարում են հետևյալ անհավասարություններին:

1) $3x-y-6<0$, 2) $x-2y+4\le 0$, 3) $2x-3y>0$

175. Հարթության վրա նշել այն կետերի բազմությունը, որոնց կոորդինատները բավարարում են անհավասարությունների փվյալ համակարգին:

1) $\begin{cases} 2x+y\le 2 \\ -x+y\le 1 \\ y\ge 0 \end{cases}$, 2) $\begin{cases} -x-y\le 1 \\ -x+y\le 1 \\ x+y\le 1 \\ x-y\le 1 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y\le x \\ x\le 1 \\ 2y\ge x \\ y\ge 0 \end{cases}$,

4) $\begin{cases} x\ge 0 \\ y\ge 0 \\ x+y\le 1 \\ y-x\le 2 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} y\le x \\ 2y\ge x \\ x+y\le 2 \end{cases}$, 6) $\begin{cases} x+2y\ge 0 \\ x-y\le 0 \\ x-4y\ge -6 \end{cases}$,

7) $\begin{cases} 2x-y\le 1 \\ x-y\ge -1 \\ y\ge 0 \end{cases}$, 8) $\begin{cases} 3x+2y\le 1 \\ x+1\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$ 9) $\begin{cases} x+y\ge 0 \\ 2x-y\le 3 \\ x-2y\le 0 \end{cases}$,

10) $\begin{cases} x+y\ge -2 \\ x-y\ge -2 \\ x-y\le 1 \end{cases}$, 11) $\begin{cases} 2y-x<6 \\ 3x-y<3 \\ 4y+x>-4 \end{cases}$, 12) $\begin{cases} 7x+4y<28 \\ 5x-3y>14 \\ 8x-9y<60 \end{cases}$,

13) $\begin{cases} x+y-3\le 0 \\ 3x+2y-6\ge 0 \\ 2x-y-4\le 0 \end{cases}$, 14) $\begin{cases} 5x+y-7\le 0 \\ 2x-3y-13\le 0 \\ 7x-2y-3\ge 0 \end{cases}$, 15) $\begin{cases} x+y-2\ge 0 \\ 3x-5y-15\le 0 \\ 2x+3y-12\le 0 \end{cases}$

4. Երկրորդ կարգի կորեր:

Երկու փոփոխականներով երկրորդ աստիճանի ընդհանուր հավասարումն ունի հետևյալ տեսքը.

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0):$$

Այս հավասարումը կարող է պատկերել դատարկ բազմություն, կետ, ուղիղների զույգ, շրջանագիծ, էլիպս, հիպերբոլ և պարաբոլ:

***Շրջանագիծ*:** C(a;b) կենտրոն և R շառավիղ ունեցող շրջանագծի հավասարումն է

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2:$$

176. Կազմել OY առանցքը շոշափող այն շրջանագծի հավասարումը, որի կենտրոնը C(-3;4) կետն է:

177. Որոշել ուղղի դիրքը շրջանագծի նկատմամբ (հատում է, շոշափում է կամ շրջանագծի հետ չունի ընդհանուր կետ) եթե դրանց հավասարումներն են.

1) $2x-y-3=0, \qquad x^2+y^2-3x+2y-3=0,$

2) $x-2y-1=0, \qquad x^2+y^2-8x+2y+12=0,$

3) $x-y+10=0, \qquad x^2+y^2-1=0:$

178. Գտնել հետևյալ շրջանագծերի կենտրոնների կոորդինատները և շառավիղները.

1) $x^2+y^2+4x-6y+9=0$ 2) $x^2+y^2-6x+2y-6=0$

3) $3x^2+3y^2-12x-2y+12=0$ 4) $x^2+y^2-8x+6y=0$

5) $x^2+y^2+10x-18y+70=0$

179. Գտնել $x^2+y^2+4x-6y-17=0$ շրջանագծի այն տրամագծի հավասարումը, որը ուղղահայաց է $5x+2y-13=0$ ուղղին:

180. Գտնել այն շրջանագծի հավասարումը, որի համար $M_1(-3;0)$ և $M_2(3;6)$ ծայրակետերով հատվածը տրամագիծ է:

181. Գտնել այն շրջանագծի հավասարումը, որն անցնում է M(1;2) կետով և շոշափում է կոորդինատական առանցքները:

182. Գտնել այն շրջանագծի հավասարումը, որը շոշափում է կոորդինատական առանցքները և անցնում է $(1;\sqrt{3}-2)$ կետով:

183. Գտնել այն շրջանագծի հավասարումը, որը շոշափում է կոորդինատական առանցքները $A(-3;0)$ և $B(0;3)$ կետերում:

184. Գտնել $r=3$ շառավիղ ունեցող այն շրջանագծի հավասարումը, որը շոշոփում է օրդինատների առանցքը $(0;-4)$ կետում:

185. Գտնել $A(3;-1)$ կենտրոն ունեցող այն շրջանագծի հավասարումը, որն անցնում է $B(-5;4)$ կետով:

186. Գտնել a թիվը, եթե հայտնի է, որ $x^2+y^2+ax-12y+1=0$ շրջանագծի շառավիղը հավասար է 6-ի:

187. $4x-3y-38=0$ ուղիղը շոշոփում է $(x-1)^2+(y+3)^2=25$ շրջանագիծը: Գտնել շոշոփման կետի կոորդինատները:

188. Գտնել $A(6;7)$ կենտրոն ունեցող այն շրջանագծի հավասարումը, որը շոշափում է $5x-12y-24=0$ ուղղին:

189. Գտնել $M(-7;2)$ կետի կարճագույն հեռավորությունը $x^2+y^2-10x-14y-151=0$ շրջանագծից:

190. Գտնել այն շրջանագծի հավասարումը, որն անցնում է $M_1(-1;3)$, $M_2(0;2)$ և $M_3(1;-1)$ կետերով:

Էլիպս: Էլիպսի կանոնական հավասարումն է $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, որտեղ $a>b>0$, $a^2-b^2=c^2$ և $F_1(-c;o)$, $F_2(c;o)$ կետերը էլիպսի ֆոկուսներն են: a և b թվերը կոչվում են էլիպսի կիսաառանցքներ (մեծ և փոքր), $\varepsilon=\frac{c}{a}<1$ կոչվում է էլիպսի էքսցենտրիսիտետ:

191. Ապացուցել, որ $x^2+4y^2-4x-24y+30=0$ հավասարումը էլիպսի հավասարում է, գտնել այդ էլիպսի կիսաառանցքները, ֆոկուսների կոորդինատները:

192. Գտնել $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{81}=1$ էլիպսի մեծ և փոքր առանցքների երկարությունները և ֆոկուսների կոորդինատները:

193. Գտնել $4x^2+25y^2=100$ էլիպսի կիսառանցքների երկարությունները և ֆոկուսների կոորդինատները:

194. Գտնել էլիպսի կանոնական հավասարումը, եթե դրա մեծ կիսառանցքը հավասար է 3-ի և էլիպսն անցնում է $\left(\sqrt{8};0,4\right)$ կետով:

195. Կազմել էլիպսի կանոնական հավասարումը, եթե դրա կիսառանցքների գումարը հավասար է 16-ի, իսկ ֆոկուսները գտնվում են (-8;0) և (8;0) կետերում:

196. Գտնել էլիպսի կանոնական հավասարումը, եթե դրա ֆոկուսների հեռավորությունը հավասար է 8-ի, իսկ փոքր կիսաառանցքը հավասար է 3-ի:

197. Գտնել էլիպսի կանոնական հավասարումը, եթե այն անցնում է $(5;-2)$ և $\left(\sqrt{15};2\sqrt{3}\right)$ կետերով:

198. Գտնել այն էլիպսի կանոնական հավասարումը, որն անցնում է $\left(4\sqrt{2};3\right)$ կետով և դրա ֆոկուսներից մեկը գտնվում է (-5;0) կետում:

199. Որոշել էլիպսի և ուղղի փոխադարձ դիրքը, եթե դրանց հավասարումներն են.

1) $2x-y-3=3$, $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$,

2) $2x+y-10=0$, $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$:

200. Ապացուցել, որ հետևյալ հավասարումները էլիպսի հավասարումներ են և գտնել այդ էլիպսների կիսառանցքները.

1) $5x^2+9y^2-30x+18y+9=0$,

2) $16x^2+25y^2+32x-100y-284=0$,

3) $4x^2+3y^2-8x+12y-32=0$:

201. Գտնել $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ էլիպսի $M_0(x_0;y_0)$ կետում այդ էլիպսին տարած շոշափողի հավասարումը:

Հիպերբոլ: Հիպերբոլի կանոնական հավասարումն է $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, որտեղ $a,b>0$, $c^2=a^2+b^2$, $F_1(-c;o)$ և $F_2(c;o)$ կետերը հիպերբոլի ֆոկուսներն են: $y=\pm\frac{b}{a}x$ ուղիղները կոչվում են հիպերբոլի ասիմպտոտներ, $\varepsilon=\frac{c}{a}>1$ կոչվում է հիպերբոլի էքսցենտրիսիտետ:

202. Գտնել $16x^2-9y^2=144$ հիպերբոլի կիսառանցքները, ֆոկուսների կոորդինատները և ասիմպտոտների հավասարումները:

203. Կազմել հիպերբոլի կանոնական հավասարումը, եթե

1) գագաթների միջև եղած հեռավորությունը հավասար է 14-ի, իսկ ֆոկուսների միջև եղած հեռավորությունը հավասար է 20-ի,
2) իրական և կեղծ առանցքների երկարությունների գումարը հավասար է 14-ի, իսկ ֆոկուսները գտնվում են (-5;0) և (5;0) կետերում:

204. Գտնել հիպերբոլի կանոնական հավասարումը, եթե դրա ֆոկուսները գտնվում են (-9;0) և (9;0) կետերում և հիպերբոլն անցնում է $\left(\sqrt{17};8\right)$ կետով:

205. Գտնել $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{4}=1$ հիպերբոլի ֆոկուսների կոորդինատները և ասիմպտոտների հավասարումները:

206. Գտնել այն հիպերբոլի կանոնական հավասարումը, որն անցնում է $\left(\frac{15}{4};3\right)$ կետով, իսկ $y=\pm\frac{4}{3}x$ ուղիղները դրա ասիմպտոտներն են:

207. Գտնել հիպերբոլի կանոնական հավասարումը, եթե դրա ֆոկուսները համընկնում են $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$ էլիպսի ֆոկուսների հետ, իսկ $y=-2x$ ուղիղը նրա ասիմպտոտներից մեկն է:

208. Գտնել հիպերբոլի կիսառանցքները, եթե դրա ասիմպտոտներն իրար ուղղահայաց են և հիպերբոլն անցնում է $\left(\sqrt{20};\sqrt{10}\right)$ կետով:

209. Պարզել, որ հետևյալ հավասարումները որոշվում են հիպերբոլներ և գտնել այդ հիպերբոլների ասիմպտոտների հավասարումները.

1) $16x^2-9y^2-64x-54y-161=0$,

2) $9x^2-16y^2+90x+32y-367=0$:

***Պարաբոլ*:** Պարաբոլի կանոնական հավասարումն է $y^2=2px$: $p>0$ թիվը կոչվում է պարաբոլի պարամետր: $y^2=2px$ պարաբոլի գագաթը գտնվում է $O(0;0)$ կետում, ֆոկուսը $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ կետում, իսկ OX առանցքը դրա համաչափության առանցքն է:

210. Գտնել $y^2-2y-6x+4=0$ պարաբոլի պարամետրը և ֆոկուսի կոորդինատները:

211. Կազմել պարաբոլի կանոնական հավասարումը, եթե

1) ֆոկուսը գտնվում է (4;0) կետում,
2) պարաբոլն անցնում է (24;-12) կետով:

212. Կազմել պարաբոլի հավասարումը, եթե

1) պարաբոլը համաչափ է OX առանցքի նկատմամբ և անցնում է (0;0) և (-3;3) կետերով,
2) պարաբոլը համաչափ է OY առանցքի նկատմամբ և ֆոկուսը գտնվում է (0;3) կետում, իսկ գագաթը՝ կոորդինատների սկզբնակետում:

213. Գտնել պարաբոլի հավասարումը, եթե այն համաչափ է $x=2$ ուղղի նկատմամբ, OX առանցքի հետ հատվում է (1;0) կետում, իսկ OY առանցքի հետ (0;-6) կետում:

214. $y^2=12x$ պարաբոլի վրա գտնել այն կետերը, որոնց հեռավորությունը պարաբոլի ֆոկուսից հավասար է 4-ի:

215. $x=2y^2$ պարաբոլի վրա գտնել այն կետերը, որոնք հավասարապես հեռացված են (0;0) և (1;1) կետերից:

216. Պարզել, որ հետևյալ հավասարումների գրաֆիկները պարաբոլներ են: Գտնել դրանց գագաթների կոորդինատները և p պարամետրերը:

1) $y^2=4x-8$, 2) $x^2=2-y$,

3) $y=4x^2-8x+7$, 4) $x=2y^2-12y+1$:

5. Խառը խնդիրներ երկրորդ կարգի կորերի վերաբերյալ:

217. Գտնել $x^2+y^2+ay=0$ շրջանագծի կենտրոնի հեռավորությունը $y=2(a-x)$ ուղղից:

218. Գտնել այն կետերի բազմության հավասարումը, որոնց $y=kx$ և $y=-kx$ ուղիղներից ունեցած հեռավորությունների քառակուսիների գումարը հաստատուն է և հավասար է a^2:

219. Գտնել այն հավասարակողմ եռանկյան մակերեսը, որի գագաթները գտնվում են $x^2-y^2=a^2$ հիպերբոլի վրա:

220. Ապացուցել, որ հիպերբոլի ցանկացած կետի ասիմպտոտներից ունեցած հեռավորությունների արտադրյալը հաստատուն է և հավասար է $\frac{a^2b^2}{c^2}$:

221. Տրված է $x^2+4y^2=16$ էլիպսը: Դրա A(4;0) գագաթից տարված են բոլոր հնարավոր լարերը: Գտնել այդ լարերի միջնակետերի բազմության հավասարումը:

222. Կառուցել հետևյալ անհավասարություններին բավարարող կետերի տիրույթները:

ա) $R^2<x^2+y^2<4R^2$ և $x^2>\frac{R^2}{4}$,

բ) $x^2-y^2>a^2$ և $x^2<4a^2$,

գ) $xy>a^2$ և $|x+y|<4a$:

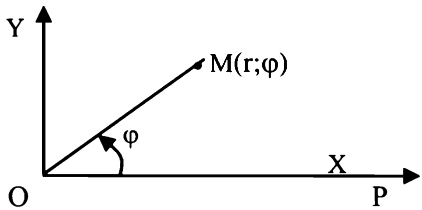
223. Ապացուցել, որ եթե $Ax+By+C=0$ ուղիղը շոշափում է $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ գծին, ապա $A^2a^2+B^2b^2=C^2$:

Ցուցում. օգտվել էլիպսի (x_0,y_0) կետով անցնող շոշափողի $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$ հավասարումից:

224. Կազմել այն կետերի բազմության հավասարումը, որոնց կոորդինատական անկյունների կիսորդներից ունեցած հեռավորությունների քառակուսիների տարբերությունը հավասար է 8-ի:

6. Բևեռային կոորդինատներ:

Ենթադրենք հարթության վրա տրված են O կետը (բևեռ) և OP ճառագայթը (բևեռային ճառագայթ): Այս դեպքում M կետի դիրքը հարթության վրա կորոշվի $\varphi=\angle MOP$ բևեռային անկյունով և r=OM շառավիղով:



Եթե որպես բևեռ ընտրենք ուղղանկյուն կոորդինատական համակարգի սկզբնակետը, իսկ որպես բևեռային առանցք՝ OX առանցքը, ապա M կետի (x;y) դեկարտյան կոորդինատների և (r;φ) բևեռային կոորդինատների կապը կլինի՝

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

Եթե պարաբոլի ֆոկուսը ընդունենք որպես բևեռ, իսկ OP բևեռային առանցքը ուղղենք դիրեկտրիսին ուղղահայաց, դիրեկտրիսից դեպի բևեռ ուղղությամբ, ապա պարաբոլի հավասարումը բևեռային կոորդինատներով կգրվի $r = \dfrac{p}{1-\cos\varphi}$ տեսքով, որտեղ p-ն պարաբոլի ֆոկալ պարամետրն է: Նույն համակարգում էլիպսը և հիպերբոլի համապատասխան ճյուղը ունեն $r = p/1-\varepsilon\cos\varphi$ տեսքի հավասարում, որտեղ ε-ը գծի էքսցենտրիսիտետն է, իսկ p-ն ֆոկալ պարամետրը, որը որոշվում է $p = \dfrac{b^2}{a}$ բանաձևով:

225. Կառուցել r=2+2cosφ գիծը:

Ցուցում. $\varphi=0,\ \pm\dfrac{\pi}{3},\pm\dfrac{\pi}{2},\pm\dfrac{2\pi}{3},\pi$ արժեքների համար կազմել r-ի արժեքների աղյուսակ:

226. Կառուցել հետևյալ գծերը.

ա) $r=a\varphi$ (արքիմեդյան պարույր),

բ) $r=a(1-\cos\varphi)$ (կարդիոիդ),

գ) $r^2=a^2\cos2\varphi$ (լեմնիսկատ),

դ) $r=\dfrac{a}{\varphi}$ (հիպերբոլական պարույր),

ե) $r=a(1+2\cos\varphi)$ (Պասկալի խխունջ),

զ) $r=a\sin3\varphi$ (եռաթերթ վարդ),

է) $r=a\left|\sin2\varphi\right|$ (քառաթերթ վարդ):

227. Հետևյալ գծերի հավասարումները ձևափոխել դեկարտյան կոորդինատներով գրված հավասարումների.

ա) $r\cos\varphi=a$, բ) $r=2a\sin\varphi$, գ) $r^2\sin2\varphi=2a^2$,

դ) $r=a(1+\cos\varphi)$, ե) $r\sin(\varphi+\dfrac{\pi}{4})=a\sqrt{2}$

228. Գտնել երկրորդ կարգի կորերի կանոնական հավասարումները.

$r=\dfrac{9}{5-4\cos\varphi}$, բ) $r=\dfrac{9}{4-5\cos\varphi}$, գ) $r=\dfrac{3}{1-\cos\varphi}$:

§2. ԱՆԱԼԻՏԻԿ ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅԱՆ ՏԱՐՐԵՐԸ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ

1. Երկու կետերի միջև եղած հեռավորությունը, հատվածի բաժանումը տրված հարաբերությամբ:

Տարածության մեջ ընտրված ուղղանկյուն դեկարտյան կոորդինատական համակարգում տարածության յուրաքանչյուր կետի դիրքը որոշվում է իր կոորդինատներով՝ x աբսցիսով, y օրդինատով և z ապլիկատով:

Տարածության $A(x_1;y_1;z_1)$ և $B(x_2;y_2;z_2)$ կետերի միջև եղած հեռավորությունը հաշվում են

$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$ բանաձևով:

$A(x_1;y_1;z_1)$ և $B(x_2;y_2;z_2)$ ծայրակետերով AB հատվածը λ հարաբերությամբ $(\overline{AM} = \lambda\overline{MB})$ բաժանող $M(x;y;z)$ կետի կոորդինատները որոշվում են

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \qquad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}$$

բանաձևերով:

229. Գտնել $A(-5;12;1)$ կետի հեռավորությունները կոորդինատային առանցքներից:

230. Տարածական ուղղանկյուն կոորդինատական համակարգում կառուցել հետևյալ կետերը.

$A(-3;2;3)$, $B(1;4;5)$, $C(3;0;1)$, $D(0;4;0)$:

231. Գտնել հետևյալ կետերի միջև եղած հեռավորությունը.

1) $A(2;0;-1)$ և $B(-2;-5;3)$,

2) $A(3;2;1)$ և $B(4;-1;-2)$:

232. Գտնել $A(6;-8;2)$ կետի հեռավորությունները կոորդինատային առանցքներից:

233. Երկրորդ օկտանտում գտնել այն կետը, որի հեռավորությունները կոորդինատային առանցքներից համապատասխանաբար հավասար են $\sqrt{52}$, $3\sqrt{5}$ և 5:

234. Աբսցիսների առանցքի վրա գտնել այն կետը, որը հավասարապես է հեռացված $A(2;2;3)$ և $B(-3;5;1)$ կետերից:

235. XOY հարթության վրա գտնել այն կետը, հավասարապես է հեռացված $A(-2;1;3)$, $B(0;-1;-2)$ և $C(0;1;1)$ կետերից:

236. OZ առանցքի վրա գտնել այն կետը, որը հավասարապես է հեռացված $A(4;-1;2)$ և $B(0;2;-1)$ կետերից:

237. Ցույց տալ, որ A(3;-2;5), B(-2;1;-3) և C(5;1;-1) գագաթներով եռանկյունը սուրանկյուն եռանկյուն է:

238. Տրված են AB հատվածը երեք հավասար մասերի բաժանող կետերի կոորդինատները՝ C(3;-2;-1) և D(1;1;6): Գտնել A և B կետերի կոորդինատները:

239. Ի՞նչ հարաբերությամբ է բաժանում M(1;2;0) կետը A(-1;0;0) և B(4;5;0) ծայրակետերով հատվածը:

240. Գտնել A(5;1;12), B(11;3;8) և C(2;5;0) գագաթներով եռանկյան ծանրության կենտրոնի կոորդինատները:

241. Գտնել այն կետի կոորդինատները, որով XOY հարթությունը տրոհում է A(2;-1;7) և B(4;5;-1) ծայրակետերով հատվածը:

2. Հարթության հավասարումը:

Տրված $M(x_0;y_0;z_0)$ կետով անցնող և տրված $\vec{n}(A,B,C)$ վեկտորին (հարթության նորմալ վեկտորին) ուղղահայաց հարթության հավասարումն է

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0:$$

Եթե տրված է հարթության մեկ երկարություն ունեցող միավոր նորմալ վեկտորը՝ $\vec{n}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ և հարթության $p\geq0$ հեռավորությունը կորդինատների սկզբնակետից, ապա այդ հարթության հավասարումը, որը կոչվում է հարթության նորմալ հավասարում, ունի հետևյալ տեսքը

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0:$$

Որպեսզի հարթության ընդհանուր հավասարումը՝ $Ax+By+Cz+D=0$ բերենք նորմալ տեսքի, պետք է այն բազմապատկել նորմավորող արտադրիչով.

$$\mu=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

ընդ որում μ-ի նշանը ընտրվում է D-ի նշանին հակառակ:

$A(x_0;y_0;z_0)$ կետի հեռավորությունը $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$ հարթությունից որոշվում է

$$h=|x_0\cos\alpha+y_0\cos\beta+z_0\cos\gamma-p|$$

բանաձևով, կամ $h=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$:

Եթե հարթությունը կոորդինատական առանցքները հատում է համապատասխանաբար (a,0;0), (0;b;0) և (0;0;c) կետերում, ապա դրա հավասարումը գրվում է

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

տեսքով (հարթության հավասարումը հատվածներով):

Օգտվելով այն փաստից, որ $\vec{n}(A,B,C)$ վեկտորը ուղղահայաց է $Ax+By+Cz+D=0$ հարթությանը, կարելի է հաշվել երկու հարթությունների կազմած երկնիստ անկյան գծային անկյունը:

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \qquad \text{և} \qquad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

հարթությունների կազմած երկնիստ անկյունների φ գծային անկյունները որոշվում են

$$\cos\varphi=\pm\frac{|AA_1+BB_1+CC_1|}{\sqrt{A_1{}^2+B_1{}^2+C_1{}^2}\cdot\sqrt{A_2{}^2+B_2{}^2+C_2{}^2}}$$

բանաձևով:

Հարթությունների զուգահեռության պայմանն է.

$$(A_1,B_1,C_1)=k(A_2,B_2,C_2),\ D_1\neq kD_2:$$

Հարթությունների ուղղահայացության պայմանն է.

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0:$$

242. Գտնել $M_1(2;1;1)$, $M_2(-2;4;2)$ և $M_3(1;3;-5)$ կետերով անցնող հարթության հավասարումը:

243. Կազմել այն հարթության հավասարումը, որը

1) զուգահեռ է XOY հարթությանը և պարունակում է (3;2;1) կետը,
2) ուղղահայաց է XOY հարթությանը և անցնում է (1;9;0) և (-2;-1;5) կետերով:

244. Գտնել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է A(-1;6;3), B(3;-2;5) և C(10;4;1) կետերով:

245. Գտնել M(-1;2;3) կետով անցնող և $\overrightarrow{OM}$ վեկտորին ուղղահայաց հարթության հավասարումը:

246. Գտնել A(2;-1;3) կետով անցնող և կոորդինատական առանցքներից դրական և հավասար մեծության հատվածներ անջատող հարթության հավասարումը:

247. Հետևյալ հարթությունների հավասարումները բերել նորմալ տեսքի.

1) $11x-10y+2z+30=0$

2) $-6x+2y+9z-44=0$

3) $x+2y-3z-1=0$

248. Գտնել կոորդինատների սկզբնակետի հեռավորությունը $2x+y-2z+18=0$ հարթությունից:

249. Գտնել

1) (-4;-3;1) կետի հեռավորությունը $4x-2y-4z+3=0$ հարթությունից,

2) (2;0;-5) կետի հեռավորությունը $2x-3y+6z-10=0$ հարթությունից,

3) (1;10;-5) կետի հեռավորությունը $x+y+z-8=0$ հարթությունից:

250. Գտնել $4x+3y-5z-8=0$ և $4x+3y-5z+12=0$ զուգահեռ հարթությունների միջև եղած հեռավորությունը:

251. Գտնել A(1;-1;2), B(3;3;4) և C(2;4;0) գագաթներով եռանկյան ծանրության կենտրոնի հեռավորությունը $4x+3y-4=0$ հարթությունից:

252. Գտնել $4x-22y+20z=15$ հարթության նորմալի ուղղորդ կոսինուսները:

253. Հարթությունը կոորդինատական առանցքները հատում է համապատասխանաբար (5;0;0), (0;10;0) և (0;0;-5) կետերում: Գտնել այդ հարթության նորմալի ուղղորդ կոսինուսները:

254. Տրված են $M_1(0;-1;3)$ և $M_2(1;3;5)$ կետերը: Գտնել M_1 կետով անցնող և $\overrightarrow{M_1M_2}$ վեկտորին ուղղահայաց հարթության հավասարումը:

255. Գտնել A(0;-2;3) կետով և OX առանցքով անցնող հարթության հավասարումը:

256. Գտնել $2x-2y+z=6$ հարթության նորմալի կազմած անկյունները կոորդինատական առանցքների հետ:

257. Գտնել $2x-3y+6z-12=0$ հարթությամբ և կոորդինատական հարթություններով սահմանափակված բուրգի ծավալը:

258. Գտնել A(1;2;-3) կետով անցնող և $3x-2y+6z-8=0$ հարթությանը զուգահեռ հարթության հավասարումը:

259. Պարզել հետևյալ հարթությունների փոխադարձ դիրքը.

1) $-x+2y-z+1=0$ և $y+3z-1=0$,

2) $x+2y-3z-5=0$ և $2x-y+z+2=0$,

3) $x+2y-z-1=0$ և $-2x-4y+2z+1=0$,

4) $\frac{x}{2}-y+z-7=0$ և $2x-4y+4z-3=0$:

260. Գտնել հետևյալ հարթությունների նորմալ վեկտորների կազմած անկյան կոսինուսը.

1) $x-y+1=0$, $y-z+1=0$

2) $3x-y+2z-7=0$, $x+3y-2z-3=0$:

261. Գտնել A(2;2;-2) կետով անցնող և $x+2y-3z=0$ հարթությանը զուգահեռ հարթության հավասարումը:

262. Գտնել OZ առանցքով անցնող և $2x+y-\sqrt{5}z=0$ հարթության հետ 60^0 անկյուն կազմող հարթության հավասարումը:

263. Գտնել A(0;-5;0) և B(0;0;2) կետերով անցնող և x+5y+2z-10=0 հարթությանը ուղղահայաց հարթության հավասարումը:

3. Ուղիղը տարածության մեջ:

Տարածության մեջ ուղիղը կարելի է դիտարկել որպես երկու հարթությունների հատման գիծ (ուղղի ընդհանուր հավասարումներ).

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

$M(x_0;y_0;z_0)$ կետով անցնող և $\vec{S}(m;n;p)$ ուղղորդ վեկտորին զուգահեռ ուղղի հավասարումներն են (կանոնական հավասարումներ).

$$\frac{-x_0}{m} = \frac{-y_0}{n} = \frac{-z_0}{p}$$

Ուղղի պարամետրական հավասարումներն են.

$$\begin{cases} x = mt + x_0 \\ y = nt + y_0 \\ z = pt + z_0 \end{cases}$$

$A(x_1;y_1;z_1)$ և $B(x_2;y_2;z_2)$ կետերով անցնող ուղղի հավասարումները կգրվեն

$$\frac{-x_1}{x_2 - x_1} = \frac{-y_1}{y_2 - y_1} = \frac{-z_1}{z_2 - z_1}$$

տեսքով, քանի որ $\overrightarrow{AB}\left(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\right)$ վեկտորը (AB) ուղղի համար ուղղորդ վեկտոր է:

Ուղղորդ վեկտորների միջոցով կարելի է գրել

$$\frac{-x_1}{m_1} = \frac{-y_1}{n_1} = \frac{-z_1}{p_1} \quad \text{և} \quad \frac{-x_2}{m_2} = \frac{-y_2}{n_2} = \frac{-z_2}{p_2}$$

երկու ուղիղների զուգահեռության պայմանը՝

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2},$$

ուղղահայցության պայմանը՝

$$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0,$$

ինչպես նաև գտնել երկու ուղիղների կազմած անկյունը՝

$$\cos\varphi=\frac{\vec{S_1}\cdot\vec{S_2}}{\left|\vec{S}_1\right|\left|\vec{S}_2\right|}=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$$

Ուղղի ուղղորդ վեկտորի և հարթության նորմալ վեկտորի միջոցով կարելի է պարզել ուղղի և հարթության փոխադարձ դիրքը տարածության մեջ.

ա) $\vec{S}(m;n;p)\,||\,\vec{n_1}(A;B;C)\Rightarrow\frac{m}{A}=\frac{n}{B}=\frac{p}{C}\Rightarrow$ ուղիղը ուղղահայաց է հարթությանը:

բ) $\vec{S}(m;n;p)\perp\vec{n_1}(A;B;C)\Rightarrow mA+nB+pC=0\Rightarrow$ ուղիղը զուգահեռ է հարթությանը (մասնավորապես կարող է պատկանել հարթությանը):

գ) ուղղի և հարթության կազմած անկյունը.

$$\sin\varphi=\frac{\left|\vec{n_1}\cdot\vec{S}\right|}{\left|\vec{n}_1\right|\left|\vec{S}\right|}=\frac{\left|mA+nB+pC\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}:$$

264. Գտնել $\begin{cases}x+2y+3z-13=0\\3x+y+4z-14=0\end{cases}$ ընդհանուր հավասարումներով տրված ուղղի կանոնական հավասարումները:

265. Պարզել, հատվո՞ւմ է արդյոք հետևյալ ուղիղը

$$\begin{cases}3x-y+2z-6=0\\x+4y-z+24=0\end{cases}$$

1) OX առանցքի հետ,
2) OY առանցքի հետ,
3) OZ առանցքի հետ:

266. Գտնել α թիվը, եթե $\begin{cases} x+2y-z+3=0 \\ 3x-y+2z+\alpha=0 \end{cases}$ ուղիղը

1) հատում է՝ OZ առանցքը,
2) հատում է՝ OX առանցքը:

267. Կազմել այն ուղղի հավասարումները, որն անցնում է կոորդինատների սկզբնակետով և

1) (3;-2;1) կետով,
2) (4;0;-6) կետով,
3) (1;0;0) կետով:

268. Ստուգել, հետևյալ երեք կետերը գտնվո՞ւմ են արդյոք մեկ ուղիղ գծի վրա.

1) A(-2;5;1), B(3;-1;7), $C\left(-\frac{7}{6};4;2\right)$,
2) A(8;0;5), B(-11;9;1), C(4;3;2):

269. Գտնել ուղղի կանոնական հավասարումները, եթե այն անցնում է $M_0(2;0;-3)$ կետով և զուգահեռ է

1) $\vec{a}(2;-3;+5)$ վեկտորին,
2) $\frac{x-1}{5}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+1}{-1}$ ուղղին,
3) OX առանցքին,
4) OZ առանցքին,
5) $\begin{cases} 3x-y+2z-7=0 \\ x+3y-2z-3=0 \end{cases}$ ուղղին:

270. Գտնել տրված M_1 և M_2 կետերով անցնող ուղղի հավասարումը, եթե

1) $M_1(1;-2;1)$, $M_2(3;1;-1)$, 2) $M_1(3;-1;0)$, $M_2(1;0;-3)$,
3) $M_1(-1;2;3)$, $M_2(2;6;-2)$, 4) $M_1(-1;2;5)$, $M_2(2;3;5)$,

271. Գտնել $\begin{cases} x=2z-1 \\ y=-2z+1 \end{cases}$ ուղղի և O(0;0;0) ու A(1;-1;-1) կետերով անցնող ուղղի կազմած անկյունը:

272. Գտնել A(-4;3;0) կետով անցնող և $\begin{cases} x-2y+z=4 \\ 2x+y-z=0 \end{cases}$ ուղղին զուգահեռ ուղղի հավասարումը:

273. Գտնել $\begin{cases} x=3 \\ z=5 \end{cases}$ ուղղի ուղղորդ վեկտորը:

274. Գտնել $\begin{cases} 2x-y-7=0 \\ 2x-z+5=0 \end{cases}$ և $\begin{cases} 3x-2y+8=0 \\ z=3x \end{cases}$ ուղիղների կազմած անկյունը:

275. Գտնել ուղղի և հարթության հատման կետը, եթե նրանց հավասարումներն են.

1) $\dfrac{x-4}{4}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z}{-1}$ և 7x-y+z-6=0,

2) $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-5}{4}=\dfrac{z}{3}$ և 3x-3y+2z-5=0,

3) $\dfrac{x-13}{8}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-4}{3}$ և x+2y-4z+1=0:

276. Գտնել $\begin{cases} y=3x-1 \\ 2z=-3x+2 \end{cases}$ ուղղի և 2x+y+z-4=0 հարթության կազմած անկյունը:

277. Գրել $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{2}$ և $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{2}$ զուգահեռ ուղիղներով անցնող հարթության հավասարումը:

278. Գտնել $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z+1}{3}$ ուղղով և M(3;4;0) կետով անցնող հարթության հավասարումը:

279. Գտնել $\begin{cases} x=2t-1 \\ y=t+2 \\ z=1-t \end{cases}$ ուղղի և 3x-2y+z=3 հարթության հատման կետը:

280. Գտնել A(3;1;-1) կետի պրոյեկցիան $x+2y+3z-30=0$ հարթության վրա:

281. Գտնել M(2;1;0) կետով անցնող և $\begin{cases} x = 3z - 1 \\ y = 2z \end{cases}$ ուղղին ուղղահայաց հարթության հավասարումը:

282. Գտնել $\begin{cases} x = 1 - z \\ y = 2 \end{cases}$ ուղղի և $y=z$ հարթության հատման կետը և նրանց կազմած անկյունը:

283. Գտնել $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{2}$ ուղղով անցնող և $2x+3y-z=4$ հարթությանը ուղղահայաց հարթության հավասարումը:

284. Գտնել M(6;1;0) կետի հեռավորությունը $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}$ ուղղից:

§3. ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԻ ՏԱՐՐԵՐԸ

1. Կոմպլեքս թվեր

Կոմպլեքս թվերի բազմությունը իրական թվերի բազմության բնական ընդլայնումն է:

Հայտնի է որ իրական թվերի բազմության և թվային ուղղի կետերի միջև գոյություն ունի փոխմիրաժեք համապատասխանություն: Կոմպլեքս թվերը նույնպիսի համապատասխանության մեջ են ուղղանկյուն կոորդինատական հարթության (x,y) կետերի հետ: (x,y) կետին համապատասխանող կոմպլեքս թիվը գրվում է $z=x+iy$ տեսքով, որտեղ $x=\mathrm{Re}z$ կոմպլեքս թվի իրական մասն է, $y=\mathrm{Im}z$ (imaginer) կեղծ մասը, i սիմվոլը կոչվում է կեղծ միավոր: Իրական x թիվը կոմպլեքս թվի մասնավոր $z=x+0i=x$ դեպքն է: $z=x+iy$-ը կոչվում է կոմպլեքս թվի հանրահաշվական տեսք:

Կոմպլեքս թվերի հավասարությունը, գումարը և արտադրյալը սահմանվում են հետևյալ կերպ.

$$x_1+iy_1=x_2+iy_2 \;\Leftrightarrow\; (x_1=x_2 \text{ և } y_1=y_2)$$

$$(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)= \; x_1+x_2+i(y_1+y_2)$$

$$(x_1+iy_1)\cdot(x_2+iy_2)= \; x_1x_2-y_1y_2+i(x_1y_2+x_2y_1)$$

Գումարի և արտադրյալի սահմանումներից հետևում է, որ կոմպլեքս թվերը գումարվում, բազմապատկվում են հանրահաշվի սովորական կանոններով և i^2 փոխարինումով, որը ինչպես հետևում է արտադյալի սահմանումից հավասար է -1 ($i^2=i\cdot i$ դեպքում $x_1=x_2=0, y_1=y_2=1 \Rightarrow i^2=-1$):

$x^2=-1 \Leftrightarrow x=\pm i$, $x^2=-2 \Leftrightarrow x=\pm i\sqrt{2}$, իրական գործակիցներով $ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-b\pm i\sqrt{-D}}{2a}$, $D<0$ դեպքում:

$z=x+iy$ և $\overline{z}=x-iy$ կոչվում են իրար համալուծ թվեր $z\cdot\overline{z}=x^2+y^2$:Կոմպլեքս թվերով կոտորակը կոմպլեքս թվի հանրահաշվական տեսքի բերելուց կոտորակի հայտարարը և համարիչը բազմապատկում են հայտարարի համալուծով:

$r=\sqrt{x^2+y^2}$ թիվը կոչվում է կոմպլեքս թվի մոդուլ, իսկ $\cos\varphi=\dfrac{x}{r}$, $\sin\varphi=\dfrac{y}{r}$ համակարգի $[0;2\pi)$ միջակայքին պատկանող լուծումը կոչվում է կոմպլեքս թվի արգումենտ: Այսպիսով՝ $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, որը անվանում են կոմպլեքս թվի եռանկյունաչափական տեսք: Շարքերի տեսության մեջ ապացուցվում է $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$ Էյլերի բանաձևը:

Վերջինիս միջոցով ստացվում է կոմպլեքս թվի $z=re^{i\varphi}$ ցուցչային տեսքը:

Այստեղից ունենք $z^p = r^p e^{p\varphi} = r^p(\cos p\varphi + i\sin p\varphi)$

Մուավրի բանաձևը և $z^n = re^{i\varphi}$ հավասարման n արմատները

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi\kappa}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi\kappa}{n}\right), \kappa = 0,1,2,...,n-1:$$

Հետևյալ վարժություններում ապացուցել նույնությունը

285. $(3-2i)(5+3i)+i-1=20$

286. $(1-i)^3+(i-1)^2+i-1=-3i-1$

287. $\frac{3-i}{3+i}-4-5i=-3{,}2-5{,}6i$

288. $\frac{9}{4+i}+\frac{1}{i-7}=1{,}98-0{,}55i$

289. $2i\sqrt{3}-2=4\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

290. $i-1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

291. $1-i\sqrt{3}=2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

292. $-4-4i\sqrt{3}=8\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$

Հետևյալ վարժություններում լուծել հավասարումը

293. ա) $z^2-4z+13=0$ բ) $z^2+4z+13=0$

294. ա) $z^2-6z+13=0$ բ) $z^2+6z+13=0$

295. ա) $z^2-16z+25=0$ բ) $z^2+16z+25=0$

2. Գծային տարածություններ

Սահմանում 1. L բազմությունը կոչվում է ադիտիվ խումբ, եթե L-ի տարրերի $\forall x,y$ զույգի համար L-ում $\exists$ համապատասխան $x+y=z$ տարր, $\exists$ 0-ական տարր, $\forall x$ տարր ունի $-x$ հակադիրը և գումարման գործողությունը օժտված է հետևյալ հատկություններով՝

1. $x+y=y+x$,
2. $(x+y)+z=x+(y+z)$
3. $x+0=x$
4. $x+(-x)=0$

Սահմանում 2. L ադիտիվ խումբը կոչվում է իրական գծային տարածություն, եթե $\forall\alpha$ իրական թվի և L-ից վերցրած $\forall x$-ի համար սահմանված է $\alpha x\in L$ արտադրյալը, որը բավարարում է հետևյալ պայմաններին:

1. $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$ 2. $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$
3. $\alpha(\beta)x=(\alpha\alpha\beta)$ 4. $1x=x$

Դժվար չէ համոզվել, որ հարթության վրա տրված երկրաչափական վեկտորների բազմությունը հայտնի գումարման և թվով բազմապատկման գործողություններով գծային տարածություն է:

296. Հետևյալ բազմությունների համար որոշել բազմության գծային տարածություն լինելը, կամ չլինելը.

ա) բոլոր իրական թվերի բազմություն,
բ) ռացիոնալ թվերի բազմություն
գ) ամբողջ թվերի բազմություն
դ) կոորդինատների սկզբնակետից դուրս եկող բոլոր այն վեկտորների բազմություն, որոնց վերջնակետերը գտնվում են տրված ուղղի վրա,

ե) n-րդ կարգի բազմանդամների բազմություն,
զ) n-ից ավելի բարձր կարգ չունեցող բազմանդամների բազմություն,
է) տրված ուղղին զուգահեռ երկրաչափական վեկտորների բազմություն:

Գծային տարածության $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \ldots$ տարրերին անվանում են վեկտորներ, իսկ դրանց որևէ համախմբի համար կազմված $\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + \alpha_3\vec{x}_3 + \ldots + \alpha_n\vec{x}_n$ գումարը վեկտորների գծային կոմբինացիա: Եթե $\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + \alpha_3\vec{x}_3 + \ldots + \alpha_n\vec{x}_n = 0$, ապա այն անվանում են զրոյական գծային կոմբինացիա:

Սահմանում 3. Վեկտորների համախումբը կոչվում է գծորեն կախյալ, եթե $\exists$ դրանց այնպիսի զրոյական գծային կոմբինացիա, որի $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ գործակիցներից գոնե մեկը հավասար չէ զրոյի:

Վեկտորների համախումբը գծորեն անկախ է, եթե դրանց կոմբինացիան զրոյական է միայն $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_n = 0$ դեպքում. այսինքն, եթե

$$\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + \alpha_3\vec{x}_3 + \ldots + \alpha_n\vec{x}_n = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_n = 0$$

Սահմանում 4. Գծային տարածության գծորեն անկախ վեկտորների առավելագույն քանակը կոչվում է գծային տարածության չափ:

Սահմանում 5. Վերջավոր չափանի գծային տարածության մաքսիմալ քանակով գծորեն անկախ վեկտորների համախումբը կոչվում է գծային տարածության բազիս:

Թեորեմ. Գծային տարածության $\forall$ վեկտոր ներկայացվում է բազիսի վեկտորների գծային կոմբինացիայով և ներկայացման գործակիցները որոշվում են միակ ձևով:

Քննարկենք իրական թվերի բոլոր հնարավոր կարգավորված n-յակների բազմությունը. այն նշանակում են R^n:

297. R^n-ում $x=(x_1,x_2,...,x_n), y=(y_1,y_2,...,y_n)$ կամայական n-յակները գումարվում են

$$x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2,...,x_n+y_n)$$ կանոնով:

Ապացուցել, որ նշված գործողությամբ R^n-ը ադիտիվ խումբ է:

298. R^n-ում $\forall\ x=(x_1,x_2,...,x_n)$ տարրի $\forall\alpha$ իրական թվի արտադրյալը սահմանում են այսպես

$$\alpha x=(\alpha x_1,\alpha x_2,...,\alpha x_n):$$

Ապացուցել, որ R^n-ը գծային տարածություն է:

Թեորեմ. R^n գծային տարածության չափը n է:

299. Ցույց տալ,հետևյալ վեկտորների համախումբը (1;0;0;...;0), (0;1;0;...;0), (0;0;1;...;0),..., (0;0;0;...;1) R^n-ի բազիս է:

X իրական գծային տարածությունը կոչվում է էվկլիդյան տարածություն, եթե X-ին պատկանող $\forall\vec{x},\vec{y}$ վեկտորների զույգի համար սահմանված է $(\vec{x},\vec{y})\in R$ սկալյար արտադրյալ, որը բավարարում է հետևյալ պայմաններին.

1) $(\vec{x},\vec{y})=(\vec{y},\vec{x})$, 2) $(\vec{x}+\vec{y},\vec{z})=(\vec{x},\vec{z})+(\vec{y},\vec{z})$,

3) $(\alpha\,\vec{x},\vec{y})=\alpha(\,\vec{x},\vec{y})$, $\alpha\in R$, 4) $(\vec{x},\vec{x})\geq 0$, $(\vec{x},\vec{x})=0\Leftrightarrow\vec{x}=0$:

300. Հիմնվելով սկալյար արտադրյալի հատկությունների վրա

$$(\vec{x}+\lambda\vec{y})(\vec{x}+\lambda\vec{y})=(\vec{x},\vec{x})+2\lambda(\vec{x},\vec{y})+\lambda^2(\vec{y},\vec{y})\geq 0$$

ապացուցել Կոշիի – Բունյակովսկու

$$(\vec{x},\vec{y})^2\leq(\vec{x},\vec{x})(\vec{y},\vec{y})$$

անհավասարությունը:

301. R^n-ում $\vec{x}=(x_1,x_2,...,x_n), \vec{y}=(y_1,y_2,...,y_n)$ կամայական վեկտորների սկալյար արտադրյալը ընդունված է սահմանել $(\vec{x},\vec{y})=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+...+x_ny_n$ բանաձևով: Ստուգել սկալյար արտադրյալի գոյության համար անհրաժեշտ չորս պայմանների առկայությունը

Կոշիի - Բունյակովսկու $(\vec{x},\vec{y})\le\sqrt{(\vec{x},\vec{x})}\sqrt{(\vec{y},\vec{y})}$ անհավասարությունից հետևում է, որ էվկլիդյան տարածության մեջ $\forall\vec{x},\vec{y}$ վեկտորների զույգի համար հնարավոր է սահմանել դրանց կազմած անկյուն

$$\cos\varphi=\frac{(\vec{x},\vec{y})}{\sqrt{(\vec{x},\vec{x})}\sqrt{(\vec{y},\vec{y})}}\quad \text{բանաձևով:}$$

$$R^n\text{-ում}\cos\varphi=\frac{x_1y_1+x_2y_2+...+x_ny_n}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2}\cdot\sqrt{y_1^2+y_2^2+...+y_n^2}}:$$

$\sqrt{(\vec{x},\vec{x})}=|\vec{x}|$ թիվը կոչվում է $\vec{x}$ վեկտորի երկարություն $(\vec{x},\vec{y})=|\vec{x}||\vec{y}|\cos\varphi$: $d(\vec{x},\vec{y})=|\vec{x}-\vec{y}|$-ը կլինի $\vec{x},\vec{y}$ վեկտորների և R^n-ի դեպքում n-յակ կետերի հեռավորությունը: Էվկլիդյան տարածության վեկտորների համար ապացուցենք կոսինուսների թեորեմ և եռանկյան անհավասարություն:

$$|\vec{x}\pm\vec{y}|^2=(\vec{x}\pm\vec{y},\vec{x}\pm\vec{y})=(\vec{x},\vec{x})\pm2(\vec{x},\vec{y})+(\vec{y},\vec{y})\Rightarrow$$

$$\Rightarrow|\vec{x}-\vec{y}|^2=|\vec{x}|^2+|\vec{y}|^2-2|\vec{x}||\vec{y}|\cos\varphi\qquad|\vec{x}+\vec{y}|^2\le|\vec{x}|^2+|\vec{y}|^2+2|\vec{x}||\vec{y}|$$

$\vec{x}$ և $\vec{y}$ վեկպորների համագիծ լինելու պայմանն է

$$x_1=ky_1,\ x_2=ky_2,\quad ,\ x_n=ky_n\ ,$$

որտեղ k-ն որոշակի թիվ է, x և y վեկպորների ուղղահայաց (օրթոգոնալ) լինելու ($\varphi=\frac{\pi}{2}$) պայմանն է

$$x_1y_1+\ x_2y_2+\quad +x_ny_n=0$$

n չափանի վեկտորի գաղափարը տնտեսագիտության մեջ մաթեմատիկական հետազոտությունների ոլորտում ունի հարմար և օգտակար կիրառություններ: Օրինակ, եթե գործարանը արտադրում է n տեսակի արտադրանք, i-րդ տեսակից ամսական արտադրում է p_i գնով արտադրվող x_i միավոր արտադրանք, ապա դրա արտադրական ծրագիրը կբնութագրվի $\vec{x}=\left(x_1,x_2,\dots x_n\right)$ n չափանի վեկտորով, իսկ ամսական համախառն արտադրանքը՝

$(\vec{x}\left(x_1,x_2,\dots x_n\right),\vec{p}(p_1,p_2,\dots,p_n))=x_1p_1+x_2p_2+\dots x_np_n$,

սկալյար արտադրյալով:

302. Հաշվել $\vec{a}(x,y,z)$ վեկտորի կազմած α,β,γ անկյունները կոորդինատական առանցքների հետ և ապացուցել, որ

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

303. a պարամետրի ինչ արժեքի դեպքում $\vec{x}(3;2;1)$ և $\vec{y}(-7;4;a)$ վեկտորները կլինեն օրթոգոնալ:

303.1. a պարամետրի ինչ արժեքի դեպքում $\vec{x}(3;2;0)$ և $\vec{y}(6;4;a)$ վեկտորները կլինեն համագիծ:

303.2. a պարամետրի ինչ արժեքի դեպքում $\vec{x}(3;2;0)$ և $\vec{y}(6;4;a)$ վեկտորները կկազմեն $\varphi=60^0$ անկյուն:

304. Գտնել $3\vec{a}-2\vec{b}$ գծային կոմբինացիայի կոորդինատները, եթե $\vec{a}=(3;1;2)$ և $\vec{b}=(-4;0;3)$:

305. Գտնել $2\vec{a}+3\vec{b}$ վեկտորի կոորդինատները, եթե $\vec{a}=(3;-1;2;0)$, $\vec{b}=(1;-3;-2;5)$:

306. Գտնել $\vec{x}$ վեկտորը հետևյալ հավասարումից՝

$\overrightarrow{a_1}+2\overrightarrow{a_2}+3\overrightarrow{a_3}+4\vec{x}=0$, եթե $\overrightarrow{a_1}=(5;-8;-1;2)$,

$\overrightarrow{a_2}=(2;-21;4;-3)$, $\overrightarrow{a_3}=(-3;2;-5;4)$:

307. Գտնել $\vec{x}$ վեկտորը հետևյալ հավասարումից՝

$$3\left(\vec{a_1}-\vec{x}\right)+2\left(\vec{a_2}+\vec{x}\right)=5\left(\vec{a_3}+\vec{x}\right),$$

եթե $\vec{a_1}=(2;5;1;3)$, $\vec{a_2}=(10;1;5;10)$, և $\vec{a_3}=(4;1;-1;1)$:

308. Գտնել $2\vec{x}+3\vec{y}$ վեկտորի մոդուլը, եթե $\vec{x}=(1;2;0)$ և $\vec{y}=(-1;2;1)$

309. Ապացուցել, որ $\vec{a}=(7;-3;5)$ և $\vec{b}=(1;9;4)$ վեկտորները ուղղահայաց են:

310. $\vec{a}=(-1;3;5;-4)$, $\vec{b}=(4;2;2;3)$ և $\vec{c}=(2;-6;-10;8)$, վեկտորների մեջ նշել իրար համագիծները և ուղղահայացները:

311. a-ի ի՞նչ արժեքների դեպքում $\vec{x}=(1;a+1;2;3)$ և $\vec{y}=(a;1;-2;a)$ վեկտորները կլինեն օրթոգոնալ:

312. a և b պարամետրերի ի՞նչ արժեքների դեպքում $\vec{x}=(a+b;a+1;2)$, և $\vec{y}=(a;b;1)$ վեկտորները կլինեն համագիծ:

313. Գտնել $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների կազմած անկյունը, եթե

1) $\vec{a}=(-2;0;4)$, $\vec{b}=(3;2;-6)$,

2) $\vec{a}=-\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{b}=\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$:

314. Գտնել ABC եռանկյան ներքին անկյունները, եթե հայտնի են եռանկյան գագաթների կոորդինատները

A(2;-1;3), B(1;1;1) և C(0;0;5):

315. Ապացուցել, որ A(1;2;1), B(3;-1;7) և C(7;4;-2) գագաթներով եռանկյունը հավասարասրուն է:

316. a-ի ի՞նչ արժեքների դեպքում

$\vec{x}=(a;a+1;-1)$, և $\vec{y}=(2;1;a)$ վեկտորների կազմած անկյունը սուր է:

317. Ապացուցել, որ a պարամետրի ցանկացած արժեքների դեպքում $\vec{x}=(7;-2;1-a)$ $\vec{y}=(-1;a;2a)$ վեկտորների կազմած անկյունը բութ է:

317.1. Ապացուցել, որ a պարամետրի ցանկացած արժեք-ների դեպքում $\vec{x}=(2;1;3a)$ $\vec{y}=(3;2a;a)$ վեկտորների կազմած անկյունը սուր է:

Թեորեմ. R^n վեկտորական տարածության մեջ n հատ գծո-րեն անկախ վեկտորների համակարգը հանդիսանում է բազիս այդ տարածության համար:

318. Ցույց տալ, $\overrightarrow{a_1}(5;4)$, $\overrightarrow{a_2}(-1;2)$ և $\overrightarrow{a_3}(-10;-1)$ վեկտորները գծորեն կախյալ են:

319. Ապացուցել, որ $\overrightarrow{a_1}(1;2;5)$, $\overrightarrow{a_2}(3;1;1)$ և $\overrightarrow{a_3}(-3;1;-4)$ վեկ-տորները գծորեն անկախ են (հետևաբար կազմում են բազիս): Գտնել $\vec{x}(-8;10;7)$ վեկտորի վերլուծությունը ըստ այդ բազիսի:

320. Գտնել $\vec{b}=(2;-4;15)$ վեկտորի կոորդինատները $\overrightarrow{a_1}=(2;0;0)$, $\overrightarrow{a_2}=(0;1;0)$, $\overrightarrow{a_3}=(0;0;5)$ բազիսում:

321. Ապացուցել, որ հետևյալ վեկտորները գծորեն անկախ են.

1) $\overrightarrow{p_1}=(1;0;-2)$, $\overrightarrow{p_2}=(2;-1;0)$, $\overrightarrow{p_3}=(1;1;1)$,

2) $\overrightarrow{p_1}=(2;-4;3)$, $\overrightarrow{p_2}=(1;-2;4)$, $\overrightarrow{p_3}=(0;1;-1)$,

3) $\overrightarrow{p_1}=(3;-1;2)$, $\overrightarrow{p_2}=(7;6;3)$, $\overrightarrow{p_1}=(4;1;2)$:

322. Որոշել λ-ն այնպես, որ $\overrightarrow{P_1}, \overrightarrow{P_2}, \overrightarrow{P_3}$ վեկտորները լինեն գծորեն կախված.

1) $\overrightarrow{P_1} = (3;1;-1)$, $\overrightarrow{P_2} = (2;\lambda;1)$, $\overrightarrow{P_3} = (\lambda;3;1)$,

2) $\overrightarrow{P_1} = (\lambda;-2;0)$, $\overrightarrow{P_2} = (\lambda;1;1)$, $\overrightarrow{P_3} = (\lambda;8;1)$

323. Գտնել $\vec{P} = (2;4;15)$ վեկտորի վերլուծությունը ըստ $\overrightarrow{P_1}, \overrightarrow{P_2}, \overrightarrow{P_3}$ բազիսի, եթե $\overrightarrow{P_1} = (2;0;0)$, $\overrightarrow{P_2} = (0;1;0)$, $\overrightarrow{P_3} = (0;0;5)$:

324. Տրված են $\overrightarrow{P_1}, \overrightarrow{P_2}, \overrightarrow{P_3}, \vec{P}$ վեկտորները: Ապացուցել, որ $\overrightarrow{P_1}, \overrightarrow{P_2}, \overrightarrow{P_3}$ վեկտորները կազմում են բազիս եռաչափ տարածության մեջ և գտնել $\vec{P}$ վեկտորի վերլուծությունը ըստ այդ բազիսի.

1) $\overrightarrow{P_1} = (2;1;-1)$, $\overrightarrow{P_2} = (2;-3;0)$,
$\overrightarrow{P_3} = (1;1;-1)$, $\vec{P} = (5;-4;-2)$:

2) $\overrightarrow{P_1} = (3;2;-2)$, $\overrightarrow{P_2} = (3;-2;-1)$,
$\overrightarrow{P_3} = (0;0;3)$, $\vec{P} = (1;0;2)$:

4. Որոշիչներ:

II և III կարգի որոշիչները հաշվվում են հետևյալ կանոններով:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{array}$$

Ավելի բարձր կարգի որոշիչներ հաշվելու համար կիրառում են կարգի իջեցման մեթոդը, որը իրականացվում է հետևյալ առնչության միջոցով.

$$\Delta_n = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}$$

A_{ik} թիվը կոչվում է a_{ik} փարրի հանրահաշվական լրացում և որոշվում է $A_{ik}=(-1)^{i+k}M_{ik}$ բանաձևով, որտեղ M_{ik}-ն (a_{ik} փարրի մինորը) n-1 կարգի որոշիչ է և սպացվում է Δ_n որոշիչից դուրս հանելով i-րդ փողի և k-րդ սյան փարրերը:

325. Հաշվել հետևյալ որոշիչները.

1) $\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$, 2) $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$, 3) $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 12 \end{vmatrix}$,

4) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$, 5) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$, 6) $\begin{vmatrix} 1+x & x & x \\ x & 2+x & x \\ x & x & 3+x \end{vmatrix}$:

326. Հաշվել հետևյալ չորրորդ կարգի որոշիչը.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Հաշվել հետևյալ որոշիչները.

327. $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$: **328.** $\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ -2 & 7 \end{vmatrix}$: **329.** $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$:

330. $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$: **331.** $\begin{vmatrix} \sqrt{a} & -1 \\ a & \sqrt{a} \end{vmatrix}$: **332.** $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta \end{vmatrix}$:

333. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$: **334.** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$: **335.** $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix}$:

336. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 7 & 6 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$: **337.** $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 7 \\ -1 & 4 & -5 \\ 1 & 6 & 2 \end{vmatrix}$: **338.** $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & 7 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$:

339. $\begin{vmatrix} 11 & -6 & -5 \\ 3 & 1 & -2 \\ -3 & 4 & 7 \end{vmatrix}$: **340.** $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 0 \\ -7 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$: **341.** $\begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ 0 & b & 0 \\ b & 0 & -b \end{vmatrix}$:

342. $\begin{vmatrix} 1+\cos\alpha & 1-\sin\alpha & 1 \\ 1+\sin\alpha & 1+\cos\alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$: **343.** $\begin{vmatrix} \cos^2\alpha & 1 & -\sin^2\alpha \\ 1 & \cos\alpha & -1 \\ -\sin\alpha & 1 & \sin\alpha \end{vmatrix}$:

344. Լուծել հավասարումը.

1) $\begin{vmatrix} 3 & x & -x \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$, 2) $\begin{vmatrix} x^2 & 1 & 4 \\ x & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}=0$,

3) $\begin{vmatrix} x & 2 & -3 \\ 2-x & 5 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}=28$, 4) $\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x+3 & x+4 & x+5 \\ x+6 & x+7 & x+8 \end{vmatrix}=0$:

345. Լուծել անհավասարումը.

1) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}<0$, 2) $\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix}>0$,

346. Ապացուցել III կարգի որոշիչի հետևյալ հատկությունները, օգտագործելով դրա հաշվման կանոնը.

1) եթե փոխենք որոշիչի տողերի և սյուների տեղերը, պահպանելով համարակալումը (տրանսպոնացնենք որոշիչը), ապա որոշիչի արժեքը չի փոխվի,
2) եթե փոխենք որոշիչի ցանկացած երկու տողերի (սյուների) տեղերը, ապա կփոխվի միայն որոշիչի նշանը,

3) եթե որոշիչի որևէ փողի (սյան) բոլոր փարրերը բազմապատկենք k թվով, ապա որոշիչի արժեքը կբազմապատկվի k-ով,
4) եթե որոշիչի որևէ փողը (սյունը) հանդիսանում է մյուս փողերի գծային կոմբինացիան, ապա որոշիչը հավասար է զրոյի:

Հաշվել IV կարգի որոշիչները.

347. $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ **348.** $\begin{vmatrix} -1 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$:

349. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$: **350.** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$:

5. Մատրիցներ:

$a_{ij}(i=1,2, \quad m, \quad j=1,2, \quad n)$ թվերից կազմված ուղղանկյուն աղյուսակը՝

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

կոչվում է m x n չափանի մատրից: Մատրիցը կոչվում է քառակուսային, եթե m=n և զրոյական, եթե դրա բոլոր փարրերը զրո են՝ $a_{ij}=0$: Քառակուսային մատրիցը կոչվում է միավոր մատրից, եթե նրա գլխավոր անկյունագծի բոլոր փարրերը հավասար են մեկի, իսկ մնացած փարրերը՝ զրոյի.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \\ . & . & . \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}:$$

Մատրիցները կոչվում են հավասար, եթե հավասար են նրանց համապատասխան տարրերը: Մատրիցները գումարելիս գումարվում են համապատասխան տարրերը, իսկ թվով բազմապատկելիս նրա բոլոր տարրերը բազմապատկվում են այդ թվով:

$A=(a_{ij})$և $B=(b_{ij})$ մատրիցների $C=(c_{ij})$ արտադրյալ մատրիցի c_{ij} տարրը որոշվում է հետևյալ կանոնով.

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+ \quad +a_{im}b_{mj}$$

այսինքն A մատրիցի i-րդ տողի տարրերը բազմապատկում ենք B մատրիցի j-րդ սյան համապատասխան տարրերով և ստացված արտադրյալները գումարում իրար:

Սահմանումներից հետևում է, որ A և B մատրիցները իրար հետ համեմատել կամ գումարել կարելի է միայն այն դեպքում, երբ նրանք ունեն նույն չափողականությունը, իսկ AB արտադրյալը գոյություն կունենա միայն այն դեպքում, եթե A-ի սյուների քանակը հավասար լինի B-ի տողերի քանակին: Ընդհանրապես ասած, մատրիցաների համար $AB \neq BA$:

Եթե $A \cdot B = B \cdot A = E$, ապա A և B մատրիցները կոչվում են իրար հակադարձ: Եթե $d=\det A \neq 0$, ապա գոյություն ունի A^{-1} հակադարձ մատրիցը.

$$A^{-1} = \frac{1}{d}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & & A_{n2} \\ \\ \\ A_{1n} & A_{2n} & & A_{nn} \end{pmatrix},$$

որտեղ A_{ij}-ն a_{ij} տարրի հանրահաշվական լրացումն է:

Եթե, պահպանելով կարգը, փոխենք A մատրիցի տողերի և սյուների տեղերը, ապա ստացված մատրիցը կոչվում է տրանսպոնացված A-ի նկատմամբ և նշանակվում է A^T: Դժվար չէ ստուգել, որ

$$\left(A^T\right)^T = A,\ \ (A+B)^T = A^T + B^T,\ \ (\lambda A)^T = \lambda A^T$$

Եթե A քառակուսի մատրիցի համար A^T=A, ապա A մատրիցը կոչվում է համաչափ և նրա համար $a_{ij} = a_{ji}$: Իսկ եթե A^T=-A, ապա A մատրիցը կոչվում է շեղ համաչափ:

Կատարել գործողությունները.

351. $\begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$:

352. $\begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 7 & -1 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -5 & 8 & 1 \\ -7 & -3 & 2 \end{pmatrix}$:

353. $\begin{pmatrix} -1 & 10 & -7 \\ 4 & 1 & 3 \\ -2 & -3 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$:

354. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$:

Գտնել հետևյալ մատրիցները.

1) A+B, 2) 3A-2B:

355. Հաշվել A և B մատրիցների -4A+7B գծային կոմբինացիան, եթե.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}:$$

356. Հաշվել մատրիցների արտադրյալը.

1) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, 2) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$,

3) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, 4) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$,

5) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, 6) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & -5 \end{pmatrix}$,

7) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 7 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ -4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$, 8) $\begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$,

9) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$,

10) $\begin{pmatrix} -4 & -2 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & -7 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -19 & -24 & 2 \\ 15 & 20 & -2 \\ 21 & 28 & -2 \end{pmatrix}$,

11) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$:

357. Տրված են հետևյալ մատրիցները.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{և} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}:$$

Ցույց տալ, որ AB≠BA:

358. Հաշվել մատրիցների արտադրյալը.

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}:$$

359. Գտնել հետևյալ մատրիցների հակադարձ մատրիցները.

1) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, 2) $\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$, 3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$, 4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

5) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$, 6) $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 7) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$:

360. Լուծել մատրիցային հավասարումները.

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$,

2) $X \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 & -3 \\ -8 & 3 & 6 \\ 11 & 9 & 13 \end{pmatrix}$,

3) $\begin{pmatrix} 7 & 6 & -3 \\ -8 & 3 & 6 \\ 11 & 9 & 13 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -3 & -10 & -4 \\ 21 & 14 & -10 \\ 48 & 2 & 30 \end{pmatrix}$,

4) $\begin{pmatrix} 4 & 12 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$,

5) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & -4 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 \\ 13 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$:

361. Ցույց տալ, որ $S = 3A - 2B$ մատրիցը համաչափ է, եթե

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{և} \quad B = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 5 \\ 3 & -1 & 4 \\ 5 & -8 & 5 \end{pmatrix}:$$

362. Ցույց տալ, որ $S = 2A - B$ մատրիցը շեղ համաչափ է, եթե

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{և} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 6 & 4 & 5 \\ 11 & 3 & 6 \end{pmatrix}:$$

363. Գտնել $A \cdot A^T$ և $A^T \cdot A$ արտադրյալները, եթե

$$1)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}, \qquad 2)\ A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}:$$

364. Ցույց տալ, որ ցանկացած A քառակուսի մատրիցի համար $B=A+A^T$ մատրիցը համաչափ մատրից է, իսկ $C=A-A^T$ մատրիցը՝ շեղ համաչափ:

365. Ապացուցել, որ ցանկացած A քառակուսի մատրից կարելի է միակ ձևով ներկայացնել $A=B+C$ տեսքով, որտեղ B-ն համաչափ մատրից է, իսկ C-ն՝ շեղ համաչափ:

$m \times n$ չափանի A մատրիցի մեջ ընտրենք կամայական k տող և k սյուն ($k \le \min(m;n)$): ընտրված տողերի և սյուների հատման տեղերում գրված տարրերը կազմում են քառակուսի մատրից, որի որոշիչը կոչվում է A մատրիցի k-րդ կարգի մինոր: A մատրիցի զրոյից տարբեր մինորների ամենամեծ r կարգը կոչվում է A մատրիցի ռանգ: Մատրիցի ռանգը սահմանվում է նաև որպես դրա գծորեն անկախ տողերի կամ սյուների քանակ և ապացուցվում է, որ այդ երկու սահմանումները համարժեք են: Գործնականում մատրիցի ռանգը որոշում են հետևյալ կերպ. եթե գտնվել է որևէ k-րդ կարգի զրոյից տարբեր մինոր, ապա հաջորդ քայլում դիտարկում են այն (k+1)-րդ կարգի մինորները, որոնք ընդգրկում են նախորդ k-րդ կարգի 0-ից տարբեր մինորը, եթե դրանք 0 են, ռանգը հավասար է k-ի:

366. Հաշվել հետևյալ մատրիցների ռանգը

1) $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & -4\end{pmatrix}$, 2) $B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 3 & 2 & 2\end{pmatrix}$,

3) $C=\begin{pmatrix}2 & -4 & 3 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1\\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5\end{pmatrix}$:

367. Գտնել հետևյալ մատրիցների ռանգը

1) $\begin{pmatrix}10 & 3\\ 4 & -1\end{pmatrix}$, 2) $\begin{pmatrix}3 & 2\\ 6 & 4\end{pmatrix}$, 3) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 0 & 1\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$,

4) $\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 1 & 0 & -2\\ 0 & 4 & 5\end{pmatrix}$ 5) $\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$, 6) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\\ 10 & 11 & 12\end{pmatrix}$,

7) $\begin{pmatrix}2 & -1 & 3 & -2 & 4\\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7\\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2\end{pmatrix}$, 8) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ 2 & 3 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 0 & 4\end{pmatrix}$,

9) $\begin{pmatrix}1 & -2 & 2 & 3\\ -2 & 0 & 1 & 3\\ 1 & 1 & -1 & -3\\ -1 & 1 & -3 & -3\end{pmatrix}$, 10) $\begin{pmatrix}0 & 2 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 1 & 0 & 2 & 0\end{pmatrix}$:

5. Գծային հավասարումների համակարգեր:

n անհայտով n գծային հավասարումների համակարգը ունի հետևյալ տեսքը.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

կամ մատրիցային գրառումով՝ AX=B, որտեղ

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ & \\ a_{n1} \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}:$$

Կրամերի կանոնը. եթե $\Delta=\det A\neq 0$, ապա համակարգը ունի միակ լուծում՝

$$X_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i=1,2,\ldots,n,$$

որտեղ Δ_i որոշիչները ստացվում են Δ որոշիչից, նրա i-րդ սյունը փոխարինելով ազատ անդամների սյունով:

$\det A\neq 0$ պայմանը նաև նշանակում է, որ գոյություն ունի A^{-1} հակադարձ մատրիցը և համակարգի լուծումը մատրիցային գրառումով կգրվի $X=A^{-1}B$ տեսքով:

Լուծել համակարգերը Կրամերի կանոնով.

368. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 5 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$ **369.** $\begin{cases} -3x_1 + 5x_2 = -12 \\ 2x_1 - 7x_2 = 8 \end{cases}$

370. $\begin{cases} 2x_2 - 3x_1 = 1 \\ 2x_1 - x_2 = 5 \end{cases}$

371. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$

372. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ -x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 5: \\ 2x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 5 \end{cases}$

373. $\begin{cases} 7x_1 - x_2 + 8x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ 10x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

374. $\begin{cases} -4x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ 7x_1 + 5x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$

375. $\begin{cases} 8x_1 - 5x_2 + x_3 = -5 \\ x_1 - 3_2 - 9x_3 = 22 \\ -x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 4 \end{cases}$

376. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -3 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$

Գծային հավասարումների համակարգը կարելի է լուծել նաև անհայտների հաջորդական արտաքսման Գաուսի մեթոդով:

Լուծել համակարգերը Գաուսի մեթոդով.

377. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -6 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 16 \end{cases}$

378. $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1 \\ 5x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases}$

379. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 8 \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 11: \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$

380. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = -4 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 11 \end{cases}$

381. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ -2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$

382. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \\ 6x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -2: \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -\frac{1}{3} \end{cases}$

383. $\begin{cases} 4x_1-8x_2+3x_3+2x_4=5 \\ x_1+7x_2+x_3+x_4=-7 \\ -3x_1+x_2+2x_3-3x_4=4 \\ 7x_1-3x_2+5x_4=-6 \end{cases}$:

Եթե համակարգի մեջ հավասարումների m թիվը շատ է փոփոխականների n թվից. ապա այդ m հավասարումներից ընտրում ենք այնպիսի n հավասարումների համակարգ, որը ունի միակ լուծում և ստացված լուծումը տեղադրում ենք մնացած հավասարումների մեջ: Եթե այդ ստացված լուծումը բավարարում է մնացած հավասարումներին, ապա տրված համակարգը համատեղելի է, իսկ եթե այդ լուծումը չի բավարարում մնացած հավասարումներից գոնե մեկին, ապա համակարգը համատեղելի չէ:

Եթե անհայտների n թիվը մեծ է հավասարումների m թվից, ապա համակարգը ունի հետևյալ տեսքը.

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

Եթե A-ն անհայտների գործակիցներից կազմված մատրիցն է, իսկ $\overline{A}$ մատրիցը ստացվել է A-ին ավելացնելով ազատ անդամների սյունը (ընդլայնված մատրից), ապա տեղի ունի Կրոնեկեր-Կապելլիի թեորեմը, որպեսզի համակարգը լինի համատեղելի, անհրաժեշտ է և բավարար, որ

$$\operatorname{rang}A=\operatorname{rang}\overline{A}:$$

Եթե համակարգը համատեղելի է և rangA=r≤m, ապա, առանց ընդհանրությունը խախտելու, կարելի է ենթադրել, որ զրո չդարձող r կարգի մինորը գտնվում է A մատրիցի առաջին r տողերում և սյուներում: Դեն նետելով մնացած m-r հավասարումները (դրանք առաջին r հավասարումների հետևանքն են) և $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ n-r հատ անհայտները տեղափոխելով հավասարման աջ մասը, կստանանք հետևյալ համակարգը.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{21r}x_r = b_2 - a_{2r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_r = b_r - a_{rr+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n \end{cases}$$

x_1, x_2, , x_r անհայտները կոչվում են բազիսային անհայտներ, իսկ x_{r+1}, , x_n անհայտները՝ ազատ անհայտներ:

Ազատ անհայտների ցանկացած արժեքների համար համակարգը կունենա միակ լուծում:

Լուծել հետևյալ համակարգերը.

384. 1) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 + 3x_2 = 6 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} -2x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 - x_2 = -6 \\ x_1 + x_2 = 5 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 7 \end{cases}$, 4) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = -2 \\ x_1 + 8x_2 + 8x_3 + 5x_4 = 14 \end{cases}$

385. $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 - 5x_2 = 8 \\ -2x_2 - x_1 = -1 \end{cases}$ **386.** $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 = 7 \\ x_1 + x_2 = 2 \\ -x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases}$

387. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 5x_1 - 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$ **388.** 1) $\begin{cases} \sqrt{5}x_1 - 5x_2 = \sqrt{5} \\ x_1 - \sqrt{5}x_2 = 5 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_1 - \sqrt{2}x_2 = 1 \\ \sqrt{2}x_1 - 2x_2 = \sqrt{2} \end{cases}$, 3) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 0 \end{cases}$,

$$4)\begin{cases}2x_1+x_2-x_3=-6\\ x_1+x_2+2x_3=-2\\ \quad x_2+5x_3=2\end{cases},\qquad 5)\begin{cases}x_1-x_2+2x_3=1\\ 2x_1+x_2+3x_3=0\\ 4x_1-x_2+7x_3=2\end{cases},$$

$$6)\begin{cases}x_1-2x_2+x_3=3\\ x_1+3x_2-x_3=1\\ 3x_1+4x_2-x_3=5\end{cases}\qquad 7)\begin{cases}x_1+4x_2+3x_3+6x_4=0\\ 2x_1+5x_2+x_3-2x_4=0\\ x_1+7x_2-10x_3+20x_4=0\end{cases}$$

$$8)\begin{cases}x_1+3x_2+x_3+2x_4=4\\ -2x_1-x_2+5x_3-x_4=0\\ 2x_1+x_2-x_3+7x_4=-1\end{cases},\quad 9)\begin{cases}x_1+3x_2-3x_3+4x_4=0\\ x_1-2x_2+2x_3-x_4=0\\ 2x_1+x_2-x_3+3x_4=0\end{cases}$$

388.1. Հետևյալ համակարգերում որոշել n թիվը այնպես, որ համակարգը ունենա զրոյական լուծումից տարբեր լուծում:

$$ա)\begin{cases}(1-n)x_1+x_2+x_3=0\\ (1-n)x_2=0\\ 2x_1+x_2-nx_3=0\end{cases}\qquad բ)\begin{cases}-nx_1+x_2=0\\ x_1+(1-n)x_2+x_3=0\\ x_2-nx_3=0\end{cases},$$

$$գ)\begin{cases}(1-n)x_1+2x_2+x_3=0\\ 4x_1+(3-n)x_2+2x_3=0\\ 3x_1+x_2+(1-n)x_3=0\end{cases},\quad դ)\begin{cases}(3-n)x_1+x_2+2x_3=0\\ 4x_1+(3-n)x_2+4x_3=0\\ x_1+2x_2+(2-n)x_3=0\end{cases}:$$

Գ Լ ՈՒ Խ III

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԱՆԱԼԻԶԻ ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

§1. ՀԱՋՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՍԱՀՄԱՆԸ

Հաջորդականություն կոչվում է բնական թվերի N բազմության վրա որոշված $f: N \to R$ ֆունկցիան:

$f(n)$ թիվը կոչվում է հաջորդականության n-րդ անդամ և նշանակվում է x_n:

389. Գտնել հաջորդականության առաջին 5 անդամները, եթե

1) $x_n=4n+1$, 2) $y_n=\dfrac{n+3}{2n-1}$, 3) $z_n=\sin\dfrac{\pi n}{3}$

390. Հաշվել հաջորդականության առաջին մի քանի անդամները, եթե

1) $x_n=\dfrac{7n-3}{3n+5}$, 2) $x_n=1+(-1)^n$, 3) $x_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$,

4) $x_n=\cos \pi n$, 5) $x_n=(-1)^n \arcsin\dfrac{1}{2}+\pi n$:

391. $x_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ հաջորդականության համար գտնել x_1, x_5, x_{n+1}, x_{2n} անդամները:

392. Գտնել տրված հաջորդականության ընդհանուր անդամի բանաձևը.

1) $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \ldots$ 2) $1, \dfrac{4}{3}, \dfrac{6}{4}, \dfrac{8}{5}, \ldots$ 3) $2, \dfrac{4}{3}, \dfrac{6}{5}, \dfrac{8}{7}, \ldots$

4) 0, 2, 0, 2, 5) 1,0,-3, 0, 5, 0,-7, 6) 1,3,1,3,

Մաթեմատիկական ինդուկցիայի եղանակով ապացուցել հետևյալ առնչությունները.

393. $1+2+3+\quad +n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

394. $1^2+2^2+3^2+\quad +n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

395. $1^3+2^3+3^3+\quad +n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$

396. $(1+x)^n \geq 1+nx$, որտեղ $x>-1$ և n-ը բնական թիվ է (Բեռնուլիի անհավասարությունը):

397. $$\frac{1}{\sqrt{2n(2n+1)}} < \frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}.\qquad .\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

398. $$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n+\ldots+x_{2^n}}{2^n} \geq \sqrt[2^n]{x_1.x_2.\qquad .x_{2^n}}$$

399. Օգտագործելով 398.-ը ապացուցել, որ եթե $x_k \geq 0$, ապա
$$\frac{x_1+x+\ \ldots\ +x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}$$

400. Հաշվել $1^4+2^4+3^4+\quad +n^4$:

401. Հաշվել $1^2+3^2+5^2+\quad +(2n-1)^2$:

402. Ապացուցել, որ
$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)} = 1-\frac{1}{n+1}$$

403. Ապացուցել, որ
$$\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$$

404. Ապացուցել, որ

$$n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

405. Ապացուցել, որ

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+....+\frac{1}{\sqrt{n}}>2\sqrt{n+1}-2$$

Սահմանում. a թիվը կոչվում է x_n հաջորդականության սահման, եթե $\forall\varepsilon > 0$ թվի համար $\exists\ n_0 = n_0(\varepsilon)$ բնական այնպիսի թիվ, որ N բազմությունից վերցրած $\forall n$-ի համար, որը մեծ է n_0-ից $(n>n_0)$ տեղի ունի $|x_n-a|<\varepsilon$: Նշելու համար, որ x_n-ի սահմանը a-ն է գրում են $\lim x_n=a$:

Վերջավոր սահման ունեցող հաջորդականությունը կոչվում է զուգամետ: Հաջորդականությունը կոչվում է անվերջ փոքր, եթե $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$: x_n-ը կոչվում է անվերջ մեծ, եթե $\forall E > 0$ թվի համար $\exists\ n_0=n_0(E)$ բնական այնպիսի թիվ, որ յուրաքանչյուր n-ի համար, որը մեծ է n_0-ից տեղի ունի $|x_n|>E$. գրում են $\lim x_n = \infty$:

Կոշիի զուգամիտության հայտանիշը

Որպեսզի x_n հաջորդականությունը լինի զուգամետ անհրաժեշտ է և բավարար, որ $\forall\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունենա $n_0=n_0(\varepsilon)$ բնական թիվ այնպիսին, որ N բազմությունից վերցրած, n_0-ից մեծ $\forall$ n, m թվերի համար տեղի ունենա $|x_n - x_m|<\varepsilon$:

406. Օգտվելով սահմանի սահմանումից, ապացուցել, որ

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{n+1}=1$ 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n+3}=\frac{3}{2}$,

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^2+1}{n^2+2}=4$, 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=0$,

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+1}{3^n}=1$:

407. Ապացուցել, որ $x_n=\dfrac{n-1}{4n-3}$ հաջորդականության սահմանը հավասար չէ 1-ի:

408. Ապացուցել, որ $x_n=\dfrac{2^n+(-2)^n}{2^n}$ հաջորդականությունը զուգամետ չէ:

409. Ապացուցել, որ $x_n=\dfrac{1}{3n+1}$ փոփոխականը անվերջ փոքր է, իսկ $y_n=3n+1$ փոփոխականը՝ անվերջ մեծ:

410. Ապացուցել, որ եթե $|q|<1$, ապա $\lim q^n=0$:

411. Ձևակերպել հետևյալ հավասարությունների ճշգրիտ իմաստը:

ա) $\lim x_n=+\infty$, բ) $\lim x_n=-\infty$:

412. Ապացուցել, որ $x_n=n^{(-1)^n}$ հաջորդականությունը անսահմանափակ է և անվերջ մեծ չէ:

413. Ապացուցել, որ 0-ից տարբեր արժեքներ ընդունող անվերջ փոքր փոփոխականի հակադարձ մեծությունը անվերջ մեծ է:

414. Հաշվել $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$, եթե

1) $x_n=\dfrac{3n-1}{2n+5}$, 2) $x_n=\dfrac{3n^2-n+2\sqrt{n}}{5+4n^2}$,

3) $x_n=\dfrac{6n+1}{n^2+3}$, 4) $x_n=\dfrac{4n^4-n^2+2}{n^3+100}$,

5) $x_n=\sqrt{2n+3}-\sqrt{2n-1}$, 6) $x_n=\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}$:

415. Հաշվել հետևյալ սահմանները.

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n}{n+1}$, 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{7-9n}$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3}{3n^3}$, 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2-7n+1}{3-5n+6n^2}$

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+5n+4}{2+3n^2}$, 6) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n^3+2n^2-3n+7}{4n^3-2n+11}$,

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{4n^3+n+1}$, 8) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(n-\sqrt{n^2+1}\right)$

9) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+7}-\sqrt{n}\right)$, 10) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3+n}-\sqrt{n}}$,

11) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{(n+1)^2}-\sqrt[3]{(n-1)^2}\right)$, 12) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\sin n!}{n+1}$

13) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n-2^n}{3^n-2^n}$, 14) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}$,

15) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+2^2+\ldots+2^n}{1+3+3^2+\ldots+3^n}$, 16) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{5^n}\right)$:

416. Հաշվել հետևյալ սահմանները.

ա) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1^3}{n^4}+\frac{2^3}{n^4}+\ldots+\frac{n^3}{n^4}\right)$,

բ) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right)$,

գ) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}\right)$, դ) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\ldots+\frac{2n-1}{2^n}\right)$,

ե) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\ldots\cdot\sqrt[2^n]{2}\right)$,

զ) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}\right)$:

Նշենք սահմանի գոյության երկու հայտանիշ.

1. Մոնոտոն և սահմանափակ հաջորդականությունը զուգամետ է:

2. Եթե $x_n \le z_n \le y_n$ և $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$, ապա

$$\lim_{n\to\infty} z_n = a:$$

417. Պարզել մոնոտո՞ն են արդյոք հետևյալ հաջորդականությունները.

1) $x_n = \frac{2n-1}{3n+1}$, 2) $x_n = \frac{3-n}{n+4}$,

3) $x_n = \frac{5n-3}{9n+5}$, 4) $x_n = \sin 2n$,

5) $x_n = \frac{10}{1}\cdot\frac{11}{3}\cdot \quad \cdot\frac{n+9}{2n-1}$,

418. Ապացուցել, որ $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$-ը մոնոտոն աճող, իսկ $y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$-ը մոնոտոն նվազող հաջորդականություններ են:

419. Ապացուցել, որ

$$0 < e\text{-}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \frac{e}{n}$$

420. Ապացուցել, որ

$$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$$

421. Պարզել, սահմանափա՞կ են արդյոք հետևյալ հաջորդականությունները.

1) $x_n=\frac{2n+7}{7n+2}$, 2) $x_n=\frac{3n^2}{n^2+5}$,

3) $x_n=(-1)^n\frac{2n\sin n}{n+1}$, 4) $x_n=n\cos\pi n$:

422. Ապացուցել, որ

$$x_n=\frac{1}{5+1}+\frac{1}{5^2+1}+\frac{1}{5^3+1}+\quad\frac{1}{5^n+1}$$

հաջորդականությունը զուգամետ է:

423. Ապացուցել, որ $x_n=\frac{a^n}{n!}$ $(a>0)$ հաջորդականությունը զուգամետ է և գտնել $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ -ը:

424. Ապացուցել հետևյալ հաջորդականությունների զուգամիտությունը:

ա) $x_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\quad\cdot\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$,

բ) $x_n=\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdot\quad\cdot\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$,

գ) $x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\quad+\frac{1}{n}-\ln n$,

դ) $x_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\quad+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n}$,

ե) $x_n=\frac{10}{1}\cdot\frac{11}{3}\cdot\quad\cdot\frac{n+9}{2n-1}$, գ) $x_n = \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+...+\sqrt{n}}}}$ } n հատ:

425. Հաշվել

ա) $\lim \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}}$ } n

բ) $\lim \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \quad + \frac{1}{2n} \right)$:

426. $x_1=\sqrt{c}$, $x_n = \sqrt{c+x_{n-1}}$ եթե n=2, 3,

Հաշվել $\lim x_n$:

427. Դիցուք x_n հաջորդականության համար տեղի ունի $0 \le x_{m+n} \le x_m+x_n$ ցանկացած n և m բնական թվերի համար, ապացուցել, որ $\lim \frac{x_n}{n}$ սահմանը գոյություն ունի:

428. $x_1=a$, $x_2=b$, $x_n=\frac{x_{n-1}+x_{n-2}}{2}$, n=3, 4,... Գտնել $\lim x_n$-ը:

429. x_n հաջորդականությունը որոշվում է

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n} \right) \quad n=1, 2, \quad \text{և} \quad x_1>0:$$

Հաշվել $\lim x_n$-ը:

430. ա) x_n հաջորդականությունը կոչվում է սահմանափակ վարիացիայի (փոփոխության), եթե $\exists$ c թիվ այնպես, որ $|x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \quad + |x_{n+1} - x_n| \le c$ n=1, 2, համար: Ապացուցել, որ սահմանափակ վարիացիայի հաջորդականությունը զուգամետ է:

բ) Ապացուցել հետևյալ հաջորդականության զուգամիտությունը.

$$x_{n+1}=2+\frac{1}{x_n}, \quad x_1 = 2:$$

a թիվը կոչվում է հաջորդականության սահմանային կետ (մասնակի սահման), եթե կամայական ε-ի համար գոյություն ունեն այդ հաջորդականության անվերջ թվով անդամներ, որոնց համար $|x_n - a| < \varepsilon$, կամ որ նույնն է, $\exists x_{n_k}$ ենթահաջորդականություն այնպես, որ $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$:

Բոլցանո-Վայերշտրասի սկզբունքը. ցանկացած սահմանափակ հաջորդականություն ունի գոնե մեկ վերջավոր մասնակի սահման:

Մասնակի սահմաններից ամենամեծը (ամենափոքրը) կոչվում է հաջորդականության վերին (ստորին) սահման և նշանակվում է $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n \left(\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n\right)$: $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \left(\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n\right)$ պայմանը անհրաժեշտ է և բավարար հաջորդականության զուգամետ լինելու համար:

431. Ապացուցել, որ եթե $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, ապա x_n-ի ցանկացած ենթահաջորդականություն նույնպես զուգամետ է a-ին:

432. Գտնել $x_n = 1 + \frac{n}{n+1}\cos\frac{n\pi}{2}$ հաջորդականության վերին և ստորին սահմանները:

433. x_n հաջորդականության համար գտնել $\inf x_n$, $\sup x_n$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$ և $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$ մեծությունները:

1) $x_n = 2 + \frac{1}{n}$, 2) $x_n = \frac{n+1}{n}\cos^2\frac{\pi n}{4}$,

3) $x_n = (-1)^n(3n-1)$, 4) $x_n = \frac{n+2}{n-2}\sin\frac{\pi n}{3}$, $(n > 2)$,

5) $x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2}$, 6) $x_n = n^{(-1)^n}$

§2. ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՍԱՀՄԱՆԸ ԵՎ ԱՆԸՆԴՀԱՏՈՒԹՅՈՒՆԸ

Դիցուք $y=f(x)$ ֆունկցիան որոշված է X բազմության վրա և a-ն X բազմության սահմանային կետ է:

A թիվը կոչվում է $y=f(x)$ ֆունկցիայի սահման, երբ $x \to a$, եթե ցանկացած $\varepsilon > 0$ թվի համար կարելի է գտնել այնպիսի $\delta(\varepsilon)>0$ թիվ, որ X փիրույթին պատկանող և $0<|x-a|<\delta$ պայմանին բավարարող ցանկացած x-ի համար տեղի ունի $|f(x)-A|<\varepsilon$ անհավասարությունը:

Այս փաստը գրվում է $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ տեսքով:

Բերենք ֆունկցիայի սահմանի մեկ ուրիշ սահմանում, որը այս սահմանմանը համարժեք է:

A թիվը կոչվում է $y=f(x)$ ֆունկցիայի սահման, երբ $x \to a$, եթե a-ին ձգտող $\forall\, x_n, x_n \in D(f)$, $x_n \neq a$ հաջորդականության համար համապատասխան $y_n=f(x_n)$ հաջորդականությունը ձգտում է A թվին:

434. «ε - δ» լեզվով ֆունկցիայի սահմանի սահմանման միջոցով ապացուցել, որ

$$\lim_{x \to 2}(4x+3)=11$$

435. Հաջորդականությունների լեզվով ֆունկցիայի սահմանի սահմանման միջոցով ապացուցել, որ $\lim\limits_{x \to 0} 2^{\frac{1}{x}}$ սահմանը գոյություն չունի:

436. «ε - δ» լեզվով ապացուցել, որ

1) $\lim\limits_{x \to 1}(3x-8)=-5$, 2) $\lim\limits_{x \to 2} x^2=4$,

3) $\lim\limits_{x \to 1}\frac{1}{x}=1$, 4) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \sin x=\frac{1}{2}$

437. Հաջորդականությունների լեզվով ապացուցել, որ $\lim\limits_{x\to 1}\sin\frac{1}{x-1}$ սահմանը գոյություն չունի:

438. «ε - δ» լեզվով ձևակերպել հետևյալ պնդումները.

1) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$, 2) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, 3) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$:

439. Հաշվել հետևյալ սահմանները.

1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^5+8x+7}{3x^2-x+5}$, 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+3x)^2-(1+2x)^3}{x^2}$,

3) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x^2-5x-2}{10-3x-x^2}$, 4) $\lim\limits_{x\to 10}\frac{\sqrt{x-1}-3}{x-10}$,

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2+1}-3x\right)$, 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2+2x+1}{1-3x^2}$

Հաշվել հետևյալ սահմանները.

440. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{5x+1}{x+5}$, **441.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$,

442. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$,

443. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-25}{x-5}$, **444.** $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x-3}$,

445. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2+3x+2}{x^2-x-6}$, **446.** $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$,

447. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}$,

448. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2-5x-1}{3-x-2x^2}$,

449. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x}{3x^2-2}$,

450. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-x+3}{x^3-2x+5}$,

451. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-5x+1}{x+7}$,

452. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{9-x^2}{\sqrt{3x}-3}$,

453. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$,

454. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$,

455. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{x}$,

456. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{1+x}}{x^2-9}$,

457. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$,

458. $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$,

459. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x+7}-\sqrt{x}\right)$,

460. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x(x+3)}-x\right)$,

461. $\lim\limits_{x\to +\infty}x\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)$,

462. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2-5x+6}-x\right)$,

463. ա) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{2x^2+3}}{4x+2}$, բ) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{2x^2+3}}{4x+2}$,

464. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$,

465. $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$,

466. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$

467. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1}$ $(m,n\in N)$,

468. $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$

469. $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)$

Հիմնական սահմաններն են.

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$,

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$,

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{x}-1}{x}=\ln a\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-1}{x}=1$,

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\alpha$,,

Հաշվել հետևյալ սահմանները.

470. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{x}$:

471. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sin \pi x}{x-5}$:

472. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\sqrt{2}x}{\sin\sqrt{3}x}$:

473. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 11x}$:

474. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin 3x}{\sin 4x}$:

475. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$:

476. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 5x-1}{x^2}$:

477. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x}{x}$:

478. $\lim\limits_{x\to 0}x\,\mathrm{ctg}3x$:

479. $\lim\limits_{x\to \pi}\sin 5x\,\mathrm{ctg}8x$:

480. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$:

481. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sin x-\sin 3}{x-3}$:

482. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\cos x-\cos 5}{x-5}$:

483. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\mathrm{tg}\pi x}{x+2}$:

484. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{1 - tgx}$:

485. $\lim\limits_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x}$:

486. $\lim\limits_{x\to\infty} x \sin\frac{1}{x}$:

487. $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{1 - \sin\frac{x}{2}}{\pi - x}$:

488. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{1 - 2\cos x}{\pi - 3x}$:

489. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{tgx - \sin x}{x^3}$:

490. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x}$:

491. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{arctgx}{x}$:

492. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{\cos\frac{\pi}{2}x}$:

493. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{3x+1}{x+2}\right)^{x+1}$

494. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{2+x}{3-x}\right)^{x}$

495. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{5x-7}{6x+1}\right)^{x}$

496. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{3x+1}{x+4}\right)^{x}$

497. $\lim\limits_{x\to 0-0} \left(\frac{x+8}{3x+7}\right)^{\frac{1}{x}}$

498. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^{x}$

499. $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[x]{1+2x}$

500. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x+4}{x+3}\right)^{x+3}$

501. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{3x-1}{3x+1}\right)^{5x}$

502. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$

503. $\lim\limits_{x\to 0} (1 + \sin x)^{x^{-1}}$

504. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{x^{-2}}$

505. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\mathrm{ctg}^2 x}$

506. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 3x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

507. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}(\mathrm{tg}x)^{\mathrm{tg}2x}$

508. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\lg(1+10x)}{x}$:

509. $\lim\limits_{x\to +\infty} x[\ln(x+1)-\ln x]$:

510. $\lim\limits_{x\to +\infty}[\ln(2x+1)-\ln(x+2)]$:

511. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+3)-\ln 3}{x}$:

512. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln x-\ln a}{x-a}$:

513. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

514. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}$:

515. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{2x}-1}{x}$:

516. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-1}{x}$:

517. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-1}{\mathrm{tg}x}$:

518. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{\sin x}$:

519. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$:

520. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{3^{x}-1}$:

521. Ցույց տալ, որ $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ ֆունկցիան անվերջ փոքր է, երբ $x\to\infty$:

522. Ցույց տալ, որ $f(x)=1-x^2$ ֆունկցիան անվերջ փոքր է, երբ $x\to 1$:

523. Ցույց տալ, որ $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$ ֆունկցիան անվերջ մեծ է, երբ $x\to 2$:

524. Ցույց տալ, որ x-ը զրոյի ձգտելիս հետևյալ անվերջ փոքրերը համարժեք են.

ա) $\sin x$ և x, բ) $\ln(1+x)$ և x,

գ) $(1+x)^2-1$ և $2x$, դ) a^x-1 և $x\ln a$,

ե) $1-\cos x$ և $\frac{1}{2}x^2$ զ) $\arcsin x$ և x:

525. Գտնել x–ի զերոյի ձգտելուց ստացվող հետևյալ անվերջ փոքրերի կարգը x-ի նկատմամբ:

ա) $2x-3x^2+x^5$, բ) $\frac{2x}{1+x}$,

գ) $\sqrt{x+\sqrt{x}}$, դ) $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x^3}$

ե) $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$, զ) $1-\cos x$,

է) $\operatorname{tg} x-\sin x$, ը) $\sin 2x-2\sin x$:

526. Ապացուցել, որ երբ $x\to 0$ տեղի ունեն հետևյալ մոտավոր հավասարությունները (x^2 և ավելի բարձր կարգի անվերջ փոքրերը անտեսվում են).

ա) $\frac{1}{1+x}\approx 1-x$, բ) $\sqrt{a^2+x}\approx a+\frac{x}{2a}$, $(a>0)$

գ) $(1+x)^n\approx 1+nx$, $(n\in R)$ դ) $\ln(1+x)\approx x$:

527. Ձևակերպել հետևյալ հավասարությունների ճշգրիտ իմաստը օգտագործելով (ε,δ), (E,δ), (E_1,E_2), (ε,E) զույգերից անհրաժեշտը:

ա) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=A$, բ) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=A$,

գ) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$, դ) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\infty$

ե) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=+\infty$ զ) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=+\infty$

է) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=-\infty$ ը) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=-\infty$

թ) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$

ժ) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$

ի) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$

լ) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

խ) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

ծ) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

կ) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

հ) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$

528. Գտնել հետևյալ ֆունկցիաների միակողմանի սահմանները.

1) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{|x-1|}$, երբ $x\to1$,

2) $f(x)=3^{\frac{1}{2-x}}$, երբ $x\to2$,

3) $f(x)=\begin{cases}-2x+3, & \text{երբ } x\le1\\ 3x-5, & \text{երբ } x>1\end{cases}$ երբ $x\to1$,

4) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}$, երբ $x\to0$,

5) $f(x)=\dfrac{x-1}{|x-1|}$, երբ $x\to1$,

6) $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$, երբ $x\to0$,

529. Հաշվել հետևյալ միակողմանի սահմանները.

1) ա) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, բ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$,

2) ա) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(1+e^x)}{x}$, բ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+e^x)}{x}$,

3) ա) $\lim\limits_{x\to1-0}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{1-x}$, բ) $\lim\limits_{x\to1+0}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{1-x}$:

530. Կառուցել հետևյալ ֆունկցիաների գրաֆիկները.

1) $y=\lim\limits_{n\to\infty}(\cos x)^{2n}$

2) $y=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x}{1+x^{n}}$

3) $y=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x^{n}}{1+x^{n}}$

բ) $y=\lim\limits_{n\to+\infty}\operatorname{arctg} nx$

y=f(x) ֆունկցիան կոչվում է անընդհատ $x=x_0$ կետում, եթե

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

այսինքն ֆունկցիայի սահմանային արժեքը հավասար է դրա թվային արժեքին: f(x) ֆունկցիան կոչվում է անընդհատ X բազմության վրա, եթե այդ ֆունկցիան անընդհատ է X բազմության ամեն մի կետում: Նշենք, որ բոլոր տարրական ֆունկցիաները անընդհատ են իրենց որոշման տիրույթում: Եթե ինչ-որ պատճառով անընդհատության պայմանը տեղի չունի, ապա f(x) ֆունկցիան կոչվում է խզվող x_0 կետում: Եթե խզման x_0 կետում $f(x_0-0)=f(x_0+0)$ ապա x_0 կետը կոչվում է վերացնելի խզման կետ, իսկ եթե $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$ ապա x_0 կոչվում է առաջին սեռի խզման կետ: Մնացած այլ պատճառներով առաջացած խզումները կոչվում են երկրորդ սեռի խզումներ:

531. Ապացուցել, որ հետևյալ ֆունկցիաները անընդհատ են իրենց որոշման տիրույթում.

1) $f(x)=3x-2$,

2) $f(x)=3-5x-2x^2$

3) $f(x)=|x|+1$,

4) $f(x)=\sqrt{x}$,

5) $f(x)=\cos x$,

6) $f(x)=3^x$:

532. Հետևյալ ֆունկցիաները որոշված չեն x=0 կետում: Ընտրել f(0)-ն այնպես, որ y=f(x)-ը դառնա անընդհատ x=0 կետում:

1) $f(x)=\dfrac{(1+x)^2-1}{x}$,

2) $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x^2}$,

3) $f(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$,

4) $f(x)=x\,\mathrm{ctg}x$,

5) $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$

6) $f(x)=\sin 4x\,\mathrm{ctg}3x$,

7) $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$

8) $f(x)=\dfrac{\sin x}{|x|}$

9) $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$

10) $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$:

533. Հետազոտել հետևյալ ֆունկցիաները անընդհատության առումով և պարզել խզման կետերի բնույթը.

1) $f(x)=\begin{cases} x, & \text{երբ } |x|\le 1 \\ 1, & \text{երբ } |x|>1 \end{cases}$

2) $f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{երբ } 0\le x\le 1 \\ 2-x, & \text{երբ } 1<x\le 2 \end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{երբ } x\ne 0 \\ 1, & \text{երբ } x=0 \end{cases}$

4) $f(x)=\begin{cases} \cos\dfrac{\pi x}{2}, & \text{երբ } |x|\le 1 \\ |x-1|, & \text{երբ } |x|>1 \end{cases}$

534. Գտնել հետևյալ ֆունկցիաների խզման կետերը և պարզել խզման բնույթը:

1) $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x+1}$,

2) $f(x)=\dfrac{x^2}{x+2}$,

3) $f(x)=\frac{x}{|x|}$, 4) $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$,

5), $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ 6) $f(x)=\frac{1}{\ln x}$,

7) $f(x)=\frac{x}{\sin x}$, 8) $f(x)=\sqrt[3]{\frac{1-\cos\pi x}{4-x^2}}$,

9) $f(x)=\frac{\cos\frac{\pi}{x}}{\cos\frac{-\pi}{x}}$, 10) $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$,

11) $f(x)=e^{x-\frac{1}{x}}$, 12) $f(x)=\frac{1}{x^2\sin^2 x}$,

13) $f(x)=\frac{1}{\sin x^2}$, 14) $f(x)=\frac{x^2-1}{\ln x^2}$,

15) $f(x)=\begin{cases}1, & \text{եթե } x\text{-ը ռացիոնալ է}\\ 0, & \text{եթե } x\text{-ը իռացիոնալ է}\end{cases}$

535. Կառուցել ֆունկցիա, որը անընդհատ լինի միայն մեկ կետում:

536. Ապացուցել, որ Ռիմանի ֆունկցիան՝

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{n}, & \text{եթե } x=\frac{m}{n},\ m,n\in N \text{ և փոխադարձաբար պարզ են}\\ 0, & \text{եթե } x\text{-ը իռացիոնալ է}\end{cases}$$

անընդհատ է իռացիոնալ կետերում և խզվող ռացիոնալ կետերում:

537. Ապացուցել, որ գոյություն չունի իռացիոնալ կետերում խզվող և ռացիոնալ կետերում անընդհատ ֆունկցիա:

538. Ապացուցել, որ եթե f(x) (D(f)=R) ֆունկցիան անընդհատ է R-ում և f(x+y)=f(x)+f(y), ապա f(x)=cx:

539. Ապացուցել, որ գոյություն ունի f(x) (D(f)=R) ֆունկցիա, այնպես որ f(x+y)=f(x)+f(y), բայց և f(x)≠cx

540. Ապացուցել, որ եթե f(x) (D(f)=R) ֆունկցիան անընդհատ է R-ում և տարբեր է 0-ից, նաև f(x+y)=f(x).f(y), ապա $f(x)=a^x$:

540. 1.

ա) Բերել (3; 5) միջակայքում որոշված անընդհատ ֆունկցիայի օրինակ, որը այդ միջակայքում սահմանափակ չէ:

բ) Բերել $(-\infty,+\infty)$ միջակայքում որոշված անընդհատ և սահմաանափակ ֆունկցիայի օրինակ, որը չի ընդունում փոքրագույն արժեք:

գ) Բերել $(-\infty,+\infty)$ միջակայքում որոշված անընդհատ և սահմաանափակ ֆունկցիայի օրինակ, որը չի ընդունում փոքրագույն և մեծագույն արժեք:

դ) Բերել (3; 5] միջակայքում որոշված անընդհատ ֆունկցիայի օրինակ, որը այդ միջակայքում չի ընդունում մեծագույն արժեք:

ե) Ապացուցել, որ $f(x)=x^2+x-1$ ֆունկցիան (0,1) միջակայքում ունի արմատ:

զ) Ենթադրենք, որ f(x)–ը [a,b] միջակայքում որոշված անընդհատ ֆունկցիա է, $f(a)=A, f(b)=B$ և $A\neq B$

Ապացուցե՛լ $\exists c\in(a,b)$ այնպիսին, որ $f(c)=\dfrac{A+4B}{5}$:

ԳԼՈՒԽ IV

ՄԵԿ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՇԻՎ

§1. ԱԾԱՆՑՅԱԼ ԵՎ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ

1. Ածանցյալի սահմանումը:

Դիցուք $y=f(x)$ ֆունկցիան որոշված է X միջակայքում: Վերցնենք $\forall x \in X$ և x արգումենտին տանք $\forall \Delta x \neq 0$ աճ, այնպիսին, որ $x+\Delta x \in X$:

Նշանակենք $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$: Δy-ը կոչվում է $y=f(x)$ ֆունկցիայի աճ x կետում:

Եթե գոյություն ունի ֆունկցիայի Δy աճի և արգումենտի Δx աճի հարաբերության վերջավոր սահմանը, երբ արգումենտի աճը ձգտում է զրոյի, ապա այդ

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

սահմանը կոչվում է $f(x)$ ֆունկցիայի ածանցյալ տրված x կետում: Ածանցյալը նշանակում են տարբեր սիմվոլներով՝

$$f'(x), \frac{df(x)}{dx}, y', \frac{dy}{dx}$$

541. Օգտվելով ածանցյալի սահմանումից, հաշվել $f'(2)$-ը, եթե

1) $f(x) = 3x^2 - 5x$, 2) $f(x) = \sqrt{x}$,3) $f(x) = \cos x$:

542. Ցույց տալ, որ հետևյալ ֆունկցիաները չունեն վերջավոր ածանցյալ $x=0$ կետում.

1) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ 2) $f(x)=4|x|+1$

543. Օգտվելով ածանցյալի սահմանումից, հաշվել $f'(x)$-ը, եթե

1) $f(x) = x^3$ 2) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, 3) $f(x) = \text{ctg } x$,

4) $f(x) = \log_2 x$ 5) $f(x) = 3^x$, 6) $f(x) = \sin x + \cos x$ ։

544. Ապացուցել, որ x=1 կետում հետևյալ ֆունկցիաները չունեն վերջավոր ածանցյալ.

1) $f(x) = |x-1|$ 2) $f(x) = |\ln x|$

3) $f(x) = \begin{cases} x & \text{եթե } x \le 1 \\ -x^2 + 2x, & \text{եթե } x > 1 \end{cases}$

2. Ֆունկցիաների ածանցումը

Եթե C-ն հաստատուն է, իսկ U=U(x) և V=V(x) ֆունկցիաները ունեն ածանցյալ (դիֆերենցելի են), ապա

I. $C'=0$, II. $(U \pm V)' = U' \pm V'$ III. $(UV)' = U'V \pm V'U$

IV $(CV)' = C\,U'$, V $\left(\frac{U}{V}\right) = \frac{U'V - V'U}{V^2}$

VI. Եթե $y=f(u)$ և $u=\varphi(x)$ ֆունկցիաները ունեն ածանցյալներ, ապա

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

Հիմնական պարզական ֆունկցիաների ածանցյալների բանաձևերը.

a. $(x^n)' = nx^{n-1}$ (n-ը հաստատուն է),

b. $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$,

c. $(\text{tg}x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$,

d. $(\text{ctg}x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$,

e. $\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

f. $\left(\arccos x\right)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$,

g. $\left(\operatorname{arctg} x\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$,

h. $\left(\operatorname{arcctg} x\right)' = \dfrac{-1}{1+x^2}$,

i. $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$, $\left(e^x\right)' = e^x$,

j. $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x\ln a}$, $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$:

545. Օգտվելով ածանցման կանոններից և բանաձևերից, հաշվել հետևյալ ֆունկցիաների ածանցյալները.

1) $f(x) = 2x^3-5x+3$,

2) $f(x)=\sqrt{x} + \dfrac{1}{x\sqrt{x}} + x^8$

3) $f(x) = e^x \sin x$,

4) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$,

5) $f(x) = \sin^3 x$,

6) $f(x) = \ln(\cos x)$,

7) $f(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$,

8) $f(x) = \sin x^2 + 7^{\arcsin 2x}$

Հաշվել հետևյալ ֆունկցիաների ածանցյալները.

546. $y = 7x - 4$:

547. $y = 3x^2 - x - 1$:

548. $y = 7 - 5x^2 - x^5$:

549. $y = (3 - x)(x + 4)$:

550. $y = x(x+1)(x+2)$:

551. $y = ax^2 + bx + c$:

552. $y = 3 - 2x + \dfrac{1}{4}x^4$

553. $y = \dfrac{x-1}{x+1}$:

554. $y = \dfrac{x(3-x)}{x+4}$:

555. $y = \dfrac{2x}{1-x^2}$:

556. $y=\dfrac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$;

557. $y=\dfrac{x^2+1}{x^3-x}$;

558. $y=\dfrac{a+bx}{c+dx}$;

559. $y=\dfrac{(1-x)^p}{(1+x)^q}$;

560. $y=x^3\sqrt{x^7}$

561. $y=\sqrt[3]{x^2}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}$;

562. $y=x\sqrt{1+x^2}$

563. $y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$;

564. $y=\sqrt{x+\sqrt{x}}$

565. $y=\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$;

566. $y=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

567. $y=\sin 5x$;

568. $y=3\cos 2x$;

569. $y=3\sin(5x-2)$;

570. $y=\cos(3-2x)$

571. $y=\sin 2x-2\cos x$;

572. $y=\cos^7 x$;

573. $y=\sin 5x\cdot\cos 3x$;

574. $y=\cos 7x\cdot\cos 2x$;

575. $y=\cos 7x\cdot\sin^2\dfrac{x}{3}$;

576. $y=\sin^3 x^2$;

577. $y=\dfrac{1}{\cos^n x}$;

578. $y=\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}-\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}$;

579. $y=x^3\operatorname{ctg}3x$

580. $y=\dfrac{\operatorname{tg}x}{\sqrt[3]{x}}$;

581. $y=\sqrt{x}\sin 2x$;

582. $y=\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$;

583. $y=\dfrac{\sin^2 x}{\sin x^3}$;

584. $y=\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$;

585. $y=\sqrt{1-\sin 4x}$

586. $y=\cos^2\left(\sqrt{x}+1\right)$;

587. $y=\operatorname{tg}^2\left(3\sqrt{x}-1\right)$;

588. $y = 3^{\cos x}$;

589. $y = 5^{\sin 4x}$

590. $y = x^2 e^{-2x}$;

591. $y = 2^{\operatorname{tg}\frac{1}{x}}$

592. $y = \ln x - \ln a$;

593. $y = x(\ln x - 1)$;

594. $y = \dfrac{x^2}{\ln x}$;

595. $y = x^3 \ln x - \dfrac{x^3}{3}$;

596. $y = \dfrac{1}{x} + 2\ln x - \dfrac{\ln x}{x}$;

597. $y = (\ln x)(\lg x) - (\ln a)(\log_a x)$;

598. $y = \lg \sin x$;

599. $y = \ln^2 x$;

600. $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a}\right)$;

601. $y = \ln\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$

602. $y = \dfrac{1}{4(1+x^4)} + \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{x^4}{1+x^4}$;

603. $y = \ln(\ln x)$;

604. $y = \ln\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}$

605. $y = \ln(\ln(\ln x))$;

606. $y = \sqrt{x+1} - \ln\left(1 + \sqrt{x+1}\right)$;

607. $y = \ln \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$;

608. $y = \ln \operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)$;

609. $y = x[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)]$;

610. $y = \arcsin\dfrac{x}{2}$;

611. $y = \arcsin x + \arccos x$;

612. $y = \arcsin 5x$

613. $y = \arccos(2x - 1)$;

614. $y = \arccos\dfrac{3}{x}$;

615. $y = \operatorname{arctg} x + \dfrac{1}{3}\operatorname{arctg} x^3$;

616. $y = e^x \arcsin x$;

617. $y = \operatorname{arctg}(\ln x)$;

618. $y = \arcsin(\sin x - \cos x)$;

619. $y = \arccos(\cos^2 x)$;

620. $y=\ln\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$:

621. $y=\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}^2 x\right)$:

622. $y=\operatorname{arctg}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$:

623. $y=\arccos\frac{1-x}{\sqrt{2}}$:

624. $y=\arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2}$:

625. $y=\frac{1}{x}\left(\ln^3 x+3\ln^2 x\right)+6\ln x+6$:

626. $y=\frac{(5+2x)^{10}}{\sin x}$:

627. $y=\frac{(3x+1)^{11}\cdot x}{\ln x}$:

628. $y=e^{x\sqrt{\sin x}}$

629. $y=2x\operatorname{ctg}\frac{1}{x}-\frac{1}{14}\sin^2 7x$

630. $y=\operatorname{arctg}\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$:

631. $y=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}$:

632. Գտնել

$$\operatorname{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\qquad \operatorname{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\qquad \operatorname{th}x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$

հիպերբոլական ֆունկցիաների ածանցյալները:

633. Գտնել y'-ը, եթե

1) $y=|x|$,

2) $y=x|x|$,

3) $y=\begin{cases}1-x, & \text{եթե } x\le 0\\ e^{-x}, & \text{եթե } x>0\end{cases}$

634. Ցույց տալ, որ $y=xe^{-x}$ ֆունկցիան բավարարում է $xy'=(1-x)y$ հավասարմանը:

635. Ցույց տալ, որ $y = x e^{-\frac{x^2}{2}}$ ֆունկցիան բավարարում է $xy' = (1-x^2)y$ հավասարմանը:

636. Ցույց տալ, որ $y = \dfrac{1}{1+x+\ln x}$ ֆունկցիան բավարարում է $xy' = y(y\ln x - 1)$ հավասարմանը:

Նախօրոք լոգարիթմելը հաճախ պարզեցնում է ֆունկցիայի ածանցյալի հաշվումը:

y=f(x) ֆունկցիայի լոգարիթմական ածանցյալ են անվանում այդ ֆունկցիայի լոգարիթմի ածանցյալը:

637. Հաշվել $f'(x)$-ը, եթե $f(x) = \sqrt{\dfrac{x(x-1)^3}{x+2}}$

638. Հաշվել $y = [u(x)]^{v(x)}$, $u(x) > 0$ ասփիճանացուցչային ֆունկցիայի ածանցյալը:

639. Օգտագործելով լոգարիթմական ածանցյալի գաղափարը, հաշվել հետևյալ ֆունկցիաների ածանցյալները.

1) $y = x\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$,

2) $y = (x-1)^3(x-2)^4(x-3)^5$

3) $y = \dfrac{x^2}{1-x}\sqrt[3]{\dfrac{3-x}{(3+x)^2}}$,

4) $y = \sqrt{\dfrac{(x+1)^7\left(x-1^5\right)}{x^5(x+2)^3}}$,

5) $y = x^x$,

6) $y = x^{\sin x}$,

7) $y = (\sin x)^x$,

8) $y = x^{\sqrt{x}}$

9) $y = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$

10) $y = \sqrt[x]{\ln x}$,

11) $y = \left(\sqrt{x}\right)^{\sqrt[3]{x}}$

12) $y = (\sin x)^{\arcsin x}$

Գտնել հետևյալ ֆունկցիաների ածանցյալները.

640. $y=\sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$:

641. $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

642. $y=\sqrt[m+n]{(1-x)^m(1+x)^n}$

643. $y=\dfrac{1}{\cos^n mx}$

644. $y=\sin(\cos^2 x)\cdot\cos(\sin^2 x)$:

645. $y=\ln(\ln^n mx)$:

646. $y=\left(\dfrac{a}{b}\right)^x\cdot\left(\dfrac{b}{x}\right)^a\cdot\left(\dfrac{x}{a}\right)^b$ $\quad a>0,\quad b>0$:

647. $y=\dfrac{1}{2\sqrt{6}}\ln\dfrac{x\sqrt{3}-\sqrt{2}}{x\sqrt{3}+\sqrt{2}}$:

648. $y=\log_2\sin\left(2\pi x+\dfrac{\pi}{2}\right)$:

649. $y=\mathrm{sh}5x$:

650. $y=\mathrm{ch}3x\cdot\mathrm{sh}\dfrac{x}{2}$:

651. $y=\mathrm{th}3x$

652. $y=\ln|x|$:

653. $y=\arcsin\dfrac{1}{|x|}$:

654. $y=|\sin x|$:

655. $y=\log_x e$:

656. $y=\log_{5x}4$:

657. $y=e^{-x}\,\mathrm{sh}x$

658. $y=\arccos\left(\dfrac{1}{\mathrm{ch}x}\right)$:

659. $y=\sqrt[3]{\dfrac{x(x^2+1)}{\sqrt[5]{5-x}}}$

660. $y=\sqrt[3]{x^2}\,\dfrac{1-x}{1+x^2}\sin^3 x\cos^2 x$:

661. $y=\left(\sqrt{\mathrm{tg}x}\right)^{x+1}$:

662. $y=(\sin x)^{\cos x}$:

663. $y=(\cos x)^{\sin x}$:

664. $y=\left(\sqrt{x}\right)^{\sin^2 x}$:

3. Աձանցյալի որոշ կիրառություններ վնկեռագիտության մեջ

Արտադրության ծախքերը արտադրանքի արտադրման (կամ ծառայության կատարման) համար անհրաժեշտ ծախքերն են, իսկ իրացման ծախքերը կապված են արտադրանքի իրացման հետ: Արտադրանքի արտադրման (ծառայության կատարման) և իրացման վրա կատարված նյութական աշխատանքային, ֆինանսական ծախքերի ամբողջությունը կազմում է արտադրանքի ինքնարժեքը:

Համասեռ արտադրանքի ինչպես արտադրության և իրացման ծախքերը, այնպես էլ ինքնարժեքը, արտադրանքի քանակի ֆունկցիան են: Եթե արտադրանքի արտադրության քանակը (ծավալը) նշանակենք x-ով, իսկ y(x)-ով արտադրության ծախքերը, ապա

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x)$$

մեծությունը կոչվում է սահմանային ծախք:

Համանման ձևով, եթե արտադրանքի (բարիքի, ապրանքի) x միավորի իրացումից ստացված հասույթը նշանակենք P(x)-ով, ապա

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta P(x)}{\Delta x} = P'(x)$$

մեծությունը կոչվում է սահմանային հասույթ:

Ֆունկցիայի $\frac{\Delta y}{y}$ հարաբերական աճի և արգումենտի $\frac{\Delta x}{x}$ հարաբերական աճի հարաբերության սահմանը, երբ $\Delta x \to 0$, կոչվում է y(x) ֆունկցիայի ճկունություն x փոփոխականի նկատմամբ:

Այսպիսով, եթե y(x)-ը դիֆերենցելի ֆունկցիա է, ապա նրա $E_x(y)$ ճկունությունը կորոշվի հետևյալ բանաձևով.

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{x}{y} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} y'(x):$$

665. Արտադրանքի x ծավալից կախված արտադրության ծախքերը արտահայտվում են $y = 100x - \frac{x^3}{30}$ բանաձևով: Որոշել արտադրության սահմանային ծախքերը, եթե արտադրության ծավալը կազմում է

1) 5 միավոր արտադրանք,
2) 10 միավոր արտադրանք:

666. Արտադրության ծախքերը արտահայտվում են $y = 6\ln(1+3x)$ բանաձևով, որտեղ x-ը արտադրանքի ծավալն է: Որոշել արտադրության սահմանային ծախքերը, եթե արտադրության ծավալը հավասար է

1) 3 միավորի, 2) 8 միավորի:

667. Հաշվել $y=3x-6$ ֆունկցիայի ճկունությունը: Գտնել ճկունության արժեքը, երբ $x = 10$:

668. Հաշվել $y = 1+2x-x^2$ ֆունկցիայի ճկունությունը, երբ $x = 1$:

669. Հաշվել $y=5\ln x$ ֆունկցիայի ճկունության արժեքները, երբ

1) $x = 10$, 2) $x = e$ 3) $x = e^4$:

670. Դիցուք $g(x)=10-x$ ֆունկցիան որևէ ապրանքի պահանջարկի ֆունկցիան է, որտեղ x-ը ապրանքի գինն է: Գտնել պահանջարկի ֆունկցիայի ճկունությունը, երբ $x = 2$:

671. Ապացուցել, որ եթե $E_x(y)$-ը $y=y(x)$ ֆունկցիայի ճկունությունն է, ապա $x \cdot y(x)$ ֆունկցիայի ճկունությունը հավասար է $(E_x(y) + 1)x$

672. Ապացուցել, որ եթե պահանջարկը հակադարձ համեմատական է գնին (այսինքն պահանջարկի ֆունկցիան ունի $y = \frac{k}{x}$ տեսքը), ապա գնի ցանկացած արժեքի դեպքում պահանջարկի ֆունկցիայի ճկունությունը հավասար է -1-ի:

673. Հաշվել $y=x^3-1$ ֆունկցիայի ճկունությունը: Գտնել ճկունության ցուցանիշը, երբ

ա) $x = 2$, բ) $x = 5$

674. Հաշվել $y = e^{5x}$ ֆունկցիայի ճկունությունը: Գտնել ճկունության ցուցանիշը, երբ

ա) $x = 0$, բ) $x = 1$ գ) $x = 2$

675. Հաշվել $y = ax^m$ ֆունկցիայի ճկունությունը, որտեղ a-ն և m-ը հաստատուններ են

676. Հաշվել $y = ax^3 + b$ ֆունկցիայի ճկունությունը:

4. Բարձր կարգի ածանցյալներ

$y = f(x)$ ֆունկցիայի երկրորդ կարգի ածանցյալ է կոչվում նրա առաջին կարգի ածանցյալի ածանցյալը.

$$f''(x)=(f'(x))'$$

Ընդհանրապես՝ $f^{(n)}(x)=[f^{(n-1)}(x)]'$

Նշենք որոշ ֆունկցիաների n-րդ կարգի ածանցյալների բանաձևերը.

I. $\left(a^x\right)^{(n)} = a^x(\ln a)^n$, $\left(e^x\right)^{(n)} = e^x$

II. $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}n\right)$,

III. $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}n\right)$,

IV $\left(x^a\right)^{(n)} = a(a-1)(a-2)\ldots(a-n+1)x^{a-n}$

V. $(\ln x)^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$

677. Հաշվել տրված ֆունկցիաների երկրորդ կարգի ածանցյալը, եթե

1) $y = 3x^7 - x^4 + 3x + 5$, 2) $y = x\sqrt{1+x^2}$

3) $y = x\ln x$, 4) $y = \cos^2 x$:

678. Օգտվելով I – V բանաձևերից, գտնել հետևյալ ֆունկցիաների n - րդ կարգի ածանցյալները.

1) $y = x^5$ 2) $y = e^{3x}$,

3) $y = \sin 5x \cos 2x$, 4) $y = \log_2 x$:

679. Հաշվել $y'(0)$, $y''(0)$ և $y'''(0)$, եթե $y = e^{2x}\sin 3x$

680. Հաշվել $y'''(2)$, եթե $y = \ln(x-1)$:

681. Հաշվել $y^{(4)}(1)$, եթե $y = x^3 \ln x$:

682. Հաշվել y''-ը, եթե

1) $y = 2x^3 - 7x + 4$, 2) $y = x^8 + 7x^6 - 5x + 4$,

3) $y = x\sqrt{x}$, 4) $y = \dfrac{3x^2-2}{x+1}$,

5) $y = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, 6) $y = \operatorname{tg} x$,

7) $y = \left(1+x^2\right)\operatorname{arctg}x$, 8) $y = e^{-x^2}$

9) $y = \sin^2 x$, 10) $y = \ln\sqrt[3]{1+x^2}$

11) $y = (\arcsin x)^2$ 12) $y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$

683. Հաշվել y'''-ը, եթե

1) $y = x^3 - 5x^2 + 7x - 2$, 2) $y = (2x-3)^5$

3) $y = \ln(1+x)$, 4) $y = \cos 5x$

684. Ցույց տալ, որ $y = e^{-x}\cos x$ ֆունկցիան բավարարում է $y^{IV} + 4y = 0$ հավասարմանը:

685. Գտնել հետևյալ ֆունկցիաների n-րդ կարգի ածանցյալները.

1) $y=\sqrt{x}$, 2) $y=\sin 2x$, 3) $y=\cos 7x$,

4) $y=\dfrac{3}{x^m}$, 5) $y=x\ln x$, 6) $y=\operatorname{sh} x$,

7) $y=\sin x\cos 7x$, 8) $y=x\cdot e^x$ 9) $y=\dfrac{1+x}{1-x}$,

10) $y=\ln(ax+b)$:

5. Ֆունկցիայի դիֆերենցիալը

Եթե $y=f(x)$ ֆունկցիայի Δy աճը x կետում կարելի է ներկայացնել $\Delta y=A(x)\cdot dx+\alpha\cdot dx$ տեսքով, որտեղ $dx=\Delta x$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha=0$, ապա $f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է դիֆերենցելի x կետում, իսկ Δy աճի գլխավոր մասը՝ $A(x)\cdot dx$–ը կոչվում է $y=f(x)$ ֆունկցիայի դիֆերենցիալ և նշանակվում է dy սիմվոլով.

$$dy=A(x)dx:$$

Որպեսզի ֆունկցիան լինի դիֆերենցելի, անհրաժեշտ է և բավարար, որ գոյություն ունենա $f'(x)$ ածանցյալը, ընդ որում $A(x)=f'(x)$ և այսպիսով $dy=f'(x)dx$

686. Գտնել $y=3x^2-x+4$ ֆունկցիայի դիֆերենցիալը $x=2$ կետում, եթե $\Delta x=0{,}1$:

687. Հաշվել հետևյալ ֆունկցիաների դիֆերենցիալները.

1) $y=\sin 3x$, 2) $y=\ln(1+x^2)$, 3) $y=\arcsin 2x$:

688. Ապացուցել, որ $y=ax+b$ գծային ֆունկցիայի համար Δy աճը և dy դիֆերենցիալը համընկնում են:

689. Հաշվել հետևյալ ֆունկցիաների դիֆերենցիալները $x=1$ կետում, կամայական $\Delta x=dx$ –ի համար:

1) $y=\cos\pi x$, 2) $y=x^3-4x+7$, 3) $y=\dfrac{1}{x}$

4) $y = \arccos\frac{x}{a}$ 5) $y = \ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|$, 6) $y = xe^x$

690. Հաշվել $y = f(x)$ ֆունկցիայի դիֆերենցիալը, եթե

1) $f(x) = \sin x - x\cos x$, 2) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

3) $f(x) = \sqrt{\ln^2 x - 4}$, 4) $f(x) = \sin^2 3x$,

5) $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{x}{a}$

6. Լոպիտալի կանոնը

Լոպիտալի կանոնը վերաբերում է $\frac{0}{0}$ կամ $\frac{\infty}{\infty}$ տիպի անորոշություններին և հետևյալն է.

Եթե f(x) և g(x) ֆունկցիաները դիֆերենցելի են a կետի որևէ շրջակայքում (բացի, գուցե, x=a կետից) ընդ որում $g'(x) \neq 0$ և $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ կամ $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$, ապա

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

պայմանով, որ $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ սահմանը գոյություն ունի: a-ն կարող է լինել վերջավոր թիվ կամ ∞ սիմվոլը:

691. Կիրառելով Լոպիտալի կանոնը, հաշվել հետևյալ սահմանները.

1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}$ 2) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax} - e^{2ax}}{\ln(1+x)}$

3) $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{ch}x - \cos x}{x^2}$ 4) $\lim_{x\to 0} x^n \ln x$, $n > 0$:

Հաշվել հետևյալ սահմանները.

692. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-7x+6}$:

693. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^5-7x^3-5x^2-9}{x^4+2x^3-12x^2-4x-15}$:

694. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^5}$

695. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$:

696. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}3x}{\mathrm{tg}x}$:

697. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln\left(x^2-3\right)}{x^2+3x-10}$

698. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sin\pi x}{x^2-5x+6}$

699. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt{2+x}+x}$

700. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{\cos 3x-e^{-x}}$:

701. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos 2x}{\sin 2x}$:

702. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)}$

703. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$

704. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\mathrm{ctg}x-1}{\sin 4x}$:

705. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x-x^a}{x-a}\quad(a>0)$:

706. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$:

707. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\arcsin 3x}$:

708. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$

709. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-3x-1}{\sin^2 5x}$:

710. $\lim\limits_{x\to 0}(\mathrm{ctg}x)^{\sin x}$

711. $\lim\limits_{x\to +0}\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)^x$

712. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$:

713. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\mathrm{ctg}x-\dfrac{1}{x}\right)$:

714. $\lim\limits_{x\to +0}\left(\dfrac{\mathrm{tg}x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

715. $\lim\limits_{x\to\infty}(\mathrm{th}x)^x$

716. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$:

717. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{x}{\mathrm{ctg}x}-\frac{\pi}{2\cos x}\right)$:

718. Ցույց տալ, որ

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=0 \quad \text{և} \quad \lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}=1$$

սահմանները հնարավոր չէ հաշվել Լոպիտալի կանոնով:

718.1. Հաշվել հետևյալ սահմանները

ա) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\mathrm{tg}x}{x-\sin x}$,

բ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-\ln(1+x^2)}{x^3\mathrm{arctg}x}$,

գ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x(e^x-1)^2}$,

դ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{arctg}x-\sin x}{x^2\sin x}$,

ե) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\arcsin x}{x\mathrm{tg}^2x}$,

զ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\mathrm{arctg}x}{x\sin^2 x}$,

է) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\mathrm{tg}x}{x-\ln(1+x)}$,

ը) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{arctg}x-\mathrm{tg}x}{x\ln^2(1+x)}$,

թ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\mathrm{tg}x}{\arcsin x-\sin x}$,

ժ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x-\mathrm{arctg}x}{x^2\sin x}$:

§2. ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՇՎԻ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ԹԵՈՐԵՄՆԵՐԸ, ԹԵՅԼՈՐԻ ԲԱՆԱՁԵՎԸ, ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒՄԸ ԱԾԱՆՑՅԱԼԻ ՕԳՆՈՒԹՅԱՄԲ

1. Դիֆերենցիալ հաշվի հիմնական թեորեմները, Թեյլորի բանաձևը

Եթե $y = f(x)$ ֆունկցիան x_0 կետի որևէ շրջակայքում ունի մինչև $(n+1)$-րդ կարգի ածանցյալները ներառյալ, ապա այդ շրջակայքի ցանկացած x կետում տեղի ունի Թեյլորի բանաձևը.

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+$$

$$+\frac{f^n(x)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

որտեղ ξ-ն ընկած է x-ի և x_0-ի միջև: Այս բանաձևի մեջ տեղադրելով $x_0 = 0$ կստանանք Մակլորենի բանաձևը`

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^n(0)}{n!}x^n+\frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}:$$

Բերենք հետևյալ հինգ ֆունկցիաների վերլուծությունները.

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n),\qquad \left(\lim_{x\to0}\frac{o(x^n)}{x^n}=0\right)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o(x^{2n}),$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1}),$$

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\ldots+$$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n),$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n):$$

719. Ցույց տալ, որ $f(x)=x-x^3$ ֆունկցիան $[0,1]$ հատվածում բավարարում է Ռոլլի թեորեմի պայմաններին և գտնել թեորեմի պնդմանը համապատասխանող միջանկյալ կետը:

720. Բավարարո՞ւմ է արդյոք $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2}$ ֆունկցիան $[0,4]$ հատվածում Ռոլլի թեորեմի պայմաններին.

721. Դիցուք $f(x)=x(x+1)(x+2)(x+3)$: Ապացուցել, որ $f'(x)=0$-ն ունի երեք իրական արմատ:

722. Ստուգել, որ $f(x)=x^2+2$ և $F(x)=x^3-1$ ֆունկցիաները $[1,2]$ հատվածում բավարարում են Կոշիի թեորեմի պայմաններին: Գտնել թեորեմի պնդմանը համապատասխանող միջանկյալ կետը:

723. Ապացուցել, որ եթե $f(x)$-ը անընդհատ է $[a,b]$-ում, դիֆերենցելի է (a,b)-ում ($\exists\ f'(x)\ \forall\ x\in(a,b)$, և $f(x)$ գծային ֆունկցիա չէ, ապա (a,b)-ում $\exists c\in(a,b)$ այնպես, որ $|f'(c)|>\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|$

724. Ապացուցել, որ եթե $[a,b]$-ում $\exists\ f''(x)$-ը և $f'(a)=f'(b)=0$, ապա $\exists\ c\in(a,b)$ այնպես, որ $|f''(c)|\geq\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$:

725. Նյութական կետը կանգնած տեղից շարժվում է և կանգ առնում: Ընդ որում միավոր ժամանակում, որը տևել է 1 վարկյան անցնում է 1 մետր ճանապարհ: Շարժումը ուղղագիծ է: Ապացուցել, որ կա մի t_0 պահ, որում $a(t)$ արագացումը $a(t_0)$-ն բավարարում է $|a(t_0)|\geq 4$ մ/վրկ^2 անհավասարությունը:

726. $f(x)=2x^3-3x^2+5x+1$ բազմանդամը վերլուծել $(x-1)$ երկանդամի աստիճաններով:

727. Հետևյալ բազմանդամները վերլուծել $(x+1)$ երկանդամի աստիճաններով:

1) $P(x)=1+3x+5x^2-x^3$ 2) $P(x)=x^4+4x^2-x+3$,

3) $P(x)=x^5-2x^4+x^3-x^2+2x-1$:

728. Գտնել հետևյալ ֆունկցիաների Մակլորենի բանաձևերի առաջին երեք գումարելիները.

1) $f(x) = e^{2x-x^2}$ 2) $f(x) = \ln\cos x$,

3) $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$, 4) $f(x) = \operatorname{tg} x$:

729. Օգտվելով հինգ հիմնական վերլուծություններից, գրել հետևյալ ֆունկցիաների Մակլորենի բանաձևերը.

1) $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ 2) $f(x) = \sin^2 x$, 3) $f(x) = \sin\dfrac{5x}{2}$,

4) $f(x) = \ln(4 + x^2)$, 5) $f(x) = \sqrt[3]{8 + x^2}$

730. Օգտվելով հիմնական վերլուծություններից, հաշվել հետևյալ սահմանները.

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+3x} - \sqrt{1+2x}}{x^2}$, 2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$,

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$, 4) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5}\right)$:

2. Ֆունկցիաների մոնոտոնության պայմանը

$y=f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է աճող (նվազող) $[a;b]$ հատվածում, եթե $a\le x_1<x_2\le b$ պայմանից հետևում է $f(x_2)>f(x_1)$ ($f(x_2)<f(x_1)$) անհավասարությունը: Եթե ֆունկցիան աճող է կամ նվազող X բազմության վրա, ապա այն կոչվում է մոնոտոն այդ բազմության վրա:

Եթե դիֆերենցելի ֆունկցիան աճող (նվազող) է $[a;b]$ հատվածի վրա, ապա $f'(x)\ge 0$ ($f'(x)\le 0$), $a\le x\le b$:

Եթե $f(x)$ դիֆերենցելի ֆունկցիայի համար $f'(x)>0$ ($f'(x<0)$, $a<x<b$, ապա $f(x)$-ը աճում (նվազում) է $[a;b]$-ի վրա:

731. Գտնել հետևյալ ֆունկցիաների աճման և նվազման միջակայքերը.

1) $f(x) = x^2 - 2x$, 2) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$,

3) $f(x) = x + \sin x$, 4) $f(x) = \dfrac{2x}{\ln x}$:

732. Գտնել հետևյալ ֆունկցիաների մոնոտոնության միջակայքերը:

1) $f(x) = x^2 - 6x - 7$, 2) $f(x) = 5 - 7x + 2x^2$

3) $f(x) = 1 + 7x - 8x^2$ 4) $f(x) = x^3 + 2x - 5$,

5) $y = x^2(x - 3)$, 6) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 24x + 7$,

7) $y = (x - 2)\sqrt{x}$, 8) $f(x) = 4x^3 - 21x^2 + 18x + 20$,

9) $y = \dfrac{x}{x-2}$, 10) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$

11) $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$, 12) $y = \dfrac{x}{x^2 - 6x - 16}$,

13) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$, 14) $f(x) = 2x^2 - \ln x$,

15) $f(x) = e^x + 5x$, 16) $f(x) = x^2 e^{-x}$,

17) $f(x) = \ln\left(1 - x^2\right)$, 18) $f(x) = \cos x - x$,

19. $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{x}$, 20) $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$

733. Ձեռնարկությունը մեկ ամսում արտադրում է x միավոր արտադրանք: Ձեռնարկության ֆինանսական կուտակումների կախվածությունը արտադրանքի թողարկման ծավալից արտահայտվում է՝

$$U(x) = 2x^3 - 600x - 20$$

բանաձևով: Արտադրանքի թողարկման ինչ ծավալի դեպքում ձեռնարկության ֆինանսական կուտակումը կաճի:

734. Ձեռնարկությունը մեկ ամսում արտադրում է x միավոր արտադրանք: Ձեռնարկության ֆինանսական կուտակումների կախվածությունը արտադրանքի թողարկման ծավալից արտահայտվում է՝

$$f(x) = -0{,}01x^3 + 300x - 500$$

բանաձևով: Արտադրանքի թողարկման ինչ ծավալի դեպքում ձեռնարկության ֆինանսական կուտակումը կպակասի:

735. Արտադրության լրիվ ծախքերը արտահայտվում են $y = \frac{2}{3}x^3 - 12x^2 + 54x$ բանաձևով, որտեղ x-ը արտադրանքի ծավալն է: Հետազոտել այդ ֆունկցիայի փոփոխման բնույթը:

3. Ֆունկցիայի էքստրեմումները

$y=f(x)$ ֆունկցիան x_0 կետում ունի էքստրեմում (մաքսիմում կամ մինիմում), եթե x_0 կետի որևէ $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$ շրջակայքի բոլոր $x(x \neq x_0)$ կետերի համար տեղի ունի $f(x_0)>f(x)$ կամ $f(x_0)<f(x)$ անհավասարությունը:

Եթե x_0-ն էքստրեմումի կետ է, և գոյություն ունի $f'(x_0)$, ապա $f'(x_0)=0$: Ֆունկցիայի որոշման տիրույթի այն կետերը, որտեղ $f'(x_0) = 0$, կամ $f'(x_0)$ գոյություն չունի, կոչվում են կրիտիկական կետեր (էքստրեմումի համար կասկածելի կետեր):

Էքստրեմումի առաջին բավարար պայմանը.

Եթե x_0 կրիտիկական կետի տարբեր կողմերում՝ $(x_0 - \delta;\ x_0)$ և $(x_0;\ x_0 + \delta)$ միջակայքերում, $f'(x)$ ածանցյալը ունի տարբեր նշաններ, ապա x_0-ն էքստրեմումի կետ է (ընդ որում $+ \rightarrow$ դեպքում՝ մաքսիմում, իսկ $- \rightarrow +$ դեպքում՝ մինիմում): Իսկ եթե $f'(x)$ ածանցյալը x_0 կետի տարբեր կողմերում ունի նույն նշանը, ապա x_0-ն էքստրեմումի կետ չէ:

Էքստրեմումի երկրորդ բավարար պայմանը.

Եթե որևէ x_0 կետում տեղի ունեն $f'(x_0)=0$ և $f''(x_0)\neq 0$ պայմանները, ապա x_0-ն էքստրեմումի կետ է, ընդ որում $f''(x_0)<0$ դեպքում՝ մաքսիմումի, իսկ $f''(x_0)>0$ դեպքում՝ մինիմումի:

736. Գտնել հետևյալ ֆունկցիաների էքստրեմումները.

1) $f(x) = 2+ x - x^2$

2) $f(x)=\frac{3}{4}x^4-x^3-9x^2+7$,

3) $f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x^2+2x+1}$,

4) $y = 2\sin x + \cos 2x$,

5) $y = x^2 - 4x + 6$,

6) $y = 3 - 2x - x^2$

7) $y = 2x^2 - x + 3$,

8) $y = - x^2 - x + 5$,

9) $y = x^3 + 2x - 5$,

10) $y = x^3 - 3x^2$

11) $y=\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+2x+1$,

12) $y = x^3- 6x^2 + 9x - 4$,

13) $y = 2x^2 - x^4$,

14) $y = x^4 - 8x^3+22x^2 - 24x + 12$

15) $y = x(x + 1)^3(x - 3)^2$,

16) $y = x(x - 1)^2(x - 2)^3$,

17) $y=x+\frac{1}{x}$,

18) $y = xe^{-x}$,

19) $y=\frac{x^2-2x+2}{x-1}$,

20) $y=\frac{x^2-4}{x+1}$,

21) $y=\frac{a^3}{a^2+x^2}$,

22) $y=\frac{x^2+3}{x+2}$,

23) $y = x - \ln x$,

24) $y=\frac{\ln^2 x}{x}$,

25) $y=\sqrt{2x-x^2}$

26) $y=3\sqrt[3]{x^2}-x^2$,

27) $y=x\sqrt[3]{x-1}$,

28) $y=\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{(x+1)^2}$

29) $y=e^x\sin x$,

30) $y = \sin 3x - 3 \sin x$:

Ապացուցել հետևյալ անհավասարությունները

737. $x-\frac{x^3}{6}<\sin x<x$, եթե $x>0$:

738. $\cos x>1-\frac{x^2}{2}$ եթե $x\neq 0$:

739. $x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x$, եթե $x>0$:

740. $e^x>1+x$, եթե $x\neq 0$:

4. Ֆունկցիայի ամենամեծ և ամենափոքր արժեքները.

[a;b] հատվածում անընդհատ f(x) ֆունկցիայի ամենամեծ (ամենափոքր) արժեքը գտնելու համար պետք է հաշվել ֆունկցիայի արժեքները կրիտիկական կետերում, f(a), f(b) արժեքները և վերցնել ստացված թվերից ամենամեծը (ամենափոքրը):

741. Գտնել տրված ֆունկցիայի ամենամեծ և ամենափոքր արժեքները նշված հատվածների վրա.

1) $f(x)=2x^3-3x^2-12x+1$, $x\in[-2;3]$,

2) $y=-3x^4+6x^2$, $x\in[-2;2]$,

3) $y=\frac{x-1}{x+1}$, $x\in[0;4]$, 4) $y=\frac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$, $x\in[0;1]$,

5) $y=x^2\ln x$, $x\in[1;e]$, 6) $y=x+\sqrt{x}$, $x\in[0;4]$,

7) $y=\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}$, $x\in[0;1]$,

8) $y=\operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}$, $x\in[0;1]$,

742. a դրական թիվը տրոհել երկու գումարելիների այնպես, որ նրանց արտադրյալը լինի մեծագույնը:

743. Գտնել տրված 2p պարագիծ ունեցող ուղղանկյուն եռանկյուններից ամենամեծ մակերես ունեցողը:

744. Տրված v ծավալ ունեցող գլաններից ո՞րն ունի լրիվ մակերևույթի փոքրագույն մակերես:

745. Գտնել M(3;3) կետի կարճագույն հեռավորությունը $y^2=6x$ պարաբոլից:

746. R շառավիղով գնդին ներգծել ամենամեծ ծավալի գլան:

747. Գտնել ℓ ծնիչ ունեցող կոներից ամենամեծ ծավալ ունեցող կոնը:

748. Գտնել տրված գնդին արտագծած կոներից ամենափոքր ծավալ ունեցողը:

749. A հաստատուն մեծության անհայտ արժեքը որոշելու համար կատարված n փորձերի արդյունքում ստացվել են $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ արժեքները: Բնական է անհայտ արժեքի լավագույն մոտավորություն անվանել այն թիվը, որի $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ արժեքներից ունեցած շեղումների քառակուսիների գումարը փոքրագույն է: Գտնել լավագույն մոտավորությունը:

750. Բաց թիթեղյա տուփը, որի հիմքը քառակուսի է, ունի V լիտր տարողություն: Ինչպիսի չափերով պատրաստել այնպիսի տուփը, որպեսզի ծախսվի փոքրագույն քանակությամբ թիթեղ:

751. Տրված R շառավիղով գնդին ներգծել մեծագույն ծավալ ունեցող կոն:

752. Տրված գլանին արտագծել ուղիղ շրջանային կոն՝ փոքրագույն ծավալով (գլանի և կոնի հիմքերի հարթությունները և հիմքերի շրջանների կենտրոնները համընկնում են):

753. Տրված շրջանից անջատել այնպիսի սեկտոր, որով կառուցված ձագարը ունենա մեծագույն տարողություն:

754. Տրված էլիպսին ներգծել մեծագույն մակերես ունեցող ուղղանկյուն այնպես, որ կողմերը զուգահեռ լինեն էլիպսի առանցքներին (գտնել ուղղանկյան կողմերը):

755. $y^2=2px$ պարաբոլով և $x=2a$ ուղղով կազմված սեգմենտին ներգծել մեծագույն մակերես ունեցող ուղղանկյուն: Գտնել ուղղանկյան գագաթների կոորդինատները:

756. $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ կորի վրա գտնել այն կետը, որից տարված շոշափողը OX առանցքի հետ կազմում է ամենամեծ սուր անկյունը:

757. ա) Գերձայնային ինքնաթիռը h մետր բարձրությամբ դիտորդի գլխավերևից անցնելուց t_0 վարկյան անց դիտորդը լսում է ինքնաթիռի ձայնը: Գտնել ինքնաթիռի արագությունը: Ձայնի արագությունը V_0կմ/վրկ: (Ստանալ պայման, որի դեպքում խնդիրը լուծում ունի):

բ) Նավի լողարկման ժամանակ օրական ծախսերը բաղկացած են երկու մասից. I. հաստատուն, հավասար a ռուբլու, II. փոփոխական, որը աճում է նավի արագության խորանարդին համեմատական: Ինչպիսի V արագության դեպքում նավարկումը կլինի առավել խնայողական:

5. Ֆունկցիայի ուռուցիկություն և գոգավորություն, շրջման կետ

y=f(x) դիֆերենցելի ֆունկցիայի գրաֆիկը ուռուցիկ է (գոգավոր է) [a;b] հատվածում, եթե y=f(x) ($a\le x\le b$) կորը գտնվում է իր ցանկացած շոշափողից վերև (ներքև): Այն կետերը, որտեղ փոխվում են ֆունկցիայի գոգավորության ուղղությունը, կոչվում են շրջման կետեր: Եթե $f''(x)<0$ $(a<x<b)$, ապա ֆունկցիայի գրաֆիկը գոգավոր է [a;b] հատվածում, իսկ եթե $f''(x)>0$ $(a<x<b)$, ապա ֆունկցիայի գրաֆիկը ուռուցիկ է: Եթե $f''(x_0)=0$ կամ $f''(x_0)$ գոյություն չունի և x_0-ի տարբեր կողմերում $f''(x)$-ը ունի տարբեր նշաններ, ապա x_0 կետը շրջման կետ է:

758. Գտնել հետևյալ ֆունկցիայի ուռուցիկության և գոգավորության միջակայքերը և շրջման կետերը:

1) $y = x^4 + x^3 - 18x^2 + 24x - 12$ 2) $y = 3x^2 - x^3$

3) $y = x^3 - 6x^2$ 4) $y = x^4 + 6x^2$

5) $y = 3x^4 - 8x^3 + 16x^2 + 12$, 6) $y = x^7 + 7x + 1$,

7) $y = xe^{2x} + 1$, 8) $y = x^3 \ln x + 1$, 9) $y = \sqrt[3]{(x-2)^5} + 3$,

10) $y = \ln(1+x^2)$, 11) $y = \dfrac{x}{1+x^2}$, 12) $y = \sqrt{1+x^2}$

13) $y = e^{-x^2}$ 14) $y = x\sin(\ln x)$, 15) $y = \dfrac{x+1}{x^2+1}$:

6. Ասիմպտոտներ

Ուղիղը կոչվում է y=f(x) կորի ասիմպտոտ, եթե կորի M կետի հեռավորությունը այդ ուղղից ձգտում է զրոյի, երբ M կետը, մնալով կորի վրա, անվերջ հեռանում է սկզբնակետից:

Սահմանումից հետևում է, որ եթե

$$\lim_{x \to a-0} f(x) \text{ և } \lim_{x \to a+0} f(x)$$

միակողմանի սահմաններից գոնե մեկը հավասար է անվերջի, ապա x=a ուղիղը ուղղահայաց ասիմպտոտ է: y=kx+b թեք ասիմպտոտների գոյության համար անհրաժեշտ է և բավարար

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = k \text{ և } \lim_{x \to \infty} \left(f(x) - kx\right) = b$$

վերջավոր սահմանների գոյությունը, ընդ որում այս սահմանները հաշվելիս պետք է $x \to +\infty$ և $x \to -\infty$ դեպքերը քննարկել իրարից առանձին:

759. Գտնել հետևյալ կորերի ասիմպտոտները.

1) $y=\dfrac{5x}{x-2}$, 2) $y=\dfrac{3x^2}{x-1}$, 3) $y=3x+\operatorname{arctg}5x$,

4) $y=\dfrac{x}{x-5}$, 5) $y=4x^2+\dfrac{1}{x}$, 6) $y=\dfrac{4x}{x-4}+4x$,

7) $y=\sqrt[5]{\dfrac{x}{x-2}}$, 8) $y=\dfrac{\ln(x+1)}{x^2}$ 9) $y=xe^{\frac{1}{x}}$,

10) $y=\sqrt{1+x^2}+2x$, 11) $y=\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$

12) $y=2\sqrt{x^2+4}$, 13) $y=x+\dfrac{\sin x}{x}$:

7. Ֆունկցիայի ընդհանուր հետազոտումը և գրաֆիկի կառուցումը

Ֆունկցիայի հետազոտման և գրաֆիկի կառուցման համար պետք է կատարել հետևյալ ուսումնասիրությունները.

1) գտնել ֆունկցիայի որոշման տիրույթը և հետազոտել ֆունկցիայի վարքը այդ տիրույթի եզրերում,

2) պարզել ֆունկցիայի պարբերական, զույգ կամ կենտ լինելը,

3) գտնել ֆունկցիայի ասիմպտոտները,

4) գտնել էքստրեմումի կետերը և մոնոտոնության միջակայքերը,

5) գտնել ուռուցիկության և գոգավորության միջակայքերը և շրջման կետերը:

Հետազոտման արդյունքները օգտագործելով կարելի է կառուցել ֆունկցիայի որակապես ճիշտ գրաֆիկը:

760. Հետազոտել հետևյալ ֆունկցիաները և կառուցել դրանց գրաֆիկները:

1) $y=\dfrac{x^3}{4(x^2-4)}$, 2) $y=3x-x^3$

3) $y = 1 + x^2 - \frac{x^4}{2}$, 4) $y = (x+1)(x-2)^2$

5) $y = \frac{1}{4}x^2(x^2-3)^2$ 6) $y = \frac{1}{6}x^3(x^2-5)$

7) $y = \frac{x^3}{2(1-x)^2}$, 8) $y = \frac{x^4}{x^3-1}$,

9) $y = \frac{x^3-3x}{x^2-1}$, 10) $y = \frac{x}{x^3+2}$,

11) $y = \frac{x}{x^2-4}$, 12) $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$,

13) $y = \frac{x^3}{x^3+1}$, 14) $y = \sqrt[3]{x^2-2x}$,

15) $y = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$, 16) $y = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2+1}$,

17) $y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$, 18) $y = \sqrt[3]{\frac{x^2}{x+1}}$,

19) $y = x + \ln(x^2-1)$, 20) $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$,

21) $y = \frac{1}{x \ln x}$, 22) $y = x^2 \ln^2 x$,

23) $y = \frac{x}{2} + \mathrm{arctg}x$, 24) $y = x\,\mathrm{arctg}x$,

25) $y = \sin x + \cos x$, 26) $y = \frac{1}{2}\sin 2x + \cos x$,

27) $y = \arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2}$, 28) $y = x^2 e^{\frac{1}{x}}$, 29) $y = x + e^{-x}$

30) $y = (x+2)e^{\frac{1}{x}}$ 31) $y = \arccos\frac{1-x}{1-2x}$:

ԳԼՈՒԽ V

ՄԻ ՔԱՆԻ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆՆԵՐԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ

§1. ՀԻՄՆԱԿԱՆ ԳԱՂԱՓԱՐՆԵՐ

Դիցուք $A \subseteq R^n$ և $f : A \to R$, ապա ասում են, որ տրված է n փոփոխականների ֆունկցիա

$$U = f(x_1, x_2, \quad , x_n) \qquad .$$

Եթե c-ն պատկանում է $z=f(x,y)$ ֆունկցիայի արժեքների տիրույթին, ապա $f(x,y)=c$ բազմությունը XOY հարթության վրա կոչվում է $z=f(x,y)$ ֆունկցիայի մակարդակի գիծ:

Եթե $U=f(x,y,z)$, ապա $f(x,y,z)=c$ մակերևույթը OXYZ տարածության մեջ կոչվում է $U=f(x,y,z)$ ֆունկցիայի մակարդակի մակերևույթ: Մակարդակի գծերը, մակերևույթները կարևորվում են ֆունկցիաների առանձնահատկությունների ուսումնասիրության մեջ:

761. ա) Գտնել f(x,y)-ը, եթե

1) $f(x-y, x+y) = x^2+y^2+6xy$, 2) $f\left(\frac{y^2}{x}, \frac{x^2}{y}\right) = \frac{2x^3y^3}{x^6+y^6}$,

3) $f(x+2y, 3x-y) = 7(x-y)$, 4) $f\left(\frac{x}{y}, x-y\right) = x+y$:

բ) Կառուցել այն D տիրույթը, որին պատկանող M(x,y) կետերի կոորդինատները բավարարում են հետևյալ անհավասարություններին.

1) $2 \le x \le 6,\ 1 \le y \le 3$, 2) $x^2+y^2 > 4$,

3) $1 \le x^2+y^2 \le 9$, 4) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} < 1$

762. Գտնել հետևյալ ֆունկցիաների մակարդակի գծերը.

1) $z = 2x + y$, 2) $z = x^2 + y^2$, 3) $z = \frac{x}{y}$

4) $z = \ln\sqrt{\dfrac{y}{x}}$, 5) $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$, 6) $z = e^{xy}$,

7) $z = a^2 + x^2 - y^2$ 8) $z = \dfrac{1}{x^2 - y^2}$, 9) $z = 1 - |x| - |y|$,

10) $z = \dfrac{y}{\sqrt{x}}$, 11) $z = xy$, 12) $z = x^2 - y$

13) $z = y - \ln x$

763. Գտնել և պատկերել հետևյալ ֆունկցիաների որոշման տիրույթները.

1) $z = \dfrac{x + y}{2x - y}$, 2) $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$

3) $u = \ln(3x + 2y + z - 6)$, 4) $z = \arcsin\dfrac{y}{x}$,

5) $z = a^2 - x^2 - 2y^2$ 6) $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$,

7) $z = \dfrac{1}{x^2 - y^2}$, 8) $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$,

9) $z = \sqrt{2x} - \dfrac{5}{\sqrt{y}}$, 10) $z = \dfrac{3xy}{x + y}$,

11) $z = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$, 12) $z = \dfrac{1}{\ln(x + y)}$,

13) $z = \arccos(x+y)$, 14) $z = x + \sqrt{x^2 - y^2}$

15) $u = \sqrt{x + y + z}$, 16) $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2 - 4)$,

17) $z = \sqrt{x} + \sqrt{y}$, 18) $z = \ln(x + y)$, 19) $z = \ln(x^2 + y)$,

20) $z = 1 + \sqrt{-(x - y)^2}$ 21) $z = x + \arccos y$,

22) $z = \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{4 - y^2}$ 23) $z = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2}$

§2. ՄԻ ՔԱՆԻ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՍԱՀՄԱՆԸ ԵՎ ԱՆԸՆԴՀԱՏՈՒԹՅՈՒՆԸ

A թիվը կոչվում է Z=f(M)=f(x,y) ֆունկցիայի սահման, երբ M(x,y) կետը ձգտում է $M_0(x_0,y_0)$ կետին, եթե կամայական ε>0 թվի համար գոյություն ունի δ>0 թիվ այնպես, որ $0<MM_0<\delta$ անհավասարությունից հետևում է |f(M)-A|<ε անհավասարությունը: Այս փաստը գրվում է

$$\lim_{M\to M_0} f(M) = A \quad \text{կամ} \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = A \quad \text{տեսքով:}$$

Կարելի է դիտարկել նաև հաջորդական սահմաններ, երբ նախ $x \to x_0$ հաստատուն y-ի ($y \neq y_0$) դեպքում, որից հետո $y \to y_0$ կամ ընդհակառակը.

$$\lim_{y\to y_0}\left[\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right], \quad \text{կամ} \quad \lim_{x\to x_0}\left[\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right]:$$

z = f(x,y) ֆունկցիան կոչվում է անընդհատ $M_0(x_0,y_0)$ կետում, եթե տեղի ունի

$$\lim_{M\to M_0} f(M) = f(M_0), \quad \text{կամ} \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

հավասարությունը: Ֆունկցիան կոչվում է անընդհատ D տիրույթում, եթե այն անընդհատ է D տիրույթի յուրաքանչյուր կետում: Եթե որևէ կետում անընդհատության պայմանը տեղի չունի, ապա այդ կետը կոչվում է z = f(x,y) ֆունկցիայի խզման կետ:

Մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի սահմանի և անընդհատության վերաբերյալ բոլոր թեորեմները որոշ վերաձևակերպումներով ուժի մեջ են նաև մի քանի փոփոխականների ֆունկցիաների համար:

764. Ապացուցել, որ $f(x,y) = \left|\dfrac{x-y}{x+y}\right|$ ֆունկցիայի համար

տեղի ունի

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)=1, \quad \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)=1,$$

բայց $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$-ը գոյություն չունի:

765. Ապացուցել, որ $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ ֆունկցիայի համար տեղի ունի

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)=\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)=0,$$

բայց $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$-ը գոյություն չունի:

766. Ապացուցել, որ $f(x,y) = (x + y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$ ֆունկցիայի համար $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$, $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ երկու հաջորդական սահմանները գոյություն չունեն, իսկ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$-ը գոյություն ունի:

767. Հաշվել հետևյալ սահմանները.

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to -1}} (3xy-x^2+y^2+1)$, 2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{xy}$,

3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{2-\sqrt{4-xy}}{xy}$, 4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \dfrac{xy}{\sin xy}$, 5) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{2x^3+3y^2}{x^2+y^2}$,

6) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (1+xy)^{\frac{3}{xy}}$, 7) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to \infty}} \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$, 8) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$,

9) $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to 0}} \frac{\operatorname{tg} xy}{y}$, 10) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, 11) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$,

12) $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}} \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$ 13) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(x^2+y^2\right)^{x^2y^2}$ 14) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to 1}} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$

15) $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to 2}} \frac{3x-2y}{x+y}$, 16) $\lim\limits_{\substack{x\to 5\\ y\to 5}} \frac{5-\sqrt{xy}}{xy-25}$, 17) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{3-\sqrt{xy+y}}$,

18) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \frac{\sin xy}{x}$: 19) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2}$ 20) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{1-\cos(x+2y)}{x^2+4xy+4y^2}$

21) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$ 22) $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2}$, 23) $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$,

24) $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$, 25) $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}} \frac{ye^{-x}}{x+y}$, 26) $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}} \frac{x+2x^2+y+2y}{x^2+y^2}$

768. Հետազոտել հետևյալ ֆունկցիաների անընդհատությունը և խզումները:

1) $z=\frac{x+y}{x-y}$, 2) $z=\frac{1}{x^2+y^2}$, 3) $z=\frac{1}{(x+y)^2}$,

4) $z=\ln\left|1-x^2-y^2\right|$, 5) $z=e^{\frac{1}{x^2+y^2}}$ 6) $z=\frac{1}{\sin x\sin y}$:

§3. ՄԱՍՆԱԿԻ ԱԾԱՆՑՅԱԼՆԵՐ ԵՎ ԼՐԻՎ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ

1. Մասնակի ածանցյալներ

z=f(x,y) ֆունկցիայի առաջին կարգի մասնակի ածանցյալները սահմանվում են հետևյալ կերպ.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y)-f(x,y)}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x} \equiv f'_x(x,y) \equiv z'_x$$

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y} \equiv f'_y(x,y) \equiv z'_y:$$

Այս սահմանումից հետևում է, որ z'_x-ը հաշվելու ժամանակ y դիտարկվում է որպես հաստատուն և կատարվում է սովորական դիֆերենցում x-ի նկատմամբ: Նույն ձևով z'_y-ը հաշվելու ժամանակ x–ը դիտարկում են որպես հաստատուն: Մասնակի ածանցյալների համար ածանցման կանոնները և բանաձևերը համընկնում են մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի համար մատնանշված կանոնների հետ:

z'_x և z'_y մասնակի ածանցյալները իրենց հերթին կարող են ունենալ մասնակի ածանցյալներ, որոնք z = f(x,y) ֆունկցիայի համար կկոչվեն երկրորդ կարգի մասնակի ածանցյալներ:

$\left(z'_x\right)'_x = z''_{x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x}$ երկրորդ կարգի մասնակի ածանցյալ ըստ x-ի,

$\left(z'_y\right)'_y = z''_{y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y}$ երկրորդ կարգի մասնակի ածանցյալ ըստ y-ի,

$\left(z'_x\right)'_y = z''_{xy}$ և $\left(z'_y\right)'_x = z''_{yx}$ երկրորդ կարգի խառը ածանցյալներ, որոնք անընդհատության կետում իրար հավասար են:

769. Գտնել հետևյալ ֆունկցիաների առաջին կարգի մասնակի ածանցյալները.

1) $z = 2x^2y^2 + 3xy^2 + y^3$ 2) $z = \left(5x^3y^2 + 1\right)^3$

3) $z = 2y\sqrt{x} + 3x^2\sqrt[3]{y}$, 4) $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$,

5) $z = \sin\dfrac{x}{y}$, 6) $z = e^{xy\left(x^2 + y^2\right)}$,

7) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 8) $u = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{x}$,

9) $u = (x - y)(x - z)(y - z)$ 10) $z = x^y$,

11) $z = \arcsin\dfrac{y}{x}$, 12) $z = e^{\frac{x}{y}} \ln y$:

770. Գտնել հետևյալ ֆունկցիաների երկրորդ կարգի մասնակի ածանցյալները

1) $z = x^3y + y^3x$, 2) $z = \ln\left(x^2 + y^2\right)$,

3) $z = xe^{-xy}$ 4) $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$,

5) $z = \sin xy$:

771. Ցույց տալ, որ տրված ֆունկցիան բավարարում է հավասարմանը

ա) $z = \ln\left(x^2 + xy + y^2\right)$, $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2$,

բ) $z = \dfrac{x^2}{2y} + \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}$, $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x} + y^2\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x^3}{y}$

գ) $z = \sqrt{x}\cos\dfrac{x}{y}$, $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{z}{2}$

դ) $z = y\ln(x^2 - y^2)$, $\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{z}{y^2}$

ե) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = 1$

2. Լրիվ դիֆերենցիալ, բարձր կարգի դիֆերենցիալներ.

$z=f(x,y)$ ֆունկցիայի լրիվ աճ M(x,y) կետում կոչվում է $\Delta z = f(x,+\Delta x, y+\Delta y) - f(x;y)$ տարբերությունը: z=f(x,y) ֆունկցիան կոչվում է (x,y) կետում դիֆերենցելի, եթե այդ կետում լրիվ աճը կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho), \quad \left(\lim_{\rho\to 0}\frac{o(\rho)}{\rho}=0\right)$$

որտեղ $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$, իսկ A և B թվերը կախում չունեն Δx և Δy աճերից: $z=f(x,y)$ ֆունկցիայի լրիվ դիֆերենցիալ կոչվում է Δz լրիվ աճի գծային մասը, այսինքն՝ $dz = A\Delta x + B\Delta y$:

Ֆունկցիայի լրիվ դիֆերենցիալը ներկայացվում է հետևյալ բանաձևով.

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy:$$

Նման ձևով երեք արգումենտների համար $u=f(x,y,z)$ ֆունկցիայի դիֆերենցիալը կլինի՝

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz:$$

Երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ է կոչվում առաջին կարգի դիֆերենցիալի դիֆերենցիալը. $d^2z=d(dz)$: Կարևոր է ընդգծել, որ dx և dy աճերը դիտարկվում են որպես հաստատուններ և դրանք պահում ենք նույնը երբ I կարգի դիֆերենցիալից անցնում ենք II կարգի դիֆերենցիալին: II կարգի դիֆերենցիալը ունի հետևյալ տեսքը.

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$$

772. Գտնել $f'_x(0,0)$ և $f'_y(0,0)$, եթե $f(x,y)=\sqrt[3]{xy}$ և պարզել ֆունկցիայի դիֆերենցելիությունը (0,0) կետում:

773. Պարզել հետևյալ ֆունկցիաների դիֆերենցելիությունը (0,0) կետում

1) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, 2) $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$,

3) $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$,

4) $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, \text{եթե} x^2+y^2\neq 0\\ 0, \text{եթե } x^2+y^2=0:\end{cases}$

774. Հաշվել հետևյալ ֆունկցիաների առաջին և երկրորդ կարգի դիֆերենցիալները:

1) $z=x^2+xy+y^2$, 2) $z=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$,

3) $z=xe^y+ye^x$, 4) $z=x\sin y+y\sin x$,

5) $z=\ln(x+\ln y)$, 6) $z=xy\sin xy$,

7) $z=e^{\frac{y}{x}}$, 8) $z=\dfrac{xy}{x-y}$, 9) $z=xy\ln y$:

§4. ԲԱՐԴ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԱԾԱՆՑՅԱԼԸ: ԱԾԱՆՑՅԱԼ ՏՎՅԱԼ ՈՒՂՂՈՒԹՅԱՄԲ: ԳՐԱԴԻԵՆՏ

Դիցուք z=f(x;y), որտեղ $x=\varphi(t), y=\psi(t)$ և գոյություն ունի $z=f(\varphi(t),\psi(t))$ բարդ ֆունկցիան: Եթե $f(x;y)$, $\varphi(t)$ և $\psi(t)$ ֆունկցիաները դիֆերենցելի են, ապա $z=f(\varphi(t),\psi(t))$ բարդ ֆունկցիայի ածանցյալը հաշվվում է հետևյալ բանաձևով.

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}:$$

Եթե z=f(x;y), որտեղ $x=\varphi(u,v), y=\psi(u,v)$ և $f(x;y)$, $\varphi(u,v)$, $\psi(u,v)$ ֆունկցիաները դիֆերենցելի են, ապա

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial\Psi}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial\Psi}{\partial v}$$

Եթե OX առանցքը L ուղղության հետ կազմում է α անկյուն և $z=f(x;y)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է, ապա դրա ածանցյալը L ուղղությամբ հաշվվում է հետևյալ բանաձևով.

$$\frac{\partial z}{\partial L}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\alpha:$$

$\left(\frac{\partial z(M_0)}{\partial x};\frac{\partial z(M_0)}{\partial y}\right)$ կոորդինատներով վեկտորը կոչվում է $z=f(M)$ ֆունկցիայի գրադիենտ M_0 կետում.

$$\operatorname{grad} z=\frac{\partial z}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial z}{\partial y}\bar{j}:$$

Եթե L ուղղությունը համընկնում է grad z-ի ուղղության հետ, ապա $\frac{\partial z}{\partial L}$ ածանցյալը ընդունում է իր ամենամեծ արժեքը այդ կետում $(\operatorname{grad} z\neq 0)$:

775. Գտնել $\frac{dz}{dt}$-ն, եթե

1) $z=x^2+xy+y^2, x=t^2, y=t^3,$

2) $z=e^{2(x^2-y^2)}, x=\cos t, y=\sin t,$

3) $z=\ln\sin\frac{x}{\sqrt{y}}, x=3t^2, y=\sqrt{1+t^2},$

4) $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}, x=e^{2t}+1, y=e^{2t}-1:$

776. Գտնել $\frac{\partial z}{\partial u}$ – ն և $\frac{\partial z}{\partial v}$ – ն, եթե $z=\frac{x^2}{y}$, որտեղ $x=u-2v,\ y=v+2u:$

777. Գտնել $\frac{\partial z}{\partial u}$և$\frac{\partial z}{\partial v}$ ածանցյալները, եթե

1) $z=x^2+xy+y^2, x=u+2v, y=2u-v,$

2) $z=x^2+xy+y^2, x=uv, y=u^2+v^2,$

3) $z=x^2+xy+y^2, x=\cos(u+v), y=\sin uv$

778. Ապացուցել, որ եթե z=f(x;y),դիֆերենցելի է և $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$ապա $\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$

779. 1) Ապացուցել, որ եթե $\exists F'(u)$, և

$z = xy + F\left(\frac{y}{x}\right)$, ապա $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2xy$:

2) Ապացուցել, որ եթե $\exists \varphi'(u)$, և

$z = y\varphi(u)$, որտեղ $u = x^2 - y^2$, ապա $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$:

780. Հաշվել $\frac{f'_x(x,y)}{f(x,y)}x + \frac{f'_y(x,y)}{f(x,y)}y$, եթե $f(x,y) = x^2y^3\sin\frac{y}{x}$

781. ա) Գտնել $z = x^2 - 5y^2$ ֆունկցիայի փոփոխման արագությունը $M_0(2;1)$ կետում $\vec{L}(\sqrt{3},1)$ վեկտորի ուղղությամբ:

բ)Հաշվել $z = x^3\sqrt{y^3}$ ֆունկցիայի ածանցյալները $M_0(-2;4)$ կետում OX առանցքի հետ $\alpha=30^0$, 45^0, 60^0, 90^0, 0^0 անկյուններ կազմող L ուղղություններով:

782. Հաշվել $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ֆունկցիայի ածանցյալը M_0 կետում $\overline{M_0M_1}$ վեկտորի ուղղությամբ.

ա) $M_0(3,4)$, $M_1(5,6)$, բ) $M_0(-4,3)$, $M_1(0,6)$:

783. Գտնել հետևյալ ֆունկցիաների գրադիենտները նշված կետերում.

1) $z = x^2 + y^3 - 3xy$, $M_0(2;5)$; 2) $z = \sqrt{x^2 - y^2}$, $M_0(5;3)$;

3) $z = \ln\cos\frac{x}{y}$, $M_0(\frac{\pi}{4};1)$; 4) $u = xyz$, $M_0(-2;1;3)$;

5) $z = 3x^2 + xy - y^2$, $M_0(-2;1)$:

§5. ՄԻ ՔԱՆԻ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆՆԵՐԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԷՔՍՏՐԵՄՈՒՄՆԵՐԸ

$M_0(x_0;y_0)$ կետը $z=f(x;y)$ ֆունկցիայի համար կոչվում է մաքսիմումի (մինիմումի) կետ, եթե գոյություն ունի M_0 կետի այնպիսի շրջակայք, որ այդ շրջակայքին պատկանող բոլոր $M(x;y)$ $(M \neq M_0)$ կետերի համար $f(x_0;y_0) > f(x;y)$ $(f(x_0;y_0) < f(x;y))$:

Մաքսիմումի և մինիմումի կետերը միասին կոչվում են էքստրեմումի կետեր: Եթե $z=f(x;y)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է, ապա դրա մասնակի ածանցյալները էքստրեմումի կետերում հավասար են զրոյի.

$$\frac{\partial f(x_0;y_0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f(x_0;y_0)}{\partial y} = 0:$$

Դիֆերենցելի ֆունկցիաների համար այս պայմանները հանդիսանում են էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանները: Այս պայմաններին բավարարող կետերը կոչվում են ստացիոնար կետեր: Ձևակերպենք էքստրեմումի բավարար պայմանը ստացիոնար կետերի համար (երկու փոփոխականի դեպքը):

Դիցուք $M_0(x_0;y_0)$ կետը ստացիոնար կետ է: Նշանակենք

$$A = \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x^2}, \; B = \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x \partial y}, C = \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial y^2}:$$

Եթե $\Delta = AC - B^2 > 0$, ապա $z=f(x;y)$ ֆունկցիան M_0 կետում ունի էքստրեմում, ընդ որում $A < 0$ դեպքում մաքսիմում, իսկ $A > 0$ դեպքում՝ մինիմում: Եթե $\Delta = AC - B^2 < 0$, ապա M_0-ն էքստրեմումի կետ չէ: Եթե $\Delta = 0$, ապա պետք է կատարել լրացուցիչ ուսումնասիրություններ:

Գործնականում հաճախ պահանջվում է գտնել $z=f(x;y)$ ֆունկցիայի էքստրեմումները այն պայմանի դեպքում, որ x և y փոփոխականները բավարարում են նաև $\varphi(x;y)=0$ հավասարմանը (կապի հավասարում): Այսպիսի էքստրեմումները կոչվում են պայմանական էքստրեմումներ: Պայմանական էքստրեմումները գտնելու հարցը բերվում է

$$F=f(x;y)+\lambda\varphi(x;y)$$

Լագրանժի ֆունկցիայի սովորական էքստրեմումները գտնելու հարցին, որտեղ λ-ն անորոշ գործակից է: Լագրանժի ֆունկցիայի համար էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանները ունեն հետևյալ տեսքը.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \text{:} \\ \varphi(x; y) = 0 \end{cases}$$

Պայմանական էքստրեմումի բավարար պայման է \Լագրանժի ֆունկցիայի երկրորդ կարգի դիֆերենցիալի

$$d^2F = F''_{x^2}dx^2 + 2F''_{xy}dxdy + F''_{y^2}dy^2$$

նշանը (x_0, y_0) ստացիոնար կետում, որտեղ dx-ը և dy-ը $\varphi'_x(x_0, y_0)dx + \varphi'_y(x_0, y_0)dy = 0$ հավասարությանը բավարարող անկախ փոփոխականների կամայական աճերն են, ընդ որում,

եթե $d^2F > 0$ ունենք պայմանական մինիմում, $d^2F < 0$ պայմանական մաքսիմում:

784. Գտնել հետևյալ ֆունկցիաների էքստրեմումները

1) $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$, 2) $z = x^3 + y^3 - 3xy$,

3) $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$, 4) $z = x^4 - 2x^2 + y^4 + 4xy - 2y^2$,

5) $z = x^3y^2(6 - x - y)$, 6) $z = \frac{1}{2}xy + (47 - x - y)\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{4}\right)$,

7) $z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}, (x > 0, y > 0)$, 8) $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$,

9) $z = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y$, 10) $z = xy\ln(x^2 + y^2)$,

11) $z = (5x + 7y - 25)e^{-(x^2+xy+y^2)}$, 12) $z = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$,

13) $z = \sin x + \cos y + \cos(x - y)$, եթե $0 \le x \le \frac{\pi}{2}, 0 \le y \le \frac{\pi}{2}$,

14) $z = \sin x \sin y \sin(x + y)$, եթե $0 \le x \le \pi, 0 \le y \le \pi$:

785. Գտնել հետևյալ ֆունկցիաների պայմանական էքստրեմումները:

1) $z = x^2 + y^2$, եթե $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$; 2) $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, եթե $x + y = 2$;

3) $z = 2x + y$, եթե $x^2 + y^2 = 1$; 4) $z = xy$, եթե $x^2 + y^2 = 2$;

5) $z = x + y$, եթե $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{2}$; 6) $z = -xy$, եթե $2x+3y=5$

7) $z = x^2 + 6xy + y^2$, եթե $x + y = 4$:

786. $y^2 = 4x$ պարաբոլի վրա գտնել այն կետը, որի հեռավորությունը $x-y+4=0$ ուղղից ամենափոքրն է:

787. $x^2 - y^2 = 4$ հիպերբոլի վրա գտնել այն կետը, որի հեռավորությունը $A(0,2)$ կետից փոքրագույն է:

788. $x^2 + 4y^2 = 4$ էլիպսի վրա գտնել այն կետերը, որոնք $2x+3y-6=0$ ուղղից ունեն առավելագույն և նվազագույն հեռավորություններ:

789.*1.* Ապացուցել, որ եթե $n\geq1$, $x\geq0$ և $y\geq0$, ապա $\frac{x^n + y^n}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^n$ Քննարկել $x+y=a$ պայմանը:

789.2 Օգտվելով փոքրագույն քառակուսիների եղանակից գտնել x և y մեծությունների $y=ax+b$ գծային կախվածությունը , եթե դիտումների արդյունքում ստացվել է հետևյալ աղյուսակը.

ա)

x	1	2	3	4	5	6
y	2	4,9	7,9	11,1	14,1	17

բ)

x	1	2	3	4	5
y	2,9	6,1	9,2	11,8	16

ԳԼՈՒԽ VI

ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐ

§1. ԱՆՈՐՈՇ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐ

1. Նախնական ֆունկցիա և անորոշ ինտեգրալ: Ինտեգրման հիմնական բանաձևերը

F(x) ֆունկցիան կոչվում է y=f(x) ֆունկցիայի նախնական ֆունկցիա X տիրույթում, եթե

$$F'(x) = f(x) \text{ կամ } dF(x) = f(x)dx,\ x \in X:$$

Ամեն մի անընդհատ f(x) ֆունկցիա ունի անվերջ բազմությամբ տարբեր նախնական ֆունկցիաներ, որոնք իրարից տարբերվում են հաստատուն գումարելիով:

Եթե F(x)-ը f(x)-ի նախնական է, ապա F(x)+C ֆունկցիան, որտեղ C-ն կամայական հաստատուն է, նորից f(x)-ի նախնական է, քանի որ

$$[F(x)+C]' = F'(x) = f(x):$$

f(x) ֆունկցիայի բոլոր նախնականների համախմբությունը կոչվում է f(x) ֆունկցիայի անորոշ ինտեգրալ և նշանակվում է հետևյալ սիմվոլով՝ $\int f(x)dx$: Այսպիսով, սահմանման համաձայն $\int f(x)dx = F(x)+C \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$:

Անորոշ ինտեգրալի հատկությունները.

I. $\left[\int f(x)dx\right]' = f(x)$ կամ $d\int f(x)dx = f(x)dx$

II. $\int F'(x)dx = F(x)+C$ կամ $\int dF(x) = F(x)+C$:

III. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$, որտեղ a-ն հաստատուն է $(a \neq 0)$:

IV. $\int [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$

Ինտեգրման հիմնական բանաձևերը.

1. $\int u^{\alpha}du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1$:

1’ $\int 1 \cdot dx = \int dx = x + C$:

2. $\int u^{-1}du = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$:

3. $\int a^{u}du = \frac{a^{u}}{\ln a} + C$:

3’ $\int e^{u}du = e^{u} + C$:

4. $\int \sin u\, du = -\cos u + C$:

5. $\int \cos u\, du = \sin u + C$:

6. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \mathrm{tg} u + C$:

7. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\mathrm{ctg} u + C$:

8. $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{u}{a} + C = -\frac{1}{a}\mathrm{arcctg}\frac{u}{a} + C$:

9. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$:

10. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C = -\arccos\frac{u}{a} + C$:

11. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$:

Այս բանաձևերում a-ն դրական հաստատուն է, իսկ $u = \varphi(x)$ – ը x անկախ փոփոխականի դիֆերենցելի ֆունկցիա է ($\exists du = \varphi'(x)dx$): Մասնավորապես, եթե u=x, ապա ստացվում են ինտեգրման պարզագույն բանաձևերը.

$$\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \int x^{-1}dx = \int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + c \text{ և այլն:}$$

Նպատակահարմար է հիշել

$$\int\frac{u'}{u}dx = \ln|u| + C,\ \int\frac{u'dx}{2\sqrt{u}} = \sqrt{u} + C$$

հավասարությունները, որպես համապատասխան ածանցման բանաձևերի հակադարձում. դրանք որոշ դեպքերում արագացնում են հաշվարկը:

Նշենք ինտեգրալ հաշվելու ևս մի կանոն.

եթե $\int f(t)dt = F(t) + C$, ապա $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$:

Այստեղից էլ

$$\int\sin kxdx = \frac{1}{k}\cos kx + c,\ \int\cos kxdx = \frac{1}{k}\sin kx + c,\ \int e^{kx}dx = \frac{1}{k}e^{kx} + c$$

և այլն:

Հաճախ ինտեգրման բանաձևերը կիրառելու համար նախ հարկ է կատարել այսպես կոչված արտադրիչը դիֆերենցիալի նշանի տակ տանելու գործողությունը: Անորոշ ինտեգրալի առաջին հատկությունը՝

$$f(x)dx = d(\int f(x)dx)$$

ցույց է տալիս, որ այդ գործողությունը կատարելիս դիֆերենցիալի նշանի տակ ստացվում է f(x)-ի նախնականը:

Օրինակ՝

$$dx = d(x+c),\ adx = d(ax+b),\ e^x dx = de^x,$$

$$2xdx = dx^2,\ \cos xdx = d\sin x,\ x^3dx = d\frac{x^4}{4},\ \frac{1}{x}dx = d\ln x,$$

$$\frac{1}{x^2+1}dx = darctgx,\ x^4dx = \frac{1}{5}dx^5,\ \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d\arcsin x,$$

$$\frac{dx}{\cos^2 x} = dtgx,\ \frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}} = dtg\frac{x}{2},\ 2\sin x\cos xdx = d\sin^2 x \text{ և այլն:}$$

Այսպիսով՝ արտադրիչը դիֆերենցիալի նշանի տակ տանելուց կատարվում է արտադրիչի ինտեգրում:

Կատարել ինտեգրումը (1, 2, 8, 9, 10, 11 բանաձևեր):

790. $\int(4x^3-5x^2+9x-2)dx$; **791.** $\int\frac{dx}{x^3}$;

792. $\int(ax^2+bx+c)dx$; **793.** $\int x^3(3x^2-5x+2)dx$;

794. $\int(3+2x^5)^2dx$; **795.** $\int x\sqrt[5]{x^2}dx$;

796. $\int\sqrt[3]{x}(1-\sqrt{x})dx$ **797.** $\int\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\sqrt[4]{x^3}\right)dx$;

798. $\int\sqrt{5x}dx$; **799.** $\int\frac{dx}{\sqrt{3x}}$;

800. $\int\frac{5x^3+4x^2-3}{x^2}dx$; **801.** $\int(5x+2)^4dx$;

802. $\int\frac{8dx}{(3x+2)^7}$; **803.** $\int\sqrt{2+5x}dx$;

804. $\int\frac{dx}{\sqrt{2-3x}}$; **805.** $\int\frac{5x^2dx}{(x^3+2)^2}$;

806. $\int x^3(4-5x^4)^5dx$; **807.** $\int x^2\sqrt{4x^3+3}dx$;

808. $\int 5x\sqrt{7x^2+8}dx$; **809.** $\int(x^2-3x+1)^{10}(2x-3)dx$;

810. $\int\frac{7x}{\sqrt[4]{3x^2-4}}dx$; **811.** $\int\sqrt[3]{x}(3x^{\frac{4}{3}}+5)^{\frac{7}{3}}dx$;

812. $\int\frac{2-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}dx$; **813.** $\int\frac{2-x^4}{1+x^2}dx$;

814. $\int\frac{dx}{3x}$; **815.** $\int\frac{dx}{x\ln x}$; **816.** $\int\frac{(2\ln x+3)^3}{x}dx$;

817. $\int\frac{dx}{2+5x}$; **818.** $\int\frac{3xdx}{5-x^2}$; **819.** $\int\frac{2x^2dx}{4x^3+5}$;

820. $\int\frac{dx}{4x^2-9}$; **821.** $\int\frac{dx}{(x-7)\sqrt{x}}$;

822. $\int \frac{e^x dx}{5+e^x}$;

823. $\int \frac{3e^{2x} dx}{4+5e^{2x}}$;

824. $\int \sin^5 x \cos x dx$;

825. $\int \sqrt{\sin x} \cos x dx$;

826. $\int (2\sin\frac{x}{2}+3)^2 \cos\frac{x}{2} dx$;

827. $\int \frac{5\sin x dx}{3+2\cos x}$;

828. $\int \frac{e^x + \cos x}{e^x + \sin x} dx$;

829. $\int \frac{3\cos 2x dx}{4-3\sin 2x}$;

830. $\int \frac{dx}{(2-3\operatorname{tg}x)\cos^2 x}$;

831. $\int \frac{\operatorname{tg}5x dx}{\cos^2 5x}$;

832. $\int \frac{dx}{(4+\operatorname{tg}3x)\cos^2 3x}$;

833. $\int \frac{4\cos x dx}{\sqrt{5-3\sin x}}$;

834. $\int \frac{dx}{\sin x}$;

835. $\int \frac{2x^2-8}{16-x^4} dx$;

836. $\int \frac{dx}{5x^2+6}$;

837. $\int \frac{dx}{\sqrt{4+3x^2}}$;

838. $\int \frac{dx}{7-9x}$;

839. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}$;

840. $\int \frac{x^3 dx}{x^8-2}$;

841. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$;

842. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$;

843. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}$;

844. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$;

845. $\int \frac{\arccos\frac{x}{2}}{\sqrt{4-x^2}} dx$;

846. $\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{2-\sin^4 x}} dx$;

847. $\int \frac{dx}{x(4-\ln^2 x)}$;

Կատարել ցուցչային ֆունկցիաների ինտեգրում.

848. $\int 5^x e^x dx;$ **849.** $\int 5\ e^{3x} dx;$ **850.** $\int 3e^{\frac{x}{2}} dx;$

851. $\int \frac{dx}{e^{2x}};$ **852.** $\int (e^{2x} + 3x) dx;$

853. $\int (e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}) dx;$ **854.** $\int (e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}})^2 dx;$

855. $\int \sqrt[3]{e^x} dx$ **856.** $\int (e^x - e^{-x})^3 dx;$

857. $\int e^{\cos x} \sin x dx;$ **858.** $\int e^{\sin x} \cos x dx;$

859. $\int x^2 e^{x^3} dx;$ **860.** $\int \frac{e^{\sqrt{x}} dx}{\sqrt{x}};$

861. $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx;$ **862.** $\int \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{x^3} dx;$

863. $\int \frac{4x^3}{e^{x^4}} dx;$ **864.** $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 3} dx;$

865. $\int \frac{e^{4x} + 3}{e^{4x}} dx;$ **866.** $\int \frac{5e^{tg3x}}{\cos^2 3x} dx;$

867. $\int \frac{e^{\cos x} \sin x}{e^{\cos x} + 4} dx;$ **868.** $\int \frac{5 \cdot 3^{\ln x}}{x} dx;$

869. $\int x(1-x)^{10} dx;$ **870.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}};$

871. $\int \frac{x^3 - 1}{x+1} dx;$ **872.** $\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)} dx:$

2. Ինտեգրում տեղադրման կամ փոփոխականի փոխարինման եղանակով:

Ինտեգրման կարևորագույն մեթոդներից մեկը փոփոխականի փոխարինման մեթոդն է: Այն հետևյալն է. եթե

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \text{ ապա}$$

$$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C:$$

Այստեղ ենթադրվում է $f(\varphi(t))$ ֆունկցիայի գոյությունը, $f(x)$, $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$ ֆունկցիաների անընդհատությունը:

φ ֆունկցիան աշխատում ենք ընտրել այնպես, որ $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ ֆունկցիան ինտեգրելու համար ավելի հարմար լինի, քան f(x)-ը:

Նշենք եռանկյունաչափական տեղադրումների որոշ դասեր.

ա) եթե ինտեգրալը պարունակում է $\sqrt{a^2 - x^2}$ արտահայտությունը, ապա հարմար է տեղադրել $x = a\sin t$ կամ $x = a\cos t$, այդ դեպքում՝

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t} = a\sqrt{1 - \sin^2 t} = a\sqrt{1 - \cos^2 t} = a\cos t;$$

բ) եթե ինտեգրալը պարունակում է $\sqrt{x^2 - a^2}$ արտահայտությունը, ապա հարմար է տեղադրել $x = a\sec t$, որտեղից.

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2\sec^2 t - a^2} = a\sqrt{\sec^2 t - 1} = a\operatorname{tg}t;$$

գ) եթե ինտեգրալը պարունակում է $\sqrt{x^2 + a^2}$ արտահայտությունը, ապա հարմար է տեղադրել $x = a\operatorname{tg}t$ կամ $x = a\operatorname{ctg}t$, որտեղից.

$$\sqrt{x^2 + a^2} = \sqrt{a^2\operatorname{tg}^2 t + a^2} = a\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t} = a\sec t:$$

873. Ինտեգրել, կատարելով նշված տեղադրումները.

1. $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{x^6 - 6x^3 + 13}$, $\quad x^3 - 3 = t;$

2. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x}dx$, $\quad 1 + \ln x = t;$

3. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}}$, $\quad x = \frac{1}{t}$;

4. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}}$, $\quad t = \sqrt{x+1}$;

5. $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$, $\quad t = \sin x$;

6. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{2-x}}$, $\quad \sqrt{2-x} = t$;

7. $\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $\quad \sqrt{1-x^2} = t$;

8. $\int x^5 (2-5x^3)^{\frac{2}{3}} dx$, $\quad 2-5x^3 = t^3$;

9. $\int \cos^5 x \sqrt{\sin x} dx$, $\quad \sin x = t$;

10. $\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)} dx$, $\quad t = \operatorname{arctg}\sqrt{x}$;

11. $\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{3-\cos^4 x}}$, $\quad \cos^2 x = t$;

12. $\int \frac{dx}{x\sqrt{4-\ln^2 x}}$, $\quad \ln x = t$;

13. $\int x\sqrt{x-1} dx$, $\quad \sqrt{x-1} = t$;

14. $\int x^3 e^{x^4} dx$, $\quad x^4 = t$:

874. Հարմար տեղադրում կատարելով, հաշվել հետևյալ ինտեգրալները.

1. $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}} dx$;

2. $\int \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$;

3. $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}} dx$;

4. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}}$;

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}$;

6. $\int \frac{\sin^3 x dx}{\sqrt{\cos x}}$;

7. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$;

8. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}$;

9. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt[3]{1+x^3}}$;

10. $\int \frac{e^x dx}{3+4e^x}$;

11. $\int \frac{dx}{\sin 2x}$;

12. $\int \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^2}$;

13. $\int \sqrt{a^2-x^2}dx$;

14. $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$;

15. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$:

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x-x^2}}$

3. Մասերով ինտեգրման եղանակ

Եթե u=u(x)-ը և v=v(x)-ը դիֆերենցելի ֆունկցիաներ են, ապա նրանց արտադրյալի համար ունենք՝ d(uv)=udv+vdu, որն ինտեգրելով, կստանանք՝

$$\int udv = uv - \int vdu:$$

Այս բանաձևը կոչվում է մասերով ինտեգրման բանաձև: Տրված ինտեգրալի նկատմամբ այս եղանակը կիրառելու համար պետք է կարողանալ ընդինտեգրալ արտահայտությունը տրոհել երկու արտադրիչների, որոնցից մեկը նշանակել u-ով, մյուսը՝ dv-ով:

Երբեմն կարիք է լինում մասերով ինտեգրման բանաձևը կիրառել հաջորդաբար մի քանի անգամ:

Ամենից բեղմնավոր կիրառումներն այն դեպքերում են, երբ ընդինտեգրալ արտահայտության մեջ որպես բազմապատկիչներ կան ցուցչային, լոգարիթմական, եռանկյունաչափական և հակադարձ եռանկյունաչափական ֆունկցիաներ: Օգտակար է հիշել, որ $x^n e^x$, $x^n \sin x$, $x^n \cos x$ ֆունկցիաները ինտեգրելուց որպես u պետք է վերցնել x^n-ը, իսկ $x^n \ln x$, $x^n \mathrm{arctg} x$, $x^n \arcsin x$ ֆունկցիաների դեպքում՝ $\ln x$, $\mathrm{arctg} x$, $\arcsin x$ ֆունկցիաները:

Մասերով ինտեգրման եղանակով հաշվել հետևյալ ինտեգրալները.

875. $\int x\cos xdx;$ **876.** $\int \ln xdx;$ **877.** $\int x\ln xdx;$

878. $\int xe^x dx;$ **879.** $\int x^2\sin xdx;$ **880.** $\int x^2\cos xdx;$

881. $\int \operatorname{arctg}xdx;$ **882.** $\int x^3\ln xdx;$ **883.** $\int \arcsin xdx;$

884. $\int x\sin 3xdx;$ **885.** $\int x\operatorname{arctg}xdx;$ **886.** $\int \frac{\ln x}{x^2}dx;$

887. $\int \frac{\arcsin x}{x^2}dx;$ **888.** $\int \arccos xdx;$ **889.** $\int x^3e^x dx;$

890. $\int \operatorname{arcctg}xdx;$ **891.** $\int (5x-2)e^{3x}dx;$

892. $\int (4x-3)e^{-2x}dx;$ **893.** $\int \frac{xdx}{\cos^2 x};$ **894.** $\int x\sin^2 xdx;$

895. $\int x\arcsin xdx;$ **896.** $\int e^x\sin xdx;$ **897.** $\int e^x\cos xdx;$

898. $\int e^{ax}\sin bxdx;$ **899.** $\int e^{ax}\cos bxdx:$

4. Ռացիոնալ ֆունկցիաների ինտեգրումը

Եթե $P_n(x)$-ը n-րդ կարգի բազմանդամ է, իսկ $Q_m(x)$-ը m-րդ կարգի, ապա

$$R(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

կոտորակը կոչվում է ռացիոնալ ֆունկցիա: Եթե $n\ge m$, ապա R(x)-ը կոչվում է անկանոն ռացիոնալ կոտորակ, իսկ $n<m$ դեպքում՝ կանոնավոր: Անկանոն ռացիոնալ կոտորակից կարելի է բաժանման միջոցով անջատել ամբողջ մասը՝

$$R(x)=M(x)+\frac{r_k(x)}{Q_m(x)},$$

որտեղ M(x)-ը բազմանդամ է, հետևաբար նրա ինտեգրումը դժվարություն չի ներկայացնում, իսկ $r_k(x)$-ը ($k<m$) մնացորդն է:

Այսպիսով, ցանկացած ռացիոնալ ֆունկցիայի ինտեգրումը հանգում է կանոնավոր ռացիոնալ կոտորակի ինտեգրմանը, որն, իր հերթին, բերվում է պարզ կոտորակների ինտեգրմանը:

Պարզ (տարրական) կոտորակները ունեն հետևյալ տեսքը`

I. $\dfrac{A}{(x-a)^m}, m \in N;$ II. $\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}, n \in N;$

որտեղ $\dfrac{p^2}{4}-q<0$, այսինքն x^2+px+q քառակուսի եռանդամը չունի իրական արմատներ:

Բոլոր դեպքերում էլ ենթադրվում է, որ A, B, p, q, և a-ն իրական թվեր են:

Առաջին տիպի պարզ կոտորակները ինտեգրվում են 1. և 2. բանաձևերով.

ա) $m=1 \Rightarrow \int \dfrac{Adx}{x-a} = A\ln|x-a|+C,$

բ) $m>1 \Rightarrow \int \dfrac{Adx}{(x-a)^m} = -\dfrac{A}{m-1}\cdot\dfrac{1}{(x-a)^{m-1}}+C:$

Ցույց տանք II տիպի պարզ կոտորակի ինտեգրման եղանակը n=1 դեպքում: Ունենք.

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx, \quad \frac{p^2}{4}-q<0:$$

Համարիչում անջատենք հայտարարի եռանդամի ածանցյալը.

$$Ax+B=(2x+p)\frac{A}{2}-\frac{Ap}{2}+B:$$

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx + (B-\frac{Ap}{2})\int \frac{dx}{x^2+px+q} =$$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q} + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{(x+\frac{p}{2})^2+\frac{4q-p^2}{4}} =$$

$$= \frac{A}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C:$$

Նշենք, որ $n>1$ դեպքում երկրորդ տիպի պարզ կոտորակը ինտեգրվում է անդրադարձ բանաձևի օգնությամբ:

$$J_{n+1}=\int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}}=\frac{x}{2na^2\left(x^2+a^2\right)^n}+\frac{2n-1}{2na^2}J_n$$

Հաշվել հետևյալ ինտեգրալները.

900. $\int\frac{3x+7}{4x-5}dx$, **901.** $\int\frac{4-3x}{2+5x}dx$, **902.** $\int\frac{3x-4}{x^2-2x-3}dx$,

903. $\int\frac{x-5}{x^2-7x+12}dx$, **904.** $\int\frac{dx}{x^2-2x+2}$,

905. $\int\frac{dx}{x^2+6x+25}$, **906.** $\int\frac{dx}{x^2-8x+1}$,

907. $\int\frac{dx}{9x^2-6x-8}$, **908.** $\int\frac{dx}{4x^2-4x+17}$,

909. $\int\frac{dx}{25x^2+10x+37}$, **910.** $\int\frac{3x-1}{x^2-4x+8}dx$,

911. $\int\frac{x+5}{x^2+8x+25}dx$, **912.** $\int\frac{dx}{(x^2+2x+10)^2}$,

913. $\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}$, **914.** $\int\frac{2x^2+3x-4}{x^2-5x+6}dx$,

915. $\int\frac{x^3-8x^2-8x}{x^2-8x-9}dx$, **916.** $\int\frac{1}{(x+1)(x-2)(x+3)}dx$,

917. $\int\frac{dx}{x^3-9x}$, **918.** $\int\frac{dx}{x^4+x^2}$,

919. $\int\frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}dx$, **920.** $\int\frac{dx}{x(x+1)^2}$,

921. $\int\frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)}dx$, **922.** $\int\frac{dx}{(x-2)(x^2+1)}$,

923. $\int\frac{dx}{x^3+1}$, **924.** $\int\frac{dx}{x^5-x^2}$,

925. $\int \frac{2x+3}{x^3-x^2+x-1}dx$,

926. $\int \frac{x^4}{x^4-16}dx$:

5. Եռանկյունաչափական ֆունկցիաների մի քանի դասերի ինտեգրումը:

Եթե R(u;v)-ն երկու փոփոխականի ռացիոնալ ֆունկցիա է, ապա R(sinx; cosx)dx դիֆերենցիալի ինտեգրումը բերվում է ռացիոնալ ֆունկցիաների ինտեգրման $\mathrm{tg}\frac{x}{2}=t$ փոփոխականի փոխարինմամբ:

Եթե R(u)-ն u-ի ռացիոնալ ֆունկցիա է, ապա R(sinx) cosx կամ R(cosx)sinx ֆունկցիաների ինտեգրումը բերվում է ռացիոնալ ֆունկցիաների ինտեգրման ավելի պարզ sinx=t կամ cosx=t փոփոխականի փոխարինմամբ:

$$\int \sin ax\cos bx dx, \qquad \int \sin ax \sin bx dx, \qquad \int \cos ax \cos bx dx$$

ինտեգրալները հաշվելիս օգտվում ենք եռանկյունաչափական ֆունկցիաների արտադրյալը գումարի վերածելու բանաձևերից:

Կատարել ինտեգրում.

927. $\int \frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}$;

928. $\int \frac{dx}{3+5\sin x+3\cos x}$;

929. $\int \frac{\sin x}{1-\sin x}dx$;

930. $\int \frac{dx}{\sin x\cos^2 x}$;

931. $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$;

932. $\int \frac{\sin x\cos x}{3\sin^2 x+4}dx$;

933. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x+\sin x}dx$;

934. $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$;

935. $\int \frac{\cos^5 x}{\sin x}dx$;

936. $\int \frac{\mathrm{ctg}^2 x}{\sin x}dx$;

937. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$;

938. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^6 x}dx$;

939. $\int \frac{dx}{\sin x\cos^3 x}$;

940. $\int \sin 3x dx$;

941. $\int \sin\frac{x}{3}dx$;

942. $\int \cos 2x dx$;

943. $\int \cos\frac{x}{5}dx$;

944. $\int \mathrm{tg} 5x dx$;

945. $\int \mathrm{ctg}\frac{x}{4}dx$;

946. $\int \frac{dx}{\cos^2 5x}$;

947. $\int \frac{dx}{\sin^2 3x}$;

948. $\int \frac{xdx}{\cos^2(1-x^2)}$;

949. $\int \frac{5x^2dx}{\sin^2(4-x^3)}$;

950. $\int \frac{\cos\frac{1}{x}dx}{x^2}$;

951. $\int \frac{\sin\sqrt{5x}}{\sqrt{5x}}dx$;

952. $\int x^2\mathrm{tg}(x^3)dx$;

953. $\int 5x^3\mathrm{ctg}(x^4)dx$;

954. $\int e^{3x}\sin(e^{3x})dx$;

955. $\int \sin^4 x\cos x dx$;

956. $\int (x^2-\sin 3x)dx$;

957. $\int \frac{\sin 5x}{\sqrt{2+\cos 5x}}dx$;

958. $\int \sin^3\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}dx$;

959. $\int \sin 5x\cos 5x dx$;

960. $\int \sin 3x\cos 5x dx$;

961. $\int \sin 2x\cos 7x dx$;

962. $\int \sin 5x\sin 3x dx$;

963. $\int \sin 4x\sin 7x dx$;

964. $\int \cos 3x\cos 2x dx$;

965. $\int \cos 8x\cos 10x dx$;

966. $\int \sin^2 x dx$;

967. $\int \cos^2 x dx$;   **968.** $\int \sin^2\frac{x}{3}dx$;   **969.** $\int \cos^2\frac{x}{4}dx$;

970. $\int \sin^3 x dx$;

971. $\int \sin^3 x\cos^2 x dx$;

972. $\int \sin^4 x\cos^3 x dx$;

973. $\int \sin^3 x\cos^4 x dx$;

974. $\int \sin^2 x\cos^5 x dx$;

975. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx$;

976. $\int \cos^3 x dx$; **977.** $\int \sin^2 2x \cos^2 2x dx$;

978. $\int \sin^4 x dx$; **979.** $\int \cos^4 x dx$; **980.** $\int tg^2 x dx$;

981. $\int tg^3 x dx$; **982.** $\int ctg^2 x dx$; **983.** $\int ctg^3 x dx$;

984. $\int tg^4 x dx$; **985.** $\int tg^5 x dx$; **986.** $\int ctg^4 x dx$;

987. $\int ctg^5 x dx$

6. Պարզագույն իռացիոնալ ֆունկցիաների ինտեգրումը:

Սովորաբար պարզ իռացիոնալ արտահայտությունների ինտեգրալները փարրական ձևափոխություններով կամ ինտեգրման փարբեր մեթոդներով բերվում են աղյուսակային ինտեգրալների:

$x^m (a + bx^n)^p dx$... դիֆերենցիալները (m, n, p թվերը ռացիոնալ են), որոնք կոչվում են բինոմական դիֆերենցիալներ, ինտեգրվում են միայն հետևյալ դեպքերում՝

ա) եթե p-ն ամբողջ թիվ է, ապա բինոմական դիֆերենցիալի ինտեգրումը բերվում է ռացիոնալ ֆունկցիայի ինտեգրման $t = \sqrt[k]{x}$ տեղադրումով, որտեղ k-ն m և n անկրճատելի կոտորակների հայտարարների ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկն է:

բ) եթե $\frac{m+1}{n}$ թիվն է ամբողջ, ապա նշանակում ենք $t = \sqrt[k]{a + bx^n}$ որտեղ k-ն p անկրճատելի կոտորակի հայտարարն է:

գ) եթե $\frac{m+1}{n} + p$ թիվն է ամբողջ, ապա $t = \sqrt[k]{ax^{-n} + b}$, որտեղ k-ն p անկրճատելի կոտորակի հայտարարն է:

Հաշվել հետևյալ ինտեգրալները.

988. $\int \frac{dx}{\sqrt{3 + 12x - 4x^2}}$; **989.** $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^4 + 8x^2 + 25}}$;

990. $\int \frac{3x+5}{\sqrt{4x^2+3}}dx;$

991. $\int \frac{x-5}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx;$

992. $\int \frac{3x-4}{\sqrt{6x-x^2-8}}dx;$

993. $\int \frac{2x-1}{\sqrt{2x^2+8x+1}}dx;$

994. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x+1}};$

995. $\int \frac{5x+3}{\sqrt{5+4x-x^2}}dx;$

996. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}};$

997. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+5x}};$

998. $\int \frac{5dx}{\sqrt{9-8x-7x^2}};$

999. $\int \frac{2dx}{\sqrt{3-2x-x^2}};$

1000. $\int \frac{6x+5}{\sqrt{9x^2+1}}dx;$

1001. $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x}}dx;$

1002. $\int \frac{1-2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx;$

1003. $\int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}}dx;$

1004. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{(x^2+1)^3}}dx;$

1005. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}};$

1006. $\int \sqrt{x^3+x^4}\,dx$

1007. $\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}dx;$

1008. $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}dx;$

1009. $\int x\sqrt{1-x}\,dx$

1010. $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}dx;$

1011. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}};$

1012. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}};$

1013. $\int \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}dx;$

1014. $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{x-1}+1};$

1015. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx:$

§2. ՈՐՈՇՅԱԼ ԻՆՏԵԳՐԱԼ

1. Որոշյալ ինտեգրալի սահմանումը. Նյուտոն- Լայբնիցի բանաձևը

Դիցուք y=f(x) սահմանափակ ֆունկցիան որոշված է $[a;b]$ հատվածի վրա: $[a;b]$հատվածը x_i կետերով տրոհենք կամայական n մասերի: Նշանակենք

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b,$$

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1};\ i = 1,2,\ldots n,$$

$$\lambda = \max_i \{\Delta x_i\}:$$

Ամեն մի $[x_{i-1}; x_i]$հատվածից վերցնելով մի ξ_i կետ, կազմենք հետևյալ գումարը.

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n$$

S_n գումարը կոչվում է y=f(x) ֆունկցիայի ինտեգրալային գումար $[a;b]$ հատվածում:

Եթե գոյություն ունի $\lim\limits_{\lambda \to 0} S_n = S$ վերջավոր սահմանը, անկախ $[a;b]$ հատվածի տրոհման եղանակից և ξ_i կետերի ընտրությունից, ապա f(x) ֆունկցիան կոչվում է ինտեգրելի $[a;b]$ հատվածում, իսկ S վերջավոր սահմանը y=f(x) ֆունկցիայի որոշյալ ինտեգրալ $[a;b]$ հատվածում և նշանակվում է հետևյալ սիմվոլով

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

a և b թվերը կոչվում են ինտեգրալի համապատասխանաբար ստորին և վերին սահմաններ:

Դիցուք f(x) ֆունկցիան անընդհատ է $[a;b]$ միջակայքում: Այդ դեպքում այդ միջակայքում գոյություն ունի f(x) ֆունկցիայի անորոշ ինտեգրալը՝

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

և տեղի ունի հետևյալ բանաձևը.

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a):$$

Այս բանաձևը կոչվում է Նյուտոն-Լայբնիցի բանաձև: Այսպիսով, $[a;b]$ հատվածում անընդհատ $f(x)$ ֆունկցիայի որոշյալ ինտեգրալը հաշվելու համար նախ գտնում ենք դրա նախնականը (անորոշ ինտեգրալը), ապա տեղադրում սահմանները:

1016. Հաշվել հետևյալ որոշյալ ինտեգրալները.

1) $\int_1^3 x^3dx;$ 2) $\int_0^2 x^2\sqrt{x^3+1}dx;$ 3) $\int_{e^2}^{e^3} \frac{\ln^2 xdx}{x}:$

Հաշվել հետևյալ որոշյալ ինտեգրալները, ելնելով որոշյալ ինտեգրալի սահմանումից, ինտեգրման միջակայքի տրոհումը և կետերի ընտրությունը կատարելով հարմար եղանակով:

1017. $\int_{-1}^2 x^2dx;$ **1018.** $\int_0^1 2^x dx;$

1019. $\int_0^1 x^3dx;$ **1020.** $\int_1^2 \frac{dx}{x};$ $x_i = 2^{\frac{i}{n}}$

Հաշվել հետևյալ որոշյալ ինտեգրալները Նյուտոն-Լայբնիցի բանաձևով:

1021. $\int_{-2}^1 x^2dx;$ **1022.** $\int_0^8 (\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x^2})dx;$

1023. $\int_0^\pi \sin xdx;$ **1024.** $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos xdx;$

1025. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$; **1026.** $\int_0^1 (3x-2)^4 dx$;

1027. $\int_e^{e^2} \frac{2\ln x+1}{x} dx$; **1028.** $\int_0^5 \sqrt{4+x}\,dx$;

1029. $\int_{-3}^{-1} \frac{dx}{(10+3x)^3}$; **1030.** $\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx$;

1031. $\int_0^{16} \frac{dx}{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}}$; **1032.** $\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}\,dx$;

1033. $\int_e^{e^2} \frac{\ln^3 x dx}{x}$; **1034.** $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^3}}$;

1035. $\int_{\ln 6}^{\ln 22} \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x+3}}$; **1036.** $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$;

1037. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}$; **1038.** $\int_0^2 xe^{x^2} dx$;

1039. $\int_{e^2}^{e^5} \frac{\ln x - 1}{x\sqrt{\ln x - 1}} dx$; **1040.** $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x(1+\ln x)}$:

Որոշյալ ինտեգրալի օգնությամբ հաշվել հետևյալ սահմանները

1041. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}\right)$;

1042. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}\right)$;

1043. $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n^2+1^2}+\frac{1}{n^2+2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2+n^2}\right)$;

1044. $\lim_{n\to\infty} \frac{1^p+2^p+\ldots+n^p}{n^{p+1}}$:

2. Մասերով ինտեգրման եղանակը որոշյալ ինտեգրալի համար

Ենթադրենք u=u(x) և v=v(x) ֆունկցիաները իրենց ածանցյալների հետ միասին անընդհատ են $[a;b]$ հատվածում: Դիֆերենցելով uv արտադրյալը, կստանանք. d(uv)=udv+vdu: Ինտեգրելով այս բանաձևի երկու կողմերը a-ից մինչև b կունենանք մասերով ինտեգրման բանաձևը որոշյալ ինտեգրալի համար:

$$\int_a^b udv = (uv)\Big|_a^b - \int_a^b vdu:$$

Հաշվել մասերով ինտեգրման եղանակով.

1045. $\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}dx;$ **1046.** $\int_1^e x\ln xdx;$

1047. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin xdx;$ **1048.** $\int_0^{\pi} x^2\cos xdx;$

1049. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{xdx}{\sin^2 x};$ **1050.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin^2 xdx;$

1051. $\int_1^2 x^3\ln xdx;$ **1052.** $\int_1^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx;$

1053. $\int_0^1 \operatorname{arctg}xdx;$ **1054.** $\int_0^1 xe^{3x}dx;$

1055. $\int_0^1 e^x x^2dx;$ **1056.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{3x}\cos xdx;$

1057. $\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x|dx;$ **1058.** $\int_0^1 \arcsin xdx;$ **1059.** $\int_0^{\sqrt{3}} x\operatorname{arctg}xdx:$

3. Փոփոխականի փոխարինումը որոշյալ ինտեգրալում

Դիցուք $y=f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է $[a;b]$ հատվածում $x=\varphi(t)$ $(\alpha \le t \le \beta)$ ֆունկցիայի արժեքները դուրս չեն գալիս $[a;b]$ հատվածից, ընդ որում $\varphi(\alpha)=a, \varphi(\beta)=b$, $[a;b]$ հատվածում $\varphi(t)$ ֆունկցիան ունի անընդհատ $\varphi'(t)$ ածանցյալ:

Այս պայմանների դեպքում տեղի ունի հետևյալ բանաձևը՝

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt:$$

Հաշվել հետևյալ ինտեգրալները կատարելով նշված տեղադրումները

1060. $\int_1^6 \frac{dx}{1+\sqrt{3x-2}}, \sqrt{3x-2}=t;$ **1061.** $\int_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}, \sqrt{e^x+1}=t;$

1062. $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}, \quad \sqrt{x}=t;$ **1063.** $\int_0^2 \sqrt{16-6x}dx, \sqrt{16-6x}=t;$

1064. $\int_0^3 x\sqrt{x^2+16}dx, \quad \sqrt{x^2+16}=t;$

1065. $\int_0^{\ln 5} \sqrt{e^x-1}dx, \quad \sqrt{e^x-1}=t;$

1066. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\alpha \sin^4\alpha d\alpha, \sin\alpha = t;$ **1067.** $\int_0^1 \frac{dx}{1+e^{2x}}, x=\ln t;$

1068. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cos^5 x dx, \cos x = t;$ **1069.** $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}, x=\operatorname{tg}t;$

1070. $\int_0^3 \sqrt{25-3x}dx, \sqrt{25-3x}=t;$ **1071.** $\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}dx}{x^2}, x=\cos t;$

Հետևյալ ինտեգրալները հաշվել փոփոխականի պատշաճ փոխարինումով:

1072. $\int_{-1}^{1} \frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}$, **1073.** $\int_{0}^{a} x^2\sqrt{a^2-x^2}dx$,

1074. $\int_{0}^{0,75} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$, **1075.** $\int_{\ln 2}^{\ln 4} \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$:

1076. Ապացուցել, որ եթե f(x)-ը անընդհատ է $[0,1]$ հատվածում, ապա

ա) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx;$

բ) $\int_{0}^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi} f(\sin x)dx;$

1077. Ապացուցել, որ եթե f(x)-ը անընդհատ է $[-\ell,\ell]$ հատվածում և զույգ, ապա

$$\int_{-\ell}^{\ell} f(x)dx = 2\int_{0}^{\ell} f(x)dx$$

իսկ եթե կենտ, ապա $\int_{-\ell}^{\ell} f(x)dx = 0$:

4. Անիսկական ինտեգրալներ

Ենթադրենք, որ y=f(x) ֆունկցիան որոշված է $[a;+\infty)$ միջակայքում և ցանկացած A>a թվի համար ինտեգրելի է $[a;A]$ հատվածում: Եթե գոյություն ունի $\lim_{A\to+\infty}\int_{a}^{A} f(x)dx$ սահմանը, ապա այն կոչվում է f(x) ֆունկցիայի անիսկական ինտեգրալ $[a;+\infty)$ միջակայքում և նշանակվում է հետևյալ տեսքով՝

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx :$$

Եթե այդ սահմանը վերջավոր է, ապա y=f(x) ֆունկցիան կոչվում է ինտեգրելի $[a;+\infty)$ միջակայքում, իսկ $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ ինտեգրալը կոչվում է զուգամետ: Հակառակ դեպքում, եթե այդ սահմանը անվերջ է, կամ գոյություն չունի, այդ ինտեգրալը կոչվում է տարամետ: Նման ձևով էլ սահմանվում են անիսկական ինտեգրալները $(-\infty;a]$ և $(-\infty;+\infty)$ միջակայքերում:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{A\to-\infty}\int_A^a f(x)dx,\quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{A\to-\infty\\ B\to+\infty}}\int_A^B f(x)dx :$$

Այժմ սահմանենք անիսկական ինտեգրալ այնպիսի ֆունկցիայի համար, որը $[a;b]$ հատվածում սահմանափակ չէ:

Դիցուք y=f(x) ֆունկցիան որոշված է $[a;b)$ կիսաբաց միջակայքում, ընդ որում $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=\infty$ (այս դեպքում x=b կետը կոչվում է f(x) ֆունկցիայի եզակի կետ): Ենթադրենք նաև, որ ցանկացած $\varepsilon>0$ թվի համար $(0<\varepsilon<b-a)$ $y=f(x)$ ֆունկցիան ինտեգրելի է $[a;b-\varepsilon]$ հատվածում: Եթե գոյություն ունի $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ սահմանը, ապա այն կոչվում է y=f(x) ֆունկցիայի անիսկական ինտեգրալ $[a;b]$ միջակայքում և նշանակվում է.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

Այստեղ ևս, եթե սահմանը վերջավոր է, ապա անիսկական ինտեգրալը կոչվում է զուգամետ, հակառակ դեպքում՝ տարամետ:

Եթե y=f(x) ֆունկցիայի եզակի կետը հատվածի ձախ ծայրն է, կամ $[a;b]$ հատվածի ներքին c կետը, ապա անիսկական ինտեգրալները համապատասխանաբար սահմանվում են հետևյալ ձևով.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx,$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\delta\to+0 \\ \varepsilon\to+0}} \left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\delta}^b f(x)dx \right]:$$

Հաշվել հետևյալ անիսկական ինտեգրալները:

1078. $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x}, a>1:$ **1079.** $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}x}{1+x^2}dx:$ **1080.** $\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{1+x^2}:$

1081. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}:$ **1082.** $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2};$ **1083.** $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2};$

1084. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2};$ **1085.** $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};$ **1086.** $\int_0^2 \frac{2dx}{\sqrt{4-x^2}};$

1087. $\int_0^{+\infty} e^{-3x}dx;$ **1088.** $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2xdx}{1+x^4};$ **1089.** $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2};$

1090. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2};$ **1091.** $\int_0^1 \ln xdx;$

1092. $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bxdx, a>0;$ **1093.** $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bxdx, a>0;$

1094. ա) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin xdx;$ բ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos xdx:$

Հետազոտել հետևյալ ինտեգրալների զուգամիտությունը:

1095. $\int_0^{+\infty} \frac{x^2dx}{x^4 - x^2 + 1}$;

1096. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2 + 1}}$;

1097. $\int_0^2 \frac{dx}{\ln x}$;

1098. $\int_0^{+\infty} \frac{x^m}{1 + x^n} dx$;

1099. $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{arctg} x}{x^n} dx$;

1100. $\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1 + x^n} dx$; $n \geq 0$:

5. Որոշյալ ինտեգրալի կիրառությունները

ա) հարթ պատկերի մակերեսի հաշվումը:

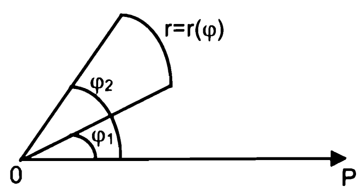
Եթե կորագիծ սեղանը սահմանափակված է վերևից $y = f(x) \geq 0$ անընդհատ կորով, ներքևից՝ OX առանցքով և կողքերից՝ x=a, x=b ուղիղներով, ապա կորագիծ սեղանի մակերեսը որոշվում է՝ $S = \int_a^b f(x)dx$ բանաձևով:

Ընդհանուր դեպքում, երբ հարթ պատկերը սահմանափակված է $y = f_1(x)$և $y = f_2(x)$ $(f_2(x) \geq f_1(x),\ a \leq x \leq b)$ x=a, x=b գծերով, ապա այդ պատկերի մակերեսը հաշվվում է հետևյալ բանաձևով.

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx:$$

Եթե պատկերը սահմանափակված է $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$, $r = r(\varphi)$ գծերով (այն կոչվում է կորագիծ սեկտոր), ապա դրա մակերեսը հաշվվում է հետևյալ բանաձևով

$$S = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi)d\varphi:$$



Գտնել տրված գծերով սահմանափակված հարթ պատկերների մակերեսները:

1101. $y = \dfrac{6x - x^2}{3}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$

1102. $x^2 = 4y$, $y^2 = 4x$:

1103. $y = x^2$, $x = 2$, $x = 4$, $y = 0$:

1104. $y = x^2 - 6x$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$:

1105. $y = 3 - 2x - x^2$, $y = 0$:

1106. $y = x^2 - 6x + 5$, $2y - x + 1 = 0$:

1107. $x^2 - 2y = 0$, $x + y - 4 = 0$:

1108. $y = 3x^2 + 1$, $y = 3x + 7$

1109. $y = 3 + 2x - x^2$, $y + x - 3 = 0$:

1110. $y = x^2$, $y = 6 - 2x^2$

1111. $y = x^2 - 2$, $y = 6 - x^2$

1112. $xy = 4$, $y + x - 5 = 0$:

1113. $xy = 6$, $y = 7 - x$

1114. $y = \dfrac{a^3}{x^2 + a^2}$, $y = 0$:

1115. $y = \ln x$, $y = 0$, $x = 1$, $x = e$:

1116. $y^2 + 8x = 16$, $y^2 - 24x = 48$:

1117. $y = \dfrac{1}{1 + x^2}$, $y = \dfrac{x^2}{2}$:

1118. $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ (լեմնիսկատ):

1119. $r = a(1 - \cos\varphi)$:

1120. $r = a \sin 3\varphi$:

1121. $r = \dfrac{a}{\varphi}$, $\dfrac{\pi}{4} \le \varphi \le 2\pi$:

1122. $r = a|\sin 2\varphi|$

1123. $r = a\cos 3\varphi$:

1124. $r = ae^{\varphi}, \ -\pi \le \varphi \le \pi$:

1125. Ապացուցել, որ եթե ուռուցիկ պատկերի տրամագիծը՝ d=1 ($d=\sup M_1M_2$, որտեղ M_1M_2–ը պատկանում է պատկերին) ապա, պատկերի մակերեսը բավարարում է

$$S \le \frac{\pi}{4} \text{ անհավասարությանը:}$$

բ) Աղեղի երկարության հաշվումը

Ողորկ կորի $y = f(x)$ $(a \le x \le b)$ աղեղի երկարությունը ($y=f(x)$-ը անընդհատ դիֆերենցելի ֆունկցիա է) հաշվվում է հետևյալ բանաձևով

$$L = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx :$$

$r = r(\varphi), \alpha \le \varphi \le \beta$ աղեղի երկարությունը, որտեղ $r(\varphi)$-ն անընդհատ դիֆերենցելի ֆունկցիա է, հաշվվում է հետևյալ բանաձևով

$$L = \int_a^b \sqrt{r^2(\varphi)+(r'(\varphi))^2}\,d\varphi :$$

Գտնել հետևյալ կորերի աղեղների երկարությունները:

1126. $y = x\sqrt{x}, \ 0 \le x \le 4$:

1127. $y^2 = 8x, \ 0 \le x \le \frac{1}{4}$:

1128. $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x, \ 1 \le x \le e$:

1129. $y = \ln\cos x, \ 0 \le x \le \frac{\pi}{12}$:

1130. $r = a(1+\cos\varphi)$:

1131. $r = a\sin^3\frac{\varphi}{3}$:

1132. $r = a\varphi, \ 0 \le \varphi \le 2\pi$:

գ) Պտտման մարմնի ծավալի հաշվումը.

Կորագիծ սեղանի OX առանցքի շուրջը պտտելուց առաջացած մարմնի ծավալը որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx:$$

Ընդհանուր դեպքում, x=a և x=b հարթությունների միջև ընկած մարմնի ծավալը հաշվվում է

$$V=\int_a^b S(x)dx$$

բանաձևով, որտեղ S(x)-ը այդ մարմնի և x կետում OX առանցքին ուղղահայաց հարթության հատույթի մակերեսն է:

Դիցուք պահանջվում է հաշվել այն մարմնի ծավալը, որն առաջանում է $y=f_1(x)$ և $y=f_2(x)$, $(f_1(x)\le f_2(x))$, x=a, x=b գծերի միջև գտնվող հարթ պատկերը OX առանցքի շուրջ պտտելուց:

Օղակի ծավալը կարելի է դիտել որպես երկու սեղանակերպերի պտտումից առաջացած ծավալների տարբերություն

$$V=\pi\int_a^b\left[(f_2(x))^2-(f_1(x))^2\right]dx:$$

Գտնել այն մարմնի ծավալը, որն առաջանում է տրված գծերով սահմանափակված հարթ պատկերը պտտելով կոորդինատային առանցքներից մեկի շուրջը.

ա) OX առանցքի շուրջը.

1133. $y=\sin x,\ \ y=0,\ x=0,\ x=\pi:$

1134. $y=x^2+1,\ \ y=2x+1:$

1135. $y=x^2+1,\ \ x=1,\ y=0,\ x=0:$

1136. $y=x^2+2,\ \ 2x-y+2=0:$

1137. $xy=9,\ \ y=10-x:$

1138. $y=x^2+4,\ \ x=3,\ y=0,\ x=0:$

1139. $y=\sqrt{x-5},\ \ x=9,\ y=0:$

1140. $y=\sqrt{x-3},\ \ x=7,\ y=0:$

1141. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$: **1142.** $y^2=9x, \quad y=3x$:

1143. $y^2=9x, \quad x^2=9y$: **1144.** $y^2=4x, \quad x^2=4y$:

1144.1. $x^2+(y-a)^2=b^2, \quad b<a$

բ) OY առանցքի շուրջը.

1145. $y=e^{-x}, \ y=0, \ 0\le x<+\infty$:

1146. $y^2=4-x, \quad x=0$:

1147. $x^2-y^2=4, \quad y=-2, y=2$:

1148. $y=\cos x, \quad y=-1$, երբ $-\pi\le x\le\pi$:

1149. $y=x\sqrt{-x}, \quad x=-4, y=0$:

1150. $y^2=(x+4)^3, \ x=0$:

1150.1. Գտնել [4, 9]-ի վրա տրված $\sqrt{x}$ ֆունկցիայի միջին արժեքը:

1150.2. Գտնել $[e, e^2]$-ի վրա տրված $\ln x$ ֆունկցիայի միջին արժեքը:

1150.3. Գտնել x^2y ֆունկցիայի միջին արժեքը ըստ x-ի $[1, 4]$ միջակայքի վրա:

1150.4. Գտնել $y/(5+2x)^2$ ֆունկցիայի միջին արժեքը ըստ x-ի [-2, -1]-ի վրա:

1150.5. Գտնել $[1, e^3]$-ի վրա տրված $1/x\sqrt{1+\ln x}$ ֆունկցիայի միջին արժեքը:

1150.6. Գտնել [2, 6]-ի վրա տրված $\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+13}}$ ֆունկցիայի միջին արժեքը:

ԳԼՈՒԽ VII

ՇԱՐՔԵՐ

§1 ԹՎԱՅԻՆ ՇԱՐՔԵՐ

1. Հիմնական գաղափարներ

Հետևյալ տեսքի արտահայտությունը՝

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n,$$

որտեղ $a_1, a_2, a_3,$ մի որևէ անվերջ հաջորդականության անդամներն են, կոչվում է անվերջ շարք կամ պարզապես շարք:

a_n-ը $(n=1,2,$ $)$ կոչվում է շարքի n-րդ անդամ կամ ընդհանուր անդամ: Նշանակենք. $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \quad (n = 1, 2, \ldots)$:

S_n-ը կոչվում է շարքի n-րդ մասնակի գումար:

Շարքը կոչվում է զուգամետ, եթե S_n հաջորդականությունը ունի վերջավոր S սահմանը, այսինքն՝

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S.$$

ընդ որում S թիվը կոչվում է շարքի գումար:

Շարքը կոչվում է տարամետ, եթե S_n հաջորդականությունը տարամետ է, այսինքն S_n-ի սահմանը գոյություն չունի կամ հավասար է ∞:

Կոշիի զուգամիտության հայտանիշը.

Որպեսզի շարքը լինի զուգամետ անհրաժեշտ է և բավարար, որ $\forall \varepsilon > 0$ թվի համար $\exists$ ունենա $n_0 = n_0(\varepsilon)$ բնական թիվ այնպիսին, որ n_0-ից մեծ բոլոր բնական n թվերի և $\forall p$ բնական թվի համար տեղի ունենա

$$\left| S_{n+p} - S_n \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon :$$

Շարքերի զուգամիտության սահմանման միջոցով պարզել հետևյալ շարքերի զուգամիտության հարցը և զուգամիտության դեպքում գտնել շարքի գումարը:

1151. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$

1152. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$

1153. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots$

1154. $(-1)^{n-1} = 1 - 1 + 1 - \ldots + (-1)^{n-1} + \ldots$

1155. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$:

1156. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$:

1157. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$

1158. $\sum_{n=0}^{\infty} q^n, |q| < 1$:

1159. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{2} \cdot n$:

1160. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right)$:

1161. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$:

1162. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$:

1163. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{9n^2+12n-5}$:

1164. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2+8n+3}$:

1165. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{9n^2+3n-2}$:

1166. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{9n^2+6n-8}$:

1167. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{4n^2+4n-3}$:

1168. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{9n^2+21n-8}$:

1169. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$:

1170. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$:

1171. Ապացուցել, որ եթե $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ և $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ շարքերը զուգամետ են և $a_n \le c_n \le b_n$, ապա $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ շարքը զուգամետ է:

1172. Ապացուցել, որ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ շարքը, եթե p>1 զուգամետ է:

2. Շարքի զուգամիտության անհրաժեշտ պայմանը.

Եթե շարքը զուգամետ է, ապա դրա ընդհանուր անդամը ձգտում է 0-ի, հակառակն, ընդհանրապես ասած, ճիշտ չէ: Օրինակ՝ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ շարքի համար $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, բայց շարքը տարամետ է:

Պարզել հետևյալ շարքերի համար անհրաժեշտ պայմանը բավարարված է, թե ոչ:

1173. $\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{arctg}\frac{1}{n}$:

1174. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^3+1}}$:

1175. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{(n+1)(n+2)}}$:

1176. $\sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{1}{n}$:

1177. $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin\frac{1}{\sqrt{n}}$:

1178. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3n}$:

3. Դրական անդամներով շարքեր: Բաղդատման հայտանիշներ

Բաղդատման առաջին հայտանիշը:

Դիցուք, տրված են (1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ (a_n > 0)$ և (2) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \ (b_n > 0)$ շարքերը: Եթե $a_n \le b_n$, $n = 1, 2, \ldots$, ապա (2) շարքի զուգամիտությունից հետևում է (1) շարքի զուգամիտությունը, իսկ (1) շարքի տարամիտությունից հետևում է (2) շարքի տարամիտությունը:

Բաղդատման առաջին հայտանիշի օգնությամբ պարզել հետևյալ շարքերի վարքը:

1179. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}$;

1180. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$;

1181. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(n+1)^3}}$;

1182. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$;

1183. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+1}$;

1184. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^3}$;

1185. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathrm{tg}\frac{1}{n}$;

1186. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2+1}$;

1187. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$:

Բաղդատման երկրորդ հայտանիշը:

Եթե գոյություն ունի $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=C(0<C<+\infty)$ ապա (1) և (2) շարքերը միաժամանակ են զուգամետ կամ տարամետ:

Բաղդատման երկրորդ հայտանիշի օգնությամբ պարզել հետևյալ շարքերի վարքը:

1188. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)}}$;

1189. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$;

1190. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{1}{\sqrt{n}}$;

1191. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$;

1192. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$;

1193. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathrm{tg}\frac{1}{\sqrt{n}}$;

1194. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n(n+2)(n+3)}}$;

1195. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{n^2+1}$;

1196. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$;

1197. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{3n+4}}$;

1198. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$;

1199. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^3+2}}$;

1200. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n^2}$:

Դալամբերի հայտանիշը:

Եթե դրական անդամներով շարքի համար գոյություն ունի $q<1$ հաստատուն թիվ այնպես, որ ինչ-որ n_0-ից մեծ բոլոր n-երի համար տեղի ունի $\frac{a_{n+1}}{a_n}<q$ պայմանը, ապա շարքը զուգամետ է, իսկ եթե ինչ-որ n_0-ից մեծ բոլոր n-երի համար տեղի ունի $\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$ պայմանը, ապա շարքը տարամետ է:

Եթե դրական անդամներով շարքի համար գոյություն ունի $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=D$ վերջավոր սահմանը, ապա $D<1$ դեպքում շարքը զուգամետ է, $D>1$ դեպքում՝ տարամետ, իսկ $D=1$ դեպքում զուգամիտության հարցը բաց է մնում:

Օգտվելով Դալամբերի հայտանիշից, պարզել հետևյալ շարքերի վարքը.

1201. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$;

1202. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$;

1203. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n-1}}{(n+1)!}$;

1204. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(n+1)!}$;

1205. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$;

1206. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n^2-1}}{2^{n^2}\sqrt{n}}$;

1207. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$;

1208. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3}{4^n}$;

1209. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot5\cdot...(2n+1)}{1\cdot4\cdot...(3n-2)}$; **1210.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot5\cdot8\cdot...(3n-1)}{1\cdot5\cdot9\cdot...(4n-3)}$;

1211. ա) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2n+1}}{n!}$, բ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$, գ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$, դ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n n!}{n^n}$:

Կոշիի հայտանիշը:

Եթե դրական անդամներով շարքի համար գոյություն ունի $q<1$ հաստատուն թիվ այնպես, որ ինչ-որ n_0-ից մեծ բոլոր n-երի համար տեղի ունի $\sqrt[n]{a_n}<q$ պայմանը, ապա շարքը զուգամետ է, իսկ եթե ինչ-որ n_0-ից մեծ բոլոր n-երի համար տեղի ունի $\sqrt[n]{a_n}>1$ պայմանը, ապա շարքը տարամետ է:

Եթե դրական անդամներով շարքի համար գոյություն ունի $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=k$ վերջավոր սահմանը, ապա $k<1$ դեպքում շարքը զուգամետ է, $k>1$ դեպքում տարամետ, իսկ $k=1$ դեպքում զուգամիտության հարցը բաց է մնում:

Օգտվելով Կոշիի հայտանիշից պարզել հետևյալ շարքերի վարքը.

1212. $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n}{3n+1})^n$; **1213.** $\sum_{n=1}^{\infty}\sin^n\frac{\pi}{n}$;

1214. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{n^n}$; **1215.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\frac{2}{5})^n$;

1216. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ **1217.** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+1}{3n^2-1}\right)^n$

1218. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$ **1219.** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

1220. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n$ **1221.** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^n$

Կոշիի ինտեգրալային հայտանիշը:

Դիցուք $y=f(x)>0$ ֆունկցիան անընդհատ է և մոնոտոն նվազող $[1;+\infty)$ միջակայքում, $f(n)=a_n$: Այս պայմանների դեպքերում $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ շարքը և $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ անիսկական ինտեգրալը միաժամանակ են զուգամետ կամ տարամետ:

Օգտվելով ինտեգրալային հայտանիշից պարզել հետևյալ շարքերի վարքը.

1222. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}(p\ge 1)$;

1223. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$;

1224. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$;

1225. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^2}$;

1226. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$;

1227. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^p}$, $p\ge 1$;

1228. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}e^{\sqrt{n}}}$;

1229. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e^{\sqrt{n}}}$:

§2. ԿԱՄԱՅԱԿԱՆ ՇԱՐՔԵՐ

Այն շարքերը, որոնց անդամների նշանները հերթականությամբ են փոխվում, կոչվում են նշանափոխ շարքեր: Օրինակ.

$$1-1+1-1+\ldots+(-1)^{n-1}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1},\ \text{կամ}$$

$$-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\ldots+\frac{(-1)^n}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}:$$

Դիտարկենք հետևյալ նշանափոխ շարքը.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}C_n=C_1-C_2+C_3-C_4+\ldots+(-1)^{n-1}C_n+\ldots,\ \text{որտեղ}\ C_n>0:$$

Լայբնիցի թեորեմը նշանափոխ շարքերի վերաբերյալ:

Եթե 1) $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = 0$, 2) $C_{n+1} < C_n$, $(n = 1,2,3,\ldots)$, ապա նշանափոխ շարքը զուգամետ է:

Օգտվելով Լայբնիցի թեորեմից, պարզել հետևյալ շարքերի վարքը

1230. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$; **1231.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}$;

1232. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)}$; **1233.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln \ln n}$;

1234. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{(2n+1)^n}$; **1235.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{\pi}{\sqrt{n}}$;

1236. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{2^n}$: **1237.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$;

1238. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{3n-7}$; **1239.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$:

Բացարձակ և պայմանական զուգամիտություն

Դիտարկենք (A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ և (B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ շարքերը:

Եթե (A) շարքը զուգամետ է, իսկ (B) շարքը տարամետ է, ապա (A) շարքը կոչվում է պայմանական զուգամետ:

Եթե (B) շարքը զուգամետ է, ապա (A) շարքը կոչվում է բացարձակ զուգամետ:

Նշենք, որ (B) շարքի զուգամիտությունից հետևում է (A) շարքի զուգամիտությունը:

Պարզել հետևյալ շարքերի զուգամիտության բնույթը, բացարձակ զուգամիտության առումով:

1240. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$; **1241.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$;

1242. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin\frac{1}{n}$;

1243. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+1}$;

1244. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\operatorname{tg}\frac{1}{\sqrt{n}}$;

1245. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sin\frac{1}{n^2}$;

1246. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n\ln^2 n}$;

1247. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n}$;

1248. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{11n+8}$;

1249. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{2^n}$;

1250. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\alpha}{(\ln 10)^n}$;

1251. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p(\ln n)^\alpha}$:

§3. ԱՍՏԻՃԱՆԱՅԻՆ ՇԱՐՔԵՐ

Աստիճանային շարք կոչվում է հետևյալ տեսքի շարքը.

$$a_0+a_1x+a_2x.^2+\ldots+a_nx^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,$$

որտեղ $a_0, a_1, \ldots., a_n$ թվերը հաստատուններ են, իսկ x-ը փոփոխական է: Աստիճանային շարքը կոչվում է զուգամետ x_0 կետում, եթե զուգամետ է $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx_0^n$ թվային շարքը:

Աստիճանային շարքի զուգամիտության տիրույթ է կոչվում այն x-երի բազմությունը, որոնց համար շարքը զուգամետ է: Աստիճանային շարքը բացարձակ զուգամետ է (-R; R) տեսքի միջակայքում: R-ը կոչվում է աստիճանային շարքի զուգամիտության շառավիղ: Այն հաշվվում է

$$\frac{1}{R}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|},\ \text{բանաձևով, կամ}\ R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|\ \text{բանաձևով}$$

եթե վերջին սահմանը գոյություն ունի: Եթե $R=+\infty$, ապա աստիճանային շարքը բացարձակ զուգամետ է ամբողջ առանցքի վրա, իսկ եթե $R=0$, ապա աստիճանային շարքը զուգամետ է միայն $x=0$ կետում: Եթե $0<R<+\infty$, ապա $x=\pm R$ կետերում շարքի զուգամիտությունը ստուգում ենք առանձին:

Գտնել հետևյալ աստիճանային շարքերի զուգամիտության տիրույթները:

1252. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n2^n}$;

1253. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(2n+1)}$;

1254. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2x^n}{(2n)!}$;

1255. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}\frac{x^{2n}}{3^n}$;

1256. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^{n^2}x^n$;

1257. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n\,\mathrm{tg}\frac{1}{n}$;

1258. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{\ln n}$;

1259. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n4^{n-1}}$;

1260. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2x-3)^n}{2n-1}$;

1261. $\frac{2x+1}{1}+\frac{(2x+1)^2}{4}+\frac{(2x+1)^3}{7}+\ldots$

1262. $\frac{x-1}{1\cdot 2}+\frac{(x-1)^2}{3\cdot 2^2}+\frac{(x-1)^3}{5\cdot 2^3}+\ldots$

1263. Գտնել զուգամիտության միջակայքը և շարքի գումարը.

ա) $1+2x+3x^2+4x^3+\ldots$

բ) $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots$

գ) $1-3x^2+5x^4-7x^6+\ldots$

դ) $x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots$

§4. ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՎԵՐԼՈՒԾՈՒՄԸ ԱՍՏԻՃԱՆԱՅԻՆ ՇԱՐՔԻ

Եթե f(x) ֆունկցիան a կետի շրջակայքում կարելի է վերլուծել աստիճանային շարքի, ապա այդ շարքը ունի հետևյալ տեսքը.

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots$$

$$\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots:$$

Այս շարքը կոչվում է f(x)-ի Թեյլորի շարք: Եթե a=0, ապա Թեյլորի շարքը անվանում են նաև Մակլորենի շարք

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^n(0)}{n!}x^n+\ldots \qquad (*)$$

Նշենք հիմնական վերլուծությունները.

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots \quad (-\infty<x<+\infty),$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots \quad (-\infty<x<+\infty),$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots \quad (-\infty<x<+\infty),$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots \quad (-1<x\le 1),$$

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots$$

$$(-1<x<1):$$

Գրնել հետևյալ ֆունկցիաների, Մակլորենի շարքի վերլուծությունների առաջին երեք զերոյից տարբեր անդամները:

1264. $e^{\cos x}$, **1265.** $\sec x$, **1266.** $\mathrm{tg}x$,

1267. $\mathrm{arctg}x$, **1268.** $\ln(x+\sqrt{x^2+1})$, **1269.** $\mathrm{th}x$:

Օգտվելով հիմնական վերլուծություններից և անվերջ երկրաչափական պրոգրեսիայի գումարի բանաձևից, հետևյալ ֆունկցիաները վերլուծել աստիճանային շարքերի, և գտնել այդ շարքերի զուգամիտության շառավիղները:

1270. $\dfrac{3x-5}{x^2-4x+3}$;

1271. $\dfrac{3x+1}{2x+1}$;

1272. $\dfrac{3}{1+x-2x^2}$;

1273. $\cos 2x$,

1274. xe^{-2x},

1275. $\sqrt[3]{8+x}$,

1276. $\ln\dfrac{1+x}{1-x}$,

1277. $\sin^2 x\cos^2 x$,

1278. $\mathrm{ch}x$,

1279. $\mathrm{sh}x$:

1279.1. Օգտվելով հիմնական վերլուծություններից գտնել հետևյալ ֆունկցիաների Մակլորենի շարքի վերլուծության զրոյից տարբեր երրորդ անդամի գործակիցը.

ա) $\sin 2x$, բ) $\cos 3x$, գ) e^{-x^2} դ) $\ln(1+5x)$, ե) $\ln(1-x)$:

1279.2. Օգտվելով e^x $\sin x$, $\cos x$ ֆունկցիաների աստիճանային շարքի վերլուծություններից ապացուցել

$$\mathbf{e^{ix} = \cos x + i\sin x}$$

Էյլերի բանաձևը:

1279.3. Էյլերի բանաձևից հետևեցնել Մուավրի բանաձևը.

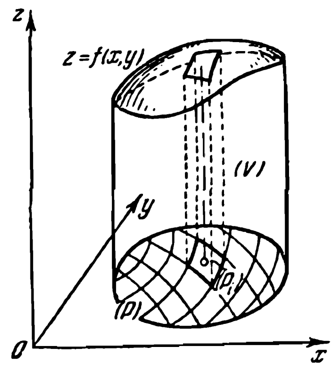
$$\mathbf{(\cos x + i\sin x)^m = \cos mx + i\,\sin mx}$$

ԳԼՈՒԽ VIII

ԿՐԿՆԱԿԻ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐ

1. Կրկնակի ինտեգրալի սահմանումը և հաշվումը

Դիցուք z=f(x,y) ֆունկցիան որոշված և սահմանափակ է XOY հարթության վրա փրված D փակ, քառակուսելի (մակերես ունեցող) փիրույթում: D-ն կորերի ցանցով փրոհենք $S_i(i=1,2,3,\dots, n)$ ենթափիրույթների, դրանց մակերեսները նշանակելով ΔS_i, իսկ փրամագծերը $\lambda_i(\lambda_i = \sup|M_1M_2|, M_1, M_2 \in S_i)$:



Յուրաքանչյուր S_i ենթափիրույթից վերցնելով մեկ $P_i(\xi_i,\eta_i)$ կեփ հաշվենք այդ կեփում ֆունկցիայի արժեքի և ենթափիրույթի ΔS_i մակերեսի արփադրյալը՝ $f(\xi_i,\eta_i)\Delta S_i$: Կազմենք բոլոր այսպիսի արփադրյալների գումարը: $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta S_i$ կոչվում է f(x,y) ֆունկցիայի ինփեգրալային գումար փարածված D փիրույթով: Եթե անկախ փիրույթի փրոհման կերպից, անկախ (ξ_i,η_i) կեփերի ընփրությունից ինփեգրալային գումարը, երբ $(\lambda = \max\limits_{i=1,2,\dots,n} \lambda_i)$ λ-ն ձգփում է 0-ի, ունի վերջավոր սահման, այսինքն $\exists \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta S_i = J$, ապա այդ սահմանը կոչվում է f(x,y) ֆունկցիայի կրկնակի ինփեգրալ D փիրույթով, այն նշանակում են

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy$$

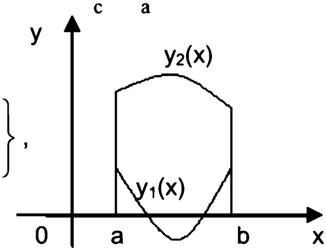
Փակ փիրույթում անընդհափ ֆունկցիան ինփեգրելի է:

Եթե D տիրույթում f(x,y)>0, ապա f(x,y)-ի կրկնակի ինտեգրալը D տիրույթով թվապես հավասար է այն մարմնի ծավալին, որը տարածվում է ուղղահայաց D տիրույթին և ընկած է D տիրույթի և z=f(x,y) մակերևույթի միջև:

Ուղղանկյուն D $(a \le x \le b,\ c \le y \le d)$ տիրույթով տարածված կրկնակի ինտեգրալը բերվում է հաջորդական ինտեգրալների հետևյալ կերպ.

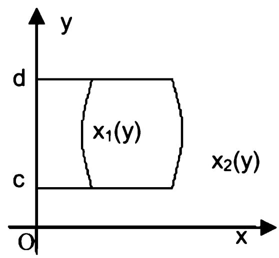
$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx :$$

Եթե $D = \left\{ (x,y) \middle| \begin{array}{l} a \le x \le b \\ y_1(x) \le y \le y_2(x) \end{array} \right\}$,



ապա $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy :$

Եթե $D = \left\{ (x,y) \middle| \begin{array}{l} c \le y \le d \\ x_1(y) \le x \le x_2(y) \end{array} \right\}$,



ապա $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx :$

Հաջորդական ինտեգրումով հաշվել հետևյալ կրկնակի ինտեգրալները

1280. $\iint\limits_D (x+y)dxdy$, եթե $0 \le x \le 1$ և $0 \le y \le 1$

1281. $\iint\limits_D xe^{xy}dxdy$, եթե $1 \le x \le 2$ և $0 \le y \le 1$

1282. $\iint\limits_D (x-y)dxdy$, եթե D-ն սահմանափակված է x=0,y=0, y=x+2 գծերով:

1283. $\iint\limits_D ye^{xy}dxdy$, եթե D-ն սահմանափակված է x=1,y=1, xy=3 գծերով:

1284. Տրված հաջորդական ինտեգրալների համար գրել կորերի հավասարումները, որոնք սահմանափակում են ինտեգրման տիրույթները և կառուցել այդ տիրույթները:

1) $\int\limits_1^2 dx \int\limits_x^{x+3} f(x,y)dy$:   2) $\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_{x^2}^{2-x^2} f(x,y)dy$:

3) $\int\limits_0^2 dy \int\limits_{2-y}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx$ 4) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{\sqrt{x}}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy$:

1285. Տրված S տիրույթում գրել $\iint\limits_S f(x,y)dxdy$ - ը հաջորդական ինտեգրալների տեսքով, տարբեր կարգերով վերցրած:

1) S տիրույթը A(1;2), B(5;2), C(5;4), D(1;4) գագաթներով ուղղանկյունն է:

2) S-ը y=x, y=x-3, y=2, y=4 գծերով սահմանափակված տիրույթն է:

3) S-ը սահմանափակված է $x^2 + y^2 = 2a^2$, $x^2 = ay (a > 0)$ կորերով, պայմանով y>0 S-ի կետերում:

4) S-ը $y^2 = ax$, $x^2 + y^2 = 2ax$, $y = 0$ գծերով սահմանափակված այն տիրույթն է, որի կետերում y>0 (a>0):

5) S-ը $x^2 + y^2 = ax$, $x^2 + y^2 = 2ax$, $y = 0$ գծերով սահմանափակված այն տիրույթն է, որի կետերում y>0 (a>0):

Հետևյալ հաջորդական ինտեգրալներում փոխել ինտեգրման կարգը:

1286. $\int\limits_{-2}^{6} dx \int\limits_{-3-\sqrt{12+4x-x^2}}^{-3+\sqrt{12+4x-x^2}} f(x,y)dy$:

1287. $\int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_{y^2-1}^{1-y^2} f(x,y)dx$:

1288. $\int\limits_{0}^{4} dx \int\limits_{\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} f(x,y)dy$:

1289. $\int\limits_{0}^{a} dx \int\limits_{\sqrt{2ax-x^2}}^{a+\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)dy$:

1290. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{y^2-1}^{\frac{y^2}{2}} f(x,y)dx$:

1291. $\int\limits_{3}^{7} dx \int\limits_{\frac{9}{x}}^{3} f(x,y)dy + \int\limits_{7}^{9} dx \int\limits_{\frac{9}{x}}^{10-x} f(x,y)dy$:

1292. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{\frac{y^2}{9}}^{y} f(x,y)dx + \int\limits_{1}^{3} dy \int\limits_{\frac{y^2}{9}}^{1} f(x,y)dx$:

1293. $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{0}^{\frac{x+2}{2}} f(x,y)dy + \int\limits_{2}^{\frac{10}{3}} dx \int\limits_{\sqrt{x^2-4}}^{\frac{x+2}{2}} f(x,y)dy$:

Հաշվել հետևյալ ինտեգրալները

1294. $\iint\limits_S \frac{dxdy}{(x+y)^2}, \ S = \left\{ (x,y) \middle| \begin{array}{l} 3 \le x \le 4 \\ 1 \le y \le 2 \end{array} \right\}$:

1295. $\iint\limits_S (5x^2y - 2y^3)dxdy, \ S = \left\{ (x,y) \middle| \begin{array}{l} 2 \le x \le 5 \\ 1 \le y \le 3 \end{array} \right\}$:

1296. $\iint\limits_S \frac{x^2dxdy}{1+y^2}, \ S = \left\{ (x,y) \middle| \begin{array}{l} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \end{array} \right\}$:

1297. $\iint\limits_S (x^2+2y)dxdy,\ S=\left\{(x,y)\middle|\begin{matrix}0\le x\le 1\\ 0\le y\le 2\end{matrix}\right\}$:

1298. $\iint\limits_S (x^2+y)dxdy,\ S=\left\{(x,y)\middle|\begin{matrix}y\ge x^2\\ x\ge y^2\end{matrix}\right\}$:

1299. $\iint\limits_S \frac{x^2}{y^2}dxdy$, որտեղ S-ը սահմանափակված է x=2, y=x, xy=1 գծերով:

1300. $\iint\limits_S \cos(x+y)dxdy$, որտեղ S-ը x=0, y=π, y=x գծերով սահմանափակված փիրույթն է:

1301. $\iint\limits_S (2x+y)dxdy$, որտեղ S-ը x+y=3, x=0, y=0 գծերով սահմանափակված փիրույթն է:

1302. $\iint\limits_S (x+6y)dxdy$, որտեղ S-ը y=5x, y=x, x=1 գծերով սահմանափակված փիրույթն է:

1303. $\iint\limits_S (x+2y)dxdy$, որտեղ S-ը $y=x^2$, $y=x^3$ գծերով սահմանափակված փիրույթն է:

1304. $\iint\limits_S (4-y)dxdy$, որտեղ S-ը $x=2\sqrt{y}$ y=1, x=0 գծերով սահմանափակված փիրույթն է:

1305. $\iint\limits_S xdxdy$, որտեղ S-ը O(0,0), A(1,1), B(0,1) գագաթներով եռանկյունն է:

1306. $\iint\limits_S \frac{dxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$, որտեղ S-ը 0 կենտրոնով և a շառավիղով շրջանի I քառորդում ընկած մասն է:

2. Փոփոխականի փոխարինում կրկնակի ինտեգրալում

Դիցուք x=x(u,v) և y=y(u,v) անընդհատ դիֆերենցելի ֆունկցիաները փոխմիարժեքորեն արտապատկերում են OXY հարթության D փակ տիրույթը OUV հարթության D′ տիրույթի վրա և արտապատկերման J յակոբիանը

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\neq 0,$$

այսինքն պահպանում է դրական կամ բացասական նշանը, ապա տեղի ունի

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D'} f(x(u,v),y(u,v))|J|dudv$$

փոփոխականի փոխարինման բանաձևը կրկնակի ինտեգրալի համար:

Անցնելով բևեռային կոորդինատների հաշվել հետևյալ կրկնակի ինտեգրալները:

1307. $\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$ **1308.** $\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(x^2+y^2)dxdy$:

1309. $\iint\limits_{\pi^2\le x^2+y^2\le 4\pi^2}\sin\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$:

1310. $\iint\limits_{\frac{\pi^2}{9}\le x^2+y^2\le\frac{\pi^2}{4}}\frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$:

1311. $\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2}e^{x^2+y^2}dxdy$ **1312.** $\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2}e^{-x^2-y^2}dxdy$:

1313. $\iint\limits_{x^2+y^2\le 2x}(x^2+y^2)dxdy$ **1314.** $\iint\limits_{x^2+y^2\le 2x+2y}(x+y)dxdy$:

1315. $$\iint\limits_{\begin{cases}(x^2+y^2)^2\le 4(x^2-y^2)\\ x\ge 0\end{cases}} \sqrt{4-x^2-y^2}\,dxdy$$

1316. $$\iint\limits_{\begin{cases}x^2+y^2\le 1\\ x\ge 0\end{cases}} \frac{dxdy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}:$$

1317. $$\iint\limits_{\begin{cases}2x\le x^2+y^2\le 4x\\ y\ge 0\end{cases}} ydxdy:$$

1318. $$\iint\limits_{1\le x^2+y^2\le e^2} \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}dxdy:$$

1319. Հաշվել Պուասոնի ինտեգրալը՝

ա) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx$, բ) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2}dx,\ \alpha>0:$

Պուասոնի ինտեգրալի հաշվումը պարամետրով

$$I^2=\int\limits_0^{+\infty} Ie^{-u^2}du=\int\limits_0^{+\infty}\left(u\int\limits_0^{+\infty} e^{-u^2t^2}dt\right)e^{-u^2}du=$$

$$=\int\limits_0^{+\infty}\left(\int\limits_0^{+\infty} ue^{-u^2t^2-u^2}dt\right)du=\int\limits_0^{+\infty}\left(\int\limits_0^{+\infty} ue^{-u^2(1+t^2)}du\right)dt$$

Անվերջ սահմաններով ինտեգրալների համար ինտեգրման կարգի տեղափոխելիության ապացույցը հենվում է ընդինտեգրալ ֆունկցիայի դրականության, անընդհատության և ներքին ինտեգրալների անընդհատության վրա:

ԳԼՈՒԽ IX

ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

§1. ՀԻՄՆԱԿԱՆ ԳԱՂԱՓԱՐՆԵՐ

Սովորական դիֆերենցիալ հավասարում է կոչվում այնպիսի հավասարումը, որի մեջ մասնակցում են x անկախ փոփոխականը, y=y(x) անհայտ ֆունկցիան (որի գտնելը դիֆերենցիալ հավասարման լուծման խնդիրն է) և նրա ածանցյալները կամ դիֆերենցիալները: Այդպիսի դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր տեսքը կլինի՝

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0:$$

Դիֆերենցիալ հավասարման մեջ մասնակցող ածանցյալների ամենաբարձր n կարգը կոչվում է դիֆերենցիալ հավասարման կարգ: Այսպես, $y''-3y'=x$ դիֆերենցիալ հավասարումը երկրորդ կարգի է, $y^{IV}=\sin x$ դիֆերենցիալ հավասարումը չորրորդ կարգի է և այլն: Եթե y=φ(x) ֆունկցիան բավարարում է դիֆերենցիալ հավասարմանը, ապա այդ ֆունկցիան կոչվում է դիֆերենցիալ հավասարման լուծում:

1320. Ստուգել որ տրված դիֆերենցիալ հավասարումների համար տրված ֆունկցիաները լուծում են:

1) $y' - \frac{y}{x} + 1 = 0,\ y = -x\ln|x|:$

2) $yy' = 1 - 2x,\ y = \sqrt{2x - 2x^2}$

3) $xy' + y = y^2,\ y = \frac{1}{1-x}:$

4) $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0,\ y = 2x:$

5) $y'' + 9y = 0,\ y = \sin 3x + \cos 3x:$

Եթե n-րդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարման լուծումը պարունակում է n հատ կամայական հաստատուններ, որոնց քանակը հնարավոր չէ պակասեցնել նոր նշանակումներով, ապա այդպիսի լուծումը կոչվում է դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծում՝

$$y=\varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n):$$

Եթե ընդհանուր լուծումը ստացվում է անբացահայտ տեսքով՝

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, ..., C_n)=0,$$

ապա այն անվանում են դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր ինտեգրալ:

1321. Ստուգել, որ $y=C_1e^x+C_2e^{-x}$ ֆունկցիան $y''-y=0$ երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումն է:

Ընդհանուր լուծման (ինտեգրալի) մեջ մտնող կամայական հաստատուններին տալով տարբեր թվային արժեքներ, ընդհանուր լուծումից ստանում ենք մասնակի լուծումներ (ինտեգրալներ): Դիֆերենցիալ հավասարման որոշակի մասնակի լուծում ստանալու համար տրված են լինում այսպես կոչված սկզբնական պայմաններ:

§2. ԱՌԱՋԻՆ ԿԱՐԳԻ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

Ածանցյալի նկատմամբ լուծված առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր տեսքն է

$$y'=f(x;y): \qquad (*)$$

Այս հավասարման լուծման եղանակները կախված են $f(x;y)$ ֆունկցիայի բնույթից:

1. Անջատվող փոփոխականներով դիֆերենցիալ հավասարումներ

Եթե (*)-ի մեջ $f(x;y)=f_1(x)\cdot f_2(y)$, ապա ստացված $y'=f_1(x)\cdot f_2(y)$, հավասարումը կոչվում է անջատվող փոփոխականներով դիֆերենցիալ հավասարում: Ցույց տանք այս հավասարման լուծման եղանակը:

$$y'=f_1(x)\cdot f_2(y)\Rightarrow \frac{dy}{dx}=f_1(x)\cdot f_2(y)\Rightarrow \frac{dy}{f_2(y)}=f_1(x)dx:$$

Փոփոխականները անջատվեցին, ինտեգրում ենք հավասարման երկու կողմերը.

$$\int\frac{dy}{f_2(y)}=\int f_1(x)dx+c:$$

Ինտեգրումը կատարելուց հետո կստանանք հավասարման ընդհանուր ինտեգրալը:

1322. Լուծել հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումները.

1) $2yy'=3x;$ 2) $y^2y'+x^2=1;$

3) $y'=e^{x+y};$ 4) $y'\,tgx=y;$

5) $y'+\frac{x\sin x}{y\cos y}=0;$ 6) $ye^{2x}dx-(1+e^{2x})dy=0;$

7) $dy-2\sqrt{y}\ln x dx=0;$ 8) $y'=\cos(x+y);$

9) $y'=y(1+\cos x);$ 10. $y'=3y:$

1323. Գտնել տրված սկզբնական պայմանին բավարարող մասնակի լուծումը.

1) $(1+y^2)dx-xydy=0,\quad y(1)=0:$

2) $y'\sin x=y\ln y,\quad y(\frac{\pi}{2})=e:$

3) $x^2y'+y^2=0,\quad y(-1)=1:$

4) $y'=x-\sin 2x,\quad y(0)=4{,}5:$

2. Առաջին կարգի համասեռ դիֆերենցիալ հավասարումներ.

Եթե (*)–ի մեջ f(x;y) ֆունկցիան զրո կարգի համասեռ ֆունկցիա է, այսինքն բոլոր թույլատրելի t թվերի համար տեղի ունի f(tx; ty)= f(x;y) պայմանը, ապա (*) հավասարումը կոչվում է համասեռ դիֆերենցիալ հավասարում: Նշենք, որ զրո կարգի համասեռ ֆունկցիան կախված է միայն արգումենտների հարաբերությունից, այսինքն համասեռ հավասարումը գրվում է $y'=\varphi(\frac{y}{x})$ տեսքով և $\frac{y}{x}=u(x)$ նշանակումով բերվում է անջատվող փոփոխականներով դիֆերենցիալ հավասարման:

1324. Լուծել հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումները.

1) $y'=\frac{x-y}{y+x}$; 2) $(x-y)dx+xdy=0$;

3) $y'=\frac{2xy}{x^2-y^2}$; 4) $xy'=y\ln\frac{y}{x}$;

5) $x(y'+e^{\frac{y}{x}})=y$; 6) $xy'-y=\sqrt{x^2-y^2}$;

7) $(2x-y+4)dy+(x-2y+5)dx=0$;

8) $(x+y+1)dx+(2x+2y-1)dy=0$:

1325. Գտնել տրված սկզբնական պայմանին բավարարող մասնակի լուծումը.

1) $y'=\frac{y^2-2xy-x^2}{y^2+2xy-x^2}$, $y(1)=-1$:

2) $(\sqrt{xy}-x)dy+ydx=0$, $y(1)=1$:

3) $xy'=y(1+\ln\frac{y}{x})$, $y(1)=\frac{1}{\sqrt{e}}$:

4) $(x^2+y^2)dx-2xydy=0$, $y(4)=0$:

3. Առաջին կարգի գծային և Բեռնուլիի դիֆերենցիալ հավասարումներ

Առաջին կարգի գծային դիֆերենցիալ հավասարում է կոչվում հետևյալ տեսքի հավասարումը.

$$y'+p(x)y=q(x):$$

Այս հավասարման լուծումը փնտրենք $y=u(x)v(x)$ տեսքով: Տեղադրելով հավասարման մեջ, կստանանք.

$$(u(x)v(x))'+p(x)u(x)v(x)=q(x)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow u'(x)v(x)+(v'(x)+p(x)v(x))u(x)=q(x):$$

v(x) անհայտ ֆունկցիան ընտրենք այնպես, որ

$$v'(x)+p(x)v(x)=0\Rightarrow\frac{dv}{dx}=-p(x)v(x)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\frac{dv}{v(x)}=-p(x)dx\Rightarrow\int\frac{dv}{v}=-\int p(x)dx\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ln|v|=-\int p(x)dx\Rightarrow v=e^{-\int p(x)dx}$$

Այսպես ընտրված v(x) ֆունկցիայի համար տրված դիֆերենցիալ հավասարումը կընդունի u′(x)v(x)=q(x) տեսքը: Սա նույնպես անջատվող փոփոխականներով դիֆերենցիալ հավասարում է, որը լուծելով գտնում ենք u(x) ֆունկցիան և հետևաբար y=u(x)v(x) ընդհանուր լուծումը:

$y'+p(x)y=q(x)y^n$ Բեռնուլիի հավասարումը $z=y^{1-n}$ տեղադրումով բերվում է առաջին կարգի գծային դիֆերենցիալ հավասարման:

Բեռնուլիի հավասարումը նույնպես կարելի է լուծել y=u(x)·v(x) տեղադրումով:

1326. Լուծել հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումները.

1) $y'+2y=4x;$ 2) $y'+2xy=xe^{-x^2}$

3) $(1+x^2)y'=2xy+(1+x^2)^2\cdot$ 4) $y'+\frac{y}{x}=2\ln x+1;$

5) $y'=\frac{2y}{x+1}+e^x(1+x)^2;$ 6) $xy'+x^2+xy=y;$

7) $y'+\frac{y}{x}+xy^2=0;$ 8) $2xyy'-y^2+x=0;$

9) $y'x+y=-xy^2\cdot$ 10) $y'-xy=-y^3e^{-x^2}$

11) $x^2y'=y^2+xy:$ 12) $y'+xy=(1+x)e^{-x}y^2$

1327. Գտնել տրված սկզբնական պայմաններին բավարարող մասնակի լուծումները.

1) $y'+y\operatorname{tg}x=\sec x, \qquad y(0)=0:$

2) $xy'-\dfrac{y}{x+1}=x, \qquad y(1)=0:$

3) $y'=(2y+1)\operatorname{ctg}x, \qquad y(\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{1}{2}:$

4) $t^2\dfrac{ds}{dt}=2st-3, \qquad S(-1)=1:$

4. Լրիվ դիֆերենցիալով հավասարումներ

Առաջին կարգի հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումը

$$P(x;y)dx+Q(x;y)dy=0 \qquad (1)$$

կոչվում է լրիվ դիֆերենցիալով հավասարում, եթե հավասարման ձախ մասը մի ինչ-որ u(x;y) ֆունկցիայի լրիվ դիֆերենցիալ է

$$du=P(x;y)dx+Q(x;y)dy:$$

$\dfrac{\partial P}{\partial y}$-ի և $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$-ի անընդհատության դեպքում հավասարումը կլինի լրիվ դիֆերենցիալով, եթե $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}:$

(1) հավասարումը կարելի է արտագրել du=0 տեսքով: Այս հավասարման ընդհանուր ինտեգրալը կլինի u(x;y)=C, որտեղ C-ն կամայական հաստատուն է: Այսպիսով, որպեսզի լուծենք լրիվ դիֆերենցիալով հավասարումը, պետք է գտնենք նշված u(x;y) ֆունկցիան, որը որոշվում է

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P(x;y) \text{ և } \frac{\partial u}{\partial y}=Q(x;y)$$

հավասարումներից, շնորհիվ $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ պայմանի:

1328. Լուծել հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումները, նախօրոք ստուգելով, որ նրանք լրիվ դիֆերենցիալով հավասարումներ են:

1) $(1-6xy^2)dx+(3y^2-6x^2y)dy=0;$

2) $(x+y)dx+(x+2y)dy=0;$

3) $(2x^3-xy^2)dx+(2y^3-x^2y)dy=0;$

4) $(3x^2+6xy-2y^2)dx+(3x^2-4xy-3y^2)dy=0;$

5) $xdx+ydy=\dfrac{xdy-ydx}{x^2+y^2};$

6) $(y+\dfrac{2}{x^2})dx+(x-\dfrac{3}{y^2})dy=0;$

7) $(2x-ye^{-x})dx+e^{-x}dy=0;$

8) $(\sin y-y\sin x+\dfrac{1}{x})dx+(x\cos y+\cos x-\dfrac{1}{y})dy=0;$

9) $(3x^2-2y)dx+2(y-x)dy=0:$

1329. Գտնել տրված սկզբնական պայմանին բավարարող մասնակի ինտեգրալը:

1) $(10xy-8y+1)dx+(5x^2-8x+3)dy=0, \quad y(3)=1;$

2) $(x+e^{\frac{x}{y}})dx+e^{\frac{x}{y}}(1-\dfrac{x}{y})dy=0, \quad y(0)=2:$

§3. ԿԱՐԳԻ ԻՋԵՑՈՒՄ ԹՈՒՅԼԱՏՐՈՂ ԲԱՐՁՐ ԿԱՐԳԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

1. $F(x,y',y'')=0$

պարունակում բացահայտ տեսքով լուծվում է $y'=p,\ y''=\dfrac{dp}{dx}$ տեղադրումով՝ բերվում է $F(x,p,p')=0$ տեսքի հավասարման:

2. $F(y, y', y'') = 0$

պարունակում $y' = p,\ y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx},\ y'' = \frac{dp}{dy} \cdot p$ տեղադրումով

բերվում է $F(y,\ p,\ \frac{dp}{dy}p) = 0$ տեսքի հավասարման:

1330. Կատարելով կարգի իջեցում գտնել դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը կամ ընդհանուր ինտեգրալը:

1) $y''x\ln x = y'$: 2) $2yy'' = (y')^2 + 1$: 3) $y'' + 2y(y')^3 = 0$:

4) $y''\,\mathrm{tg}\,y = 2(y')^2$ 5) $xy'' - y' = e^x x^2$ 6) $y''y^3 = 1$:

1331. Գտնել հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումների ընդհանուր լուծումները.

1) $y'' = \frac{1}{\cos^2 x}$: 2) $y'' = \frac{1}{1 + x^2}$:

3) $y''' = \frac{6}{x^3}$: 4) $y'' = xe^{2x}$

§4. ԵՐԿՐՈՐԴ ԿԱՐԳԻ ՀԱՍՏԱՏՈՒՆ ԳՈՐԾԱԿԻՑՆԵՐՈՎ ԳԾԱՅԻՆ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

Այդպես են կոչվում $y'' + py' + qy = f(x)$ տեսքի դիֆերենցիալ հավասարումները, ընդ որում եթե f(x)=0, ապա ստացված $y'' + py' + qy = 0$ հավասարումը կոչվում է համասեռ, հակառակ դեպքում՝ ոչ համասեռ: Եթե r_1-ը և r_2-ը բնութագրիչ $r^2 + pr + q = 0$ հավասարման արմատներն են, ապա համասեռ հավասարման ընդհանուր լուծումը գրվում է հետևյալ տեսքով.

ա) $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$, եթե $D = p^2 - 4q > 0,\ r_1 \neq r_2$;

բ) $y = e^{r_1 x}(C_1 + C_2 x)$, եթե $D = p^2 - 4q = 0,\ r_1 = r_2$;

գ) $y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$, եթե $D = p^2 - 4q < 0,\ r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$:

1332. Լուծել հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումները.

1) $y''-5y'+6y=0;$ 2) $y''+4y'-21y=0;$
3) $3y''-5y'+2y=0;$ 4) $y''-7y=0;$
5) $y''+2y'+y=0;$ 6) $4y''-12y'+9y=0;$
7) $y''+y=0;$ 8) $y''-4y'+13y=0;$
9) $y''+3y'-10y=0;$ 10) $4y''+4y'+y=0;$
11) $y''-8y'+41y=0:$

1333. Գտնել սկզբնական պայմաններին բավարարող մասնակի լուծումը.

1) $y''-5y'+4y=0, \quad y(0)=y'(0)=1:$
2) $y''-2y'+y=0, \quad y(2)=1, y'(2)=-2:$

Ոչ համասեռ հավասարման ընդհանուր լուծումը գրվում է՝ $y=\bar{y}(x)+y_0(x)$ տեսքով, որտեղ $\bar{y}(x)$-ը համապատասխան համասեռ հավասարման ընդհանուր լուծումն է, իսկ $y_0(x)$-ը տրված ոչ համասեռ հավասարման որևէ մասնակի լուծումը: Այդ մասնակի լուծումը փնտրում ենք ելնելով f(x)-ի հատուկ տեսքից, կամ ավելի ընդհանուր՝ հաստատունի վարիացիայի մեթոդով:

1334. Գտնել հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումների ընդհանուր լուծումները:

1) $y''+4y'-5y=1;$ 2) $y''-2y'+2y=2x;$
3) $y''-6y'+9y=2x^2-x+3;$ 4) $2y''+5y'=5x^2-2x-1;$
5) $y''-7y'+6y=\sin x;$ 6) $2y''+y'-y=2e^x\cdot$
7) $12y''+y'-y=3x^2+7;$ 8) $y''-y'-6y=e^x+\sin 3x;$
9) $y''-5y'+6y=13\sin 3x;$ 10) $y''-m^2y=e^{-mx}$

1335. Գտնել տրված սկզբնական պայմաններին բավարարող մասնակի լուծումը:

1) $y''-2y'+10y=10x^2+18x+6,$ $y(0)=1, y'(0)=3{,}2:$

2) $4y''+16y'+15y=4e^{-\frac{3}{2}x}$ $y(0)=3, y'(0)=-5{,}5:$

3) $y''+y=x+2e^x,$ $y(0)=2, y'(0)=7:$

4) $y''-2y=xe^{-x},$ $y(0)=4, y'(0)=-3:$

Հետևյալ հավասարումները լուծել հաստատունների վարիացիայի մեթոդով:

$y_0(x)=A(x)y_1(x)+B(x)y_2(x),$ $A(x),$ $B(x)$ ֆունկցիաները որոշվում են

$$\begin{cases} A'y_1+B'y_2=0 \\ A'y_1'+B'y_2'=f(x) \end{cases}$$ համակարգից:

1336. $y''+4y=\dfrac{1}{\sin 2x};$

1337. $y''+y=\operatorname{tg}x;$

1338. $y''-2y'+y=\dfrac{e^x}{x^2};$

1339. $y''+4y'+4y=\dfrac{e^{-2x}}{x^3}:$

1340. Լուծել հավասարումները:

1) $4y''-y=x^3-24x;$

2) $y''-y=e^{-x};$

3) $2yy''=(y')^2;$

4) $y''\operatorname{tg}x=y'+1;$

5) $yy''+(y')^2=0;$

6) $x^3y''+x^2y'=1;$

7) $2y'+y=y^3(x-1);$

8) $x^2y'=y^2-xy:$

ՊԱՏԱՍԽԱՆՆԵՐ

2. $\{1,2,...,6,8,10,12\}$, $\{2,4,10\}$, $\{1,3,5,12\}$, $\{6,8\}$: ***4.*** $(-3;5),[0,2],(-3,0),(2,5)$:

11. $\varphi(x)=\begin{cases}0{,}5, \text{եթե } x=0\\ \dfrac{1}{n+2}, \text{եթե } x=\dfrac{1}{n}, n\in N\\ x, \text{եթե } x\neq\dfrac{1}{n}, 0\end{cases}$ ***14.*** 2^n ***20.*** $\sup[2,3)=3, \inf[2,3)=2$:

21. 1)1,0: 2)0,-5: 3)1,0: 4)+∞,5: ***22.*** Ոչ: Ոչ: ***24.*** 8, $\dfrac{3x-2}{x+1}$, $3+\dfrac{5}{x}, \dfrac{2x+3}{1-x}, \dfrac{6x+2}{2x-1}, \dfrac{3t+2}{t-1}$: ***25.*** 1)$[-1;5]$: 2)$(-1;3)$: 3)$(1,+\infty)$: 4)$\left[-\dfrac{3}{2},\dfrac{5}{2}\right]$: 5)$(-\infty,5)$: 6)$(-1,1)\cup(2,+\infty)$: 7)$[-1,7]$: 8)$(-2,-1)\cup(-1,1]$: 9)$(0,1)\cup(1,+\infty)$: 10)$\left[-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k;\dfrac{\pi}{2}+2\pi k\right], k\in z$: 11)$\left(-\infty,\dfrac{5}{2}\right)$: 12)$[1,e]$:

13)$\dfrac{\pi}{2}+2\pi k\ \ k\in z$: ***26.*** 0, 0, 4: ***27.*** 1, $\dfrac{1+x}{1-x}$, $\dfrac{-x}{x+2}$, $\dfrac{2}{1+x}$: ***28.*** $-5x^2-7$, $2x^3+x$: ***31.*** 1)$3x^2-7x+6$: 2)$\dfrac{1}{x}+x^2$ ***33.*** 1)զ.: 2)կ.: 3) -: 4)կ: 5)զ.: 6)կ.: 7)-.: 8)զ: 9)զ.: 10)կ.: 11)կ.: 12)-.: ***34.*** 1)$\dfrac{2\pi}{5}$: 2)6π: 3)π: 4)$\dfrac{2\pi}{a}$: 5)$\dfrac{\pi}{2}$: 6)π: 7)6π: 8)–: 9)–: ***39.*** ա) $y=\dfrac{x-3}{2}$; R բ) $y=-\sqrt[4]{x}$; $[0,+\infty)$: գ) $y=\sqrt[4]{x}$ դ) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$; $R\setminus\{-1\}$: ե) $y=-\sqrt{4-x^2}$; $[0,2]$: զ) $y=\sqrt{4-x^2}$ $[0, 2]$

է) $y=\begin{cases}x, & x\in(-\infty,1)\\ \sqrt{x}, & x\in[1,16]\\ \log_2 x, & x\in(16,+\infty)\end{cases}$; ը) $y=\begin{cases}x^3, & x\in(-\infty,0)\\ 0{,}5x, & x\in[0, 4]\\ \sqrt{x}, & x\in(4, +\infty)\end{cases}$ ***63.*** $23+\sqrt{17}$

64. (5;0): ***65.*** 1)5: 2)$\sqrt{74}$: 3)$6\sqrt{2}$ ***66.*** $5+\sqrt{17}+\sqrt{26}$ ***69.*** $\beta>90^0$: ***70.*** -3 կամ 7: ***71.*** (0,-6), (0,10): ***72.*** (5;0): ***73.*** (4;4), (20;20): ***74.*** (-10;15), (14;15): ***75.*** 8,5; ***76.*** $\sqrt{5}/2$: ***77.*** $\dfrac{\sqrt{290}}{2}, \dfrac{\sqrt{170}}{2}, 5\sqrt{2}$: ***78.*** (-5,-4),(1,8),(7,0):

79. (9,6),(-7,-2),(1;14): ***80.*** $\left(-\dfrac{3}{2},6\right),\left(-\dfrac{15}{4},7\right),\left(\dfrac{3}{4},5\right)$: ***81.*** (6,2), (4,-2):

82. (-2,-2),(1,0),(4,2),(7,4): ***83.*** $\left(\frac{11}{5},\frac{32}{5}\right)$: ***84.*** (-5,5;-3,5): ***85.*** (10/3;-8/3):

86.(-1,-2)(5,8): ***87.*** $42, 7\sqrt{2}$: ***88.***(4,3): ***89.*** $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$: ***90.***(-2,1):

91.(3,4), $\left(\frac{7}{2},\frac{1}{2}\right)$,(5,6), $\left(\frac{1}{2},\frac{11}{2}\right)$: ***92.*** 11x-5y+14=0: ***93.*** x+y-3=0: ***94.*** $y^2=4x+4$:

95. $y=0,25x^2-x+2$: ***96.*** $x=-\frac{y^2}{4}-\frac{y}{2}-\frac{9}{4}$: ***97.*** y=3: ***98.*** $(x+6)^2+(y-4)^2=32$:

99. $x^2+y^2=9$: ***100.*** $3x^2-y^2=48$: ***101.*** $x^2+5y^2=5$: ***102.*** $y=2,\ |x|\geq 2$: ***103.*** $\frac{5}{2}$:

104. $\left(5,\frac{7}{2}\right)$: ***105.*** Անցնում է A և D, իսկ չի անցնում B և C կետերով:

106. 1) $\frac{5}{7},2$: 2) $-\frac{2}{3},-3$: 3)Չունի, չի կտրում: 4) $\frac{7}{4},0$: ***107.*** 1) $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x+4$:

2) $y=\sqrt{3}x+4$: 3) $y=-\sqrt{3}x+4$: 4) $y=\frac{-1}{\sqrt{3}}x+4$: ***108.*** 1) y=x: 2) $y=\sqrt{3}x$:

3)y=-x: 4)y=0: ***109.*** $\frac{\pi}{6}$: ***110.*** $\frac{x}{4}+\frac{y}{-5}=1$: ***111.*** 1) $\frac{x}{2}+\frac{y}{5}=1$: 2) $\frac{x}{-2}+\frac{y}{5}=1$:

3) $\frac{x}{-2}+\frac{y}{-5}=1$: 4) $\frac{x}{2}+\frac{y}{-5}=1$: ***112.*** 1) $\frac{x}{5}+\frac{y}{-3}=1$: 2) $\frac{x}{-4}+\frac{y}{-8/3}=1$:

3) $\frac{x}{2/3}+\frac{y}{-2}=1$: 4) $\frac{x}{1}+\frac{y}{1}=1$: ***113.*** 9: ***114.*** 1) a=7, b=3: 2) a= -2, b=3:

3)a=4,b=3: 4)0(0,0),(3,2): 5) a=1,b= -2: 6) $\left(\frac{3}{5},0\right),\left(\frac{3}{5},2\right)$: 7)0(0,0),(0,2):

8) $\left(0,-\frac{3}{2}\right),\left(2,-\frac{3}{2}\right)$: 9) (0,0), (2,0): ***115.*** $y=-\sqrt{3}x+1-3\sqrt{3}$ ***116.***1)0:

2) $\frac{\pi}{2}$: 3) $\frac{\pi}{4}$: 4)0: 5) $\frac{\pi}{2}$: 6) $\frac{\pi}{4}$: 7) $\frac{3\pi}{4}$: 8) $\pi-\mathrm{arctg}\frac{23}{14}$: 9) $\frac{\pi}{3}$: ***117.*** 1)y=7: 2)x=-3:
3)5x-2y+29=0: 4)x+3y-18=0: ***118.*** 1)2x-y+1=0; 2)3x+7y-41=0;
3)y=5; 4)x=2: ***119.*** 1)7x+13y-20=0: 2) 9x-4y-5=0: ***120.*** x+6y+9=0:
121. 2x-3y+11=0: ***122.*** 2x+3y-14=0: ***123.*** 1) $\frac{3\pi}{4}$: 2) $\frac{\pi}{6}$: 3) $\pi-\mathrm{arctg}\frac{4}{3}$
4) $\pi-\mathrm{arctg}9$: ***124.*** 5x+2y=0: ***125.*** 3x+2y-12=0: ***126.*** x-y+8=0:

127. 2x+3y+14=0: ***128.*** $\left(\frac{8}{3},-2\right)$: ***129.*** 2x-5y-4=0, 2x-5y+25=0:
130. 2x-y+1=0, x+3y-10=0, 3x-5y-2=0: ***131.*** x-4y-2=0, x+4y+6=0, x=6: ***132.*** 3x-8y+12=0, 9x-y-10=0, 6x+7y-22=0: ***133.*** 8x+14y-7=0, 14x+4y+39=0, 6x-10y+5=0: ***134.*** 3x-2y=0, x+y-8=0: ***135.*** y=x: ***138.*** x+5y-17=0: ***139.*** x-2y+3=0: ***140.*** 3x-y-10=0, x+y-2=0: ***141.*** (1,0): ***142.*** $\left(1,\frac{1}{2}\right)$: ***143.*** (3,-5): ***144.*** 1)Չունի, 2) չունի, 3) ունի, 4) չունի, 5) ունի, 6) ունի: ***145.*** 1) $\sqrt{2}x+\sqrt{2}y-6=0$: 2) $x-\sqrt{3}y+6=0$:
3) $\sqrt{2}x-\sqrt{2}y-6=0$: ***146.*** 1) $\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y-5=0$: 2) $-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-\frac{13}{10}=0$:
3) $-\frac{2}{\sqrt{5}}x+\frac{1}{\sqrt{5}}y-\sqrt{5}=0$: 4) $\frac{\sqrt{2}}{3}x-\frac{\sqrt{7}}{3}y-\frac{5}{2}=0$: ***147.*** 1) $\frac{5}{2},\left(\frac{5}{3},-\frac{5\sqrt{5}}{6}\right)$:
2) $8,\left(-\frac{24}{5},\frac{32}{5}\right)$: ***148.*** 1) $\frac{1}{2}$: 2)0: 3) $\frac{\sqrt{34}}{2}$: ***149.*** $\frac{12\sqrt{5}}{5}$: ***150.*** 1)x-4y-2=0:
2) $\frac{19}{\sqrt{17}}$: 3) $\operatorname{arctg}\frac{25}{19}$: ***151.*** 6x-8y-55=0;6x-8y+25=0: ***152.*** $2\sqrt{6}x+5y+21=0$;
$2\sqrt{6}+5y-49=0$: ***153.*** $\frac{\sqrt{34}}{2}$: ***154.*** 4: ***155.*** $\frac{5}{\sqrt{2}}$: ***156.*** 3x+21y-19=0, 21x-3y-29=0: ***157.*** x-3y-2=0, 3x+y-12=0: ***158***. 5x-12y-65=0, 5x+12y-65=0: ***159.*** y=2, 3x+4y+10=0: ***160.*** $\frac{8}{5},8$: ***161.*** (0,0), (0,1):
162. 3x+4y-10=0, x-2y+10=0, 3x-y-5=0: ***163.*** 7x+9y+17=0, 8x+3y-17=0, x-6y+17=0: ***164.*** (4,10): ***165.*** (4,0): ***166.*** $\left(5-2\sqrt{3}\right)x'-\left(5\sqrt{3}+2\right)y'+28=0$:
167. (5,5), (3,-3), (10,-6): ***168.*** 1) $A\left(\frac{3+4\sqrt{3}}{2},\frac{-4+3\sqrt{3}}{2}\right)$, $B\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2},\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$, $C\left(4\sqrt{3},-4\right)$:
2) $A\left(\frac{7\sqrt{2}}{2},\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$, $B\left(\sqrt{2},0\right)$, $C\left(4\sqrt{2},-4\sqrt{2}\right)$: 3) $A\left(\frac{4+3\sqrt{3}}{2},\frac{3-4\sqrt{3}}{2}\right)$, $B\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2},\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$, $C(4,-4\sqrt{3})$: ***169.*** $x'=x+4,\ y'=y+5$: ***170.*** 1) $y'^2=4x',\ y'=y+2, x'=x-3$:
2) $x'^2+y'^2=169,\ x'=x-6, y'=y+9$: 3) $x'^2+4y'^2=16,\ x'=x-3, y'=y+1$:
4) $x'^2+y'^2=25,\ y'=y+7, x'=x-6$: ***171.*** $x=x'-\frac{5}{3},\ y=y'+\frac{4}{3}, y'=\frac{-29}{x'}$:
172. 1) $x'^2+4y'^2=16$: 2) $x'^2-4y'^2=16$: ***173.*** 1) 45^0, 2) arctg2:

176. $(x+3)^2+(y-4)^2=9$: ***177.*** 1) Հատում է, 2) Շոշափում է, 3) Չունի ընդհանուր կետ: ***178.*** 1) (-2,3),2: 2) (3,-1),4: 3) $\left(2,\frac{1}{3}\right),\frac{1}{3}$: 4) (4,-3),5: 5) (-5,9),6: ***179.*** 2x-5y+19=0: ***180.*** $x^2+(y-3)^2=18$: ***181.*** $(x-1)^2+(y-1)^2=1$, $(x-5)^2+(y-5)^2=25$:

182. $(x-2)^2+(y+2)^2=4$:$(x-4+2\sqrt{3})^2+(y+4-2\sqrt{3})^2=(4-2\sqrt{3})^2$

183. $(x+3)^2+(y-3)^2=9$: ***184.*** $(x-3)^2+(y+4)^2=9$, $(x+3)^2+(y+4)^2=9$:

185. $(x-3)^2+(y+1)^2=89$: ***186.*** ± 2: ***187.*** (5,-6): ***188.*** $(x-6)^2+(y-7)^2=36$:

189. 2: ***190.*** $(x+4)^2+(y+1)^2=25$: ***191.*** $\sqrt{10}, \sqrt{2,5}, (2-\sqrt{7,5},3),(2+\sqrt{7,5},3)$:

192. 24,18, $(-3\sqrt{7},0),(3\sqrt{7},0)$: ***193.*** 5,2, $(-\sqrt{21},0),(\sqrt{21},0)$: ***194.*** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{36/25}=1$:

195. $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$: ***196.*** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$: ***197.*** $\frac{x^2}{30}+\frac{y^2}{24}=1$: ***198.*** $\frac{x^2}{50}+\frac{y^2}{25}=1$:

199. 1) Հատվում են: 2) Չեն հատվում: ***200.*** 1) $3,\sqrt{5}$: 2) 5,4: 3) $4, 2\sqrt{3}$

201. $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$ ***202.*** 3,4,(-5,0),(5,0), $y=\pm\frac{4}{3}x$: ***203.*** 1) $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{51}=1$

2) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ կամ $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$: ***204.*** $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{72}=1$: ***205.*** $(-2\sqrt{10},0),(2\sqrt{10},0), y=\pm\frac{1}{3}x$:

206. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$: ***207.*** $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{20}=1$: ***208.*** a=b=$\sqrt{10}$: ***209.*** 1)4x-3y-17=0, 4x+3y+1=0: 2)3x-4y+19=0, 3x+4y+11=0: ***210.*** 3, (2,1): ***211.*** 1)$y^2=16x$, 2)$y^2=6x$: ***212.*** 1)$y^2=-3x$, 2) $x^2=12y$: ***213.*** $y=-2(x-2)^2+2$:

214. $(1,2\sqrt{3}),(1,-2\sqrt{3})$: ***215.*** (2, -1), $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$: ***216.*** 1)(2,0),2:2)(0,2), $\frac{1}{2}$:

3)(1,3), $\frac{1}{8}$: 4)(-4,3),p=1: ***217.*** $\frac{a\sqrt{5}}{2}$: ***218.*** $2(k^2x^2+y^2)=a^2(k^2+1)$,

եթե $k=1$ $x^2+y^2=a^2$ ***219.*** $3a^2\sqrt{3}$ ***221.*** $\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$: ***224.*** xy=4:

228. ա) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$, բ) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$, գ) $y^2=6x$: ***229.*** $\sqrt{145},\sqrt{26},13$:

231. 1) $\sqrt{57}$:2) $\sqrt{19}$ ***232.*** $2\sqrt{17}, 2\sqrt{10}, 10$: ***233.*** (-3,4,6): ***234.*** $\left(-\frac{9}{5},0,0\right)$:

235. $\left(-3,\frac{3}{4},0\right)$: **236.** $\left(0,0,\frac{8}{3}\right)$: **238.** (5,-5,-8), (-1,4,13): **239.** $\frac{2}{3}$: **240.** $\left(6,3,\frac{20}{3}\right)$:

241. $\left(\frac{15}{4},\frac{17}{4},0\right)$: **242.** 4x+5y+z-14=0: **243.** 1)z=1, 2)10x-3y+17=0:

244. 2x+3y+8z-40=0: **245.** x-2y-3z+14=0: **246.** x+y+z-=0:

247. 1) $\frac{-11x}{15}+\frac{2}{3}y-\frac{2}{15}z-2=0$, 2) $-\frac{6}{11}x+\frac{2}{11}y+\frac{9}{11}z-4=0$,

3) $\frac{x}{\sqrt{14}}+\frac{2y}{\sqrt{14}}-\frac{3z}{\sqrt{14}}-\frac{1}{\sqrt{14}}=0$: **248.** 6: **249.** 1) $\frac{11}{6}$, 2) $\frac{36}{7}$, 3) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ **250.** $2\sqrt{2}$

251. 2: **252.** $\frac{2}{15},\frac{-11}{15},\frac{2}{3}$: **253.** $\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{-2}{3}$: **254.** x+4y+2z-2=0: **255.** 3y+2z=0:

256. $\arccos\frac{2}{3},\arccos\frac{-2}{3},\arccos\frac{1}{3}$: **257.** 8: **258.** 3x-2y+6z+19=0:

259. 1)Հատվում են, 2) Հատվում են, 3) Զուգահեռ են, 4) Զուգահեռ են:

260. 1) $-\frac{1}{2}$: 2) $-\frac{2}{7}$: **261.** x+2y-3z-12=0: **262.** 3x-y=0, x+3y=0:

263. 2y-5z+10=0: **264.** $\frac{x-3}{1}=\frac{y-5}{1}=\frac{z}{-1}$: **265.** 1) Ոչ: 2) Այո: 3) Ոչ:

266. 1) -6: 2) 9: **267.** 1) $\frac{x}{3}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{1}$: 2) $\frac{x}{4}=\frac{z}{-6}=\frac{y}{0}$: 3) y=0 և z=0:

268. 1) Այո: 2) Ոչ: **269.** 1) $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z+3}{5}$: 2) $\frac{x-2}{5}=\frac{y}{2}=\frac{z+3}{-1}$:

3)y=0 և z=-3: 4)x=2 և y=0: 5) $\frac{x-2}{-2}=\frac{y}{4}=\frac{z+3}{5}$: **270.** 1) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-1}{-2}$:

2) $\frac{x-3}{-2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{-3}$: 3) $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{-5}$: 4) $\begin{cases} x-3y=-7 \\ z=5 \end{cases}$ **271.** $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$:

272. $\frac{x+4}{1}=\frac{y-3}{3}=\frac{z}{5}$: **273.** (0,1,0): **274.** $\arccos 20/21$: **275.** 1)(0,-5,1),

2) չեն հատվում, 3) $\ell\subset P$: **276.** $\arcsin\frac{\sqrt{6}}{6}$: **277.** x+2y-2z-1=0:

278. x-2y+z+5=0: **279.** (5,5,-2): **280.** (5,5,5): **281.** 3x+2y+z-8=0:

282. (-1;2;2), $\pi/6$: **283.** 8x-5y+z-11=0: **284.** $\sqrt{30}$: **290.** 1: **293.** ա) $2\pm 3i$,

բ) $-2\pm 3i$: **294.** ա) $3\pm 2i$, բ) $-3\pm 2i$: **295.** ա) $2\pm 1{,}5i$, բ) $-2\pm 1{,}5i$:

296. ա)Այո, բ)ոչ, գ)ոչ, դ)ոչ, ե)ոչ, զ)այո, է)այո: **302.** $\alpha=\arccos\frac{x}{|\vec{a}|}$,

$\beta=\arccos\frac{y}{|\vec{a}|}$, $\gamma=\arccos\frac{z}{|\vec{a}|}$: ***303.*** 13: ***303.1.*** 0: ***303.2.*** $2\sqrt{39}$ ***304.*** (17,3,0):

305.(9,-11,-2,15): ***306.***(0,11,2,-2): ***307.***(1,2,3,4): ***308.*** $\sqrt{110}$ ***310.*** $\bar{a}\perp\bar{b}, \bar{a}\parallel\bar{c}$:

311. 0,6: ***312.*** 1,1: ***313.*** 1) $\arccos\frac{-3\sqrt{5}}{7}$: 2) $\frac{3\pi}{4}$: ***314.*** $\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}$: ***316.*** $a>-\frac{1}{2}$:

319. $4\bar{a}_1-\bar{a}_2+3\bar{a}_3$: ***320.*** (1,-4,3): ***322.*** 1) $-2-\sqrt{21},\ -2+\sqrt{21}$: 2)0:

323. $\bar{p}_1+4\bar{p}_2+3\bar{p}_3$ ***324.*** 1) $-\bar{p}_1+2\bar{p}_2+3\bar{p}_3$ 2) $\frac{1}{6}\bar{p}_1+\frac{1}{6}\bar{p}_2+\frac{5}{6}\bar{p}_3$

325. 1)10: 2)4ab: 3)0: 4)0: 5)0: 6)11x+6: ***326.*** 25: ***327.***10: ***328.*** -29:
329. sin(α-β): ***330.*** cos(α-β): ***331.*** 2a: ***332.*** sin(α-β)sin(α+β): ***333.*** 0:
334.21: ***335.***17: ***336.***-5: ***337.***0: ***338.***-34: ***339.***180: ***340.***100: ***341.***-2b^2:
342. 1: ***343.*** cos2α(1+sinαcosα): ***344.*** 1) $-4\pm\sqrt{22}$; 2) 0,1; 3) 0; 4) $x\in R$:
345.1) $x\in(4,+\infty)$; 2) $x\in(-6,-4)$: ***347.*** -77: ***348.*** 66: ***349.*** 15: ***350.*** 15:

351. $\begin{pmatrix}-6&8\\4&7\end{pmatrix}$: ***352.*** $\begin{pmatrix}-1&6&5\\-3&8&5\\0&-4&-1\end{pmatrix}$: ***353.*** $\begin{pmatrix}-2&11&-8\\2&2&2\\-5&-4&6\end{pmatrix}$: ***354.***1) $\begin{pmatrix}2&2&-2\\1&2&-1\\1&0&-3\end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix}11&-4&-1\\-12&1&7\\3&-5&6\end{pmatrix}$: ***355.*** $\begin{pmatrix}-22&3&4\\-21&10&-2\end{pmatrix}$: ***356.*** 1) $\begin{pmatrix}5&2\\7&0\end{pmatrix}$: 2) $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix}34&15\\59&26\end{pmatrix}$:

4) $\begin{pmatrix}-6&4\\15&7\end{pmatrix}$:5) $\begin{pmatrix}0&17\\5&-11\end{pmatrix}$:6) $\begin{pmatrix}-7&7&19\\-3&5&7\\1&10&-9\end{pmatrix}$:7) $\begin{pmatrix}10&5&7\\-10&-3&4\\-11&-6&-12\end{pmatrix}$:8) $\begin{pmatrix}-8\\15\\5\end{pmatrix}$:

9) $\begin{pmatrix}22&-2&1\\5&-1&12\\31&-5&-7\end{pmatrix}$: 10) $\begin{pmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}$: 11) $\begin{pmatrix}52\\61\\21\end{pmatrix}$: ***358*** $\begin{pmatrix}16&7\\-218&-96\end{pmatrix}$:

359. 1) $\begin{pmatrix}3&-2\\-4&3\end{pmatrix}$: 2) $\begin{pmatrix}-1/7&1/7\\5/28&1/14\end{pmatrix}$: 3) $\begin{pmatrix}8&-1\\-7&1\end{pmatrix}$: 4) $\begin{pmatrix}2&-1&-1\\1&-1&0\\-1&1&1\end{pmatrix}$:

5) $\begin{pmatrix}-1/2&1&1/2\\7/2&-4&-5/2\\-5/2&3&3/2\end{pmatrix}$: 6) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-2&0&-2\\0&-2&2\\-2&2&0\end{pmatrix}$: 7) $\frac{1}{96}\begin{pmatrix}-20&4&4&28\\4&4&28&-20\\4&28&-20&4\\28&-20&4&4\end{pmatrix}$:

360. 1) $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$: 2) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 5 & 7 & 1 \end{pmatrix}$: 3) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$: 4) $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 42 & 9 & 20 \\ 7 & -3 & 5 \\ -35 & 1 & -18 \end{pmatrix}$:

5) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$: ***363.*** 1) $\begin{pmatrix} 15 & 4 \\ 4 & 43 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 17 & -2 & 21 & -1 \\ -2 & 5 & -3 & 7 \\ 21 & -3 & 26 & -2 \\ -1 & 7 & -2 & 10 \end{pmatrix}$: 2) $\begin{pmatrix} 5 & -6 & -4 \\ -6 & 12 & 0 \\ -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 5 & -1 & 5 \\ -1 & 5 & -1 & 5 & -1 \\ 5 & -1 & 5 & -1 & 5 \\ -1 & 5 & -1 & 5 & -1 \\ 5 & -1 & 5 & -1 & 5 \end{pmatrix}$: ***366.*** 1)2: 2)2: 3)3: ***367.*** 1)2: 2)1: 3 2: 4)3: 5)2: 6)2:

7)2: 8)4: 9)4: ***368.*** $\left(\frac{1}{2}, 2, \frac{3}{2}\right)$: ***369.***(4,0): ***370.*** (11,17): ***371.***(1,1,1):

372. (3,-3,2): ***373.*** (0,0,0): ***374.*** (-2,3,1): ***375.*** (1,2,-3): ***376.*** (1,1,-1,2):
377. (1,2,3): ***378.*** (1,1,1): ***379.*** (2,3,1): ***380.***(1,1,2): ***381.***(1,0,1):

382. $\left(\frac{1}{3}, 1, 2\right)$: ***383.***(-2,-1,1,1): ***384.***1) (3,1): 2) $(x_1, x_2) \in \varnothing$:

3) $\left(\frac{11+2t}{4}, \frac{17+10t}{8}, t\right), t \in R$: 4) $\left(\frac{10-16t_1+t_2}{-5}, \frac{10-7t_1-3t_2}{5}, t_1, t_2\right), t_1, t_2 \in R$:

385.(3,-1): ***386.*** $(x_1, x_2) \in \varnothing$: ***387.*** $(x_1, x_2, x_3) \in \varnothing$: ***388.*** 1) $(x_1, x_2) \in \varnothing$:

2) $(1+\sqrt{2}t, t)$: 3) $\left(-\frac{2t}{5}, \frac{11t}{5}, t\right)$: 4)(3t-4; 2-5t; t): 5) $\left(\frac{1-5t}{3}, \frac{t-2}{3}, t\right)$:

6) $\left(\frac{4-t}{2}, t, \frac{2+5t}{2}\right)$: 7) $\left(\frac{38}{3}t, \frac{-14}{3}t, 0, t\right)$: 8) $\left(\frac{25t+8}{-5}, \frac{30t+39}{20}, \frac{6t+1}{-4}, t\right)$:

388.1. ш) $\pm 1; 2$: ***р)*** -1;0;2: ***q)*** 0;-1;6: ***ŋ)*** 0;1;7: ***389.*** 1) 5,9,13,17,21:

2) $4, \frac{5}{3}, \frac{6}{5}, 1, \frac{8}{9}$: 3) $\sqrt{3}/2; \sqrt{3}/2; 0; -\sqrt{3}/2; -\sqrt{3}/2$: ***390.*** 1) $1/2; 1; 9/7$ 2)0,2,0:

3) $(1; -1/2; 1/3)$: 4)-1,1,1: 5) $5; 13; 17\pi/6$: ***391.*** 2, $\frac{7776}{3125} \approx 2{,}49$, $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$

$\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}$ ***392.*** 1) $\frac{1}{n}$: 2) $\frac{2n}{n+1}$: 3) $\frac{2n}{2n-1}$: 4) $1+(-1)^n$: 5) $(2n-1)\sin\frac{\pi}{2}n$, 6) $2+(-1)^n$

400. $\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$: ***401.*** $\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$: ***414.*** 1) $\frac{3}{2}$: 2) $\frac{3}{4}$: 3)0: 4) ∞: 5)0: 6) $\frac{1}{2}$ ***415.*** 1)5: 2) $-\frac{1}{3}$: 3) $\frac{1}{3}$: 4) $\frac{1}{2}$ 5) $\frac{1}{3}$: 6) $\frac{5}{4}$ 7) $\frac{1}{12}$ 8) $-\frac{1}{2}$: 9)0: 10) ∞: 11)0: 12)0: 13)1: 14) $\frac{1}{3}$: 15)0: 16) $\frac{5}{4}$: ***416.*** ա) $\frac{1}{4}$: բ)1: գ) $\frac{1}{4}$: դ) 3: ե)2: զ)0: ***417.*** 1) Նվազող է: 2) Աճող է: 3) Մոնոտոն չէ: 4) Մոնոտոն չէ: ***421.*** 1) $\frac{2}{7} < x_n \le 1$: 2) $\frac{1}{2} \le x_n < 3$: 3) $|x_n| \le 2$: 4) Սահմանափակ չէ:

425. 1)2: 2)ln2: ***426.*** $\frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$: ***428.*** $\frac{a+2b}{3}$: ***429.*** 1: ***432.*** 2,0:

433. 1) $\inf x_n = 2, \sup x_n = 3, \underline{\lim} x_n = \overline{\lim} x_n = 2$: 2) $\inf x_n = 0 = \underline{\lim} x_n, \sup x_n = \frac{5}{4}, \overline{\lim} x_n = 1$:

3) $\sup x_n = \overline{\lim} x_n = +\infty, \inf x_n = \underline{\lim} x_n = -\infty$: 4) $\inf x_n = \frac{-3\sqrt{3}}{2}$,

$\sup x_n = \frac{9\sqrt{3}}{10}, \underline{\lim} x_n = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \overline{\lim} x_n = \frac{\sqrt{3}}{2}$: 5) $\inf x_n = -1, \sup x_n = \frac{3}{2}$,

$\underline{\lim} x_n = 0, \overline{\lim} x_n = 1$: 6) $\inf x_n = \underline{\lim} x_n = 0, \sup x_n = \overline{\lim} x_n = +\infty$:

439. 1) $\frac{17}{7}$: 2)-3: 3)-1: 4)1/6: 5) 0: 6)- 5/3: ***440.*** 2: ***441.*** 1: ***442.*** 6: ***443.*** 10:

444. 1: ***445.*** $\frac{1}{5}$: ***446.*** $-\frac{1}{2}$: ***447.*** 1: ***448.*** -3: ***449.*** 0: ***450.*** 0: ***451.*** ∞:

452. -12: ***453.*** $\frac{1}{2}$: ***454.*** $-\frac{1}{56}$: ***455.*** 1: ***456.*** $-\frac{1}{16}$: ***457.*** $\frac{1}{144}$: ***458.*** -2:

459. 0: ***460.*** $\frac{3}{2}$: ***461.*** 1. ***462.*** $-\frac{5}{2}$: ***463.*** 1) $\frac{\sqrt{2}}{4}$, 2) $\frac{-\sqrt{2}}{4}$: ***464.*** $\frac{3}{2}$: ***465.*** $\frac{1}{4}$

466. $\frac{4}{3}$: ***467.*** $\frac{m}{n}$: ***468.*** 0: ***469.*** գ.չ.: ***470.*** 7: ***471.*** $-\pi$: ***472.*** $\sqrt{\frac{2}{3}}$

473. 5/11: ***474.*** -3/4: ***475.*** 2: ***476.*** -25/2: ***477.*** 1: ***478.*** 1/3: ***479.*** -5/8:

480. 1/4: ***481.*** $\cos 3$: ***482.*** $-\sin 5$: ***483.*** π: ***484.*** $\frac{-\sqrt{2}}{2}$: ***485.*** 0: ***486.*** 1: ***487.*** 0: ***488.*** $\frac{-\sqrt{3}}{3}$ ***489.*** $\frac{1}{2}$: ***490.*** 1: ***491.*** 1: ***492.*** $\frac{1}{\pi}$: ***493.*** $\frac{1}{2}$: ***494.*** 1:

495. 0: ***496.*** $+\infty$: ***497.*** 0: ***498.*** e^{-2} ***499.*** e^2 ***500.*** e: ***501.*** $e^{\frac{10}{3}}$ ***502.*** e^3

503. e: **504.** $\frac{1}{\sqrt{e}}$: **505.** e: **506.** e^4 **507.** e^{-1} **508.** $\frac{10}{\ln 10}$: **509.** 1:

510. ln2: **511.** $\frac{1}{3}$: **512.** $\frac{1}{a}$: **513.** 1: **514.** $\frac{-1}{2}$: **515.** 2ln3: **516.** a: **517.** 4:

518. 2: **519.** a-b: **520.** $\frac{1}{\ln 3}$: **525.** ա)1: բ)1: գ)$\frac{1}{4}$: դ)$\frac{2}{3}$: ե)1: զ)2: է)3: ը)3:

528. 1) $f(1-0)=-2, f(1+0)=2$: 2) $f(2-0)=+\infty, f(2+0)=0$: 3) $f(1-0)=1, f(1+0)=-2$: 4) $f(0-0)=-\sqrt{2}, f(0+0)=\sqrt{2}$: 5) $f(1-0)=-1, f(1+0)=1$: 6) $f(0-0)=1, f(0+0)=0$:

529. 1) ա) -1, բ) 1: 2) ա) 0, բ) 1: 3) ա) $\frac{\pi}{2}$, բ) $-\frac{\pi}{2}$: **532.** 1) 2: 2) $\frac{1}{2}$: 3) 0: 4) 1: 5) 0: 6) $\frac{4}{3}$: 7) Գոյություն չունի: 8) Գոյություն չունի: 9) e: 10) 0:

533. 1) Խզվում է միայն x=-1 կետում, I սեռի խզում: 2) Խզման կետ չունի: 3) Խզման կետ չունի: 4) Խզվում է միայն x=-1 կետում, I սեռի խզում: **534.** 1)x=-1, վերացնելի խզում: 2)x=-2, $f(-2-0)=-\infty, f(-2+0)=+\infty$: 3) x=0, I սեռի խզում: 4) x=0 վերացնելի խզում: 5) x=0, II սեռի խզում: 6) x=0 վերացնելի խզում; x=1, $f(1-0)=-\infty, f(1+0)=+\infty$: 7) x=0 վերացնելի խզում; $x=\pi n, n\in Z, n\neq 0$ ձգտում է ∞-ի: 8) x=±2 վերացնելի խզում: 9) x=0 $x=\frac{2}{2k+1}$, $k\in Z$ վերացնելի խզում: 10) x=0, I սեռի խզում: 11) x=0, $f(0-0)=+\infty, f(0+0)=0$: 12) $x=\pi k, k\in Z$, ձգտում է ∞-ի: 13) $x=\sqrt{\pi k}, k\in Z$, ձգտում է ∞-ի: 14) x=±1, x=0 վերացնելի խզում: 15) R-ի կետերում 2-րդ սեռի խզում: **541.** 1) 7: 2) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$: 3) –sin2: **543.** 1) $3x^2$ 2) $\frac{-2}{x^3}$: 3) $\frac{-1}{\sin^2 x}$: 4) $\frac{1}{x\ln 2}$: 5) $3^x \ln 2$: 6)cosx-sinx: **545.** 1)$6x^2$-5: 2) $\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{-3}{2x^2\sqrt{x}}+8x^7$ 3)e^x(sinx+cosx): 4) $\frac{1-x^2-x}{(x^2+1)^2}$: 5)3$\sin^2$xcosx: 6)–tgx: 7) $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$: 8) $2x\cos x^2+7^{\arcsin 2x}\cdot\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$:

546. 7: **547.** 6x-1: **548.** -10x-5x^4: **549.** -2x-1: **550.** $3x^2$+6x+2:

551. 2ax+b: **552.** x^3-2: **553.** $\frac{2}{(x+1)^2}$: **554.** $\frac{12-8x-x^2}{(x+4)^2}$: **555.** $\frac{2+2x^2}{(1-x^2)^2}$:

556. $\frac{2-4x}{(1-x+x^2)^2}$: **557.** $\frac{1-x^4-4x^2}{(x^3-x)^2}$: **558.** $\frac{bc-ad}{(c+dx)^2}$: **559.** $\frac{(1-x)^p}{(1+x)^q}\left(\frac{-p}{1-x}+\frac{-q}{1+x}\right)$:

560. $6{,}5x^{5{,}5}$: ***561.*** $\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{x\sqrt{x}}$: ***562.*** $\frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}$: ***563.*** $\frac{-1}{x^2}-\frac{1}{2x\sqrt{x}}-\frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$:

564. $\frac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x^2+x\sqrt{x}}}$: ***565.*** $\frac{a^2}{(a^2-x^2)^{3/2}}$: ***566.*** $\frac{-1}{\sqrt{1-x}\sqrt{(1+x)^3}}$: ***567.*** $5\cos 5x$: ***568.*** $-6\sin 2x$:

569. $15\cos(5x-2)$: ***570.*** $2\sin(3-2x)$: ***571.*** $2\cos 2x+2\sin x$: ***572.*** $-7\cos^6 x\sin x$:
573. $5\cos 5x\cos 3x-3\sin 5x\sin 3x$: ***574.*** $-7\sin 7x\cos 2x-2\cos 7x\sin 2x$:

575. $-7\sin 7x\sin^2\frac{x}{3}+\frac{1}{3}\cos 7x\sin\frac{2x}{3}$: ***576.*** $6x\sin^2 x^2\cos x^2$: ***577.*** $\frac{n\sin x}{(\cos x)^{n+1}}$:

578. $\frac{2}{\sin^2 x}$: ***579.*** $3x^2\mathrm{ctg}3x-\frac{3x^3}{\sin^2 3x}$: ***580.*** $\frac{3x-\sin x\cos x}{3\sqrt[3]{x^4}\cos^2 x}$: ***581.*** $\frac{\sin 2x+4x\cos 2x}{2\sqrt{x}}$:

82. $\frac{-1}{1+\sin x}$: ***583.*** $\frac{\sin 2x\sin x^3-3x^2\cos x^3\sin^2 x}{\sin^2 x^3}$: ***584.*** $\frac{2}{(\sin x+\cos x)^2}$:

585. $\frac{-2\cos 4x}{\sqrt{1-\sin 4x}}$: ***586.*** $-\frac{\sin 2(\sqrt{x}+1)}{2\sqrt{x}}$: ***587.*** $\frac{3\mathrm{tg}(3\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}\cos^2(3\sqrt{x}-1)}$:

588. $-\sin x\, 3^{\cos x}\ln 3$: ***589.*** $4\cos 4x\, 5^{\sin 4x}\ln 5$: ***590.*** $2x(1-x)e^{-2x}$:

591. $\frac{-1}{x^2\cos^2\frac{1}{x}}2^{\mathrm{tg}\frac{1}{x}}\ln 2$: ***592.*** $\frac{1}{x}$: ***593.*** $\ln x$: ***594.*** $\frac{x(2\ln x-1)}{\ln^2 x}$: ***595.*** $3x^2\ln x$:

596. $\frac{2x-2+\ln x}{x^2}$: ***597.*** $\frac{2\lg x-1}{x}$: ***598.*** $\frac{\mathrm{ctg}x}{\ln 10}$: ***599.*** $\frac{2\ln x}{x}$: ***600.*** $\frac{1}{\sqrt{x^2+a}}$:

601. $\frac{2x}{1-x^4}$: ***602.*** $\frac{-x^3}{(1+x^4)^2}+\frac{1}{x}-\frac{x^3}{1+x^4}$: ***603.*** $\frac{1}{x\ln x}$: ***604.*** $\frac{-1}{\cos x}$: ***605.*** $\frac{1}{x\ln x\ln\ln x}$:

606. $\frac{1}{2(1+\sqrt{x+1})}$: ***607.*** $\frac{1}{\sin x}$: ***608.*** $\frac{1}{\cos x}$: ***609.*** $2\sin(\ln x)$: ***610.*** $\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$:

611. 0: ***612.*** $\frac{5}{\sqrt{1-25x^2}}$: ***613.*** $\frac{-1}{\sqrt{x-x^2}}$: ***614.*** $\frac{3}{|x|\sqrt{x^2-9}}$: ***615.*** $\frac{1+x^4}{1+x^6}$

616. $e^x\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\arcsin x\right)$: ***617.*** $\frac{1}{x(1+\ln^2 x)}$: ***618.*** $\frac{\cos x+\sin x}{\sqrt{\sin 2x}}$: ***619.*** $\frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos^4 x}}$:

620. $\frac{1}{2\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^3-x^2}}$: ***621.*** $\frac{\sin 2x}{\cos^4 x+\sin^4 x}$: ***622.*** $\frac{1}{2(1+x^2)}$: ***623.*** $\frac{1}{\sqrt{1+2x-x^2}}$

624. $\frac{-2x}{|x|(1+x^2)}$; **625.** $\frac{-1}{x^2}\ln^3 x+\frac{6}{x^2}\ln x+\frac{6}{x}$; **626.** $\frac{(5+2x)^9(20\sin x-(5+2x)\cos x)}{\sin^2 x}$;

627. $\frac{(3x+1)^{10}(36x\ln x+\ln x-3x-1)}{\ln^2 x}$; **628.** $\frac{e^{x\sqrt{\sin x}}(2\sin x+\cos x)}{2\sqrt{\sin x}}$;

629. $2\mathrm{ctg}\frac{1}{x}+\frac{2}{x\sin^2\frac{1}{x}}-\frac{1}{2}\sin 14x$; **630.** $\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$; **631.** $\sqrt{a^2-x^2}$

632. $\mathrm{ch}x$, $\mathrm{sh}x$, $\frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$; **633.** 1) $\begin{cases}1, \text{երբ } x>0\\ -1, \text{երբ } x>0\end{cases}$, 2) $2|x|$, երբ $x\neq 0$,

3) $\begin{cases}-1, \text{երբ } x\le 0\\ -e^{-x}, \text{երբ } x>0\end{cases}$ **637.** $\left(\frac{1}{2x}+\frac{3}{2x-2}-\frac{1}{2x+4}\right)\cdot\sqrt{\frac{x(x-1)^3}{x+2}}$;

638. $u^v\left(v'\ln u+v\frac{u'}{u}\right)$; **639.** 1) $x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{1-x^2}\right)\cdot\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$;

2) $\left(\frac{3}{x-1}+\frac{4}{x-2}+\frac{5}{x-3}\right)\cdot(x-1)^3(x-2)^4(x-3)^5$

3) $\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{1-x}+\frac{1}{3}\left(\frac{-1}{3-x}-\frac{2}{3+x}\right)\right)\cdot\frac{x^2}{1-x}\sqrt[3]{\frac{3-x}{(3+x)^2}}$;

4) $\frac{1}{2}\left(\frac{7}{x+1}+\frac{5}{x-1}-\frac{5}{x}-\frac{3}{x+2}\right)\sqrt{\frac{(x+1)^7(x-1)^5}{x^5(x+2)^3}}$; 5) $x^x(1+\ln x)$;

6) $x^{\sin x}\left(\frac{\sin x}{x}+\cos x\ln x\right)$; 7) $(\sin x)^x(x\mathrm{ctg}x+\ln\sin x)$;

8) $x^{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\right)$; 9) $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\cdot\left(\frac{-1}{x+1}+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$;

10) $\sqrt[x]{\ln x}\left(\frac{1}{x^2\ln x}-\frac{1}{x^2}\ln\ln x\right)$; 11) $\left(\sqrt{x}\right)^{\sqrt[3]{x}}\left(\frac{1}{2\sqrt[3]{x^2}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\ln\sqrt{x}\right)$;

12) $(\sin x)^{\arcsin x}\left(\mathrm{ctg}x\arcsin x+\frac{\ln\sin x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$; **640.** $\frac{2x^2}{1-x^6}\sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$;

641. $\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right)\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$; **642.** $\frac{1}{m+n}\left(\frac{-m}{1-x}+\frac{n}{1+x}\right)\sqrt[m+n]{(1-x)^m(1+x)^n}$;

643. $\frac{mn\sin mx}{\cos^{n+1}mx}$: **644.** $\sin2x\cos(\cos2x)$: **645.** $\frac{n}{x\ln mx}$:

646. $\left(\ln\frac{a}{b}-\frac{a}{x}+\frac{b}{x}\right)\left(\frac{a}{b}\right)^x\left(\frac{b}{x}\right)^a\left(\frac{x}{a}\right)^b$ **647.** $\frac{1}{3x^2-2}$: **648.** $\frac{-2\pi}{\ln2}tg2\pi x$: **649.** $5ch5x$:

650. $3sh3xsh0,5x+0,5ch3xch0,5x$: **651.** $\frac{3}{ch^2 3x}$: **652.** $\frac{1}{x}$: **653.** $\frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$:

654. cosx, եթե sinx>0, -cosx, եթե sinx<0: **655.** $\frac{-1}{x\ln^2 x}$: **656.** $\frac{-\ln4}{x\ln^2 5x}$:

657. e^{-2x} **658.** $\frac{1}{chx}$: **659.** $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{2x}{x^2+1}+\frac{1}{5(5-x)}\right)\sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{\sqrt[5]{5-x}}}$

660. $\left(\frac{2}{3x}+\frac{-1}{1-x}-\frac{2x}{1+x^2}+3ctgx-2tgx\right)\sqrt[3]{x^2}\,\frac{1-x}{1+x^2}\sin^3 x\cos^2 x$:

661. $\left(\sqrt{tgx}\right)^{x+1}\left(\frac{x+1}{\sin2x}+\ln\sqrt{tgx}\right)$: **662.** $(\sin x)^{\cos x}\left(\frac{\cos^2 x}{\sin x}-\sin x\ln\sin x\right)$:

663. $(\cos x)^{\sin x}\left(\frac{-\sin^2 x}{\cos x}+\cos x\ln\cos x\right)$: **664.** $\left(\sqrt{x}\right)^{\sin^2 x}\left(\frac{\sin^2 x}{2x}+\sin2x\ln\sqrt{x}\right)$:

665. 1)97,5: 2) 90: **666.** 1) 1,8: 2) 0,72: **667.** $\frac{5}{4}$: **668.** 0: **669.** 1) $\frac{1}{\ln10}$:

2)1: 3) $\frac{5}{4}$: **670.** $-\frac{1}{4}$: **673.** 1) $\frac{24}{7}$: 2) $\frac{375}{124}$: **674.** 1)0: 2)5: 3)10: **675.** m:

676. $\frac{3ax^3}{ax^3+b}$: **677.** 1) $126x^5-12x^2$ 2) $\frac{x(3+2x^2)}{(1+x^2)^{3/2}}$: 3) $\frac{1}{x}$: 4) -2cos2x:

678. 1) $5\cdot4\cdot3....(5-(n-1))x^{5-n}$ 2) $3^n e^{3x}$: 3) $\frac{1}{2}\left[7^n\sin\left(7x+\frac{\pi}{2}n\right)+3^n\sin\left(3x+\frac{\pi}{2}n\right)\right]$:

4) $\frac{1}{\ln2}\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$: **679.** 3, 12, 9: **680.** 2: **681.** 6: **682.** 1)12x:

2) $56x^6+210x^4$ 3) $\frac{3}{4\sqrt{x}}$: 4) $\frac{2}{(x+1)^3}$: 5) $\frac{3x}{(1-x^2)^{5/2}}$: 6) $\frac{2\sin x}{\cos^3 x}$: 7) $2arctgx+\frac{2x}{1+x^2}$:

8) $e^{-x^2}(4x^2-2)$: 9) 2cos2x: 10) $\frac{2}{3}\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$: 11) $2\left(\frac{1}{1-x^2}+\frac{x\arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}}\right)$:

12) $\frac{3x\sqrt{1-x^2}+(1+2x^2)\arcsin x}{(1-x^2)^{5/2}}$: ***683.*** 1)6: 2)480(2x-3)^3: 3) $\frac{2}{(1+x)^3}$:

4)-125sin5x: ***685.*** 1)n=1, $\frac{1}{2\sqrt{x}}, n \geq 2, \frac{(-1)^{n-1}}{2^n}(2n-3)!!\cdot x^{-\frac{2n-1}{2}}$ 2) $2^n \sin\left(2x+\frac{\pi}{2}n\right)$:

3) $7^n \cos\left(7x+\frac{\pi}{2}n\right)$: 4) $3(-1)^n m(m-1)..(m-(n-1))x^{-m-n}$: 5) $n \geq 2, (-1)^{n-2}(n-2)!x^{-n+1}$:

6) $\frac{e^x+(-1)^{n-1}e^{-x}}{2}$: 7) $\frac{1}{2}\left(8^n \sin\left(8x+n\frac{\pi}{2}\right)-6^n \sin\left(6x+n\frac{\pi}{2}\right)\right)$: 8) ne^x+xe^x

9) $n \geq 2, y^{(n)}=2(-1)^{n-1}n!(x-1)^{-n-1}$ 10) $a^n(-1)^{n-1}(n-1)!(ax+b)^{-n}$ ***686.*** 1,1:

687. 1)3cos3xdx: 2) $\frac{2xdx}{1+x^2}$: 3) $\frac{2dx}{\sqrt{1-4x^2}}$: ***689.*** 1) $-\pi\sin\pi x dx$:

2) $(3x^2-4)dx$: 3) $-\frac{1}{x^2}dx$: 4) $\frac{-dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$: 5) $\frac{2dx}{x^2-4}$: 6) $e^x(x+1)dx$:

690. 1)xsinxdx: 2) $\frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}$: 3) $\frac{\ln x dx}{x\sqrt{\ln^2 x-4}}$: 4)sin6xdx: 5) $\frac{adx}{a^2+x^2}$: ***691.*** 1) $\frac{a}{b}$:

2) –a: 3)1: 4)0: ***692.*** $\frac{1}{2}$: ***693.*** $\frac{93}{43}$: ***694.*** ∞: ***695.*** 0: ***696.*** 3: ***697.*** $\frac{4}{7}$:

698. -π: ***699.*** $\frac{4}{9}$: ***700.*** 0: ***701.*** 0: ***702.*** 1: ***703.*** $\frac{a^2}{b^2}$: ***704.*** $\frac{1}{2}$: ***705.*** $a^a(\ln a-1)$:

706. $\frac{-e}{2}$: ***707.*** 2/3 ***708.*** 2: ***709.*** 9/50 ***710.*** 1: ***711.*** 1: ***712.*** 1/2 ***713.*** 0:

714. $\sqrt[3]{e}$ ***715.*** 1: ***716.*** 1: ***717.*** -1: **718.1.** ա)-1, բ)1/2, գ)1/6, դ)-1/6, ե)-1/6,

զ)1/3, է)2, ը)-4/3,ek թ)3, ժ)0,5: *719.* $\sqrt{3}/3$: ***720.*** ոչ: ***722.*** 14/9:
726. 5+5(x-1)+3(x-1)^2+2(x-1)^3: ***727.*** 1)4-10(x+1)+8(x+1)^2-(x+1)^3:
2) 9-13(x+1)+10(x+1)^2-4(x+1)^3+(x+1)^4:
3) -8+20(x+1)-26(x+1)^2+19(x+1)^3-7(x+1)^4+(x+1)^5: ***728.*** 1) 1+2x+x^2:

2) $-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{45}x^6$ 3) $1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}x^2$ 4) $x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5$

729. 1) $e^{\frac{-x^2}{2}}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2^2 2!}+\frac{(-x^2)^3}{2^3 3!}+\ldots+\frac{(-x^2)^n}{2^n n!}+o(x^{2n})$:

2) $\sin^2 x=\frac{(2x)^2}{2\cdot 2!}-\frac{(2x)^4}{2\cdot 4!}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}(2x)^{2n}}{2(2n)!}+o(x^{2n})$:

3) $\sin\frac{5x}{2}=\frac{5x}{2}-\frac{(5x)^3}{2^3\cdot 3!}+\frac{(5x)^5}{2^5\cdot 5!}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}(5x)^{2n-1}}{2^{2n-1}(2n-1)!}+o\left(x^{2n}\right)$:

4) $\ln(4+x^2)=\ln 4+\frac{x^2}{4}-\frac{x^4}{4^2\cdot 2}+\frac{x^6}{4^3\cdot 3}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{4^n\cdot n}+o\left(x^{2n}\right)$:

5) $\sqrt[3]{8+x^2}=2\left(1+\frac{1}{3}\frac{x^2}{8}+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}\left(\frac{x^2}{8}\right)^2+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}\left(\frac{x^2}{8}\right)^3+\ldots\right.$
$\left.+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{3}-(n-1)\right)}{n!}\left(\frac{x^2}{8}\right)^n+o\left(x^{2n}\right)\right)$: ***730.*** 1) $-\frac{1}{2}$: 2) $\frac{1}{3}$: 3) $-\frac{1}{12}$: 4) $\frac{1}{3}$:

731. 1) $f(x)\downarrow$, երբ $x\in(-\infty,1]$, $f(x)\uparrow$, երբ $x\in[1,+\infty)$:
2) $f(x)\uparrow$, երբ $x\in(-\infty,1]$, երբ $x\in[2,+\infty)$, $f(x)\downarrow$, երբ $x\in[1,2]$:
3) $f(x)\uparrow$, երբ $x\in R$: 4) $f(x)\downarrow$, երբ $x\in(0,1]$, երբ $x\in(1,e)$, $f(x)\uparrow$, երբ $x\in[e,+\infty)$:

732. 1) $(-\infty,3]^{\downarrow},[3,+\infty)^{\uparrow}$: 2) $\left(-\infty,\frac{7}{4}\right]^{\downarrow},\left[\frac{7}{4},+\infty\right)^{\uparrow}$: 3) $\left(-\infty,\frac{7}{16}\right]^{\uparrow},\left[\frac{7}{16},+\infty\right)^{\downarrow}$

4) $(-\infty,+\infty)^{\uparrow}$ 5) $(-\infty,0]^{\uparrow},[0,2]^{\downarrow}[2,+\infty)^{\uparrow}$ 6) $(-\infty,-1]^{\uparrow},[-1,4]^{\downarrow}[4,+\infty)^{\uparrow}$

7) $\left[0,\frac{2}{3}\right]^{\downarrow}\left[\frac{2}{3},+\infty\right)^{\uparrow}$ 8) $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]^{\uparrow},\left[\frac{1}{2},3\right]^{\downarrow}[3,+\infty)^{\uparrow}$ 9) $(-\infty,2)^{\downarrow}$, $(2,+\infty)^{\downarrow}$

10) $(-\infty,-1)^{\uparrow}$, $(-1,+\infty)^{\uparrow}$ 11) $(-\infty,-1]^{\downarrow},[-1,1]^{\uparrow}[1,+\infty)^{\downarrow}$

12) $(-\infty,-2)^{\downarrow}$, $(-2,8)^{\downarrow},(8,+\infty)^{\downarrow}$ 13) $(-\infty,0]^{\downarrow},[0,+\infty)^{\uparrow}$

14) $(0,1/2]^{\downarrow},[1/2,+\infty)^{\uparrow}$ 15) $(-\infty,+\infty)^{\uparrow}$ 16) $(-\infty,0]^{\downarrow},[0,2]^{\uparrow}[2,+\infty)^{\downarrow}$

17) $(-1,0]^{\uparrow},[0,1)^{\downarrow}$ 18) $(-\infty,+\infty)^{\downarrow}$ 19) $(-\infty,0)^{\uparrow},(0,+\infty)^{\uparrow}$

20) $\left[-1,\frac{-\sqrt{2}}{2}\right]^{\downarrow},\left[\frac{-\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]^{\uparrow},\left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]^{\downarrow}$ ***736.*** 1) $f_{max}(\frac{1}{2})=2{,}25$:

2) $f_{min}(-2)=-9$, $f_{min}(3)=-40{,}25$, $f_{max}(0)=7$: 3) $f_{min}(\frac{7}{5})=-\frac{1}{24}$:

4) $y_{max}(\frac{\pi}{6}+2\pi k)=\frac{3}{2}, k\in z$; $y_{max}(\frac{5\pi}{6}+2\pi k)=\frac{3}{2}$;

$y_{min}(\frac{\pi}{2}+2\pi k)=1 : y_{min}(\frac{3\pi}{2}+2\pi k)=-3$: 5) $y_{min}(2)=2$: 6) $y_{max}(-1)=4$:

7) $y_{min}(\frac{1}{4})=\frac{23}{8}$: 8) $y_{max}(-\frac{1}{2})=\frac{21}{4}$: 9) Չունի: 0) $y_{max}(0)=0$, $y_{min}(2)=-4$:

11) $y_{max}(1)=\frac{11}{6}$, $y_{min}(2)=\frac{5}{3}$: 12) $y_{max}(1)=0$, $y_{min}(3)=-4$:

13) $y_{max}(\pm1)=1$, $y_{min}(0)=0$: 14) $y_{min}(1)=3$, $y_{max}(2)=4$, $y_{min}(3)=3$:

15) $y_{min}\left(\frac{3-\sqrt{17}}{4}\right)$, $y_{max}\left(\frac{3+\sqrt{17}}{4}\right)$, $y_{min}(3)=0$: 16) $y_{min}\left(\frac{5\pm\sqrt{13}}{6}\right)$, $y_{max}(1)=0$:

17) $y_{max}(-1)=-2$, $y_{min}(1)=2$: 18) $y_{max}(1)=\frac{1}{e}$: 19) $y_{max}(0)=-2$, $y_{min}(2)=2$:

20) Չունի: 21) $y_{max}(0)=a$, 22) $y_{max}(-2-\sqrt{7}), y_{min}(-2+\sqrt{7})$:

23) $y_{min}(1)=1$: 24) $y_{min}(1)=0$, $y_{max}(e^2)=\frac{4}{e^2}$: 25) $y_{max}(1)=1$: 26) $y_{max}(\pm1)=2$,

$y_{min}(0)=0$: 27) $y_{min}(\frac{3}{4})=-\frac{3}{8}\sqrt[3]{2}$ 28) $y_{max}(0)=2$, $y_{min}(\pm1)=\sqrt[3]{4}$

29) $y_{min}(-\frac{\pi}{4}+2\pi k)=\sqrt{2}$, $y_{max}(\frac{3\pi}{4}+2\pi k)=-\sqrt{2}$: 30) $y_{min}(\frac{\pi}{2}+2\pi k)=-2$,

$y_{max}(-\frac{\pi}{2}+2\pi k)=4$: ***741.*** 1)$y_{\text{մ.}}(-1)=8$, $y_{\text{փ.}}(2)=-19$:2)$y_{\text{մ.}}(1)=3$, $y_{\text{փ.}}(2)=-24$:
3)$y_{\text{մ.}}(4)=3/5$, $y_{\text{փ.}}(0)=-1$: 4) $y_{\text{մ.}}(0)=1$, $y_{\text{փ.}}(1/2)=3/5$: 5) $y_{\text{մ.}}(e)=e^2$, $y_{\text{փ.}}(1)=0$:
6) $y_{\text{մ.}}(4)=6$, $y_{\text{փ.}}(0)=0$: 7)$y_{\text{մ.}}(0)=2$, $y_{\text{փ.}}(1)=\sqrt[3]{2}$ 8)$y_{\text{մ.}}(0)=\pi/4$, $y_{\text{փ.}}(1)=0$:

742. $\frac{a}{2},\frac{a}{2}$: ***743.*** $(2-\sqrt{2})p, (2-\sqrt{2})p, (\sqrt{2}-1)2p$: ***744.*** $h=2R=2\sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}}$

745. $\frac{3}{2}\sqrt{8-6\sqrt[3]{2}}$ ***746.*** $R\sqrt{\frac{2}{3}}, 2R\frac{\sqrt{3}}{3}$: ***747.*** $\ell\sqrt{\frac{2}{3}}, h=\frac{\ell\sqrt{3}}{3}$:

748. H կոն=4R գունդ: ***749.*** $\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}$: ***750.*** $\sqrt[3]{2v}, h=\frac{\sqrt[3]{2v}}{2}$:

751. H կոն=4/3R: ***752.*** R կոն=3/2 r գլան: ***753.*** $2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$: ***754.*** $a\sqrt{2}, b\sqrt{2}$

755. $\left(\frac{2}{3}a, \pm2\sqrt{\frac{pa}{3}}\right)$: ***756.*** $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{3}{4}\right)$: ***757.*** ա) $\frac{hv_0}{\sqrt{h^2-v_0^2t_0^2}}$: բ) $\sqrt[3]{\frac{a}{2k}}$,
որտեղ k-ն համեմատականության գործակիցն է:
758. 1) $(-\infty,-2)^{\cup}$, $(2; 1,5)^{\cap}$, $(1,5; +\infty)^{\cup}$ $x_{\text{շրջ.}}=-2;1,5$:

2) $(-\infty;1)^{\cup}$ $(1,+\infty)^{\cap}$ $x_{շրջ.}=1$: 3) $(-\infty;2)^{\cap}$, $(2,+\infty)^{\cup}$ $x_{շրջ.}=2$: 4) $(-\infty,+\infty)^{\cup}$: 5) $(-\infty,+\infty)^{\cup}$ 6) $(-\infty,0)^{\cap}$, $(0,+\infty)^{\cup}$, $x_{շրջ.}=0$: 7) $(-\infty,-1)^{\cap}$, $(-1,+\infty)^{\cup}$ $x_{շրջ.}=-1$:

8) $\left(0,\frac{1}{\sqrt[6]{e^5}}\right)^{\cap}$, $\left(\frac{1}{\sqrt[6]{e^5}},+\infty\right)^{\cup}$ $x_{շրջ.}=\frac{1}{\sqrt[6]{e^5}}$: 9) $(-\infty,2)^{\cap}$, $(2,+\infty)^{\cup}$, $x_{շրջ.}=2$:

10) $(-\infty,-1)^{\cap}$, $(-1;1)^{\cup}$, $(1,+\infty)^{\cap}$ $x_{շրջ.}=\pm1$: 11) $(-\infty,-\sqrt{3})^{\cap}$, $(-\sqrt{3};0)^{\cup}$ $(0;\sqrt{3})^{\cap}$ $(\sqrt{3},+\infty)^{\cup}$:$x_{շրջ}=0;\pm\sqrt{3}$ 12) $(-\infty,+\infty)^{\cup}$ 13) $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\cup}$

$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\cap}$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)^{\cup}$ $x_{շրջ.}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$: 14) $\left(e^{-\frac{3\pi}{4}+T},e^{\frac{\pi}{4}+T}\right)^{\cup}$, $\left(e^{\frac{\pi}{4}+T},e^{\frac{5\pi}{4}+T}\right)^{\cap}$

$T=2\pi k$, $x_{շրջ.}=e^{\frac{\pi}{4}+\pi k}$ $k\in z$: 15) $(-\infty,-2-\sqrt{3})^{\cap}$, $(-2-\sqrt{3},-2+\sqrt{3})^{\cup}$ $(-2+\sqrt{3},1)^{\cap}$, $(1,+\infty)^{\cup}$ $x_{շրջ.}=-2\pm\sqrt{3},1$: ***759.*** 1) x=2, y=5: 2) x=1, y=3x+3: 3) x=3x+π/2, y=3x-π/2: 4) x=5, y=1: 5) x=0: 6) x=4, y=4x+4: 7) x=2, y=1: 8) x=0, y=0: 9) y=x+1,x=0: 10) y=3x:y=x 11) y=± bx/a: 12) y=± 2x: 13)y=x: ***760.*** 1)f(-x)=-f(x), խզում x=±2, y| =0⇒x=0, $y_{max}(-2\sqrt{3})=\frac{-3\sqrt{3}}{4}$, $y_{min}(2\sqrt{3})=\frac{3\sqrt{3}}{4}$ շրջում (0,0), ասիմպտոտներ x=±2, y=x/4: 2) f(-x)=-f(x), y| =0⇒x=0, $x=\pm\sqrt{3}$, $y_{min}(-1)=-2$, $y_{max}(1)=2$, շրջում (0,0): 3) f(-x)=f(x), y| =0⇒ $x=1\pm\sqrt{3}$, $y_{max}(\pm1)=\frac{3}{2}$, $y_{min}(0)=1$, շրջում $\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{23}{18}\right)$: 4) y| =0⇒x=-1, x=2, $y_{min}(2)=0$, $y_{max}(0)=4$, շրջում (1,2): 5) f(-x)=f(x), y| =0⇒x=0, $x=\pm\sqrt{3}$, $y_{min}(0)=0$, $y_{max}(\pm1)=1$, $y_{min}(\pm3)=0$, շրջում, երբ $\left(\pm\sqrt{\frac{6\pm\sqrt{21}}{5}},\frac{234\mp6\sqrt{21}}{500}\right)$: 6) f(-x)=-f(x), $y_{min}(\sqrt{3})=-\sqrt{3}$, $y_{max}(-\sqrt{3})=\sqrt{3}$, շրջում O(0,0), $\left(\pm\sqrt{\frac{3}{2}},\mp\frac{7}{8}\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$: 7) խզում, երբ x=1, $y_{min}(3)=\frac{27}{8}$, շրջում (0,0), ասիմպտոտներ x=1, $y=\frac{x}{2}+1$: 8) խզում, երբ x=1,

$y' = 0 \Rightarrow x=0$, $y_{max}(0)=0$, $y_{min}(\sqrt[3]{4})=\frac{4\sqrt[3]{4}}{3}$ շրջում $\left(-\sqrt[3]{2}, -\frac{2\sqrt[3]{2}}{3}\right)$, ասիմ-պտոտներ x=1, y=x: 9) f(-x)=-f(x), խզում, եթե x=±1, $y' = 0 \Rightarrow x=0$, $x=\pm\sqrt{3}$, շրջում (0,0), ասիմպտոտներ x=-1, x=1,y=x: 10) Խզում, եթե $x=-\sqrt[3]{2}$, $y' = 0 \Rightarrow x=0$, $y_{max}(1)=\frac{1}{3}$, շրջում $\left(\sqrt[3]{4}, \frac{\sqrt[3]{4}}{6}\right)$, ասիմպ-տոտներ $x=-\sqrt[3]{2}$, y=0: 11) f(-x)=-f(x), խզում, եթե x=±2, $y' = 0 \Rightarrow x=0$, շրջում (0,0), ասիմպտոտներ x=-2, x=2,y=0: 12) f(-x)=f(x), $y' = 0 \Rightarrow x=\pm 1$, $y_{min}(0)=-1$, շրջում$\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{1}{2}\right)$, ասիմպտոտ y=1: 13) Խզում, եթե x=-1, $y' = 0 \Rightarrow x=0$, շրջում (0,0),$\left(\frac{\sqrt[3]{4}}{2}, \frac{1}{3}\right)$ ասիմպտոտ x=-1, y=1: 14) D(y)=R, $y' = 0 \Rightarrow x=0$, x=2, $y_{min}(1)=-1$, շրջում (0,0), (2,0): 15) $y' = 0 \Rightarrow x=2$, y(0)=-2, $y_{min}(-\frac{1}{2})=-\sqrt{5}$, շրջում $\left(\frac{-3\pm\sqrt{41}}{8}, y\left(\frac{-3\pm\sqrt{41}}{8}\right)\right)$, ասիմպտոտ y=-1, y=1: 16) f(-x)=f(x), y(0)=-1, $x\to 0 \Rightarrow y'\to\infty$, $y_{min}(0)=-1$, ասիմպտոտ y=0: 17) f(-x)=-f(x), $y' = 0 \Rightarrow x=0$, խզում x=±1, $y_{min}(\sqrt{3})=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$, $y_{max}(-\sqrt{3})=-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$, շրջում (0,0), $\left(-3, -\frac{3}{2}\right)$, $\left(3, \frac{3}{2}\right)$: 18) Խզում x=-1, $y_{min}(0)=0$, $y_{max}(-2)=-\sqrt[3]{4}$, շրջում $\left(-2\pm\sqrt{3}, \sqrt[3]{\frac{\sqrt{27}\mp 5}{2}}\right)$ ասիմպտոտ x=-1: 19) D(y)=$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$, $y_{max}(-1-\sqrt{2})=-1-\sqrt{2}+\ln(2+2\sqrt{2})$, ասիմպտոտ x=-1, x=1: 20) $y' = 0 \Rightarrow x=1$, $y_{max}(e^2)=\frac{2}{e}$, շրջում $\left(e^{\frac{8}{3}}, \frac{8}{3}e^{-\frac{4}{3}}\right)$, ասիմպտոտ x=0, y=0:

21) D(y)=$(0,1)\cup(1,+\infty)$, խզում x=0, x=1, $y_{max}\left(\frac{1}{e}\right)=-e$, ասիմպտոտ x=1, y=0: 22) D(y)=$(0,+\infty)$, $y' = 0 \Rightarrow x=1$, $x\to 0+0$, $y\to 0+0$, $y_{max}\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e^2}$, $y_{min}(1)=0$, շրջում $\ln x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$: 23) շրջում (0,0), ասիմպ-

տողներ $y=-\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}$, $y=\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}$: 24) $y_{min}(0)=0$, ասիմպտոտներ $y=-\frac{\pi}{2}x-1$, $y=\frac{\pi}{2}x-1$: 25) T=2π, $y_{max}\left(\frac{\pi}{4}+2\pi k\right)=\sqrt{2}, y_{min}\left(\frac{5\pi}{4}+2\pi k\right)=-\sqrt{2}$, շրջ. $\left(\frac{3\pi}{4},0\right)$, $\left(\frac{7\pi}{4},0\right)$: 26) y(x+2π)=y(x), $[0,2\pi]\Rightarrow$ $y_{max}\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{4}$, $y_{min}\left(\frac{5\pi}{6}\right)=-\frac{3\sqrt{3}}{4}$, շրջում $\left(\frac{3\pi}{2},0\right),\left(\frac{\pi}{2},0\right)\left(\pi+\arcsin\frac{-1}{4},y\right)\left(2\pi+\arcsin\frac{-1}{4},y\right)$:

27) f(-x)=f(x), $y|=0\Rightarrow x=\pm1$, $y_{max}(0)=\frac{\pi}{2}$, $y'(0+0)=-2, y'(0-0)=2$ ասիմպտոտ $y=-\frac{\pi}{2}$: 28) Խզում x=0 $y_{min}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{e^2}{4}$, ասիմպտոտ x=0, երբ $x\to0+0$ $(-\infty,0)^{\cup}$, $(0,+\infty)^{\cup}$ 29) y(0)=1, $y_{min}(0)=1$, ասիմպտոտ y=x, երբ $x\to+\infty$:

30) Խզում, եթե x=0, $y|=0\Rightarrow x=2$, $y_{max}(-1)=e^{-1}=0{,}37$, $y_{min}(2)=4\sqrt{e}\approx6{,}59$, ասիմպտոտ y=x+2, x=0: 31) D(y)=$(-\infty,0)\cup\left(\frac{2}{3},+\infty\right)$, $y_{եզր.}(0)=0, y_{եզր.}\left(\frac{2}{3}\right)=\pi$, $(-\infty,0)^{\cap}$, $(0,+\infty)^{\cup}$, ասիմպտոտ $y=\frac{\pi}{3}$: ***761.*** ա) 1)$2y^2-x^2$: 2)$\frac{2xy}{x^2+y^2}$: 3)-2x+3y: 4)$y\frac{x+1}{x-1}$: ***762.*** 1)2x+y=c:2) $x^2+y^2=c, c\geq0$: 3)$\frac{x}{y}=c$: 4)$\frac{y}{x}=e^{2c}$ 5)$\frac{1}{x^2+y^2}=c, c>0$: 6)xy=lnc, c>0: 7)$a^2+x^2-y^2=c$: 8)$x^2-y^2=c, c\neq0$: 9)$|x|+|y|=1-c, c\leq1$: 10)$y=c\sqrt{x}$ 11) xy=c: 12) $x^2-y=c$: 13) y=lnx+c: ***763.*** 1) $2x-y\neq0$: 2)$x^2+y^2\leq16$: 3)3x+2y+z-6>0: 4)$\left|\frac{y}{x}\right|\leq1$: 5)$R^2$: 6)$x^2+y^2\neq0$: 7)$x^2-y^2\neq0$: 8)$x^2+y^2-1\geq0$: 9)$x\geq0$ և y>0: 10)$x+y\neq0$: 11)$x^2+y^2<4$: 12)x+y>0 և $x+y\neq1$: 13)$|x+y|\leq1$: 14)$|x|>|y|$: 15)$x+y+z\geq0$: 16)$x^2+y^2+z^2-4>0$: 17)$x\geq0$ և $y\geq0$: 18)x+y>0: 19)$x^2+y>0$: 20)x=y: 21)$|y|\leq1$: 22)$|x|\geq2$և$|y|\leq2$: 23)$|x|\leq1$և$|y|\leq1$: ***767.*** 1)-8: 2)0: 3)$\frac{1}{4}$: 4)1: 5) Գոյություն չունի: 6) e^3: 7)0: 8)0: 9)3: 10) Գոյություն չունի: 11)0: 12)0: 13)1: 14)e: 15)1: 16)$\frac{-1}{10}$: 17)0: 18)2: 19) Գոյու-

թյուն չունի: 20)0,5: 21)0: 22).0: 23) Գոյ. չունի: 24). Գոյ. չունի: 25).0: 26).2: **768.** 1)Խզում, երբ x=y, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ գոյ.չունի, $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to a}} f(x,y)=\infty (a\neq 0)$: 2)Խզում, երբ x=0 և y=0, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1}{x^2+y^2}=\infty$: 3)Խզում, երբ x=-y, $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to -a}}\frac{1}{(x+y)^2}=+\infty$: 4)Խզում, երբ $x^2+y^2=1$, $\lim\limits_{x^2+y^2\to 1-0}\ln(1-x^2-y^2)=-\infty$: 5)Խզում, երբ x=y=0, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} e^{\frac{1}{x^2+y^2}}=+\infty$: 6)Խզում, երբ $x=\pi n$, $n\in z$, կամ $y=\pi k$, $k\in z$, $\lim\limits_{\substack{x\to \pi n\\ y\neq \pi k}}\frac{1}{\sin x\sin y}=\infty$ կամ $\lim\limits_{\substack{y\to \pi k\\ x\neq \pi n}}\frac{1}{\sin x\sin y}=\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to \pi n\\ y\to \pi k}}\frac{1}{\sin x\sin y}=\infty$:

769. 1) $z'_x=4xy^2+3y^2$, $z'_y=4x^2y+6xy+3y^2$, 2) $z'_x=45x^2y^2(5x^3y^2+1)^2$, $z'_y=30x^3y(5x^3y^2+1)^2$ 3) $z'_x=\frac{y}{\sqrt{x}}+6x\sqrt[3]{y}$, $z'_y=2\sqrt{x}+\frac{x^2}{\sqrt[3]{y^2}}$:

4) $z'_x=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $z'_y=\frac{y}{x\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2}$: 5) $z'_x=\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}$, $z'_y=-\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}$: 6) $z'_x=e^{xy(x^2+y^2)}(3x^2y+y^3)$, $z'_y=e^{xy(x^2+y^2)}(x^3+3xy^2)$:

7) $u'_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $u'_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $u'_z=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$:

8) $u'_x=\frac{1}{y}-\frac{z}{x^2}$, $u'_y=\frac{1}{z}-\frac{x}{y^2}$, $u'_z=\frac{1}{x}-\frac{y}{z^2}$: 9) $u'_x=(y-z)(2x-y-z)$, $u'_y=(x-z)(z+x-2y)$, $u'_z=(x-y)(2z-x-y)$: 10) $z'_x=yx^{y-1}$, $z'_y=x^y\ln x$: 11) $z'_x=\frac{-y}{|x|\sqrt{x^2-y^2}}$, $z'_y=\frac{|x|}{x\sqrt{x^2-y^2}}$: 12) $z'_x=e^{\frac{x}{y}}\frac{\ln y}{y}$, $z'_y=e^{\frac{x}{y}}\frac{y-x\ln y}{y^2}$: ***770.*** 1) $z''_{x^2}=6xy$, $z''_{xy}=3x^2+3y^2$, $z''_{y^2}=6xy$:

2) $z''_{x^2}=\dfrac{2y^2-2x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$, $z''_{xy}=\dfrac{-4xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$, $z''_{y^2}=\dfrac{2x^2-2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$:

3) $z''_{x^2}=e^{-xy}(xy^2-2y)$, $z''_{xy}=e^{-xy}(x^2y-2x)$, $z''_{y^2}=x^3e^{-xy}$

4) $z''_{x^2}=\dfrac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$, $z''_{xy}=\dfrac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$, $z''_{y^2}=\dfrac{-2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$:

5) $z''_{x^2}=-y^2\sin xy$, $z''_{xy}=\cos xy-xy\sin xy$, $z''_{y^2}=-x^2\sin xy$:

772. $f'_x(0,0)=0, f'_y(0,0)=0, f(x,y)$ -ը (0,0) կետում դիֆերենցելի չէ:

773. 1) դիֆերենցելի չէ, 2) դիֆերենցելի չէ, 3)դիֆերենցելի չէ, 4)դիֆերենցելի է: ***774.*** 1)$dz=(y+2x)dx+(x+2y)dy$, $d^2z=2(dx^2+dxdy+dy^2)$:

2) $dz=\dfrac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$, $d^2z=\dfrac{2xydx^2+2\left(y^2-x^2\right)dxdy-2xydy^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$,

3) $dz=(e^y+ye^x)dx+(xe^y+e^x)dy$, $d^2z=ye^xdx^2+2(e^y+e^x)dxdy+xe^ydy^2$:

4) $dz=(\sin y+y\cos x)dx+(x\cos y+\sin x)dy$,
$d^2z=-y\sin xdx^2+2(\cos y+\cos x)dxdy-x\sin ydy^2$:

5) $dz=\dfrac{ydx+dy}{y(x+\ln y)}$, $d^2z=\dfrac{-y^2dx^2-2ydxdy-(x+\ln y+1)dy^2}{y^2(x+\ln y)^2}$:

6) $dz=(y\sin xy+xy^2\cos xy)dx+(x\sin xy+x^2y\cos xy)dy$,
$d^2z=(2y^2\cos xy-xy^3\sin xy)dx^2+2(\sin xy+3xy\cos xy-$
$-x^2y^2\sin xy)dxdy+(2x^2\cos xy-x^3y\sin xy)dy^2$:

7) $dz=\dfrac{e^{\frac{y}{x}}(-ydx+xdy)}{x^2}$, $d^2z=e^{\frac{y}{x}}\dfrac{\left(y^2+2xy\right)dx^2-2\left(xy+x^2\right)dxdy+x^2dy^2}{x^4}$:

8) $dz=\dfrac{-y^2dx+x^2dy}{(x-y)^2}$, $d^2z=\dfrac{2(ydx-xdy)^2}{(x-y)^3}$: 9)$dz=y\ln ydx+x(1+\ln y)dy$,

$d^2z=2(1+\ln y)dxdy+\dfrac{x}{y}dy^2$: ***775.*** 1) $\dfrac{dz}{dt}=\left(4t^3+5t^4+6t^5\right)$: 2) $\dfrac{dz}{dt}=-4e^{2\cos 2t}\sin 2t$:

3) $\dfrac{dz}{dt}=\dfrac{3t\left(4+3t^2\right)}{2\sqrt[4]{1+t^2}\left(1+t^2\right)}\operatorname{ctg}\dfrac{3t^2}{\sqrt[4]{1+t^2}}$: 4) $\dfrac{dz}{dt}=\dfrac{2e^{2t}}{e^{4t}+1}$: ***776.*** $\dfrac{\partial z}{\partial u}=2\dfrac{uv+u^2-6v^2}{(v+2u)^2}$,

$\dfrac{\partial z}{\partial v}=\dfrac{4v^2-9u^2+16uv}{(v+2u)^2}$: ***777.*** 1) $\dfrac{\partial z}{\partial u}=14u+3v$, $\dfrac{\partial z}{\partial v}=3u+6v$:

2) $\dfrac{\partial z}{\partial u}=4u^3+6uv+3u^2v+v^3$, $\dfrac{\partial z}{\partial v}=6u^2v+4v^3+u^3+3uv^2$

3) $\dfrac{\partial z}{\partial u}=-\sin 2(u+v)-\sin(u+v)\sin uv+v\cos(u+v)\cos uv+v\sin 2uv,$

$\dfrac{\partial z}{\partial v}=-\sin 2(u+v)-\sin(u+v)\sin uv+u\cos(u+v)\cos uv+u\sin 2uv$: **780.** 5:

781. ա) $2\sqrt{3}-5$: բ) $48\sqrt{3}-12;\ 48-12\sqrt{3};\ 36\sqrt{2};\ \alpha=90^0,\ -24;\ \alpha=0^0,\ 48$:

782. ա) $0{,}7\sqrt{2}$: բ) $-7/25$ ***783.*** 1)(-11,69): 2) $\left(\dfrac{5}{4},-\dfrac{3}{4}\right)$: 3) $\left(-1,\dfrac{\pi}{4}\right)$: 4)(3;-6;-2)

5)(-11,-4): ***784.*** 1) $z_{min}(0,3)=-9$: 2) $z_{min}(1,1)=-1$: 3) $z_{min}(1,0)=-1$:

4) $z_{min}\left(\pm\sqrt{2},\mp\sqrt{2}\right)=-8$: 5) $z_{max}(3,2)=108$, 6) $z_{max}(21,20)=282$:

7) $z_{min}(5,2)=30$: 8) $z_{max}(0,0)=1$: 9) $z_{min}(1,2)=7-10\ln 2$:

10) $z_{min}\left(\dfrac{1}{\pm\sqrt{2e}},\dfrac{1}{\pm\sqrt{2e}}\right)=-\dfrac{1}{2e}$, $z_{max}\left(\dfrac{1}{\pm\sqrt{2e}},\dfrac{1}{\mp\sqrt{2e}}\right)=\dfrac{1}{2e}$:

11) $z_{max}(1,3)={}^{e-13}$, $z_{min}\left(-\dfrac{1}{26},-\dfrac{3}{26}\right)=-26e^{-\frac{1}{52}}$ 12) $z_{min}(0,0)=0$,

13) $z_{max}\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$: 14) $z_{max}\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$: $z_{max}\left(\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}\right)=\dfrac{-3\sqrt{3}}{8}$:

785. 1) $z_{\text{պայմ.min}}(1{,}44;1{,}92)=5{,}76$: 2) $z_{\text{պայմ.min}}(1,1)=2$:

3) $z_{\text{պայմ.min}}\left(-0{,}4\sqrt{5};0{,}2\sqrt{5}\right)=-\sqrt{5}$: $z_{\text{պայմ. max}}\left(0{,}4\sqrt{5};0{,}2\sqrt{5}\right)=\sqrt{5}$

4) $z_{\text{պայմ. max}}(\pm 1;\pm 1)=1$: $z_{\text{պայմ.min}}(\pm 1;\mp 1)=-1$: 5) $z_{\text{պայմ. max}}(-2,-2)=-4$, $z_{\text{պայմ. min}}(2,2)=4$: 6) $z_{\text{պայմ.min}}\left(\dfrac{5}{4},\dfrac{5}{6}\right)=-\dfrac{25}{24}$: 7) $z_{\text{պայմ. max}}(2,2)=32$: ***786.*** (1,2):

787. $(\pm\sqrt{5},1)$,: ***788.*** $\left(-\dfrac{8}{5},-\dfrac{3}{5}\right),\left(\dfrac{8}{5},\dfrac{3}{5}\right)$: ***789. 2.*** ա) a=3,023, b=-1,08:

բ) a=3,19, b=-0,37: ***790.*** $x^4-5\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{9x^2}{2}-2x+c$: ***791.*** $-\dfrac{1}{2x^2}+c$:

792. $a\dfrac{x^3}{3}+b\dfrac{x^2}{2}+cx+c_1$ ***793.*** $\dfrac{1}{2}x^6-x^5+\dfrac{1}{2}x^4+c$: ***794.*** $9x+2x^6+\dfrac{4x^{11}}{11}+c$:

795. $\dfrac{5}{12}x^2\sqrt[5]{x^2}+c$: ***796.*** $\dfrac{3}{4}x\sqrt[3]{x}-\dfrac{6}{11}x\sqrt[6]{x^5}+c$: ***797.*** $\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+\dfrac{4}{7}x\sqrt[4]{x^3}+c$:

798. $\dfrac{2}{3}x\sqrt{5x}+c$: ***799.*** $\dfrac{2}{3}\sqrt{3x}+c$: ***800.*** $\dfrac{5}{2}x^2+4x+\dfrac{3}{x}+c$: ***801.*** $\dfrac{(5x+2)^5}{25}+c$:

802. $\dfrac{-4}{9(3x+2)^6}+c$: ***803.*** $\dfrac{2}{15}(2+5x)^{\frac{3}{2}}+c$: ***804.*** $-\dfrac{2}{3}\sqrt{2-3x}+c$: ***805.*** $\dfrac{-5}{3\left(x^3+2\right)}+c$:

806. $\frac{(4-5x^4)^6}{-120}+c$: **807.** $\frac{(4x^3+3)^{\frac{3}{2}}}{18}+c$: **808.** $\frac{5}{21}(7x^2+8)^{\frac{3}{2}}+c$: **809.** $\frac{(x^2-3x+1)^{11}}{11}+c$:

810. $\frac{14}{9}(3x^2-4)^{\frac{3}{4}}+c$: **811.** $\frac{3}{40}\left(3x^{\frac{4}{3}}+5\right)^{\frac{10}{3}}+c$: **812.** 2arcsinx-x+c:

813. arctgx+x-$\frac{x^3}{3}+c$: **814.** $\frac{1}{3}\ln|x|+c$: **815.** $\ln|\ln x|+c$: **816.** $\frac{(2\ln x+3)^4}{8}+c$:

817. $\frac{1}{5}\ln|2+5x|+c$: **818.** $-\frac{3}{2}\ln\left|5-x^2\right|+c$: **819.** $\frac{1}{6}\ln\left|5+4x^3\right|+c$:

820. $\frac{1}{12}\ln\left|\frac{2x-3}{2x+3}\right|+c$: **821.** $\frac{1}{\sqrt{7}}\ln\left|\frac{\sqrt{x}-\sqrt{7}}{\sqrt{x}+\sqrt{7}}\right|+c$: **822.** $\ln\left|5+e^x\right|+c$:

823. $\frac{3}{10}\ln\left|4+5e^{2x}\right|+c$: **824.** $\frac{\sin^6 x}{6}+c$: **825.** $\frac{2}{3}(\sin x)^{\frac{3}{2}}+c$: **826.** $\frac{\left(2\sin\frac{x}{2}+3\right)^3}{3}+c$

827. $\frac{-5}{2}\ln|3+2\cos x|+c$: **828.** $\ln\left|e^x+\sin x\right|+c$: **829.** $-\frac{1}{2}\ln|4-3\sin 2x|+c$:

830. $-\frac{1}{3}\ln|2-3\mathrm{tg}x|+c$: **831.** $\frac{1}{10}\mathrm{tg}^2 5x+c$: **832.** $\frac{1}{3}\ln|4+\mathrm{tg}3x|+c$:

833. $-\frac{8}{3}\sqrt{5-3\sin x}+c$: **834.** $\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right|+c$: **835.** $-\,arctg\,\frac{x}{2}+c$:

836. $\frac{1}{\sqrt{30}}\mathrm{arctg}\frac{x\sqrt{30}}{6}+c$: **837.** $\frac{\sqrt{3}}{3}\ln\left|x\sqrt{3}+\sqrt{4+3x^2}\right|+c$: **838.** $-\frac{1}{9}\ln|7-9x|+c$:

839. $\frac{\sqrt{3}}{3}\arcsin\frac{x\sqrt{6}}{2}+c$: **840.** $\frac{1}{8\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^4-\sqrt{2}}{x^4+\sqrt{2}}\right|+c$: **841.** $\ln\frac{|x|}{1+\sqrt{1+x^2}}+c$:

842. $-\arcsin\frac{1}{|x|}+c$: **843.** $2\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{1+x}\right)+c$: **844.** $2\arcsin\sqrt{x}+c$:

845. $-\frac{1}{2}\arccos^2\frac{x}{2}+c$: **846.** $\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sin^2 x}{\sqrt{2}}+c$: **847.** $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+\ln x}{2-\ln x}\right|+c$:

848. $\frac{5^x e^x}{1+\ln 5}+c$: **849.** $\frac{5}{3}e^{3x}+c$: **850.** $6e^{\frac{x}{2}}+c$: **851.** $\frac{1}{-2e^{2x}}+c$:

852. $\frac{1}{2}\left(e^{2x}+3x^2\right)+c$: **853.** $2\left(e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}\right)+c$: **854.** $e^x-2x-e^{-x}+c$:

855. $3e^{\frac{x}{3}}+c$: **856.** $\frac{1}{3}\left(e^{3x}+e^{-3x}\right)-3\left(e^{x}+e^{-x}\right)+c$: **857.** $-e^{\cos x}+c$: **858.** $e^{\sin x}+c$:

859. $\frac{1}{3}e^{x^3}+c$: **860.** $2e^{\sqrt{x}}+c$: **861.** $-e^{\frac{1}{x}}+c$: **862.** $-\frac{1}{2}e^{\frac{1}{x^2}}+c$: **863.** $-e^{x^4}+c$:

864. $\frac{1}{2}\ln\left(e^{2x}+3\right)+c$: **865.** $x-\frac{3}{4}e^{-4x}+c$: **866.** $\frac{5}{3}e^{\operatorname{tg}3x}+c$: **867.** $-\ln\left(e^{\cos x}+4\right)+c$:

868. $5\frac{3^{\ln x}}{\ln 3}+c$: **869.** $\frac{(x-1)^{12}}{12}+\frac{(x-1)^{11}}{11}+c$: **870.** $\frac{1}{3}\left((x+1)^{\frac{3}{2}}-(x-1)^{\frac{3}{2}}\right)+c$:

871. $\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x-2\ln|x+1|+c$: **872.** $\ln|x|+2\operatorname{arctg}x+c$:

873. 1) $\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{x^2-3}{2}+c$: 2) $\frac{2}{3}(1+\ln x)^{\frac{3}{2}}+c$: 3) $-\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{\sqrt{2}}{|x|}+c$:

4) $\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}-2\sqrt{x+1}+c$: 5) $\ln\left(\sin x+\sqrt{1+\sin^2 x}\right)+c$:

6) $\frac{-2}{15}\sqrt{2-x}\left(32+8x+3x^2\right)+c$: 7) $-\frac{1}{15}\left(8+4x^2+3x^4\right)\sqrt{1-x^2}+c$:

8) $\frac{-25x^3-6}{1000}\left(2-5x^3\right)^{\frac{5}{3}}+c$: 9) $\left(\frac{2}{3}-\frac{4}{7}\sin^2 x+\frac{2}{11}\sin^4 x\right)\sqrt{\sin^3 x}+c$:

10) $\operatorname{arctg}^2\sqrt{x}+c$: 11) $-\arcsin\frac{\cos^2 x}{\sqrt{3}}+c$: 12) $\arcsin\frac{\ln x}{2}+c$:

13)$(3x^2-x-2)\sqrt{x-1}$ 2/15: 14)0,25e^{x^4} **874.** 1) $\frac{2}{3}x\sqrt{x}-x+4\sqrt{x}-4\ln\left(1+\sqrt{x}\right)+c$:

2) $\frac{\arcsin^3 x}{3}+c$: 3) $\frac{2}{3}\left(e^x-2\right)\sqrt{e^x+1}+c$: 4) $\ln\left|\frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1}\right|+c$:

5) $2\operatorname{arctg}\sqrt{e^x-1}+c$: 6) $\frac{2}{5}\left(\cos^2 x-5\right)\sqrt{\cos x}+c$: 7) $\ln\frac{|x|}{1+\sqrt{1-x^2}}+c$:

8) $\frac{\sqrt{x^2-9}}{9x}+c$: 9) $\frac{-\sqrt[3]{\left(1+x^3\right)^2}}{2x^2}+c$: 10) $\frac{1}{4}\ln\left(3+4e^x\right)+c$: 11) $\frac{1}{2}\ln|\operatorname{tg}x|+c$:

12) $\frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg}x-\frac{x}{x^2+1}\right)+c$: 13) $\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+c$:

14) $\frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}+c$: 15) $\frac{1}{2}\arcsin x-\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+c$: 16) $2\arcsin\sqrt{x/3}$

875. $x\sin x+\cos x+c$: ***876.*** $x\ln x-x+c$: ***877.*** $\frac{x^2}{2}\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)+c$: ***878.*** $e^x(x-1)+c$:

879. $-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+c$: ***880.*** $x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+c$:

881. $x\,\mathrm{arctg}x-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+c$: ***882.*** $\frac{x^4}{4}\left(\ln x-\frac{1}{4}\right)+c$:

883. $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+c$: ***884.*** $-\frac{1}{3}x\cos 3x+\frac{1}{9}\sin 3x+c$:

885. $\frac{x^2+1}{2}\mathrm{arctg}x-\frac{1}{2}x+c$: ***886.*** $-\frac{1}{x}(\ln x+1)+c$:

887. $-\frac{1}{x}\arcsin x+\ln\frac{|x|}{1+\sqrt{1-x^2}}+c$: ***888.*** $x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+c$:

889. $e^x\left(x^3-3x^2+6x-6\right)+c$: ***890.*** $x\,\mathrm{arctg}x+\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+c$:

891. $\frac{1}{3}e^{3x}\left(5x-2-\frac{5}{3}\right)+c$: ***892.*** $-\frac{1}{2}e^{-2x}(4x-1)+c$: ***893.*** $x\,\mathrm{tg}x+\ln|\cos x|+c$:

894. $\frac{x^2}{4}-\frac{x}{4}\sin 2x-\frac{1}{8}\cos 2x+c$: ***895.*** $\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{4}\right)\arcsin x+\frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2}+c$:

896. $\frac{e^x}{2}(\sin x-\cos x)+c$: ***897.*** $\frac{e^x}{2}(\cos x+\sin x)+c$: ***898.*** $\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx-b\cos bx)+c$:

899. $\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx+b\sin bx)+c$: ***900.*** $\frac{3}{4}x+\frac{43}{16}\ln|4x-5|+c$:

901. $\frac{-3}{5}x+\frac{26}{25}\ln|2+5x|+c$: ***902.*** $\frac{7}{4}\ln|x+1|+\frac{5}{4}\ln|x-3|+c$:

903. $\ln\frac{(x-3)^2}{|x-4|}+c$: ***904.*** $\mathrm{arctg}(x-1)+c$: ***905.*** $\frac{1}{4}\mathit{arctg}\frac{x+3}{4}+c$:

906. $\frac{1}{2\sqrt{15}}\ln\left|\frac{x-4-\sqrt{15}}{x-4+\sqrt{15}}\right|+c$: ***907.*** $\frac{1}{18}\ln\left|\frac{3x-4}{3x+2}\right|+c$: ***908.*** $\frac{1}{8}\mathrm{arctg}\frac{2x-1}{4}+c$:

909. $\frac{1}{30}\mathrm{arctg}\frac{5x+1}{6}+c$: ***910.*** $\frac{3}{2}\ln\left|x^2-4x+8\right|+\frac{5}{2}\mathrm{arctg}\frac{x-2}{2}+c$:

911. $\frac{1}{2}\ln\left|x^2+8x+25\right|+\frac{1}{3}\mathit{arctg}\frac{x+4}{3}+c$: ***912.*** $\frac{x+1}{18(x^2+2x+10)}+\frac{1}{54}\mathit{arctg}\frac{x+1}{3}+c$:

913. $\frac{x}{2\left(x^2+1\right)}+\frac{1}{2}\mathit{arctg}x+c$: ***914.*** $2x-10\ln|x-2|+23\ln|x-3|+c$:

915. $\frac{x^2}{2}+\frac{\ln(x+1)(x-9)^9}{10}+c$: **916.** $\frac{1}{10}\ln|x+3|+\frac{1}{15}\ln|x-2|-\frac{1}{6}\ln|x+1|+c$:

917. $\frac{1}{18}\ln\left|1-\frac{9}{x^2}\right|+c$: **918.** $-\frac{1}{x}-\operatorname{arctg}x+c$: **919.** $\ln\frac{|x-1|^3|x-4|^5}{|x-2|^7}+c$:

920. $\frac{1}{x+1}+\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+c$: **921.** $\frac{5}{32}\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right|-\frac{3}{8(x-1)}-\frac{1}{4(x-1)^2}+c$:

922. $\frac{1}{10}\ln\frac{(x-2)^2}{x^2+1}-\frac{2}{5}\operatorname{arctg}x+c$: **923.** $\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+c$:

924. $\frac{1}{x}+\frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+c$: **925.** $\frac{5}{4}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+1}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+c$

926. $x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|-\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+c$: **927.** $\frac{-1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2}+c$: **928.** $\frac{1}{5}\ln\left|3+5\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+c$:

929. $-x-\frac{2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}+c$: **930.** $\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{\cos x}+c$: **931.** $\frac{\sin x}{2\cos^2 x}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+c$:

932. $\frac{1}{6}\ln\left(3\sin^2 x+4\right)+c$: **933.** $\ln|\sin x|-\sin x+c$: **934.** $-\operatorname{ctg}x-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x+c$:

935. $\ln|\sin x|-\sin^2 x+\frac{1}{4}\sin^4 x+c$: **936.** $-\frac{1}{2}\frac{\cos x}{\sin^2 x}-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|+c$:

937. tgx-ctgx+c: **938.** $\frac{1}{3\sin^3 x}-\frac{1}{5\sin^5 x}+c$: **939.** $\frac{1}{2\cos^2 x}+\ln|\operatorname{tg}x|+c$:

940. $-\frac{1}{3}\cos 3x+c$: **941.** $-3\cos\frac{x}{3}+c$: **942.** $\frac{1}{2}\sin 2x+c$: **943.** $5\sin\frac{x}{5}+c$:

944. $-\frac{1}{5}\ln|\cos 5x|+c$: **945.** $4\ln\left|\sin\frac{x}{4}\right|+c$: **946.** $\frac{1}{5}\operatorname{tg}5x+c$: **947.** $-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}3x+c$:

948. $-\frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(1-x^2\right)+c$: **949.** $\frac{5}{3}\operatorname{ctg}\left(4-x^3\right)+c$: **950.** $-\sin\frac{1}{x}+c$: **951.** $-\frac{2}{5}\cos\sqrt{5x}+c$:

952. $-\frac{1}{3}\ln\cos x^3+c$: **953.** $\frac{5}{4}\ln\left|\sin x^4\right|+c$: **954.** $-\frac{1}{3}\cos e^{3x}+c$: **955.** $\frac{\sin^5 x}{5}+c$:

956. $\frac{1}{3}\left(x^3+\cos 3x\right)+c$: **957.** $-\frac{2}{5}\sqrt{2+\cos 5x}+c$: **958.** $\frac{1}{2}\sin^4\frac{x}{2}+c$:

959. $\frac{1}{10}\sin^2 5x+c$: **960.** $-\frac{1}{16}\cos 8x+\frac{1}{4}\cos 2x+c$: **961.** $-\frac{1}{18}\cos 9x+\frac{1}{10}\cos 5x+c$:

962. $\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{16}\sin 8x+c$: ***963.*** $\frac{1}{6}\sin 3x-\frac{1}{22}\sin 11x+c$: ***964.*** $\frac{1}{10}\sin 5x+\frac{1}{2}\sin x+c$:

965. $\frac{1}{36}\sin 18x+\frac{1}{4}\sin 2x+c$: ***966.*** $\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x+c$: ***967.*** $\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x+c$:

968. $\frac{x}{2}-\frac{3}{4}\sin\frac{2x}{3}+c$: ***969.*** $\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}+c$: ***970.*** $\frac{\cos^3 x}{3}-\cos x+c$:

971. $\frac{\cos^5 x}{5}-\frac{\cos^3 x}{3}+c$: ***972.*** $\frac{\sin^5 x}{5}-\frac{\sin^7 x}{7}+c$: ***973.*** $\frac{\cos^7 x}{7}-\frac{\cos^5 x}{5}+c$:

974. $\frac{\sin^3 x}{3}-\frac{2}{5}\sin^5 x+\frac{\sin^7 x}{7}+c$: ***975.*** $\frac{1}{3\cos^3 x}-\frac{1}{\cos x}+c$: ***976.*** $\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}+c$:

977. $\frac{x}{8}-\frac{\sin 8x}{64}+c$: ***978.*** $\frac{3x}{8}-\frac{\sin 2x}{4}+\frac{1}{32}\sin 4x+c$: ***979.*** $\frac{3x}{8}+\frac{\sin 2x}{4}+\frac{1}{32}\sin 4x+c$:

980. tgx-x+c: ***981.*** $\frac{tg^2 x}{2}+\ln|\cos x|+c$: ***982.*** –ctgx-x+c:

983. $-\frac{ctg^2 x}{2}-\ln|\sin x|+c$: ***984.*** $\frac{tg^3 x}{3}-tgx+x+c$: ***985.*** $\frac{tg^4 x}{4}-\frac{tg^2 x}{2}-\ln|\cos x|+c$:

986. $\frac{-ctg^3 x}{3}+ctgx+x+c$: ***987.*** $-\frac{ctg^4 x}{4}+\frac{ctg^2 x}{2}+\ln|\sin x|+c$: ***988.*** $\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x-3}{2\sqrt{3}}+c$:

989. $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+4+\sqrt{x^4+8x^2+25}\right)+c$: ***990.*** $\frac{3}{4}\sqrt{4x^2+3}+\frac{5}{2}\ln\left(2x+\sqrt{4x^2+3}\right)+c$:

991. $-\sqrt{3+2x-x^2}-4\arcsin\frac{x-1}{2}+c$: ***992.*** $-3\sqrt{6x-x^2-8}+5\arcsin(x-3)+c$:

993. $\sqrt{2x^2+8x+1}-\frac{5}{\sqrt{2}}\ln\left|(x+2)\sqrt{2}+\sqrt{2x^2+8x+1}\right|+c$: ***994.*** $\ln\left|x-\frac{1}{2}+\sqrt{x^2-x-1}\right|+c$:

995. $-5\sqrt{5+4x-x^2}+13\arcsin\frac{x-2}{3}+c$: ***996.*** $\arcsin(x-1)+c$:

997. $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{6x+5}{2\sqrt{3}}+\sqrt{3x^2+5}\right|+c$: ***998.*** $\frac{5}{\sqrt{7}}\arcsin\frac{7x+4}{\sqrt{79}}+c$: ***999.*** $2\arcsin\frac{x+1}{2}+c$:

1000. $\frac{2}{3}\sqrt{9x^2+1}+\frac{5}{3}\ln\left[3x+\sqrt{9x^2+1}\right]+c$: ***1001.*** $\sqrt{x^2+2x}+2\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x}\right|+c$:

1002. $\frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2}+\frac{1}{2}\arcsin 2x+c$: ***1003.*** $-2\sqrt{1-x-x^2}-9\arcsin\frac{2x+1}{\sqrt{5}}+c$:

1004. $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}+c$ ***1005.*** $\ln\frac{|x|}{x+2+2\sqrt{x^2+x+1}}+c$:

1006. $\left(\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{12}x-\frac{1}{8}\right)\sqrt{x+x^2}+\frac{1}{8}\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{1+x}\right)+c$

1007. $\frac{3\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}+\frac{6\sqrt[6]{x^5}}{5}-4\sqrt{x}+18\sqrt[6]{x}-21arctg\sqrt[6]{x}+c$:

1008. $\frac{x+2}{5}\sqrt[3]{(3x+1)^2}+c$: **1009.** $\frac{2}{5}\sqrt{(1-x)^5}-\frac{2}{3}\sqrt{(1-x)^3}+c$:

1010. $2\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{x-2}{2}}+c$: **1011.** $\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt[4]{1+x^4}+x}{\sqrt[4]{1+x^4}-x}-\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}+c$:

1012. $\frac{3}{5}z^5-2z^3+3z+c$, որտեղ $z=\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}$

1013. $\frac{\sqrt{(4-x^2)^3}}{3}-4\sqrt{4-x^2}+c$ **1014.** $\frac{3}{5}\sqrt[3]{(x-1)^5}-\frac{3}{4}\sqrt[3]{(x-1)^4}+x+c$:

1015. $\frac{12}{7}\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^{\frac{7}{3}}-3\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^{\frac{4}{3}}+c$: **1016.** 1)20: 2)$\frac{52}{9}$: 3)$\frac{19}{3}$: **1017.** 3:

1018. $\frac{1}{\ln 2}$: **1019.** $\frac{1}{4}$: **1020.** ln2: **1021.** 3: **1022.** $40\frac{8}{15}$: **1023.** 2:

1024. 2: **1025.** $\frac{\pi}{3}$: **1026.** $\frac{11}{5}$: **1027.** 4: **1028.** $\frac{38}{3}$ **1029.** $\frac{8}{49}$: **1030.** $\frac{1}{3}$:

1031. 12: **1032.** $\frac{98}{3}$: **1033.** $\frac{15}{4}$: **1034.** $\frac{2}{3}\left(\sqrt{2}-1\right)$: **1035.** 4: **1036.** 2:

1037. arctg$\frac{1}{7}$: **1038.** $\frac{e^4-1}{2}$: **1039.** $\frac{14}{3}$: **1040.** ln4: **1041.** $\frac{1}{2}$: **1042.** ln2:

1043. $\frac{\pi}{4}$: **1044.** $\frac{1}{p+1}$: **1045.** $\pi\sqrt{2}-4$: **1046.** $\frac{e^2+1}{4}$: **1047.** 1:

1048. -2π: **1049.** $\frac{9-4\sqrt{3}}{36}\pi+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$: **1050.** $\frac{\pi^2+4}{16}$: **1051.** $4\ln 2-\frac{15}{16}$:

1052. 4: **1053.** $\frac{\pi-2\ln 2}{4}$: **1054.** $\frac{2e^3+1}{9}$: **1055.** e-2: **1056.** $\frac{e^{\frac{3\pi}{2}}-3}{10}$:

1057. $2-\frac{2}{e}$: **1058.** $\frac{\pi}{2}-1$: **1059.** $\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$: **1060.** $\frac{2}{3}\left(3+\ln\frac{2}{5}\right)$: **1061.** $\ln\frac{3}{2}$:

1062. 2(2-ln3): **1063.** $\frac{56}{9}$: **1064.** $\frac{61}{3}$: **1065.** 2arctg2: **1066.** $\frac{1}{5}$:

1067. $1+\frac{1}{2}\ln\frac{2}{1+e^2}$: **1068.** $\frac{2}{7}$: **1069.** $2-\sqrt{2}$ **1070.** $13\frac{5}{9}$: **1071.** $1-\frac{\pi}{4}$:

1072. $\frac{1}{6}$: **1073.** $\frac{\pi a^4}{16}$ **1074.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{9+4\sqrt{2}}{7}$ **1075.** $\frac{\pi}{6}$: **1078.** $\frac{1}{\ln a}$: **1079.** $\frac{\pi^2}{8}$

1080. $+\infty$: **1081.** $\frac{\pi}{2}$: **1082.** $\frac{1}{2}$: **1083.** $\frac{\pi}{2}$: **1084.** π: **1085.** π: **1086.** π:

1087. $\frac{1}{3}$: ***1088.*** 0: ***1089.*** π: ***1090.*** $\frac{1}{3}\ln 4$ ***1091.*** -1: ***1092.*** $\frac{a}{a^2+b^2}$:

1093. $\frac{b}{a^2+b^2}$: ***1094.*** ա) $-\frac{\pi}{2}\ln 2$: բ) $-\frac{\pi}{2}\ln 2$: ***1095.*** զ.: ***1096.*** զ.: ***1097.*** տ.:

1098. m>-1 և n-m>1, զ.: ***1099.*** 1<n<2, զ.: ***1100.*** n>0 և a≠0 զ.: ***1101.*** 8:

1102. 16/3: ***1103.*** $18\frac{2}{3}$: ***1104.*** 24. ***1105.*** $10\frac{2}{3}$: ***1106.*** $15\frac{3}{16}$ ***1107.*** 18:

1108. 13,5: ***1109.*** 4,5: ***1110.*** $8\sqrt{2}$ ***1111.*** $21\frac{1}{3}$ ***1112.*** 7,5-4ln4:

1113. 17,5-6ln6: ***1114.*** πa^2: ***1115.*** 1: ***1161.*** $\frac{32\sqrt{6}}{3}$: ***1117.*** $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}$ ***1118.*** a^2.

1119. $\frac{3\pi a^2}{2}$: ***1120.*** $\frac{\pi a^2}{4}$: ***1121.*** $\frac{7a^2}{4\pi}$ ***1122.*** $\frac{\pi a^2}{2}$ ***1123.*** $\frac{\pi a^2}{4}$

1124. $\frac{a^2}{2}\mathrm{sh}2\pi$: ***1126.*** $\frac{8}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right)$: ***1127.*** $\frac{3}{2}+2\ln 2$: ***1128.*** $\frac{e^2+1}{4}$

1129. $\ln tg\frac{7\pi}{24}$: ***1130.*** 8a: ***1131.*** $\frac{3\pi a}{2}$ ***1132.*** $\pi a\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{a}{2}\ln\left(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2}\right)$

1133. $\frac{\pi^2}{2}$: ***1134.*** $\frac{184\pi}{15}$ ***1135.*** $\frac{28\pi}{15}$ ***1136.*** 9,6π: ***1137.*** $\frac{512\pi}{3}$ ***1138.*** $\frac{843\pi}{5}$

1139. 8π: ***1140.*** 8π: ***1141.*** $\frac{4}{3}\pi ab^2$ ***1141.1.*** $2\pi^2ab^2$ ***1142.*** $\frac{3\pi}{2}$

1143. 218,7π: ***1144.*** $\frac{96\pi}{5}$ ***1145.*** 2π: ***1146.*** $\frac{512\pi}{15}$ ***1147.*** $\frac{64\pi}{3}$ ***1148.*** π^3-4π:

1149. $\frac{512\pi}{7}$ ***1150.*** $\frac{2048\pi}{35}$ ***1150.1.*** 38/15: ***2.*** e/e-1: ***3.*** 7y: ***4.*** 1/3: ***5.*** 2/e^2-1:

6. 1/2. ***1151.*** 1: ***1152.*** 1: ***1153.*** տ.. ***1154.*** տ.. ***1155.*** 3/4 ***1156.*** 1/2 ***1157.*** 3: ***1158.*** 1/1 − q ***1159.*** տ.. ***1160.*** 3/2 ***1161.*** 3: ***1162.*** 1/8 ***1163.*** 0,7: ***1164.*** 1/3 ***1165.*** 1/2 ***1166.*** 5/4 ***1167.*** 4/3 ***1168.*** 33/40

1169. տ.: ***1170.*** տ.: ***1173.*** չի բ.. ***1174.*** բ.. ***1175.*** չի բ.: ***1176.*** չի բ.: ***1177.*** բ.: ***1178.*** չի բ.: ***1179.*** տ.: ***1180.*** տ.. ***1181.*** զ.. ***1182.*** տ.. ***1183.*** զ.: ***1184.*** զ.. ***1185.*** տ.. ***1186.*** տ.. ***1187.*** տ.: ***1188.*** տ.. ***1189.*** տ.. ***1190.*** տ.: ***1191.*** զ.: ***1192.*** զ.: ***1193.*** տ.: ***1194.*** տ.. ***1195.*** զ.. ***1196.*** զ.. ***1197.*** զ.. ***1198.*** զ.: ***1199.*** զ.: ***1200.*** զ.. ***1201.*** զ.: ***1202.*** զ.. ***1203.*** զ.. ***1204.*** զ.. ***1205.*** զ.. ***1206.*** տ.. ***1207.*** տ.. ***1208.*** զ.. ***1209.*** զ.. ***1210.*** զ.. ***1211.*** ա)զ.. բ) զ.. գ) տ.: դ) տ.: ***1212.*** զ.. ***1213.*** զ.. ***1214.*** զ.. ***1215.*** զ.. ***1216.*** զ.. ***1217.*** զ.. ***1218.*** տ.. ***1219.*** զ.. ***1220.*** զ.. ***1221.*** զ.. ***1222.*** զ. եթե p≠1, տ. $p=1$: ***1223.*** տ.: ***1224.*** գ.: ***1225.*** գ.: ***1226.*** գ. եթե $p>1$, տ. $p\le1$: ***1227.*** գ. եթե $p>1$, տ. $p=1$: ***1228.*** գ.: ***1229.*** գ.: ***1230.*** գ.: ***1231.*** գ.: ***1232.*** գ.: ***1233.*** գ.: ***1234.*** գ.: ***1235.*** գ.: ***1236.*** գ.: ***1237.*** գ.: ***1238.*** տ.: ***1239.*** գ.: ***1240.*** պ.գ.: ***1241.*** բ.գ.: ***1242.*** պ.գ.: ***1243.*** պ.գ.: ***1244.*** պ.գ.: ***1245.*** բ.գ.: ***1246.*** բ.գ.: ***1247.*** պ.գ.: ***1248.*** տ.: ***1249.*** բ.գ.: ***1250.*** բ.գ.: ***1251.*** $p>1$, կամ $p=1$ $\alpha>1$ բ.գ. $1>p>0$, կամ $p=0$ $\alpha>0$ պ.գ.: ***1252.*** $[-2,2)$: ***1253.*** $[-1,1]$: ***1254.*** $(-4,4)$: ***1255.*** $\left(-\sqrt{3e},\sqrt{3e}\right)$: ***1256.*** $\left(-\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right)$:

1257. $[-1,1)$: ***1258.*** $[-1,1)$: ***1259.*** $[-5,3)$: ***1260.*** $(1,2]$: ***1261.*** $[-1,0)$:

1262. $[-1,3)$: ***1263.*** ա) $(-1,1),\frac{1}{(1-x)^2}$: բ) $[-1,1], arctgx$: գ) $(-1,1)\frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$:

դ) $[-1,1),-\ln(1-x)$: ***1264.*** $e\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{6}-\quad\right)$ ***1265.*** $1+\frac{x^2}{2}+\frac{5}{24}x^4+\ldots$:

1266. $x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+\ldots$: ***1267.*** $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots$: ***1268.*** $x-\frac{x^3}{6}+\frac{3}{48}x^5-\ldots$:

1269. $x-\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5-\ldots$: ***1270.*** $-\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{2}{3^{n+1}}\right)x^n, R=1$: ***1271.*** $1+\sum_{n=1}^{\infty}(-2)^{n-1}x^n, R=\frac{1}{2}$:

1272. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-(-2)^{n+1}\right)x^n, R=\frac{1}{2}$: ***1273.*** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{4^n}{(2n)!}x^{2n}, R=+\infty$

1274. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n!}x^{n+1}, R=+\infty$: ***1275.*** $2+\frac{x}{12}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot2\cdot5\cdot8\ldots(3n-4)}{3^n\cdot2^{3n-1}n!}x^n, R=8$:

1276. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2n-1}x^{2n-1}, R=1$: ***1277.*** $\frac{1}{8}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{16^n}{(2n)!}x^{2n}, R=+\infty$:

1278. $1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots, R=+\infty$: ***1279.*** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}, R=+\infty$:

1279.1. ա)4/15. բ)27/8. գ) 1/2. դ)125/3. ե) -1/3: ***1280.*** 1: ***1281.*** e^2-e-1: ***1282.*** $\frac{-8}{3}$: ***1283.*** e^3+e: ***1284.*** 1) $x=1$, $x=2$, $y=x$, $y=x+3$: 2) $x=-1$, $x=1$, $y=x^2$, $y=2-x^2$: 3) $y=0$, $y=2$, $x=\sqrt{2-y}, x=\sqrt{4-y^2}$

4) $x=0, x=1, y=\sqrt{x}, y=\sqrt{2-x^2}$ ***1285.*** 1) $\int_1^5 dx\int_2^4 f(x,y)dy=\int_2^4 dy\int_1^5 f(x,y)dx$:

2) $\int_2^4 dy \int_y^{y+3} f(x,y)dx = \int_2^4 dx \int_2^x f(x,y)dy + \int_4^5 dx \int_2^4 f(x,y)dy + \int_5^7 dx \int_{x-3}^4 f(x,y)dy$:

3) $\int_{-a}^{a} dx \int_{\frac{x^2}{a}}^{\sqrt{2a^2-x^2}} f(x,y)dy = \int_0^a dy \int_{-\sqrt{ay}}^{\sqrt{ay}} f(x,y)dx + \int_a^{a\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2a^2-y^2}}^{\sqrt{2a^2-y^2}} f(x,y)dx$:

4) $\int_0^a dx \int_{\sqrt{ax}}^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x,y)dy = \int_0^a dy \int_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{\frac{y^2}{a}} f(x,y)dx$:

5) $\int_0^a dx \int_{\sqrt{ax-x^2}}^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x,y)dy + \int_a^{2a} dx \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x,y)dy =$

$= \int_0^{\frac{a}{2}} dy \int_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-y^2}} f(x,y)dx + \int_0^{\frac{a}{2}} dy \int_{\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-y^2}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)dx + \int_{\frac{a}{2}}^{a} dy \int_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{a+\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)dx$:

1286. $\int_{-7}^{1} dy \int_{2-\sqrt{7-6y-y^2}}^{2+\sqrt{7-6y-y^2}} f(x,y)dx$: ***1287.*** $\int_{-1}^{0} dx \int_{-\sqrt{1+x}}^{\sqrt{1+x}} f(x,y)dy + \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x}}^{\sqrt{1-x}} f(x,y)dy$:

1288. $\int_0^2 dy \int_0^{2-\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx + \int_0^2 dy \int_{2+\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{16-y^2}} f(x,y)dx + \int_2^4 dy \int_0^{\sqrt{16-y^2}} f(x,y)dx$:

1289. $\int_0^a dy \int_0^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)dx + \int_a^{2a} dy \int_0^{\sqrt{2ay-y^2}} f(x,y)dx$:

1290. $\int_{-1}^{0} dx \int_{-\sqrt{x+1}}^{\sqrt{x+1}} f(x,y)dy + \int_0^1 dx \int_{\sqrt{2x}}^{\sqrt{x+1}} f(x,y)dy + \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x+1}}^{-\sqrt{2x}} f(x,y)dy$:

1291. $\int_1^3 dy \int_{\frac{9}{y}}^{10-y} f(x,y)dx$ ***1292.*** $\int_0^1 dx \int_x^{3\sqrt{x}} f(x,y)dy$ ***1293.*** $\int_0^{\frac{8}{3}} dy \int_{2y-2}^{\sqrt{y^2+4}} f(x,y)dx$

1294. $\ln\frac{25}{24}$: ***1295.*** 660. ***1296.*** $\frac{\pi}{12}$: ***1297.*** $4\frac{2}{3}$: ***1298.*** $\frac{33}{140}$: ***1299.*** $2\frac{1}{4}$:
1300. -2: ***1301.*** $\frac{27}{2}$: ***1302.*** $25\frac{1}{3}$: ***1303.*** $\frac{3}{28}$: ***1304.*** $\frac{68}{15}$: ***1305.*** $\frac{1}{6}$:
1306. $\frac{\pi a}{2}$: ***1307.*** $\frac{2\pi a^3}{3}$: ***1308.*** $\frac{\pi}{2}$: ***1309.*** $-6\pi^2$ ***1310.*** π: ***1311.*** $\pi(e^{R^2}-1)$
1312. $\pi(1-e^{-R^2})$: ***1313.*** $\frac{3\pi}{2}$: ***1314.*** 4π: ***1315.*** $\frac{4\pi}{3}-\frac{64\sqrt{2}-80}{9}$: ***131*** $\pi(\sqrt{2}-1)$:
1317. $\frac{14}{3}$: ***1318.*** 2π: ***1319.*** ш) $\sqrt{2\pi}$ р) $\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ ***1322.*** 1) $2y^2-3x^2=c$:
2) $x^3+y^3-3x=c$: 3) $e^x+e^{-y}=c$: 4) $y=c\sin x$: 5) $y\sin y+\cos y-x\cos x+\sin x=c$:
6) $y=c\sqrt{1+e^{2x}}$ 7) $\sqrt{y}+x(1-\ln x)=c$: 8) $\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}-x=c$: 9) $y=ce^{x+si}$

1323. 1) $x^2-y^2=1$: 2) $y=e^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$ 3) $y=-x$: 4) $y=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x+4$:

1324. 1) $x^2-2xy-y^2=c$: 2) $y=x\ln\frac{c}{x}$, $x=0$: 3) $x^2+y^2=cy$: 4) $y=xe^{1+cx}$
5) $y=-x\ln\ln cx$: 6) $y=x\sin\ln cx, y=\pm x$: 7) $(x+y-1)^3=c(x-y+3)$:
8) $x+2y+3\ln|x+y-2|=c,\ x+y=2$: ***1325.*** 1) $y=-x$: 2) $\ln|y|+2\sqrt{\frac{x}{y}}=2$:
3) $y=xe^{-\frac{x}{2}}$ 4) $x^2-y^2=4x$: ***1326.*** 1) $y=ce^{-2x}+2x-1$: 2) $y=e^{-x^2}\left(\frac{x^2}{2}+c\right)$:
3) $y=(x+c)(1+x^2)$: 4) $y=x\ln x+\frac{c}{x}$: 5) $y=(x+1)^2(e^x+c)$: 6) $y=x(ce^{-x}-1)$:
7) $y(x^2+cx)=1$: 8) $y^2=x\ln\frac{c}{x}$: 9) $y=\frac{1}{x\ln cx}$: 10) $y^2=\frac{e^{x^2}}{2x+c}$:
11) $y'=\frac{-x}{\ln cx}$: ***1327.*** 1) $y=\sin x$: 2) $y=\frac{x}{x+1}(x-1+\ln|x|)$: 3) $y=2\sin^2 x-\frac{1}{2}$:
4) $S=2t^2+\frac{1}{t}$: ***1328.*** 1) $x-3x^2y^2+y^3=c$: 2) $x^2+2xy+2y^2=c$:
3) $x^4-x^2y^2+y^4=c$: 4) $x^3+3x^2y-2xy^2-y^3=c$: 5) $x^2+y^2-2\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=c$:
6) $xy-\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=c$: 7) $x^2+ye^{-x}=c$: 8) $x\sin y+y\cos x+\ln\left|\frac{x}{y}\right|=c$:

9) $x^3-2xy+y^2=c$: ***1329.*** 1) $5x^2y-8xy+x+3y=27$: 2) $x^2+2ye^{\frac{x}{y}}=4$:

1330. 1) $y=c_1x(\ln x-1)+c_2$ 2) $4(c_1y-1)=(c_1x+c_2)^2$

3) $y^3+c_1y+c_2=3x$: 4) $\operatorname{ctg} y=c_2-c_1x$: 5) $y=e^x(x-1)+c_1x^2+c_2$

6) $c_1y^2=1+(c_1x+c_2)^2$ ***1331.*** 1) $y=-\ln\cos x+c_1x+c_2$

2) $y=x\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+c_1x+c_2$ 3) $y=3\ln|x|+c_1x^2+c_2x+c_3$

4) $y=\frac{1}{4}xe^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+c_1x+c_2$ ***1332.*** 1) $y=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}$

2) $y=c_1e^{-7x}+c_2e^{3x}$: 3) $y=c_1e^x+c_2e^{\frac{2}{3}x}$ 4) $y=c_1e^{-x\sqrt{7}}+c_2e^{x\sqrt{7}}$

5) $y=e^{-x}(c_1+c_2x)$: 6) $y=e^{\frac{3}{2}x}(c_1+c_2x)$: 7) $y=c_1\cos x+c_2\sin x$:

8) $y=e^{2x}(c_1\cos 3x+c_2\sin 3x)$: 9) $y=c_1e^{-5x}+c_2e^{2x}$

10) $y=e^{-0,5x}(c_1+c_2x)$: 11) $y=e^{4x}(c_1\cos 5x+c_2\sin 5x)$:

1333. 1) $y=e^x$ 2) $y=(7-3x)e^{x-2}$ ***1334.*** 1) $y=c_1e^x+c_2e^{-5x}-\frac{1}{5}$:

2) $y=e^x(c_1\cos x+c_2\sin x)+x+1$: 3) $y=(c_1+c_2x)e^{3x}+\frac{2}{9}x^2+\frac{5x}{27}+\frac{11}{27}$:

4) $y=c_1+c_2e^{-\frac{5}{2}x}+\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{5}x^2+\frac{7}{25}x$: 5) $y=c_1e^x+c_2e^{6x}+\frac{1}{74}(5\sin x+7\cos x)$:

6) $y=c_1e^{-x}+c_2e^{\frac{1}{2}x}+e^x$ 7) $y=c_1e^{-\frac{1}{3}x}+c_2e^{\frac{1}{4}x}-3x^2-6x-85$:

8) $y=c_1e^{3x}+c_2e^{-2x}-\frac{1}{6}e^x-\frac{1}{78}(5\sin 3x-\cos 3x)$:

9) $y=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}+\frac{1}{6}(5\cos 3x-\sin 3x)$: 10) $y=c_1e^{-mx}+c_2e^{mx}-\frac{1}{2m}xe^{-mx}$

1335. 1) $y=e^x(0{,}16\cos 3x+0{,}28\sin 3x)+x^2+2{,}2x+0{,}84$:

2) $y=(1+x)e^{-\frac{3}{2}x}+2e^{-\frac{5}{2}x}$ 3) $y=6\sin x+\cos x+x+e^x$: 4) $y=e^{\sqrt{2}x}+e^{-\sqrt{2}x}-(x-2)e^{-x}$:

1336. $y=\left(c_1-\frac{x}{2}\right)\cos 2x+\left(c_2+\frac{1}{4}\ln\sin 2x\right)\sin 2x$:

1337. $c_1\sin x + c_2\cos x - \cos x\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$: **1338.** $y=(c_1+c_2x-\ln x)e^x$

1339. $y=\left(c_1+c_2x+\frac{1}{2x}\right)e^{-2x}$ **1340.** 1) $y=c_1e^{\frac{x}{2}}+c_2e^{\frac{-x}{2}}-x^3$

2) $y=c_1e^x+c_2e^{-x}-\frac{x}{2}e^{-x}$ 3) $y=(c_1x+c_2)^2$ 4) $y=c_2-c_1\cos x-x$:

5) $y^2=c_1x+c_2$ 6) $y=\frac{1}{x}+c_1\ln x+c_2$: 7) $y^2=\frac{1}{x+ce^x}$: 8) $y=\frac{2x}{1+cx^2}$:

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Գլուխ VI. Ինտեգրալներ

Գլուխ VII. Շարքեր

Գլուխ IX. Դիֆերենցիալ հավասարումներ

Բարձրագույն մաթեմատիկայի խնդիրների ձեռնարկ

Սրբագրումը և էջադրումը՝ Ռ. Պետրոսյանի

Պատվեր՝ 82: Չափսը՝ 60 x 84 1/16:
12,32 հեղ. մամուլ, 13 հրատ. մամուլ,
14,5 տպ. մամուլ, 13,48 տպ. պայմ. մամուլ:
Տպաքանակը՝ 200:

«Տնտեսագետ» հրատարակչություն

Տպագրված է «Տնտեսագետ» հրատարակչության տպագրական արտադրամասում
Երևան 25, Նալբանդյան, 128, հեռ. 593-470: