ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՏՆՏԵՍԱԳԻՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Բարձրագույն մաթեմատիկայի ամբիոն

ԲԱՐՁՐԱԳՈՒՅՆ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ՁԵՌՆԱՐԿ

Տնտեսագետ
Երևան
2006

A և B բազմությունների $A\cup B$ միավորում կոչվում է այն նոր բազմությունը, որը բաղկացած է բոլոր այն տարրերից, որոնք պատկանում են A կամ B բազմություններից գոնե մեկին:

Այսինքն՝

$$A\cup B=\{x;\ x\in A \text{ կամ՝ } x\in B\}$$

A և B բազմությունների $A\cap B$ հատում կոչվում է այն նոր բազմությունը, որը բաղկացած է բոլոր այն տարրերից, որոնք միաժամանակ պատկանում են A և B բազմություններից յուրաքանչյուրին: Այսինքն՝

$$A\cap B = \{x;\ x\in A \text{ և } x\in B\}:$$

A և B բազմությունների $A \setminus B$ տարբերություն կոչվում է A բազմության այն բոլոր տարրերի բազմությունը, որոնք B-ին չեն պատկանում: Այսինքն՝

$$A\setminus B=\{x;\ x\in A \text{ և } x\notin B\}:$$

1. Ապացուցել հետևյալ առնչությունները.

1) $A\cup B=B\cup A$, 2) $A\cap B=B\cap A$, 3) $A\setminus B=A\setminus(A\cap B)$,

4) $(A\setminus B)\cup(B\setminus A)=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$:

2. Դիցուք՝ $A=\{1,2,3,4,5,10,12\}$, $B=\{2,4,6,8,10\}$: Գտնել $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$ բազմությունները:

3. Ապացուցել հետևյալ պնդումների համարժեքությունը.

1) $A\cap B=B$ և $B\subset A$, 2) $A\cup B=B$ և $A\subset B$:

4. Դիցուք՝ $A=(-3:2]$ և $B=[0:5)$: Գտնել $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$ և $B\setminus A$ բազմությունները:

5. Ցույց տալ, որ.

1) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$,
2) $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$,
3) $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$,
4) $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$,
5) $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$,
6) $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$,

6. Հարթության վրա պատկերել հետևյալ բազմությունները.

1) $A=\{(x;y),\ x+y-4=0\}$,
2) $B=\{(x;y),\ x^2+y^2\le 1\}$,
3) $C=\{(x;y),\ y\ge x^2\}$,
4) $D=\left\{(x;y),\ \dfrac{1}{x}>\dfrac{1}{y},\ x\neq 0,\ y\neq 0\right\}$:

Սահմանում. f ֆունկցիան (f օրենքով, կանոնով) A բազմությունը արտապատկերում է B բազմության մեջ, եթե A-ից վերցրած $\forall a$ տարրին f-ը համապատասխանեցնում է մեկ տարր B բազմությունից: Այդ տարրը կոչվում է a-ի պատկեր և նշանակվում է՝ f(a) ($f(a)\in B$):

Այն, որ f-ը արտապատկերում է A-ն B-ի մեջ, նշանակում են այսպես՝ $f:A\to B$: A-ն կոչվում է f ֆունկցիայի որոշման տիրույթ և նշանակվում է՝ D(f) (A=D(f)): f(A)-ով նշանակենք հետևյալ բազմությունը.

$$f(A)=\{f(a)\mid a\in A\}:$$

Դա կոչվում է f ֆունկցիայի արժեքների բազմություն՝ $f(A)\subseteq B$: Եթե f(A)=B, ասում են, որ f-ը արտապատկերում է A-ն B-ի վրա:

Դիցուք՝ $f:A\to B$ և $\forall b$ տարրի համար, վերցրած f(A)-ից, $\exists$ ճիշտ մեկ տարր՝ a A-ից այնպես, որ f(a)=b: Այս դեպքում f ֆունկցիան կոչվում է հակադարձելի, կամ ասում են, որ $\exists$ f-ի հակադարձ ֆունկցիան է: Ակնհայտ է, որ հակադարձ ֆունկցիայի գոյությունը f(A) որոշման տիրույթի վրա համարժեք է հետևյալին. A-ին պատկանող $\forall a_1,a_2$ ($a_1\neq a_2$) տարրերի համար $f(a_1)\neq f(a_2)$: f ֆունկցիայի հակադարձ ֆունկցիան նշանակում են f^{-1}: f^{-1} ֆունկցիան f(A) բազմությունը արտապատկերում է A բազմության վրա հետևյալ կերպ. f(A)-ին պատկանող $\forall b$-ի համար $\exists$ մեկ որոշակի այնպիսի a տարր A բազմությունից, որ f(a)=b և $f^{-1}(b)=a$: Այսպիսով՝ f(A)-ից վերցրած $\forall b$-ի համար՝ $f(f^{-1}(b))=b$, ինչպես նաև A-ին պատկանող $\forall a$-ի համար՝ $f^{-1}(f(a))=a$:

Ասում են, որ f-ը փոխմիարժեք է արտապատկերում A-ն B-ի վրա, եթե f-ը հակադարձելի է, և f(A)=B: A և B բազմությունները կոչվում են համարժեք, եթե $\exists$ f ֆունկցիա, որը A-ն փոխմիարժեք է արտապատկերում B-ի վրա:

Բնական թվերի N բազմությանը համարժեք բազմությունը կոչվում է հաշվելի բազմություն, իսկ եթե անվերջ բազմությունը համարժեք չէ բնական թվերի բազմությանը, ապա այդ բազմությունը կոչվում է ոչ հաշվելի:

7. Ապացուցել, որ ամբողջ թվերի Z բազմությունը հաշվելի է:

8. Ապացուցել, որ ռացիոնալ թվերի Q բազմությունը հաշվելի է:

9. Ցույց տալ, որ $[0;1]$ և $[3;10]$ հատվածները համարժեք են:

10. Ցույց տալ, որ $[a;b]$ և $[c;d]$ ցանկացած հատվածները համարժեք են:

11. Հաստատել փոխմիարժեք համապատասխանություն $[0;1]$ հատվածի և $(0;1)$ միջակայքի կետերի միջև:

12. Ապացուցել, որ վերջավոր բազմությունները համարժեք են այն և միայն այն դեպքում, եթե ունեն հավասար քանակով տարրեր:

13. Ապացուցել, որ բազմությունը ունի անվերջ քանակի տարրեր այն և միայն այն դեպքում, երբ այն համարժեք է իրեն հետ չհամընկնող իր որևէ ենթաբազմությանը:

14. Քանի՞ ենթաբազմություն ունի n տարրերից կազմված բազմությունը:

15. Ապացուցել, որ հետևյալ բազմությունները հաշվելի են.

1) $\{n \in N;\ n = 2k,\ k \in N\}$,

2) $\{n \in N;\ n = k^2 - k,\ k \in N\}$:

16. Ապացուցել, որ cos2x=1 հավասարման լուծումների բազմությունը հաշվելի է:

17. Ապացուցել, որ վերջավոր կամ հաշվելի թվով հաշվելի բազմությունների միավորումը հաշվելի է:

18. Ապացուցել, որ եթե A-ն ոչ հաշվելի բազմություն է, իսկ B-ն վերջավոր կամ հաշվելի, ապա $A \setminus B$ բազմությունը ոչ հաշվելի է:

19. Ապացուցել, որ [0;1] հատվածի կետերի բազմությունը հաշվելի չէ:

Թվային ոչ դատարկ X բազմությունը կոչվում է սահմանափակ վերևից, եթե $\exists$ M թիվ այնպես, որ X-ին պատկանող $\forall$ x տարրի համար՝ $x \le M$: Այդպիսի M թիվը կոչվում է X բազմության վերին եզր: Եթե $\exists$ m թիվ այնպես, որ X-ից վերցրած $\forall$ x-ի համար՝ $x \ge m$, ապա բազմությունը կոչվում է սահմանափակ ներքևից, իսկ m թիվը՝ ստորին եզր: Հնարավոր է ապացուցել, որ վերևից սահմանափակ բազմության վերին եզրերի թվում $\exists$ ամենափոքրը, իսկ ներքևից սահմանափակ բազմության ստորին եզրերի մեջ $\exists$ ամենամեծը: Վերին եզրերից ամենափոքրը կոչվում է ճշգրիտ վերին եզր, իսկ ստորին եզրերից ամենամեծը՝ ճշգրիտ ստորին եզր: Դրանք նշանակվում են $\sup X$, $\inf X$: Եթե X բազմությունը վերևից սահմանափակ չէ, ապա ընդունված է գրել՝ $\sup X = +\infty$, իսկ եթե ներքևից սահմանափակ չէ, ապա ընդունված է՝ $\inf X = -\infty$: Եթե բազմությունը սահմանափակ է վերևից և ներքևից, ապա այն կոչվում է սահմանափակ բազմություն:

20. Գտնել [2;3) բազմության ճշգրիտ վերին և ստորին եզրերը:

21. Հետևյալ բազմությունների համար գտնել ճշգրիտ վերին և ստորին եզրերը.

1) $X=\left\{\frac{1}{n},\ n \in N\right\}$, 2) $X=(-5;0]$,

3) $X=\left\{\frac{m}{n},\ m,n \in N, m < n\right\}$, 4) $X=\{3n+2,\ n \in N\}$:

22. Վերջավոր թվային բազմությունը կարո՞ղ է չունենալ ամենամեծ տարր: Կարո՞ղ են վերջավոր թվային բազմության ճշգրիտ եզրերը չպատկանել այդ բազմությանը:

23. Բերել բազմությունների օրինակներ, երբ դրանց ճշգրիտ եզրերը չեն պատկանում այդ բազմություններին, և օրինակներ, երբ պատկանում են: Բերել անվերջ սահմանափակ բազմությունների օրինակներ: Գոյություն ունե՞ն արդյոք վերջավոր ոչ սահմանափակ բազմություններ:

§2. ՄԵԿ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ

Դիցուք՝ $X\subseteq R$ և $Y\subseteq R$, իսկ f ֆունկցիան արտապատկերում է X-ը Y-ի մեջ: Այս դեպքում f-ը անվանում են թվային ֆունկցիա և նշանակում են՝ $y=f(x)$:

24. $f(x)=\dfrac{3x+2}{x-1}$: Գտնել $f(2)$, $f(-x)$, $f(x+1)$, $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $f(2x)$, $f(t)$:

25. Գտնել հետևյալ ֆունկցիաների որոշման տիրույթները.

1) $f(x)=\sqrt{x+1}+\sqrt{5-x}$, 2) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$,

3) $f(x)=\log_2\log_3 x$, 4) $f(x)=\arccos\dfrac{1-2x}{4}$,

5) $y=\ln(5-x)$, 6) $y=\lg\dfrac{x^2-3x+2}{x+1}$,

7) $y=\sqrt{x+1}-\sqrt{7-x}$, 8) $y=\dfrac{1}{\ln(x+2)}+\sqrt{1-x}$,

9) $y=\log_x 3$, 10) $y=\sqrt{\cos x}$, 11) $y=\arccos\dfrac{x-1}{4-x}$,

12) $y=\sqrt{\arcsin(\ln x)}$, 13) $y=\sqrt{\sin x-1}$:

26. Գտնել $f(1)$, $f(-1)$, $f(100)$, եթե $f(x)=\lg x^2$:

27. Գտնել $f(0)$, $f(-x)$, $f(x+1)$, $f(x)+1$, եթե $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$

28. $f(x)=2x^3-5x^2+x-7$: Գտնել $\frac{f(x)+f(-x)}{2}$ և $\frac{f(x)-f(-x)}{2}$ ֆունկցիաները:

29. Ցույց տալ, որ $f(x)=kx+b$ ֆունկցիան բավարարում է $f(x+2)-2f(x+1)+f(x)=0$ ֆունկցիոնալ հավասարմանը:

30. Ցույց տալ, որ $f(x)=\ln x$ ֆունկցիան բավարարում է $f(x)+f(x+1)=f(x(x+1))$ ֆունկցիոնալ հավասարմանը:

31. Գտնել $y=f(x)$ ֆունկցիան, եթե.

1) $f(x+1)=3x^2-x+2$, 2) $f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\frac{1}{x^2}$:

32. $\operatorname{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$, $\operatorname{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$, ապացուցել, որ

$$\operatorname{ch}^2x-\operatorname{sh}^2x=1,\ \operatorname{ch}^2x+\operatorname{sh}^2x=\operatorname{ch}2x:$$

Կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ համաչափ X տիրույթում որոշված f(x) ֆունկցիան կոչվում է զույգ ֆունկցիա, եթե $\forall x\in X$ թվի համար $f(-x)=f(x)$, և կենտ ֆունկցիա, եթե $f(-x)=-f(x)$:

f(x) ֆունկցիան կոչվում է սահմանափակ X տիրույթում, եթե դրա արժեքների բազմությունը սահմանափակ է, այսինքն՝ $\exists$ $M>0$ այնպես, որ $\forall x\in X$ արժեքի համար տեղի ունի $|f(x)|\le M$ անհավասարությունը: f(x) ֆունկցիան կոչվում է մոնոտոն աճող (նվազող), եթե $x_2>x_1\Rightarrow f(x_2)>f(x_1)$ $(f(x_2)<f(x_1))$:

f(x) ֆունկցիան կոչվում է պարբերական, եթե $\exists$ 0-ից տարբեր այնպիսի T թիվ, որ D(f)-ից վերցրած $\forall x$-ի համար տեղի ունի.

1) $x\pm T\in D(f)$ և 2) $f(x+T)=f(x)$:

Դրական փոքրագույն T պարբերությունը կոչվում է հիմնական պարբերություն:

33. Որոշել, թե տրված ֆունկցիաներից որոնք են զույգ, որոնք են կենտ և որոնք են ո՛չ զույգ, ո՛չ էլ կենտ.

1) $f(x)=x^4-2x^2+3$, 2) $f(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$,

3) $f(x)=x^3-x+1$, 4) $f(x)=\lg\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$,

5) $f(x)=x^2+3x^4$, 6) $f(x)=x^3-x$,

7) $f(x)=x^2+x$, 8) $f(x)=const$,

9) $f(x)=|2+x|+|2-x|$, 10) $f(x)=\frac{e^x+1}{e^x-1}$,

11) $f(x)=\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}$,

12) $f(x)=|x|+x$:

34. Պարզել, թե տրված ֆունկցիաներից որոնք են պարբերական, և եթե պարբերական են, գտնել հիմնական պարբերությունը.

1) $f(x)=7\cos 5x$, 2) $f(x)=2\sin\frac{x}{3}$, 3) $f(x)=\cos(2x+3)$,

4) $y=\sin ax$ $(a>0)$, 5) $f(x)=\sin^4 x+\cos^4 x$,

6) $f(x)=|\cos x|$, 7) $y=\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2\operatorname{tg}\frac{x}{3}$,

8) $y=\sin x^2$, 9) $f(x)=x+\sin x$:

35. Ապացուցել, որ եթե f(x)-ի որոշման տիրույթը համաչափ է սկզբնակետի նկատմամբ, ապա f(x)-ը հնարավոր է ներկայացնել $f(x)=\varphi_1(x)+\varphi_2(x)$ տեսքով, որտեղ $\varphi_1(x)$-ը զույգ ֆունկցիա է, իսկ $\varphi_2(x)$-ը՝ կենտ (տես N28 խնդիրը):

36. Ապացուցել, որ.

$$f(x)=\begin{cases}1, & x-\text{ը ռացիոնալ է},\\ 0, & x-\text{ը իռացիոնալ է}:\end{cases}$$

Դիրիխլեի ֆունկցիան պարբերական է $\forall$ ռացիոնալ թիվ պարբերությամբ:

37. Ապացուցել, որ եթե f(x)(D(f)=R) ֆունկցիայի համար f(x+T)=kf(x), որտեղ k-ն և T-ն դրական թվեր են, ապա $f(x)=a^x\varphi(x)$, որտեղ a-ն հաստատուն է, իսկ φ(x)-ը՝ T պարբերությամբ ֆունկցիա: φ(x+T)=φ(x):

38. Ապացուցել, որ եթե f(x) (D(f)=R) ֆունկցիայի համար տեղի ունի f(x+T)=k+f(x) հավասարությունը, որտեղ k-ն և T-ն հաստատուններ են, ապա f(x)=ax+φ(x), որտեղ a-ն հաստատուն է, իսկ φ(x)-ը՝ T պարբերությամբ ֆունկցիա:

39. Գտնել հետևյալ ֆունկցիաների հակադարձ ֆունկցիաները և դրանց որոշման տիրույթները.

ա) y=2x+3,

բ) $y=x^4$, D(y)=(− ∞,0],

գ) $y=x^4$, D(y)=[0,+ ∞),

դ) $y=\sqrt{4-x^2}$ D(y)=[−2,0),

ե) $y=\sqrt{4-x^2}$ D(y)=[0, 2],

զ) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$, D(y)=R\ {−1},

է) $y=\begin{cases} x, & \text{եթե } x\in(-\infty,1) \\ x^2, & \text{եթե } x\in[1,4] \\ 2^x, & \text{եթե } x\in(4,+\infty) \end{cases}$:

Կառուցել հետևյալ ֆունկցիաների գրաֆիկները:

40. ա) y=2x+3, բ) $y=-\dfrac{x}{2}-1$, գ) y=sin(arcsin x):

41. ա) $y=8x-2x^2$, բ) $y=x^2-3x+2$, գ) $y=-x^2+2x-1$, դ) $y=\dfrac{1}{2}x^2+x+1$:

42. $y=\dfrac{1}{x}$: **43.** $y=\dfrac{1}{x^2}$: **44.** $y=\sqrt{x}$: **45.** $y=\sqrt[3]{x}$:

46. $y=\sqrt[3]{x^2}$: **47.** $y=|x|$: **48.** y=sin nx, եթե $n=1,2,3,\dfrac{1}{2}$:

49. $y=\cos(x+\varphi)$, եթե $\varphi=0, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \pi$:

50. $y=\cos^2 x$:   **51.** $y=\sin x+\cos x$:   **52.** $y=\sin x^2$:

53. $y=e^{-x^2}$:   **54.** $y=\lg x^2$ **55.** $y=\lg^2 x$:

56. $y=\lg \frac{1}{x}$:   **57.** $y=\lg(-x)$:   **58.** $y=\arcsin x$:

59. $y=\arccos x$:   **60.** $y=\operatorname{arctg} x$:   **61.** $y=x|x|$:

62. $y=\lg|x|$:

ԳԼՈՒԽ II

ԱՆԱԼԻՏԻԿ ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԻ ՏԱՐՐԵՐԸ

§1. ԱՆԱԼԻՏԻԿ ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՎՐԱ

1. Ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգը հարթության վրա, հատվածի բաժանումը տրված հարաբերությամբ, գծերի հավասարումները:

Թվային առանցքի վրա $A(x_1)$ և $B(x_2)$ կետերի միջև եղած հեռավորությունը որոշվում է $AB=|x_2-x_1|$ բանաձևով, իսկ հարթության վրա $A(x_1;y_1)$ և $B(x_2;y_2)$ կետերի միջև եղած հեռավորությունը ուղղանկյուն դեկարտյան կոորդինատային համակարգում որոշվում է.

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

բանաձևով:

63. Եռանկյան գագաթներն են՝ $A(5;7)$, $B(-7;2)$ և $C(3;1)$ կետերը: Գտնել այդ եռանկյան պարագիծը:

64. OX առանցքի վրա գտնել այն կետը, որը հավասարապես է հեռացած կոորդինատների սկզբնակետից և $A(8;4)$ կետից:

65. Գտնել հետևյալ կետերի միջև եղած հեռավորությունը.

1) $A(3;2)$ և $B(-1;5)$,
2) $C(4;7)$ և $D(-1;0)$,
3) $E(6;10)$ և $F(0;4)$:

66. Եռանկյան գագաթներն են՝ $A(5;2)$, $B(1;-1)$ և $C(0;3)$: Գտնել եռանկյան պարագիծը:

67. Ապացուցել, որ $A(4;11)$, $B(6;3)$, $C(9;6)$ գագաթներ ունեցող եռանկյունը ուղղանկյուն եռանկյուն է:

68. Ապացուցել, որ A(–6;–1), B(0;10), C(4;-2) գագաթներ ունեցող եռանկյունը սուրանկյուն եռանկյուն է:

69. A(–5;3), B(9;8), C(16;0) գագաթներ ունեցող եռանկյան ներքին անկյունների թվում կա՞ արդյոք բութ անկյուն:

70. Գտնել M կետի աբսցիսը, եթե դրա օրդինատը հավասար է –3-ի, իսկ N(2;–1) կետից ունեցած հեռավորությունը հավասար է $\sqrt{29}$ -ի:

71. Օրդինատների առանցքի վրա գտնել այն կետը, որը A(6;2) կետից հեռացած է 10 միավորով:

72. Աբսցիսների առանցքի վրա գտնել այն կետը, որը հավասարապես է հեռացած կոորդինատների սկզբնակետից և A(1;3) կետից:

73. Գտնել այն կետը, որը հավասարապես է հեռացած կոորդինատային առանցքներից և A(4;8) կետից:

74. Գտնել այն կետը, որը գտնվում է 15 միավոր հեռավորության վրա աբսցիսների առանցքից և A(2;6) կետից:

Եթե C(x;y) կետը գտնվում է $A(x_1;y_1)$ $B(x_2;y_2)$ ծայրակետերով հատվածի կամ դրա շարունակության վրա այնպես, որ $\overline{AC}=\lambda\overline{CB}$, ապա կասենք, որ C կետը AB հատվածը բաժանում է λ հարաբերությամբ: C կետի կոորդինատները որոշվում են հետևյալ բանաձևերով.

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \qquad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}:$$

Մասնավորապես, եթե λ=1, ապա C-ն AB հատվածի միջնակետն է, և դրա կոորդինատները կլինեն.

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}, \qquad y=\frac{y_1+y_2}{2}:$$

75. Գտնել A(6;−1), B(0;4) և C(−3;2) գագաթներով եռանկյան AD միջնագծի երկարությունը:

76. Տրված են՝ A(−2;5), B(6;0), C(3;7) և D(0;-4) կետերը: Գտնել AB և CD հատվածների միջնակետերի հեռավորությունը:

77. Գտնել A(−2;−3), B(2;5) և C(7;0) գագաթներ ունեցող եռանկյան միջնագծերի երկարությունները:

78. Տրված են եռանկյան կողմերի միջնակետերը՝ M(1;−2), N(−2;2), P(4;4): Գտնել այդ եռանկյան գագաթների կոորդինատները:

79. Գտնել եռանկյան գագաթները, եթե կողմերի միջնակետերն են՝ P(1;2), K(-3;6) և R(5;10):

80. Հատվածի ծայրակետերն են՝ P(−6;8) R(3;4): Գտնել այդ հատվածը չորս հավասար մասերի բաժանող կետերի կոորդինատները:

81. A(2;−6) և B(8;6) կետերը միացնող հատվածը բաժանված է երեք հավասար մասերի: Գտնել բաժանման կետերի կոորդինատները:

82. A(−5;−4) և B(10;6) կետերը միացնող հատվածը բաժանված է հինգ հավասար մասերի: Գտնել բաժանման կետերի կոորդինատները:

83. A(−1;4) և B(3;7) ծայրակետերով հատվածի վրա որոշել C կետն այնպես, որ AC = 4 CB:

84. B(−3;−1) և A(2;4) ծայրակետերով հատվածի շարունակության վրա գտնել այնպիսի C կետ, որ CB = 3AC:

85. B(4;−2) և A(6;0) ծայրակետերով հատվածի շարունակության վրա գտնել այնպիսի C կետ, որ CB = 4 AC:

86. C(2;3) կետը A(x;−2) և B(5;y) ծայրակետերով հատվածի միջնակետն է: Գտնել այդ կետերը:

87. Եռանկյան գագաթներն են՝ A(−4;−1), B(2;5), C(8;−3) կետերը: Գտնել այդ եռանկյան միջին գծերի երկարությունները:

88. Գտնել այն եռանկյան միջնագծերի հատման կետը, որի գագաթներն են՝ A(−5;2), B(6;8), C(11,−1) կետերը:

89. Գտնել $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$ և $C(x_3;y_3)$ գագաթներով եռանկյան միջնագծերի հատման M կետը (ծանրության կենտրոնը):

90. Գտնել եռանկյան միջնագծերի հատման կետի կոորդինատները՝ իմանալով դրա գագաթների կոորդինատները՝ A(1;4), B(−5;0), C(−2;−1):

91. Եռանկյան գագաթներն են՝ A(4;−3), B(7;8), C(−2;7) կետերը: Գտնել այն կետերը, որոնցով եռանկյան միջնագծերը բաժանվում են երեք հավասար մասերի:

92. Գտնել A(−7;2) և B(4;−3) ծայրակետեր ունեցող հատվածի միջնուղղահայացի հավասարումը:

93. Կազմել այն կետերի երկրաչափական տեղի հավասարումը, որոնք հավասարապես են հեռացած A(−2;−3) և B(6;5) կետերից:

94. Կազմել այն կետերի երկրաչափական տեղի հավասարումը, որոնք հավասարապես են հեռացած կոորդինատների սկզբնակետից և $x=-2$ ուղղից:

95. Կազմել այն կետերի երկրաչափական տեղի հավասարումը, որոնք հավասարապես են հեռացած A(2;2) կետից և OX առանցքից:

96. Կազմել այն կետերի երկրաչափական տեղի հավասարումը, որոնք հավասարապես են հեռացած A(−3;−1) կետից և $x=-1$ ուղղից:

97. Կազմել այն հատվածների միջնակետերի երկրաչափական տեղի հավասարումը, որոնց մի ծայրակետը $A(-2;6)$-ն է, իսկ մյուսը գտնվում է OX առանցքի վրա:

98. Կազմել այն կետերի երկրաչափական տեղի հավասարումը, որոնց՝ տրված $A(2;-4)$ և $B(-4;2)$ կետերից ունեցած հեռավորությունների հարաբերությունը հավասար է 2-ի:

99. Գտնել այն կետերի երկրաչափական տեղի հավասարումը, որոնց հեռավորությունը $A(0;9)$ կետից երեք անգամ մեծ է $B(0;1)$ կետից ունեցած հեռավորությունից:

100. Գտնել այն կետերի երկրաչափական տեղի հավասարումը, որոնց հեռավորությունը $A(-8;0)$ կետից երկու անգամ մեծ է $x=-2$ ուղղից ունեցած հեռավորությունից:

101. Գտնել այն կետերի երկրաչափական տեղի հավասարումը, որոնց $F_1(-2;0)$ և $F_2(2;0)$ կետերից ունեցած հեռավորությունների գումարը $2\sqrt{5}$ է:

102. Գտնել այն կետերի երկրաչափական տեղի հավասարումը, որոնց $F_1(-2;2)$ և $F_2(2;2)$ կետերից ունեցած հեռավորությունների տարբերությունը 4 է:

2. Ուղիղը հարթության վրա: Երկու ուղիղների կազմած անկյունը, նրանց ուղղահայացության և զուգահեռության պայմանները:

Եթե OX առանցքը ուղղի հետ կազմում է α անկյուն, իսկ OY առանցքը հատում է այն $(0;b)$ կետում, ապա ուղղի հավասարումն է՝ $y=kx+b$, որտեղ՝ $k=tg\alpha$ թիվը ուղղի անկյունային գործակիցն է: Այս հավասարումը կոչվում է ուղղի հավասարում անկյունային գործակցով:

Երկու փոփոխականներով առաջին աստիճանի հավասարումը՝ $Ax+Bx+C=0$ $(A^2+B^2\neq0)$, կոչվում է ուղղի ընդհանուր հավասարում:

Ուղղի հավասարումը հատվածներով ունի հետևյալ տեսքը՝ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$: Այստեղ a-ն և b-ն ուղղի OX, OY կոորդինատային առանցքներից կտրած հատվածների մեծություններն են:

Տրված $A(x_0;y_0)$ կետով անցնող և տրված k անկյունային գործակից ունեցող ուղղի հավասարումն է.

$$y-y_0=k(x-x_0):$$

Տրված $A(x_1;y_1)$ և $B(x_2;y_2)$ երկու կետերով անցնող ուղղի հավասարումն է.

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \quad (x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2):$$

Եթե տրված է ուղղի p հեռավորությունը սկզբնակետից և դրան ուղղահայաց միավոր $\overline{n_0}(\cos\alpha,\sin\alpha)$ վեկտորը (ուղղի նորմալ վեկտորը),ապա այդ ուղղի հավասարումն է՝ $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$, որը կոչվում է ուղղի նորմալ հավասարում: Ուղղի ընդհանուր հավասարումը նորմալ տեսքի բերելու համար բազմապատկում են $\mu=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$ նորմավորող արտադրիչով, որի նշանը ընտրվում է C-ի նշանին հակառակ: Այս հավասարման միջոցով որոշվում է $(x_0;y_0)$ կետի հեռավորությունը $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$ ուղղից հետևյալ բանաձևով.

$$h=|x_0\cos\alpha+y_0\sin\alpha-p|, \quad \text{կամ}$$

$$h=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}:$$

$y=k_1x+b_1$ և $y=k_2x+b_2$ ուղիղների կազմած կամ I ուղղի, II-ի հետ կազմած θ անկյունը, որը այն դրական ամենափոքր անկյունն է, որով պետք է պտտել I ուղիղը մինչև որ համընկնի II ուղղի հետ, որոշվում է $\operatorname{tg}\theta=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$ բանաձևով:

Երկու ուղիղների զուգահեռության համար անհրաժեշտ է և բավարար, որ դրանց անկյունային գործակիցները լինեն իրար հավասար՝ $k_1=k_2$, կամ երկուսն էլ չունենան անկյունային գործակից, այսինքն՝ լինեն ուղղահայաց OX առանցքին: Երկու ուղիղների ուղղահայացության համար անհրաժեշտ է և բավարար $k_1k_2=-1$ պայմանը, կամ եթե ուղիղներից մեկը չունի անկյունային գործակից, ապա մյուսի անկյունային գործակիցը հավասար է 0-ի, այսինքն՝ ուղիղը զուգահեռ է OX առանցքին:

103. Գտնել $5x-2y-7=0$ ուղղի անկյունային գործակիցը և կառուցել այդ ուղիղը:

104. $A(-1;4)$ և $B(11;3)$ կետերը միացնող ուղղի վրա գտնել այն կետը, որի աբսցիսը հավասար է 5-ի:

105. Որոշել, թե $y=3x-2$ ուղիղը անցնո՞ւմ է արդյոք $A(2;4)$, $B(-3;11)$, $C(2{,}5;-8)$, $D(1;1)$ կետերով:

106. Գտնել հետևյալ ուղիղների անկյունային գործակիցները և օրդինատների առանցքից կտրած հատվածների մեծությունները.

1) $5x-7y+14=0$, 3) $6x-5=0$,
2) $2x+3y+9=0$, 4) $4y-7x=0$:

107. Գտնել այն ուղղի հավասարումը, որն OY առանցքից կտրում է 4 միավոր մեծության հատված և OX առանցքի նկատմամբ թեքված է α անկյունով.

1) $\alpha=30^0$, 2) $\alpha=60^0$, 3) $\alpha=120^0$, 4) $\alpha=150^0$:

108. Գտնել այն ուղղի հավասարումը, որն անցնում է կոորդինատների սկզբնակետով և OX առանցքի նկատմամբ թեքված է.

1) 45^0, 2) 60^0, 3) 135^0, 4) 180^0 անկյունով:

109. Գտնել $\sqrt{3x}-3y+5=0$ ուղղի թեքման անկյունն OX առանցքի նկատմամբ:

110. Գտնել այն ուղղի հավասարումը, որն OX և OY առանցքներից կտրում է, համապատասխանաբար՝ 4 և -5 մեծություններով հատվածներ:

111. Կազմել այն ուղիղների հավասարումները, որոնք OX և OY առանցքներից կտրում են, համապատասխանաբար՝ 2 և 5 երկարությամբ հատվածներ:

112. Հետևյալ ուղիղների հավասարումները գրել հատվածներով.

1) $3x-5y=15$, 3) $y=3x-2$,
2) $2x+3y+8-0$, 4) $y=1-x$:

113. Գտնել այն եռանկյան մակերեսը, որը սահմանափակված է կոորդինատային առանցքներով և $2x+y=6$ ուղղով:

114. Կառուցել հետևյալ հավասարումներն ունեցող ուղիղները՝

1) $3x+7y-21=0$, 2) $2y-3x=6$, 3) $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$,

4) $2x-3y=0$, 5) $x-\frac{y}{2}=1$, 6) $3x-5=0$,

7) $3x=0$, 8) $2y+3=0$, 9) $2y=0$:

115. Գտնել այն ուղղի հավասարումը, որն անցնում է $(-3;1)$ կետով և աբսցիսների առանցքի նկատմամբ թեքված է 120^0 անկյունով:

116. Հաշվել հետևյալ ուղիղներով կազմված անկյունը՝ ուղիղների յուրաքանչյուր զույգը դիտարկելով այն կարգով, ինչ կարգով դրանք տրված են.

1) $y=2x+3$ և $y=2x+5$, 2) $y=4x-1$ և $y=-\frac{1}{4}x+3$,

3) $y=-\frac{3}{4}x-2$ և $y=\frac{1}{7}x+5$, 4) $3x-2y+4=0$ և $6x-4y-1=0$,

5) $\sqrt{2}x+y-1=0$ և $2x-2\sqrt{2}y+5=0$,

6) $2x-3y+5=0$ և $5x-y-3=0$,

7) $\frac{x}{5}-\frac{y}{3}=1$ և $\frac{x}{8}+\frac{y}{2}=1$, 8) $5x+2y-3=0$ և $4x-3y-2=0$,

9) $\sqrt{3}x-y-4=0$ և $3x+\sqrt{3}y+5=0$:

117. Գտնել այն ուղղի հավասարումը, որն անցնում է $(-3;7)$ կետով և զուգահեռ է՝

1) OX առանցքին, 2) $3x+2=0$ ուղղին,
3) $5x-2y+1=0$ ուղղին, 4) $x+3y=4$ ուղղին:

118. Գտնել այն ուղղի հավասարումը, որն անցնում է $(2;5)$ կետով և ուղղահայաց է՝

1) $x+2y-1=0$ ուղղին, 2) $7x-3y+52=0$ ուղղին,
3) $4-3x=0$ ուղղին, 4) OX առանցքին:

119. Գտնել այն ուղղի հավասարումը, որն անցնում է $13x-7y-6=0$ և $4y-9x+5=0$ ուղիղների հատման կետով և՝

1) ուղղահայաց է առաջին ուղղին,
2) զուգահեռ է երկրորդ ուղղին:

120. $x+y-1=0$ և $3x-y-11=0$ ուղիղների հատման կետով տանել $x+6y-3=0$ ուղղին զուգահեռ ուղիղ:

121. $5x-4y+17=0$ և $7x+4y-5=0$ ուղիղների հատման կետով տանել $2x-3y+4=0$ ուղղին զուգահեռ ուղիղ:

122. $x-2y+7=0$ և $3x+y-7=0$ ուղիղների հատման կետով տանել $3x-2y-6=0$ ուղղին ուղղահայաց ուղիղ:

123. Ի՞նչ անկյան տակ է թեքված AB հատվածը OX առանցքի նկատմամբ, եթե՝

1) $A(-1;7)$, $B(2;4)$, 2) $A(2;3)$, $B(5;3+\sqrt{3})$,
3) $A(-2;5)$, $B(4;-3)$, 4) $A(2;1)$, $B(3;-8)$:

124. Գտնել այն ուղղի հավասարումը, որն անցնում է $(-2;5)$ կետով և ուղղահայաց է $(-4;-3)$ ու $(6;1)$ կետերը միացնող ուղղին:

125. Գտնել այն ուղղի հավասարումը, որն անցնում է $(6;-3)$ կետով և զուգահեռ է $(-1;7)$ ու $(5;-2)$ կետերը միացնող ուղղին:

126. Եռանկյան գագաթներն են՝ A(−2;−3), B(5;4), C(0;8): Գտնել C գագաթից AB կողմին տարված զուգահեռ ուղղի հավասարումը:

127. Եռանկյան գագաթներն են՝ A(−4;−2), B(4;1), C(8;7): Գտնել A գագաթից տարված բարձրության հավասարումը:

128. Գտնել A(−4;2), B(2;−5) և C(5;0) գագաթներով եռանկյան բարձրությունների հատման կետի կոորդինատները:

129. Գտնել 5x+2y−10=0 ուղղին՝ կոորդինատային առանցքների հետ դրա հատման կետերում կանգնեցրած ուղղահայացների հավասարումները:

130. Եռանկյան գագաթներն են՝ A(−1;−1), B(1;3) և C(4;2) կետերը: Գտնել եռանկյան կողմերի հավասարումները:

131. Գտնել եռանկյան կողմերի հավասարումները, եթե դրա գագաթներն են՝ A(6;1), B(−2;−1) և C(6;−3):

132. Գտնել եռանկյան միջնագծերի հավասարումները, եթե եռանկյան գագաթներն են՝ M(4;3), N(1;−1) և P(−1;4) կետերը:

133. Գտնել եռանկյան միջին գծերի հավասարումները, եթե հայտնի են դրա գագաթների կոորդինատները՝ A(−6;1), B(−1;4), C(1;−3):

134. Քառանկյան կողմերի հավասարումներն են՝ x=4, y=6, y=3x, y=x: Գտնել անկյունագծերի հավասարումները:

135. Կազմել y^2=9x և x^2=9y կորերի հատման կետերով անցնող ուղղի հավասարումը:

136. Ապացուցել, որ A(−1;1), B(1;0), C(4;3), D(6;8) գագաթներ ունեցող քառանկյունը սեղան է:

137. Ապացուցել, որ A(0;2), B(1;1), C(−2;−4), D(−3;−7) գագաթներ ունեցող քառանկյունը զուգահեռագիծ է:

138. Կազմել այն ուղղի հավասարումը, որն անցնում է A(2;3) կետով և 45^0 անկյուն է կազմում $2x-3y-8=0$ ուղղի հետ:

139. Գտնել A(−1;1) կետով անցնող և $x+3y=6$ ուղղի հետ 135^0 անկյուն կազմող ուղղի հավասարումը:

140. Տրված են զուգահեռագծի երկու կողմերի հավասարումները՝ $y=3x$ և $x+y-4=0$, և նրա անկյունագծերի հատման կետը՝ (2;1): Կազմել մյուս երկու կողմերի հավասարումները:

141. $3x-7y-3=0$ ուղղի վրա գտնել այն կետը, որը հավասարապես է հեռացած (−3;−1) և (2;4) կետերից:

142. $5x+4ը-7=0$ ուղղի վրա գտնել այն կետը, որը հավասարապես է հեռացած (−3;2) և (5;−1) կետերից:

143. Գտնել այն կետը, որը հավասարապես է հեռացած (9;3), (−3;3) և (11;1) կետերից:

144. Հետևյալ ուղիղների հավասարումներից որո՞նք ունեն նորմալ տեսք՝

1) $3x-4y+7=0$, 2) $\frac{2}{3}x-\frac{5}{7}y-5=0$,

3) $\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-2=0$, 4) $\frac{1}{2}x-y-3=0$,

5) $\frac{12}{13}x-\frac{5}{13}y-7=0$, 6) $\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y=0$:

145. Գտնել ուղղի հավասարումը հետևյալ պայմաններով. դրա հեռավորությունը կոորդինատների սկզբնակետից հավասար է 3 միավորի, իսկ OX առանցքը սկզբնակետից որոնելի ուղղին իջեցված ուղղահայացի հետ կազմում է.

1) 45^0, 2) 120^0, 3) 315^0 անկյուն:

146. Հետևյալ ուղիղների հավասարումները բերել նորմալ տեսքի՝

1) $3x-4y-25=0$, 2) $6x-8y+13=0$,

3) $2x-y+5=0$, 4) $2\sqrt{2}x-2\sqrt{7}y-15=0$:

147. Գտնել կոորդինատների սկզբնակետից հետևյալ ուղիղներին իջեցված ուղղահայացների երկարությունները և այդ ուղղահայացների հիմքերի կոորդինատները.

1) $4x-2\sqrt{5}y-15=0$, 2) $3x+4y+40=0$:

148. Գտնել՝

1) $A(-2;3)$ կետի հեռավորությունը $6x+8y-7=0$ ուղղից,

2) $B(1;-3)$ կետի հեռավորությունը $7x-8y-31=0$ ուղղից,

3) $C(-2;-3)$ կետի հեռավորությունը $3x+5y+4=0$ ուղղից:

149. Եռանկյան գագաթը գտնվում է $A(3;-2)$ կետում, իսկ հիմքը $B(-2;0)$ և $C(3;10)$ կետերը միացնող հատվածն է: Գտնել եռանկյան A գագաթից տարված բարձրության երկարությունը:

150. $A(1;2)$, $B(2;-2)$ և $C(6;1)$ գագաթներ ունեցող եռանկյան համար գտնել.

1) (CD) բարձրության հավասարումը,

2) h=CD բարձրության երկարությունը,

3) (CD) բարձրության և (BM) միջնագծի կազմած θ անկյունը:

151. Տրված է $6x-8y-15=0$ ուղիղը: Գտնել այն ուղղի հավասարումը, որը տրվածին զուգահեռ է և դրանից ունի 4 միավոր հեռավորություն:

152. Տրված է $2\sqrt{6}x+5y=14$ ուղիղը: Գտնել այն ուղղի հավասարումը, որը տրվածին զուգահեռ է և դրանից ունի 5 միավոր հեռավորություն:

153. Գտնել հետևյալ զուգահեռ ուղիղների միջև եղած հեռավորությունը.

$5x-3y+9=0$ և $5x-3y-8=0$:

154. Գտնել հետևյալ զուգահեռ ուղիղների միջև եղած հեռավորությունը.

$$12x-5y+36=0 \quad \text{և} \quad 12x-5y-16=0:$$

155. Տրված են սեղանի հիմքերի հավասարումները՝ $x-7y+15=0$ և $2x-14y-20=0$: Գտնել սեղանի բարձրությունը:

156. Գտնել $4x+3y-8=0$ և $9x-12y-5=0$ ուղիղներով կազմված անկյունների կիսորդների հավասարումները: Ցույց տալ, որ այդ կիսորդները միմյանց ուղղահայաց են:

157. Գտնել $2x+9y-13=0$ և $7x-6y-23=0$ ուղիղներով կազմված անկյունների կիսորդների հավասարումները:

158. Կազմել $M(13;0)$ կետից $x^2+y^2=25$ շրջանագծին տարված շոշափողների հավասարումները:

159. Կազմել $M(-6;2)$ կետից $x^2+y^2=4$ շրջանագծին տարված շոշափողների հավասարումները:

160. Տրված են զուգահեռագծի երկու կողմերը՝ $7x-24y-45=0$, $3x+4y-5=0$, և անկյունագծերի հատման $M(7;1)$ կետը: Գտնել զուգահեռագծի բարձրությունների երկարությունները:

161. Տրված են $A(12;-3)$ և $B(1;4)$ կետերը: Օրդինատների առանցքի վրա գտնել C կետն այնպես, որ (AC) և (CB) ուղիղները լինեն իրար ուղղահայաց:

162. Տրված են եռանկյան $A(-2;4)$ և $B(2;1)$ երկու գագաթները և բարձրությունների հատման $D(1;3)$ կետը: Կազմել եռանկյան կողմերի հավասարումները:

163. Տրված են եռանկյան երկու միջնագծերի հավասարումները՝ $5x+4y=0$, $3x-y=0$, և մի գագաթի կոորդինատները $(-5;2)$: Կազմել եռանկյան կողմերի հավասարումները:

3. Կոորդինատների ձևափոխություն, գծային անհավասարումների համակարգեր

Ընտրելով ուղղանկյուն-դեկարտյան կոորդինատային նոր համակարգ այնպես, որ նոր սկզբնակետը գտնվի $O_1(a;b)$ կետում, իսկ նոր կոորդինատական առանցքները լինեն զուգահեռ սկզբնական առանցքներին, M(x;y) կետի նոր (x′;y′) կոորդինատները կորոշվեն x′=x-a և y′=y-b բանաձևերով: Կոորդինատների այսպիսի ձևափոխությունը կոչվում է զուգահեռ տեղափոխություն: Իսկ եթե կոորդինատների սկզբնակետերը թողնելով նույնը, կատարենք կոորդինատային առանցքների պտույտ α անկյունով (ժամացույցի սլաքի հակառակ ուղղությամբ), ապա կոորդինատների ձևափոխության բանաձևերը կունենան հետևյալ տեսքը՝

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}:$$

Վերջապես, ամենաընդհանուր դեպքում, եթե կատարվել է և՛ զուգահեռ տեղափոխություն, և՛ առանցքների պտույտ, ապա կոորդինատների ձևափոխության բանաձևերը կունենան հետևյալ տեսքը՝

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha - a \\ y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha - b \end{cases}:$$

164. Կոորդինատների սկզբնակետը զուգահեռ տեղափոխությամբ տեղաշարժվել է $O_1(4;-3)$ կետը: Գտնել A(8;7) կետի կոորդինատները նոր կոորդինատական համակարգում:

165. Կոորդինատական առանցքները պտտված են 30^0-ով: Գտնել $M(2\sqrt{3};2)$ կետի նոր կոորդինատները:

166. Կոորդինատական նոր համակարգի սկզբնակետը գտնվում է $O_1(3;4)$ կետում, իսկ նոր առանցքները սկզբնակետի նկատմամբ պտտված են 60^0-ով: Գտնել 5x-2y+7=0 ուղղի հավասարումը նոր կոորդինատական համակարգում:

167. Կոորդինատական առանցքների զուգահեռ տեղափոխությամբ սկզբնակետը տեղափոխված է $O_1(-5;2)$ կետը: Գտնել $A(0;7)$, $B(-2;-1)$, $C(5;-4)$ կետերի նոր կոորդինատները:

168. Գտնել $A(4;3)$, $B(1;1)$, $C(8;0)$ կետերի նոր կոորդինատները, եթե կատարվել է կոորդինատային առանցքների պտույտը α անկյունով: Դիտարկել $\alpha=30^0$, $\alpha=45^0$, $\alpha=60^0$ դեպքերը:

169. Կոորդինատական առանցքների զուգահեռ տեղափոխությամբ $y=x^2+8x+11$ պարաբոլի հավասարումը բերել պարզագույն տեսքի՝ $y'=(x')^2$:

170. Կոորդինատական առանցքների զուգահեռ տեղափոխությամբ պարզեցնել հետևյալ հավասարումները.

1) $y^2+4y=4x-16$, 2) $x^2+y^2-12x+18y-52=0$,
3) $x^2+4y^2-6x+8y=3$, 4) $x^2+y^2-12x+14y+60=0$:

171. Կոորդինատական առանցքների զուգահեռ տեղափոխությամբ պարզեցնել $y=\dfrac{4x-3}{3x+5}$ հավասարումը՝ նոր սկզբնակետ վերցնելով $\left(-\dfrac{5}{3};\dfrac{4}{3}\right)$ կետը:

172. Կոորդինատական առանցքները 45^0 անկյունով պտտելով՝ պարզեցնել հետևյալ հավասարումները.

1) $5x^2-6xy+5y^2=32$, 2) $3x^2-10xy+3y^2+32=0$:

173. Ի՞նչ անկյունով պետք է պտտել կոորդինատական առանցքները, որպեսզի հետևյալ կորերի նոր հավասարումները չպարունակեն փոփոխականների արտադրյալը.

1) $x^2-xy+y^2=3$, 2) $5x^2-4xy+2y^2=24$:

Քանի որ $Ax+By+C=0$ հավասարմանը բավարարում են որոշակի ուղղի կետերը, ուրեմն $Ax+By+C>0$ կամ $Ax+By+C<0$ անհավասարություններին կբավարարեն ուղղին չպատկանող կետերը՝ կամ ուղղից վերև ընկած կիսահարթության կետերը, կամ ուղղից ներքև ընկած կիսահարթության կետերը: Նշենք, որ երկու կետերից ավելի վերև ընկած է համարվում մեծ օրդինատ ունեցող կետը: Եթե C>0, ապա Ax+By+C>0 անհավասարությանը կբավարարեն այն կիսահարթության կետերը, որը պարունակում է կոորդինատների սկզբնակետը:

Եթե կիսահարթության գոնե մեկ կետ բավարարում է նշված անհավասարությանը, ապա այդ կիսահարթության բոլոր կետերը կբավարարեն անհավասարությանը:

174. Գտնել այն կիսահարթությունները, որոնք բավարարում են հետևյալ անհավասարություններին:

1) $3x-y-6<0$, 2) $x-2y+4\le 0$, 3) $2x-3y>0$:

175. Հարթության վրա նշել այն կետերի բազմությունը, որոնց կոորդինատները բավարարում են անհավասարությունների փվյալ համակարգին.

1) $\begin{cases} 2x+y\le 2 \\ -x+y\le 1 \\ y\ge 0 \end{cases}$, 2) $\begin{cases} -x-y\le 1 \\ -x+y\le 1 \\ x+y\le 1 \\ x-y\le 1 \end{cases}$, 3) $\begin{cases} y\le x \\ x\le 1 \\ 2y\ge x \\ y\ge 0 \end{cases}$,

4) $\begin{cases} x\ge 0 \\ y\ge 0 \\ x+y\le 1 \\ y-x\le 2 \end{cases}$, 5) $\begin{cases} y\le x \\ 2y\ge x \\ x+y\le 2 \end{cases}$, 6) $\begin{cases} x+2y\ge 0 \\ x-y\le 0 \\ x-4y\ge -6 \end{cases}$,

7) $\begin{cases} 2x-y\le 1 \\ x-y\ge -1 \\ y\ge 0 \end{cases}$, 8) $\begin{cases} 3x+2y\le 1 \\ x+1\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$, 9) $\begin{cases} x+y\ge 0 \\ 2x-y\le 3 \\ x-2y\le 0 \end{cases}$,

10) $\begin{cases} x+y\ge -2 \\ x-y\ge -2 \\ x-y\le 1 \end{cases}$, 11) $\begin{cases} 2y-x<6 \\ 3x-y<3 \\ 4y+x>-4 \end{cases}$, 12) $\begin{cases} 7x+4y<28 \\ 5x-3y>14 \\ 8x-9y<60 \end{cases}$,

13) $\begin{cases} x+y-3\le 0 \\ 3x+2y-6\ge 0 \\ 2x-y-4\le 0 \end{cases}$, 14) $\begin{cases} 5x+y-7\le 0 \\ 2x-3y-13\le 0 \\ 7x-2y-3\ge 0 \end{cases}$, 15) $\begin{cases} x+y-2\ge 0 \\ 3x-5y-15\le 0 \\ 2x+3y-12\le 0 \end{cases}$:

4. Երկրորդ կարգի կորեր

Երկու փոփոխականներով երկրորդ աստիճանի ընդհանուր հավասարումն ունի հետևյալ տեսքը.

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \qquad (A^2+B^2+C^2\neq 0):$$

Այս հավասարումը կարող է պատկերել դատարկ բազմություն, կետ, ուղիղների զույգ, շրջանագիծ, էլիպս, հիպերբոլ և պարաբոլ:

Շրջանագիծ: C(a;b) կենտրոն և R շառավիղ ունեցող շրջանագծի հավասարումն է.

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2:$$

176. Կազմել OY առանցքը շոշափող այն շրջանագծի հավասարումը, որի կենտրոնը C(-3;4) կետն է:

177. Որոշել ուղղի դիրքը շրջանագծի նկատմամբ (հատում է, շոշափում է կամ շրջանագծի հետ չունի ընդհանուր կետ), եթե դրանց հավասարումներն են.

1) $2x-y-3=0$, $\quad x^2+y^2-3x+2y-3=0$,
2) $x-2y-1=0$, $\quad x^2+y^2-8x+2y+12=0$,
3) $x-y+10=0$ $\quad x^2+y^2-1=0$:

178. Գտնել հետևյալ շրջանագծերի կենտրոնների կոորդինատները և շառավիղները.

1) $x^2+y^2+4x-6y+9=0$, $\quad$ 2) $x^2+y^2-6x+2y-6=0$,
3) $3x^2+3y^2-12x-2y+12=0$, $\quad$ 4) $x^2+y^2-8x+6y=0$,
5) $x^2+y^2+10x-18y+70=0$:

179. Գտնել $x^2+y^2+4x-6y-17=0$ շրջանագծի այն տրամագծի հավասարումը, որը ուղղահայաց է $5x+2y-13=0$ ուղղին:

180. Գտնել այն շրջանագծի հավասարումը, որի համար $M_1(-3;0)$ և $M_2(3;6)$ ծայրակետերով հատվածը տրամագիծ է:

181. Գտնել այն շրջանագծի հավասարումը, որն անցնում է M(1;2) կետով և շոշափում է կոորդինատական առանցքները:

182. Գտնել այն շրջանագծի հավասարումը, որը շոշափում է կոորդինատական առանցքները և անցնում է $(1;\sqrt{3}-2)$ կետով:

183. Գտնել այն շրջանագծի հավասարումը, որը շոշափում է կոորդինատական առանցքները A(-3;0) և B(0;3) կետերում:

184. Գտնել $r=3$ շառավիղ ունեցող այն շրջանագծի հավասարումը, որը շոշափում է օրդինատների առանցքը (0;-4) կետում:

185. Գտնել A(3;-1) կենտրոն ունեցող այն շրջանագծի հավասարումը, որն անցնում է B(-5;4) կետով:

186. Գտնել a թիվը, եթե հայտնի է, որ $x^2+y^2+ax-12y+1=0$ շրջանագծի շառավիղը հավասար է 6-ի:

187. $4x-3y-38=0$ ուղիղը շոշափում է $(x-1)^2+(y+3)^2=25$ շրջանագիծը: Գտնել շոշափման կետի կոորդինատները:

188. Գտնել A(6;7) կենտրոն ունեցող այն շրջանագծի հավասարումը, որին շոշափում է $5x-12y-24=0$ ուղիղը:

189. Գտնել M(-7;2) կետի կարճագույն հեռավորությունը $x^2+y^2-10x-14y-151=0$ շրջանագծից:

190. Գտնել այն շրջանագծի հավասարումը, որն անցնում է $M_1(-1;3)$, $M_2(0;2)$ և $M_3(1;-1)$ կետերով:

Էլիպս: Էլիպսի կանոնական հավասարումն է՝ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, որտեղ՝ $a>b>0$, $a^2-b^2=c^2$ և $F_1(-c;o)$, $F_2(c;o)$ կետերը էլիպսի ֆոկուսներն են: a և b թվերը կոչվում են էլիպսի կիսառանցքներ (մեծ և փոքր), $\varepsilon=\frac{c}{a}<1$ կոչվում է էլիպսի էքսցենտրիսիտետ:

191. Ապացուցել, որ $x^2+4y^2-4x-24y+30=0$ հավասարումը էլիպսի հավասարում է, գտնել այդ էլիպսի կիսառանցքները, ֆոկուսների կոորդինատները:

192. Գտնել $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{81}=1$ էլիպսի մեծ և փոքր առանցքների երկարությունները և փոկուսների կոորդինատները:

193. Գտնել $4x^2+25y^2=100$ էլիպսի կիսառանցքների երկարությունները և փոկուսների կոորդինատները:

194. Գտնել էլիպսի կանոնական հավասարումը, եթե դրա մեծ կիսառանցքը հավասար է 3-ի, և էլիպսն անցնում է $(\sqrt{8};0,4)$ կետով:

195. Կազմել էլիպսի կանոնական հավասարումը, եթե դրա կիսառանցքների գումարը հավասար է 16-ի, իսկ փոկուսները գտնվում են (-8;0) և (8;0) կետերում:

196. Գտնել էլիպսի կանոնական հավասարումը, եթե դրա փոկուսների հեռավորությունը հավասար է 8-ի, իսկ փոքր կիսառանցքը՝ 3-ի:

197. Գտնել էլիպսի կանոնական հավասարումը, եթե այն անցնում է $(5;-2)$ և $(\sqrt{15};2\sqrt{3})$ կետերով:

198. Գտնել այն էլիպսի կանոնական հավասարումը, որն անցնում է $(4\sqrt{2};3)$ կետով և դրա փոկուսներից մեկը գտնվում է (-5;0) կետում:

199. Որոշել էլիպսի և ուղղի փոխադարձ դիրքը, եթե դրանց հավասարումներն են.

1) 2x-y-3=3, $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$,

2) 2x+y-10=0, $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$:

200. Ապացուցել, որ հետևյալ հավասարումները էլիպսի հավասարումներ են, և գտնել այդ էլիպսների կիսառանցքները.

1) $5x^2+9y^2-30x+18y+9=0$,
2) $16x^2+25y^2+32x-100y-284=0$,
3) $4x^2+3y^2-8x+12y-32=0$:

201. Գտնել $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ էլիպսի $M_0(x_0;y_0)$ կետում դրան տարված շոշափողի հավասարումը:

Հիպերբոլ: Հիպերբոլի կանոնական հավասարումն է՝ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, որտեղ՝ $a,b>0$, $c^2=a^2+b^2$, $F_1(-c;o)$ և $F_2(c;o)$ կետերը հիպերբոլի ֆոկուսներն են: $y=\pm\frac{b}{a}x$ ուղիղները կոչվում են հիպերբոլի ասիմպտոտներ, $\varepsilon=\frac{c}{a}>1$ կոչվում է հիպերբոլի էքսցենտրիսիտետ:

202. Գտնել $16x^2-9y^2=144$ հիպերբոլի կիսառանցքները, ֆոկուսների կոորդինատները և ասիմպտոտների հավասարումները:

203. Կազմել հիպերբոլի կանոնական հավասարումը, եթե.

1) գագաթների միջև եղած հեռավորությունը հավասար է 14-ի, իսկ ֆոկուսների միջև եղած հեռավորությունը՝ 20-ի,
2) իրական և կեղծ առանցքների երկարությունների գումարը հավասար է 14-ի, իսկ ֆոկուսները գտնվում են (-5;0) և (5;0) կետերում:

204. Գտնել հիպերբոլի կանոնական հավասարումը, եթե դրա ֆոկուսները գտնվում են (-9;0) և (9;0) կետերում և հիպերբոլն անցնում է $\left(\sqrt{17};8\right)$ կետով:

205. Գտնել $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{4}=1$ հիպերբոլի ֆոկուսների կոորդինատները և ասիմպտոտների հավասարումները:

206. Գտնել այն հիպերբոլի կանոնական հավասարումը, որն անցնում է $\left(\frac{15}{4};3\right)$ կետով, իսկ $y=\pm\frac{4}{3}x$ ուղիղները դրա ասիմպտոտներն են:

207. Գտնել հիպերբոլի կանոնական հավասարումը, եթե դրա ֆոկուսները համընկնում են $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$ էլիպսի ֆոկուսներին, իսկ $y=-2x$ ուղիղը դրա ասիմպտոտներից մեկն է:

208. Գտնել հիպերբոլի կիսառանցքները, եթե դրա ասիմպտոտներն իրար ուղղահայաց են, և հիպերբոլն անցնում է $\left(\sqrt{20};\sqrt{10}\right)$ կետով:

209. Պարզել, թե հետևյալ հավասարումները որոշո՞ւմ են հիպերբոլներ, և գտնել այդ հիպերբոլների ասիմպտոտների հավասարումները.

1) $16x^2-9y^2-64x-54y-161=0$,
2) $9x^2-16y^2+90x+32y-367=0$:

Պարաբոլ: Պարաբոլի կանոնական հավասարումն է՝ $y^2=2px$: $p>0$ թիվը կոչվում է պարաբոլի պարամետր: $y^2=2px$ պարաբոլի գագաթը գտնվում է $O(0;0)$ կետում, ֆոկուսը՝ $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ կետում, իսկ OX առանցքը դրա համաչափության առանցքն է:

210. Գտնել $y^2-2y-6x+4=0$ պարաբոլի պարամետրը և ֆոկուսի կոորդինատները:

211. Կազմել պարաբոլի կանոնական հավասարումը, եթե.
1) ֆոկուսը գտնվում է (4;0) կետում,
2) պարաբոլն անցնում է (24;-12) կետով:

212. Կազմել պարաբոլի հավասարումը, եթե.
1) պարաբոլը համաչափ է OX առանցքի նկատմամբ և անցնում է (0;0) և (-3;3) կետերով,
2) պարաբոլը համաչափ է OY առանցքի նկատմամբ, և ֆոկուսը գտնվում է (0;3) կետում, իսկ գագաթը՝ կոորդինատների սկզբնակետում:

213. Գտնել պարաբոլի հավասարումը, եթե այն համաչափ է $x=2$ ուղղի նկատմամբ, OX առանցքի հետ հատվում է (1;0) կետում, իսկ OY առանցքի հետ՝ (0;-6) կետում:

214. $y^2=12x$ պարաբոլի վրա գտնել այն կետերը, որոնց հեռավորությունը պարաբոլի ֆոկուսից հավասար է 4-ի:

215. $x=2y^2$ պարաբոլի վրա գտնել այն կետերը, որոնք հավասարապես հեռացված են (0;0) և (1;1) կետերից:

216. Պարզել, որ հետևյալ հավասարումների գրաֆիկները պարաբոլներ են: Գտնել դրանց գագաթների կոորդինատները և p պարամետրերը:
1) $y^2=4x-8$,   2) $x^2=2-y$,
3) $y=4x^2-8x+7$,   4) $x=2y^2-12y+14$:

5. Խառը խնդիրներ երկրորդ կարգի կորերի վերաբերյալ

217. Գտնել $x^2+y^2+ay=0$ շրջանագծի կենտրոնի հեռավորությունը $y=2(a-x)$ ուղղից:

218. Գտնել այն կետերի բազմության հավասարումը, որոնց՝ $y=kx$ և $y=-kx$ ուղիղներից ունեցած հեռավորությունների գումարը հաստատուն է և հավասար է a^2:

219. Գտնել այն հավասարակողմ եռանկյան մակերեսը, որի գագաթները գտնվում են $x^2-y^2=a^2$ հիպերբոլի վրա:

220. Ապացուցել, որ հիպերբոլի ցանկացած կետի ասիմպտոտներից ունեցած հեռավորությունների արտադրյալը հաստատուն է և հավասար է՝ $\frac{a^2b^2}{c^2}$:

221. Տրված է $x^2+4y^2=16$ էլիպսը: Դրա A(4;0) գագաթից տարված են բոլոր հնարավոր լարերը: Գտնել այդ լարերի միջնակետերի բազմության հավասարումը:

222. Կառուցել հետևյալ անհավասարություններին բավարարող կետերի տիրույթները:

ա) $R^2<x^2+y^2<4R^2$ և $x^2>\frac{R^2}{4}$,

բ) $x^2-y^2>a^2$ և $x^2<4a^2$,

գ) $xy>a^2$ և $|x+y|<4a$:

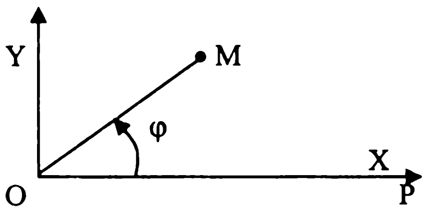
223. Ապացուցել, որ եթե $Ax+By+C=0$ ուղիղը շոշափում է $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ գծին, ապա՝ $A^2a^2+B^2b^2=C^2$:

Ցուցում. օգտվել էլիպսի (x_0,y_0) կետով անցնող շոշափողի $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$ հավասարումից:

224. Կազմել այն կետերի բազմության հավասարումը, որոնց կոորդինատական անկյունների կիսորդներից ունեցած հեռավորությունների քառակուսիների տարբերությունը հավասար է 8-ի:

6. Բևեռային կոորդինատներ

Ենթադրենք՝ հարթության վրա տրված են O կետը (բևեռ) և OP ճառագայթը (բևեռային ճառագայթ): Այս դեպքում M կետի դիրքը հարթության վրա կորոշվի $\varphi=\angle MOP$ բևեռային անկյունով և $r=OM$ շառավղով:



Եթե որպես բևեռ ընտրենք ուղղանկյուն կոորդինատական համակարգի սկզբնակետը, իսկ որպես բևեռային առանցք՝ OX առանցքը, ապա M կետի (x;y) դեկարտյան կոորդինատների և $(r;\varphi)$ բևեռային կոորդինատների կապը կլինի՝

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}, \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x} \end{cases}:$$

Եթե պարաբոլի ֆոկուսը ընդունենք որպես բևեռ, իսկ OP բևեռային առանցքը ուղղենք դիրեկտրիսին ուղղահայաց՝ դիրեկտրիսից դեպի բևեռ ուղղությամբ, ապա պարաբոլի հավասարումը բևեռային կոորդինատներով կգրվի՝ $r = \dfrac{p}{1-\cos\varphi}$, որտեղ՝ p-ն պարաբոլի ֆոկալ պարամետրն է: Նույն համակարգում էլիպսը և հիպերբոլի համապատասխան ճյուղը ունեն $r = \dfrac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}$ տեսքի հավասարում, որտեղ՝ ε-ը գծի էքսցենտրիսիտետն է, իսկ p-ն ֆոկալ պարամետրը, որը որոշվում է $p = \dfrac{b^2}{a}$ բանաձևով:

225. Կառուցել $r=2+2\cos\varphi$ գիծը:

Ցուցում. $\varphi=0, \pm\dfrac{\pi}{3}, \pm\dfrac{\pi}{2}, \pm\dfrac{2\pi}{3}, \pi$ արժեքների համար կազմել r-ի արժեքների աղյուսակ:

226. Կառուցել հետևյալ գծերը.

ա) $r=a\varphi$ (արքիմեդյան պարույր),

բ) $r=a(1-\cos\varphi)$ (կարդիոիդ),

գ) $r^2=a^2\cos2\varphi$ (լեմնիսկատ),

դ) $r=\dfrac{a}{\varphi}$ (հիպերբոլական պարույր),

ե) $r=a(1+2\cos\varphi)$ (Պասկալի խխունջ),

զ) $r=a\sin3\varphi$ (եռաթերթ վարդ),

է) $r=a\sin2\varphi$ (քառաթերթ վարդ):

227. Հետևյալ գծերի հավասարումները ձևափոխել դեկարտյան կոորդինատներով գրված հավասարումների.

ա) $r\cos\varphi=a$, բ) $r=2a\sin\varphi$, գ) $r^2\sin2\varphi=2a^2$,

դ) $r=a(1+\cos\varphi)$, ե)$r\sin(\varphi+\dfrac{\pi}{4})=a\sqrt{2}$:

228. Գտնել երկրորդ կարգի կորերի կանոնական հավասարումները.

ա) $r=\dfrac{9}{5-4\cos\varphi}$, բ) $r=\dfrac{9}{4-5\cos\varphi}$, գ) $r=\dfrac{3}{1-\cos\varphi}$:

§2. ԱՆԱԼԻՏԻԿ ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅԱՆ ՏԱՐՐԵՐԸ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ

1. Երկու կետերի միջև եղած հեռավորությունը, հատվածի բաժանումը տրված հարաբերությամբ

Տարածության մեջ ընտրված ուղղանկյուն-դեկարտյան կոորդինատական համակարգում տարածության յուրաքանչյուր կետի դիրքը որոշվում է իր կոորդինատներով՝ x աբսցիսով, y օրդինատով և z ապլիկատով:

Տարածության $A(x_1;y_1;z_1)$ և $B(x_2;y_2;z_2)$ կետերի միջև եղած հեռավորությունը հաշվում են.

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

բանաձևով:

$A(x_1;y_1;z_1)$ և $B(x_2;y_2;z_2)$ ծայրակետերով AB հատվածը λ հարաբերությամբ $\left(\overline{AM}=\lambda\overline{MB}\right)$ բաժանող M(x;y;z) կետի կոորդինատները որոշվում են.

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\qquad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\qquad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$$

բանաձևերով:

229. Գտնել A(-5;12;1) կետի հեռավորությունները կոորդինատային առանցքներից:

230. Տարածական ուղղանկյուն կոորդինատական համակարգում կառուցել հետևյալ կետերը.

A(-3;2;3), B(1;4;5), C(3;0;1), D(0;4;0):

231. Գտնել հետևյալ կետերի միջև եղած հեռավորությունը.

1) A(2;0;-1) և B(-2;-5;3),

2) A(3;2;1) և B(4;-1;-2):

232. Գտնել A(6;-8;2) կետի հեռավորությունները կոորդինատային առանցքներից:

233. Երկրորդ օկտանտում գտնել այն կետը, որի հեռավորությունները կոորդինատային առանցքներից համապատասխանաբար հավասար են՝ $\sqrt{52}$, $3\sqrt{5}$ և 5:

234. Աբսցիսների առանցքի վրա գտնել այն կետը, որը հավասարապես է հեռացված A(2;2;3) և B(-3;5;1) կետերից:

235. XOY հարթության վրա գտնել այն կետը, հավասարապես է հեռացված A(-2;1;3), B(0;-1;-2) և C(3;1;4) կետերից:

236. OZ առանցքի վրա գտնել այն կետը, որը հավասարապես է հեռացված A(4;-1;2) և B(0;2;-1) կետերից:

237. Ցույց տալ, որ A(3;-2;5), B(-2;1;-3) և C(5;1;-1) գագաթներով եռանկյունը սուրանկյուն եռանկյուն է:

238. Տրված են AB հատվածը երեք հավասար մասերի բաժանող կետերի կոորդինատները՝ C(3;-2;-1) և D(1;1;6): Գտնել A և B կետերի կոորդինատները:

239. Ի՞նչ հարաբերությամբ է բաժանում M(1;2;0) կետը A(-1;0;0) և B(4;5;0) ծայրակետերով հատվածը:

240. Գտնել A(5;1;12), B(11;3;8) և C(2;5;0) գագաթներով եռանկյան ծանրության կենտրոնի կոորդինատները:

241. Գտնել այն կետի կոորդինատները, որով XOY հարթությունը տրոհում է A(2;-1;7) և B(4;5;-1) ծայրակետերով հատվածը:

2. Հարթության հավասարումը

Տրված $M(x_0;y_0;z_0)$ կետով անցնող և տրված $\vec{n}(A,B,C)$ վեկտորին (հարթության նորմալ վեկտորին) ուղղահայաց հարթության հավասարումն է.

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0:$$

Եթե տրված է հարթության մեկ երկարություն ունեցող միավոր նորմալ վեկտորը՝ $\vec{n}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, և հարթության $p\geq0$ հեռավորությունը կոորդինատների սկզբնակետից, ապա այդ հարթության հավասարումը, որը կոչվում է հարթության նորմալ հավասարում, ունի հետևյալ տեսքը.

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0:$$

Որպեսզի հարթության ընդհանուր հավասարումը՝ $Ax+By+Cz+D=0$, բերենք նորմալ տեսքի, պետք է այն բազմապատկել նորմավորող արտադրիչով.

$$\mu=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

ընդ որում՝ μ-ի նշանն ընտրվում է D-ի նշանին հակառակ:

$A(x_0;y_0;z_0)$ կետի հեռավորությունը $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$ հարթությունից որոշվում է.

$$h=|x_0\cos\alpha+y_0\cos\beta+z_0\cos\gamma-p|$$

բանաձևով, կամ՝ $h=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$:

Եթե հարթությունը կոորդինատական առանցքները հատում է, համապատասխանաբար՝ (a,0;0), (0;b; 0) և (0;0;c) կետերում, ապա դրա հավասարումը կլինի.

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

(հարթության հավասարումը հատվածներով):

Օգտվելով այն փաստից, որ $\vec{n}$ (A,B,C) վեկտորը ուղղահայաց է $Ax+By+Cz+D=0$ հարթությանը, կարելի է հաշվել երկու հարթությունների կազմած երկնիստ անկյան գծային անկյունը:

$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ և $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ հարթությունների կազմած երկնիստ անկյունների φ գծային անկյունները որոշվում են.

$$\cos\varphi=\pm\frac{|AA_1+BB_1+CC_1|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

բանաձևով:

Հարթությունների զուգահեռության պայմանն է.

$$(A_1,B_1,C_1)=k(A_2,B_2,C_2),\ D_1\neq kD_2:$$

Հարթությունների ուղղահայացության պայմանն է.

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0:$$

242. Գտնել M(2;1;1), M(-2;4;2) և M (1;3;-5) կետերով անցնող հարթության հավասարումը:

243. Կազմել այն հարթության հավասարումը, որը.

1) զուգահեռ է XOY հարթությանը և պարունակում է (3;2;1) կետը,

2) ուղղահայաց է XOY հարթությանը և անցնում է (1;9;0) և (-2;-1;5) կետերով:

244. Գտնել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է A(-1;6;3), B(3;-2;5) և C(10;4;1) կետերով:

245. Գտնել M(-1;2;3) կետով անցնող և $\overrightarrow{OM}$ վեկտորին ուղղահայաց հարթության հավասարումը:

246. Գտնել A(2;-1;3) կետով անցնող և կոորդինատական առանցքներից դրական և հավասար մեծության հատվածներ անջատող հարթության հավասարումը:

247. Հետևյալ հարթությունների հավասարումները բերել նորմալ տեսքի.

1) 11x-10y+2z+30=0,
2) -6x+2y+9z-44=0,
3) x+2y-3z-1=0:

248. Գտնել կոորդինատների սկզբնակետի հեռավորությունը 2x+y-2z+18=0 հարթությունից:

249. Գտնել.

1) (-4;-3;1) կետի հեռավորությունը 4x-2y-4z+3=0 հարթությունից,
2) (2;0;-5) կետի հեռավորությունը x-3y+6z-10=0 հարթությունից,
3) (1;10;-5) կետի հեռավորությունը x+y+z-8=0 հարթությունից:

250. Գտնել 4x+3y-5z-8=0 և 4x+3y-5z+12=0 զուգահեռ հարթությունների միջև եղած հեռավությունը:

251. Գտնել A(1;-1;2), B(3;3;4) և C(2;4;0) գագաթներով եռանկյան ծանրության կենտրոնի հեռավորությունը 4x+3y-4=0 հարթությունից:

252. Գտնել 4x-22y+20z=15 հարթության նորմալի ուղղորդ կոսինուսները:

253. Հարթությունը կոորդինատական առանցքները հատում է, համապատասխանաբար՝ (5;0;0), (0;10;0) և (0;0;-5) կետերում: Գտնել այդ հարթության նորմալի ուղղորդ կոսինուսները:

254. Տրված են $M_1(0;-1;3)$ և $M_2(1;3;5)$ կետերը: Գտնել M_1 կետով անցնող և $\overrightarrow{M_1M_2}$ վեկտորին ուղղահայաց հարթության հավասարումը:

255. Գտնել A(0;-2;3) կետով և OX առանցքով անցնող հարթության հավասարումը:

256. Գտնել $2x-2y+z=6$ հարթության նորմալի կազմած անկյունները կոորդինատական առանցքների հետ:

257. Գտնել $2x-3y+6z-12=0$ հարթությամբ և կոորդինատական հարթություններով սահմանափակված բուրգի ծավալը:

258. Գտնել A(1;2;-3) կետով անցնող և $3x-2y+6z-8=0$ հարթությանը զուգահեռ հարթության հավասարումը:

259. Պարզել հետևյալ հարթությունների փոխադարձ դիրքը.

1) $-x+2y-z+1=0$ և $y+3z-1=0$,
2) $x+2y-3z-5=0$ և $2x-y+z+2=0$,
3) $x+2y-z-1=0$ և $-2x-4y+2z+1=0$,
4) $\frac{x}{2}-y+z-7=0$ և $2x-4y+4z-3=0$:

260. Գտնել հետևյալ հարթությունների նորմալ վեկտորների կազմած անկյան կոսինուսը.

1) $x-y+1=0$, $y-z+1=0$
2) $3x-y+2z-7=0$, $x+3y-2z-3=0$:

261. Գտնել A(2;2-2) կետով անցնող և $x+2y-3z=0$ հարթությանը զուգահեռ հարթության հավասարումը:

262. Գտնել OZ առանցքով անցնող և $2x+y-\sqrt{5}z=0$ հարթության հետ 60^0 անկյուն կազմող հարթության հավասարումը:

263. Գտնել A(0;-5;0) և B(0;0;2) կետերով անցնող և x+5y+2z-10=0 հարթությանը ուղղահայաց հարթության հավասարումը:

3. Ուղիղը տարածության մեջ

Տարածության մեջ ուղիղը կարելի է դիտարկել որպես երկու հարթությունների հատման գիծ (ուղղի ընդհանուր հավասարումներ).

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} :$$

$M(x_0;y_0;z_0)$ կետով անցնող և $\vec{S}(m;n;p)$ ուղղորդ վեկտորին զուգահեռ ուղղի հավասարումներն են (կանոնական հավասարումներ).

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} :$$

Ուղղի պարամետրական հավասարումներն են.

$$\begin{cases} x = mt + x_0 \\ y = nt + y_0 \\ z = pt + z_0 \end{cases} :$$

$A(x_1;y_1;z_1)$ և $B(x_2;y_2;z_2)$ կետերով անցնող ուղղի հավասարումներն են.

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1},$$

քանի որ $\overrightarrow{AB}\left(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\right)$ վեկտորը (AB) ուղղի համար ուղղորդ վեկտոր է:

Ուղղորդ վեկտորների միջոցով կարելի է գրել.

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1} \quad \text{և} \quad \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}$$

երկու ուղիղների զուգահեռության պայմանը՝

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2},$$

ուղղահայացության պայմանը՝

$$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0,$$

ինչպես նաև գտնել երկու ուղիղների կազմած անկյունը՝

$$\cos\varphi=\frac{\vec{S_1}\cdot\vec{S_2}}{\|\vec{S}_1\|\|\vec{S}_2\|}=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}:$$

Ուղղի ուղղորդ վեկտորի և հարթության նորմալ վեկտորի միջոցով կարելի է պարզել ուղղի և հարթության փոխադարձ դիրքը տարածության մեջ.

ա) $\vec{S}(m;n;p)\|\vec{n}(A;B;C)\Rightarrow\frac{m}{A}=\frac{n}{B}=\frac{p}{C}\Rightarrow$ ուղիղը ուղղահայաց է հարթությանը,

բ) $\vec{S}(m;n;p)\perp\vec{n}(A;B;C)\Rightarrow mA+nB+pC=0\Rightarrow$ ուղիղը զուգահեռ է հարթությանը (մասնավորապես կարող է պատկանել հարթությանը),

գ) ուղղի և հարթության կազմած անկյունը.

$$\sin\varphi=\frac{|\vec{n_1}\cdot\vec{S}|}{\|\vec{n}_1\|\|\vec{S}\|}=\frac{|mA+nB+pC|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}:$$

264. Գտնել $\begin{cases}x+2y+3z-13=0\\3x+y+4z-14=0\end{cases}$ ընդհանուր հավասարումներով տրված ուղղի կանոնական հավասարումները:

265. Պարզել՝ հատվո՞ւմ է արդյոք հետևյալ ուղիղը՝

$$\begin{cases}3x-y+2z-6\\x+4y-z+24=0\end{cases}.$$

1) OX առանցքի հետ,
2) OY առանցքի հետ,
3) OZ առանցքի հետ:

266. Գտնել α թիվը, եթե $\begin{cases} x+2y-z+3=0 \\ 3x-y+2z+\alpha=0 \end{cases}$ ուղիղը.

1) հատում է OZ առանցքը,
2) հատում է OX առանցքը:

267. Կազմել այն ուղղի հավասարումները, որն անցնում է կոորդինատների սկզբնակետով և.

1) (3;-2;1) կետով,
2) (4;0;-6) կետով,
3) (1;0;0) կետով:

268. Ստուգել՝ հետևյալ երեք կետերը գտնվո՞ւմ են արդյոք մեկ ուղիղ գծի վրա.

1) A(-2;5;1), B(3;-1;7), $C\left(-\frac{7}{6};4;2\right)$,
2) A(8;0;5), B(-11;9;1), C(4;3;2):

269. Գտնել ուղղի կանոնական հավասարումները, եթե այն անցնում է M_0(2;0;-3) կետով և զուգահեռ է.

1) $\vec{a}(2;-3;+5)$ վեկտորին,
2) $\frac{x-1}{5}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+1}{-1}$ ուղղին,
3) OX առանցքին,
4) OZ առանցքին,
5) $\begin{cases} 3x-y+2z-7=0 \\ x+3y-2z-3=0 \end{cases}$ ուղղին:

270. Գտնել տրված M_1 և M_2 կետերով անցնող ուղղի հավասարումը, եթե.

1) M_1(1;-2;1), M_2(3;1;-1),
2) M_1(3;-1;0), M_2(1;0;-3),
3) M_1(-1;2;3), M_2(2;6;-2),
4) M_1(-1;2;3), M_2(2;6;-2):

271. Գտնել $\begin{cases} x=2z-1 \\ y=-2z+1 \end{cases}$ ուղղի և O(0;0;0) ու A(1;-1;-1) կետերով անցնող ուղղի կազմած անկյունը:

272. Գտնել A(-4;3;0) կետով անցնող և $\begin{cases} x-2y+z=4 \\ 2x+y-z=0 \end{cases}$ ուղղին զուգահեռ ուղղի հավասարումը:

273. Գտնել $\begin{cases} x=3 \\ z=5 \end{cases}$ ուղղի ուղղորդ վեկտորը:

274. Գտնել $\begin{cases} 2x-y-7=0 \\ 2x-z+5=0 \end{cases}$ և $\begin{cases} 3x-2y+8=0 \\ z=3x \end{cases}$ ուղիղների կազմած անկյունը:

275. Գտնել ուղղի և հարթության հատման կետը, եթե դրանց հավասարումներն են.

1) $\frac{x-4}{4}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{-1}$ և 7x-y+z-6=0,

2) $\frac{x+1}{2}=\frac{y-5}{4}=\frac{z}{3}$ և 3x-3y+2z-5=0,

3) $\frac{x-13}{8}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-4}{3}$ և x+2y-4z+1=0:

276. Գտնել $\begin{cases} y=3x-1 \\ 2z=-3x+2 \end{cases}$ ուղղի և 2x+y+z-4=0 հարթության կազմած անկյունը:

277. Գրել $\frac{x-3}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{2}$ և $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{2}$ զուգահեռ ուղիղներով անցնող հարթության հավասարումը:

278. Գտնել $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+1}{3}$ ուղղով և M(3;4;0) կետով անցնող հարթության հավասարումը:

279. Գտնել $\begin{cases} x=2t-1 \\ y=t+2 \\ z=1-t \end{cases}$ ուղղի և 3x-2y+z=3 հարթության հատման կետը:

280. Գտնել A(3;1;-1) կետի պրոյեկցիան $x+2y+3z-30=0$ հարթության վրա:

281. Գտնել M(2;1;0) կետով անցնող և $\begin{cases} x = 3z - 1 \\ y = 2z \end{cases}$ ուղղին ուղղահայաց հարթության հավասարումը:

282. Գտնել $\begin{cases} x = 1 - z \\ y = 2 \end{cases}$ ուղղի և $y=z$ հարթության հատման կետը և դրանց կազմած անկյունը:

283. Գտնել $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z+2}{2}$ ուղղով անցնող և $2x+3y-z=4$ հարթությանը ուղղահայաց հարթության հավասարումը:

284. Գտնել M(6;1;0) կետի հեռավորությունը $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z}{2}$ ուղղից:

§3. ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԻ ՏԱՐՐԵՐԸ

1. Գծային պարածություններ

G բազմությունը կոչվում է խումբ, եթե այդ բազմության կամայական a և b տարրերի համար սահմանված է դրանց արտադրյալը՝ $a \cdot b \in G$, որը բավարարում է հետևյալ պայմաններին.

1) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (զուգորդականության հատկություն):

2) G բազմության մեջ $\exists$ այնպիսի e տարր (կոչվում է միավոր), որ G-ից վերցրած $\forall$ a-ի համար՝ $a \cdot e = e \cdot a = a$:

3) Յուրաքանչյուր a-ի համար, որը պատկանում է G-ին, G-ում $\exists$ այնպիսի a^{-1} տարր (կոչվում է a-ի հակադարձ), որ տեղի ունի՝

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e:$$

Խումբը կոչվում է կոմուտատիվ կամ աբելյան, եթե $\forall$ a,b տարրերի համար տեղի ունի $a \cdot b = b \cdot a$ հավասարությունը:

Կոմուտատիվ խմբի համար ընդունված է ab-ի փոխարեն գրել a+b և արտադրյալն անվանել գումար: Այսպիսի խմբերն անվանում են ադիտիվ: Ադիտիվ խմբի e միավորի փոխարեն գրում են 0, a^{-1}-ի փոխարեն՝ –a, իսկ a + (-b)-ի փոխարեն՝ a-b:

Կարելի է ապացուցել, որ.

ա) G խմբում ∃ մեկ միավոր և G-ից վերցրած ∀ a-ի համար մեկ a^{-1} հակադարձ (ապացուցել ինքնուրույն):

բ) ∀ a և b տարրերի համար, որ պատկանում են G խմբին, ∃ միարժեք որոշված x,y զույգ ($x\in G$, $y\in G$) այնպես, որ ax=b, ya=b և $(ab)^{-1}=b^{-1}\cdot a^{-1}$ (ապացուցել ինքնուրույն):

285. Ապացուցել, որ.

$$G=\{a^x \mid x\in Z, a\in R \text{ և } a\neq 0\}$$

բազմությունը՝ սովորական բազմապատկման գործողությամբ, խումբ է. գտնել G-ի միավորը, G-ի որևէ տարրի հակադարձը:

286. Ապացուցել, որ $Z=\{0,\pm1,\pm2,...\}$ բազմությունը ադիտիվ խումբ է գումարման գործողության նկատմամբ:

G ադիտիվ խումբը կոչվում է օղակ, եթե G-ում սահմանված է բազմապատկման գործողություն (G-ից վերցրած ∀ a և b տարրերի համար G-ում սահմանված է $a\cdot b$, $(a\cdot b\in G)$, որը բավարարում է հետևյալ պայմաններին.

1) $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$,

2) $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$,

3) $(b+c)\cdot a=b\cdot a+c\cdot a$:

Այսպիսով, G օղակում սահմանված է երկու գործողություն՝ գումարում և բազմապատկում:

Օղակը կոչվում է կոմուտատիվ, եթե՝ $a\cdot b=b\cdot a$:

Կոմուտատիվ օղակը կոչվում է դաշտ, եթե ոչ զրոյական տարրերը կազմում են խումբ՝ բազմապատկման գործողության նկատմամբ: Դաշտի e միավորի փոխարեն ընդունված է գրել 1:

287. Ապացուցել, որ.

$$Q=\left\{\frac{m}{n} \mid m\in Z,\ n\in Z,\ n\neq 0\right\}$$

ռացիոնալ թվերի բազմությունը սովորական գումարման և բազմապատկման գործողություններով դաշտ է:

288. Ապացուցել, որ իրական R բազմությունը սովորական գումարման և բազմապատկման գործողություններով դաշտ է:

289. Դիցուք $C=\{x+iy \mid x\in R,\ y\in R\}$, որտեղ i-ին վերագրվում է $i^2=-1$ հատկությունը: C-ն կոչվում է կոմպլեքս թվերի բազմություն: C-ում սահմանվում են գումարման և բազմապատկման գործողությունները հետևյալ կերպ. եթե $c_1=x_1+iy_1$, $c_2=x_2+iy_2$, ապա՝

$$c_1+c_2=x_1+x_2+i(y_1+y_2)$$

$$c_1\cdot c_2=x_1x_2-y_1y_2+i(x_1y_2+x_2y_1):$$

Ապացուցել, որ C–ն դաշտ է, գտնել C-ի 0-ն և 1-ը, x+iy-ի հակադարձը:

Դիտողություն. x + iy-ի համար x - iy-ը կոչվում է համալուծ. դա նշանակում են $\overline{x+iy}$, $\overline{x+iy}=x-iy$, $\overline{x-iy}=x+iy$: Իրական թվի համալուծը հավասար է իրեն: $(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2$, $\sqrt{x^2+y^2}$ կոչվում է x+iy կոմպլեքս թվի մոդուլ: x+iy մոդուլը նշանակում են հետևյալ կերպ՝ $|x+iy|$, $|x+iy|=\sqrt{x^2+y^2}$:

Դիցուք՝ G-ն դաշտ է, X-ը՝ աբելյան խումբ: X-ը կոչվում է գծային տարածություն G դաշտի վրա, եթե G-ից վերցրած $\forall\alpha$-ի և X-ից վերցրած $\forall x$-ի համար սահմանված է αx արտադրյալը $(\alpha\cdot x\in X)$, որը բավարարում է հետևյալ չորս պայմանները.

1) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y,\qquad \alpha\in G,\ x,y\in X$
2) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x,$
3) $\alpha\cdot(\beta x)=(\alpha\beta)\cdot x,$
4) $1\cdot x=x:$

X գծային տարածությունը G դաշտի վրա նշանակում են՝ $G\times X$: X-ի տարրերը կոչվում են վեկտորներ, G-ինը՝ սկալյարներ:

$\alpha x+\beta y+\ldots+\gamma z$ գումարը, որտեղ $\alpha,\beta,\ \ldots,\ \gamma$ սկալյարներ են, կոչվում է x, y, ... , z վեկտորների գծային կոմբինացիա:

X-ում պարունակվող A բազմությունը ($A \subset X$) կոչվում է գծորեն անկախ, եթե $\forall x, y, \dots, z$ A-ին պատկանող իրարից տարբեր վեկտորների համար $\alpha x + \beta y + \dots + \gamma z = 0$ պայմանից հետևում է, որ՝ $\alpha = \beta = \dots = \gamma = 0$:

Կարելի է ապացուցել, որ ցանկացած $G \times X$ տարածության մեջ $\exists$ մաքսիմալ գծորեն անկախ ենթաբազմություն $B(B \subset X)$ (այսինքն՝ եթե $\forall$ B'-ը B-ն պարունակող գծորեն անկախ ենթաբազմություն է, ապա $B'=B$): Այդ B ենթաբազմությունը կոչվում է X գծային տարածության Համելի բազիս (կամ հանրահաշվական բազիս): Տեղի ունեն հետևյալ թեորեմները.

Թեորեմ 1. Եթե B-ն և B'-ը նույն գծային տարածության Համելի բազիսներն են, ապա դրանք համարժեք բազմություններ են:

Թեորեմ 2. Որպեսզի B-ն $G \times X$-ի համար լինի Համելի բազիս, անհրաժեշտ է և բավարար, որ X-ից վերցրած $\forall$ x վեկտորը հնարավոր լինի ներկայացնել $x = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_n b_n$ տեսքով, որտեղ՝ $\alpha_i \in G$, $b_i \in B$, $i = 1, 2, \dots, n$, ընդ որում՝ α_i-երը և b_i-երը որոշվում են միակ ձևով:

$R \times X$-ը կոչվում է իրական գծային տարածություն կամ գծային տարածություն իրական թվերի դաշտի վրա:

$C \times X$-ը կոչվում է կոմպլեքս գծային տարածություն կամ գծային տարածություն կոմպլեքս թվերի դաշտի վրա:

Գծային տարածությունը կոչվում է վերջավոր չափանի, եթե դրա Համելի բազիսը վերջավոր բազմություն է: Վերջավոր չափանի տարածության Համելի բազիսը անվանում են պարզապես բազիս, իսկ բազիսում եղած վեկտորների քանակը՝ տարածության չափ:

290. Գտնել $G \cdot X$, $G=R$, $X=R$ գծային տարածության չափը:

291. Ապացուցել, որ $Q \cdot R$ տարածության Համելի բազիսը (որտեղ՝ Q-ն ռացիոնալ թվերի դաշտն է, իսկ R-ը՝ իրական թվերի բազմությունը) պարունակում է անվերջ քանակությամբ տարրեր:

292. Ապացուցել, որ հարթության վրա տրված ուղղին զուգահեռ վեկտորների բազմությունը գծային տարածություն է R դաշտի վրա՝ վեկտորների սովորական գումարման և վեկտորը թվով բազմապատկելու գործողություններով:

293. Ցույց տալ, որ n-րդ կարգի բազմանդամների բազմությունը գծային տարածություն չէ:

294. Ապացուցել, որ բոլոր այն բազմանդամների բազմությունը, որոնց կարգը չի գերազանցում n-ը, գծային տարածություն է:

295. Գծային տարածությո՞ւն է արդյոք հետևյալ բազմություններից յուրաքանչյուրը իրական թվերի դաշտի վրա.

1) բոլոր իրական թվերի R բազմությունը,
2) ռացիոնալ թվերի Q բազմությունը,
3) ամբողջ թվերի Z բազմությունը,
4) կոորդինատների սկզբնակետից դուրս եկող բոլոր այն վեկտորների բազմությունը, որոնց վերջնակետերը գտնվում են տրված ուղղի վրա:

X և Y գծային տարածությունները, որոնք որոշված են միևնույն G դաշտի վրա, կոչվում են իզոմորֆ, եթե $\exists$ f ֆունկցիա, որը արտապատկերում է X-ը Y-ի վրա փոխմիարժեքորեն և այնպես, որ X-ին պատկանող $\forall$ u, v վեկտորների և G-ին պատկանող $\forall$ α, β սկալյարների համար.

$$f(\alpha u+\beta v)= \alpha f(u)+ \beta f(v):$$

Տեղի ունի հետևյալ թեորեմը.

__Թեորեմ.__ Որպեսզի $G\times X$ և $G\times Y$ գծային տարածությունները լինեն իզոմորֆ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ դրանց Համելի բազիսները լինեն համարժեք բազմություններ (ապացուցել ինքնուրույն):

Իզոմորֆ գծային տարածությունները մաթեմատիկական առումով կարելի է համարել նույնը:

Դիտարկենք իրական թվերի բոլոր հնարավոր կարգավորված n-յակների բազմությունը. դա նշանակում են R^n :

296. R^n-ում գումարման գործողությունը ընդունված է սահմանել հետևյալ կերպ. դիցուք՝ $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$-ը և $y=(y_1, y_2, \dots, y_n)$-ը երկու կամայական վեկտորներ են R^n-ից. $x+y$ կոչվում է

$$x+y=(x_1+y_1, x_2+y_2, \dots, x_n+y_n) \text{ վեկտորը:}$$

Ապացուցել, որ այս գործողությամբ R^n-ը ադիտիվ խումբ է:

297. R^n-ում $\forall$ $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ վեկտորի և $\forall$ α ($\alpha\in R$) իրական թվի արտադրյալը սահմանում են այսպես.

$$\alpha x=(\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n):$$

Ապացուցել, որ սահմանված արտադրյալի գործողությամբ R^n-ը իրական գծային տարածություն է:

298. Ապացուցել, որ $\forall$ n չափանի իրական գծային տարածությունն իզոմորֆ է R^n իրական գծային տարածությանը, որն, այդ նկատի ունենալով, անվանում են n-չափանի վեկտորական տարածություն:

X իրական գծային տարածությունը կոչվում է Էվկլիդյան, իսկ կոմպլեքս գծային տարածությունը՝ ունիտար, եթե X-ին պատկանող $\forall$ x, y վեկտորների զույգի համար սահմանված է $x\cdot y\in R$ ($x\cdot y\in C$) սկալյար արտադրյալը, որը բավարարում է հետևյալ պայմաններին.

1) $x\cdot y=\overline{y\cdot x}$

2) $(x+y)\cdot z=x\cdot z+y\cdot z$,

3) $(\alpha x)\cdot y=\alpha(x\cdot y)$, որտեղ՝ $\alpha\in R$ $(\alpha\in C)$,

4) $x\cdot x\geq 0$ և $x\cdot x=0$, եթե $x=0$:

Էվկլիդյան և ունիտար տարածությունները կոչվում են սկալյար արտադրյալով տարածություններ:

Երկու սկալյար արտադրյալով տարածություններ կոչվում են իզոմորֆ, եթե դրանք իզոմորֆ գծային տարածություններ են և դրանց փոխմիարժեք արտապատկերող ֆունկցիան պահպանում է սկալյար արտադրյալը, այսինքն՝ $x\cdot y=f(x)\cdot f(y)$:

Սկալյար արտադրյալով տարածություններում տեղի ունի Շվարցի անհավասարությունը.

$$|x\cdot y|^2\leq(x\cdot x)(y\cdot y),$$

որ էվկլիդյան տարածությունների համար հայտնի Կոշի-ունյակովսկու՝

$$(x\cdot y)^2 \le (x\cdot x)(y\cdot y)$$

նհավասարության ընդհանարացումն է:

$\sqrt{x\cdot x}$ -ը կոչվում է x վեկտորի նորմ, որը նշանակում են այսես. $\|x\|$, $\|x\|=\sqrt{x\cdot x}$:

299. Օգտվելով Շվարցի անհավասարությունից՝ ապացուցել ետևյալ (եռանկյան) անհավասարությունները.

1) $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$

2) $\big|\|x\|-\|y\|\big|\le\|x+y\|$:

300. d(x,y)=$\|x-y\|$-ը կոչվում է x և y վեկտորների հեռաորություն: Ապացուցել, որ.

$$d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y):$$

301. R^n տարածության մեջ տրված երկու կամայական =$(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ վեկտորների սկալյար րտադրյալը ընդունված է արտահայտել $\cdot y=x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n$ բանաձևով:

Ապացուցել, որ R^n-ը սահմանված սկալյար արտադրյալով վկլիդյան տարածություն է:

Կոշի-Բունյակովսկու անհավասարությունը՝

$$x\cdot y\le\|x\|\cdot\|y\|,$$

նարավորություն է ընձեռում էվկլիդյան տարածության ∀ x, y եկտորների կազմած անկյունը որոշել.

$$\cos\varphi=\frac{x\cdot y}{\|x\|\cdot\|y\|}$$

անաձևով: Մասնավորապես՝ R^n-ում.

$$\cos\varphi=\frac{x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}\cdot\sqrt{y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2}},$$

x և y վեկտորների համագիծ լինելու պայմանն է.

$$x_1=ky_1,\ x_2=ky_2,\ \dots,\ x_n=ky_n,$$

որտեղ՝ k-ն որոշակի թիվ է: x և y վեկտորների ուղղահայաց (օրթոգոնալ) լինելու ($\varphi=\frac{\pi}{2}$) պայմանն է.

$$x_1y_1+x_2y_2+\dots+x_ny_n=0:$$

n չափանի վեկտորի գաղափարը տնտեսագիտության մեջ մաթեմատիկական հետազոտությունների ոլորտում ունի հարմար և օգտակար կիրառություններ: Օրինակ՝ եթե գործարանը արտադրում է n տեսակի արտադրանք, i-րդ տեսակից ամսական արտադրում է p_i գնով արտադրվող x_i միավոր արտադրանք, ապա արտադրական ծրագիրը կբնութագրվի $\overline{x}=(x_1,x_2,\dots x_n)$ n չափանի վեկտորով, իսկ ամսական համախառն արտադրանքը՝

$$\overline{x}(x_1,x_2,\dots x_n)\cdot\overline{P}(p_1,p_2,\dots,p_n)=x_1p_1+x_2p_2+\dots x_np_n,$$

սկալյար արտադրյալով:

302. Հաշվել $\vec{a}(x;y;z)$ վեկտորի կազմած α, β և γ անկյունները կոորդինատական առանցքների հետ և ապացուցել, որ.

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1:$$

303. a պարամետրի ո՞ր արժեքի դեպքում $\vec{x}(3;2;1)$ և $\vec{y}(-7;4;a)$ վեկտորները կլինեն օրթոգոնալ:

304. Գտնել $3\vec{a}-2\vec{b}$ գծային կոմբինացիայի կոորդինատները, եթե՝ $\vec{a}=(3;1;2)$ և $\vec{b}=(-4;0;3)$:

305. Գտնել $2\vec{a}+3\vec{b}$ վեկտորի կոորդինատները, եթե՝ $\vec{a}=(3;-1;2;0)$, $\vec{b}=(1;-3;-2;5)$:

306. Գտնել $\vec{x}$ վեկտորը հետևյալ հավասարումից՝

$\overrightarrow{a_1}+2\overrightarrow{a_2}+3\overrightarrow{a_3}+4\vec{x}=0$, եթե $\overrightarrow{a_1}=(5;-8;-1;2)$,

$\overrightarrow{a_2}=(2;-21;4;-3)$, $\overrightarrow{a_3}=(-3;2;-5;4)$:

307. Գտնել $\vec{x}$ վեկտորը հետևյալ հավասարումից՝

$$3\left(\vec{a_1}-\vec{x}\right)+2\left(\vec{a_2}+\vec{x}\right)=5\left(\vec{a_3}+\vec{x}\right),$$

եթե՝ $\vec{a_1}=(2;5;1;3)$, $\vec{a_2}=(10;1;5;10)$ և $\vec{a_3}=(4;1;-1;1)$:

308. Գտնել $2\vec{x}+3\vec{y}$ վեկտորի մոդուլը, եթե՝ $\vec{x}=(1;2;0)$ և $\vec{y}=(-1;2;1)$:

309. Ապացուցել, որ $\vec{a}=(7;-3;5)$ և $\vec{b}=(1;9;4)$ վեկտորները ուղղահայաց են:

310. $\vec{a}=(-1;3;5;-4)$, $\vec{b}=(4;2;2;3)$ և $\vec{c}=(2;-6;-10;8)$ վեկտորների մեջ նշել իրար համագիծները և ուղղահայացները:

311. a-ի ո՞ր արժեքների դեպքում $\vec{x}=(1;a+1;2;3)$ և $\vec{y}=(a;1;-2;a)$ վեկտորները կլինեն օրթոգոնալ:

312. a և b պարամետրերի ո՞ր արժեքների դեպքում $\vec{x}=(a+b;a+1;2)$ և $\vec{y}=(a;b;1)$ վեկտորները կլինեն համագիծ:

313. Գտնել $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների կազմած անկյունը, եթե.

1) $\vec{a}=(-2;0;4)$, $\vec{b}=(3;2;-6)$,

2) $\vec{a}=-\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{b}=\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$:

314. Գտնել ABC եռանկյան ներքին անկյունները, եթե հայտնի են եռանկյան գագաթների կոորդինատները.

A(2;-1;3), B(1;1;1) և C(0;0;5):

315. Ապացուցել, որ A(1;2;1), B(3;-1;7) և C(7;4;-2) գագաթներով եռանկյունը հավասարասրուն է:

316. a-ի ո՞ր արժեքների դեպքում $\vec{x}=(a;a+1;-1)$ և $\vec{y}=(2;1;a)$ վեկտորների կազմած անկյունը սուր է:

317. Ապացուցել, որ a պարամետրի ցանկացած արժեքների դեպքում $\vec{x}=(7;-2;1-a)$ և $\vec{y}=(-1;a;2a)$ վեկտորների կազմած անկյունը բութ է:

R^n վեկտորական փարածության մեջ n հատ գծորեն անկախ վեկտորների համակարգը բազիս է այդ փարածության համար:

318. Ցույց տալ, որ $\vec{a_1}(5;4)$, $\vec{a_2}(-1;2)$ և $\vec{a_3}(-10;-1)$ վեկտորները գծորեն կախյալ են:

319. Ապացուցել, որ $\vec{a_1}(1;2;5)$, $\vec{a_2}(3;1;1)$ և $\vec{a_3}(-3;1;4)$ վեկտորները գծորեն անկախ են (հետևաբար՝ կազմում են բազիս): Գտնել $\vec{x}(-8;10;7)$ վեկտորի վերլուծությունը՝ ըստ այդ բազիսի:

320. Գտնել $\vec{b}=(2;-4;15)$ վեկտորի կոորդինատները $\vec{a_1}=(2;0;0)$, $\vec{a_2}=(0;1;0)$, $\vec{a_3}=(0;0;5)$ բազիսում:

321. Ապացուցել, որ հետևյալ վեկտորները գծորեն անկախ են.

1) $\vec{p_1}=(1;0;-2)$, $\vec{p_2}=(2;-1;0)$, $\vec{p_3}=(1;1;1)$,
2) $\vec{p_1}=(2;-4;3)$, $\vec{p_2}=(1;-2;4)$, $\vec{p_3}=(0;1;-1)$,
3) $\vec{p_1}=(3;-1;2)$, $\vec{p_2}=(7;6;3)$, $\vec{p_1}=(4;1;2)$:

322. Որոշել λ-ն այնպես, որ $\vec{P_1},\vec{P_2},\vec{P_3}$ վեկտորները լինեն գծորեն կախյալ.

1) $\vec{P_1}=(3;1;-1)$, $\vec{P_2}=(2;\lambda;1)$, $\vec{P_3}=(\lambda;3;1)$,
2) $\vec{P_1}=(\lambda;-2;0)$, $\vec{P_2}=(\lambda;1;1)$, $\vec{P_3}=(\lambda;8;1)$:

323. Գտնել $\vec{P}=(2;4;15)$ վեկտորի վերլուծությունը՝ ըստ $\vec{P_1}, \vec{P_2}, \vec{P_3}$ բազիսի, եթե՝ $\vec{P_1}=(2;0;0)$, $\vec{P_2}=(0;1;0)$, $\vec{P_3}=(0;0;5)$:

324. Տրված են $\vec{P_1}, \vec{P_2}, \vec{P_3}, \vec{P}$ վեկտորները: Ապացուցել, որ $\vec{P_1}, \vec{P_2}, \vec{P_3}$ վեկտորները կազմում են բազիս՝ եռաչափ տարածության մեջ, և գտնել $\vec{P}$ վեկտորի վերլուծությունը՝ ըստ այդ բազիսի.

1) $\vec{P_1}=(2;1;-1)$, $\vec{P_2}=(2;-3;0)$,
$\vec{P_3}=(1;1;-1)$, $\vec{P}=(5;-4;-2)$:

2) $\vec{P_1}=(3;2;-2)$, $\vec{P_2}=(3;-2;-1)$,
$\vec{P_3}=(0;0;3)$, $\vec{P}=(1;0;2)$:

2. Որոշիչներ

II և III կարգի որոշիչները հաշվվում են հետևյալ կանոններով.

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{12}a_{23}a_{31}-$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}:$$

Ավելի բարձր կարգի որոշիչներ հաշվելու համար կիրառում են կարգի իջեցման մեթոդը, որը իրականացվում է հետևյալ առնչության միջոցով.

$$\Delta_n=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\ldots+a_{in}A_{in}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}:$$

A_{ik} թիվը կոչվում է a_{ik} փարրի հանրահաշվական լրացում և որոշվում է $A_{ik}=(-1)^{i+k}M_{ik}$ բանաձևով, որտեղ M_{ik}-ն (a_{ik} փարրի մինորը) n-1 կարգի որոշիչ է և սփացվում է Δ_n որոշչից դուրս հանելով i-րդ փողի և k-րդ սյան փարրերը:

325. Հաշվել հետևյալ որոշիչները.

1) $\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$, 2) $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$, 3) $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 12 \end{vmatrix}$,

4) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$, 5) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$, 6) $\begin{vmatrix} 1+x & x & x \\ x & 2+x & x \\ x & x & 3+x \end{vmatrix}$:

326. Հաշվել հետևյալ չորրորդ կարգի որոշիչը.

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}:$$

Հաշվել հետևյալ որոշիչները:

327. $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$: **328.** $\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ -2 & 7 \end{vmatrix}$: **329.** $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$:

330. $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$: **331.** $\begin{vmatrix} \sqrt{a} & -1 \\ a & \sqrt{a} \end{vmatrix}$: **332.** $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta \end{vmatrix}$:

333. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$: **334.** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$: **335.** $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix}$:

336. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 7 & 6 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$: **337.** $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 7 \\ -1 & 4 & -5 \\ 1 & 6 & 2 \end{vmatrix}$: **338.** $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & 7 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$:

339. $\begin{vmatrix} 11 & -6 & -5 \\ 3 & 1 & -2 \\ -3 & 4 & 7 \end{vmatrix}$: **340.** $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 0 \\ -7 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$: **341.** $\begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ 0 & b & 0 \\ b & 0 & -b \end{vmatrix}$:

342. $\begin{vmatrix} 1+\cos\alpha & 1-\sin\alpha & 1 \\ 1+\sin\alpha & 1+\cos\alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$: **343.** $\begin{vmatrix} \cos^2\alpha & 1 & -\sin^2\alpha \\ 1 & \cos\alpha & -1 \\ -\sin\alpha & 1 & \sin\alpha \end{vmatrix}$:

344. Լուծել հավասարումները.

1) $\begin{vmatrix} 3 & x & -x \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$, 2) $\begin{vmatrix} x^2 & 1 & 4 \\ x & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}=0$,

3) $\begin{vmatrix} x & 2 & -3 \\ 2-x & 5 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}=28$, 4) $\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x+3 & x+4 & x+5 \\ x+6 & x+7 & x+8 \end{vmatrix}=0$:

345. Լուծել անհավասարումները.

1) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}<0$, 2) $\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix}>0$:

346. Ապացուցել III կարգի որոշչի հետևյալ հատկությունները՝ օգտագործելով դրա հաշվման կանոնը.

1) եթե փոխենք որոշչի տողերի և սյուների տեղերը, պահպանելով համարակալումը (տրանսպոնացնենք որոշիչը), ապա որոշչի արժեքը չի փոխվի,
2) եթե փոխենք որոշչի ցանկացած երկու տողերի (սյուների) տեղերը, ապա կփոխվի միայն որոշչի նշանը,
3) եթե որոշչի որևէ տողի (սյան) բոլոր տարրերը բազմապատկենք k թվով, ապա որոշիչի արժեքը կբազմապատկվի k-ով,

4) եթե որոշչի որևէ տողը (սյունը) մյուս տողերի գծային կոմբինացիան է, ապա որոշիչը հավասար է զրոյի:

Հաշվել IV կարգի որոշիչները:

347. $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & -1 \end{vmatrix}$: **348.** $\begin{vmatrix} -1 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$:

349. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$: **350.** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$:

2. Մատրիցներ

a_{ij} $(i=1,2,\ldots m,\ j=1,2,\ldots n)$ թվերից կազմված ուղղանկյուն աղյուսակը՝

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

կոչվում է m x n չափանի մատրից: Մատրիցը կոչվում է քառակուսային, եթե m=n, և զրոյական, եթե դրա բոլոր տարրերը զրո են՝ $a_{ij}=0$: Քառակուսային մատրիցը կոչվում է միավոր մատրից, եթե դրա գլխավոր անկյունագծի բոլոր տարրերը հավասար են մեկի, իսկ մնացած տարրերը՝ զրոյի.

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}:$$

Մատրիցները կոչվում են հավասար, եթե հավասար են դրանց համապատասխան տարրերը: Մատրիցները գումարելիս գումարվում են համապատասխան տարրերը, իսկ թվով բազմապատկելիս դրա բոլոր տարրերը բազմապատկվում են այդ թվով:

$A=(a_{ij})$ և $B=(b_{ij})$ մատրիցների $C=(c_{ij})$ արտադրյալ մատրիցի c_{ij} տարրը որոշվում է հետևյալ կանոնով.

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ ...\ +a_{im}b_{mj}\ ,$$

այսինքն՝ A մատրիցի i-րդ տողի տարրերը բազմապատկում ենք B մատրիցի j-րդ սյան համապատասխան տարրերով և ստացված արտադրյալները գումարում:

Սահմանումներից հետևում է, որ A և B մատրիցները համեմատել կամ գումարել կարելի է միայն այն դեպքում, երբ դրանք ունենան նույն չափողականությունը, իսկ AB արտադրյալը գոյություն կունենա միայն այն դեպքում, եթե A-ի սյուների քանակը հավասար լինի B-ի տողերի քանակին: Ընդհանրապես՝ մատրիցների համար $AB\neq BA$:

Եթե $A\cdot B=B\cdot A=E$, ապա A և B մատրիցները կոչվում են հակադարձ: Եթե $d=\det A\neq 0$, ապա գոյություն ունի A^{-1} հակադարձ մատրիցը.

$$A^{-1}=\frac{1}{d}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ . & & & \\ . & . & & . \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

որտեղ A_{ij}-ն a_{ij} տարրի հանրահաշվական լրացումն է:

Եթե, պահպանելով կարգը, փոխենք A մատրիցի տողերի և սյուների տեղերը, ապա ստացված մատրիցը կկոչվի տրանսպոնացված՝ A-ի նկատմամբ և կնշանակվի A^T: Դժվար չէ ստուգել, որ.

$$\left(A^T\right)^T=A,\ \ (A+B)^T=A^T+B^T,\ \ (\lambda A)^T=\lambda A^T:$$

Եթե A քառակուսի մատրիցի համար $A^T=A$, ապա A մատրիցը կկոչվի համաչափ և այս դեպքում $a_{ij}=a_{ji}$: Իսկ եթե $A^T=-A$, ապա A մատրիցը կկոչվի շեղ համաչափ:

Կատարել գործողությունները:

351. $\begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$:

352. $\begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 7 & -1 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -5 & 8 & 1 \\ -7 & -3 & 2 \end{pmatrix}$:

353. $\begin{pmatrix} -1 & 10 & -7 \\ 4 & 1 & 3 \\ -2 & -3 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$:

354. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$:

Գտնել հետևյալ մատրիցները.

1) A+B, 2) 3A-2B:

355. Հաշվել A և B մատրիցների -4A+7B գծային կոմբինացիան, եթե.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}:$$

356. Հաշվել մատրիցների արտադրյալը.

1) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, 2) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$,

3) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, 4) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$,

5) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, 6) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & -5 \end{pmatrix}$,

7) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 7 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ -4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$, 8) $\begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$,

9) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$,

10) $\begin{pmatrix} -4 & -2 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & -7 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -19 & -24 & 2 \\ 15 & 20 & -2 \\ 21 & 28 & -2 \end{pmatrix}$,

11) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$:

357. Տրված են հետևյալ մատրիցները.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{և} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}:$$

Ցույց տալ, որ $AB \neq BA$:

358. Հաշվել մատրիցների արտադրյալը.

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}:$$

359. Գտնել հետևյալ մատրիցների հակադարձ մատրիցները.

1) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, 2) $\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$, 3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$, 4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

5) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$, 6) $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 7) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$:

360. Լուծել մատրիցային հավասարումները.

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$,

2) $X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 & -3 \\ -8 & 3 & 6 \\ 11 & 9 & 13 \end{pmatrix}$,

3) $\begin{pmatrix} 7 & 6 & -3 \\ -8 & 3 & 6 \\ 11 & 9 & 13 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -3 & -10 & -4 \\ 21 & 14 & -10 \\ 48 & 2 & 30 \end{pmatrix}$,

4) $\begin{pmatrix} 4 & 12 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$,

5) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & -4 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 \\ 13 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$:

361. Ցույց տալ, որ $S = 3A - 2B$ մատրիցը համաչափ է, եթե.

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & 3 & 6\\ 2 & -2 & 4\end{pmatrix} \quad \text{և} \quad B=\begin{pmatrix}-4 & -3 & 5\\ 3 & -1 & 4\\ 5 & -8 & 5\end{pmatrix}:$$

362. Ցույց տալ, որ $S = 2A - B$ մատրիցը շեղ համաչափ է, եթե.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ 2 & 2 & 5\\ 4 & -1 & 3\end{pmatrix} \quad \text{և} \quad B=\begin{pmatrix}2 & 4 & -5\\ 6 & 4 & 5\\ 11 & 3 & 6\end{pmatrix}:$$

363. Գտնել $A\,.\,A^T$ և $A^T.\,A$ արտադրյալները, եթե.

1) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 3\\ 4 & -1 & 5 & -1\end{pmatrix}$, 2) $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1 & 1 & -1\\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2\\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0\end{pmatrix}$:

364. Ցույց տալ, որ ցանկացած A քառակուսի մատրիցի համար $B=A+A^T$ մատրիցը համաչափ մատրից է, իսկ $C=A-A^T$ մատրիցը՝ շեղ համաչափ:

365. Ապացուցել, որ ցանկացած A քառակուսի մատրից կարելի է միակ ձևով ներկայացնել $A=B+C$ տեսքով, որտեղ՝ B-ն համաչափ մատրից է, իսկ C-ն՝ շեղ համաչափ:

$m\times n$ չափանի A մատրիցի մեջ ընտրենք կամայական k տող և k սյուն ($k\le\min(m;n)$): Ընտրված տողերի և սյուների հատման տեղերում գրված տարրերը կազմում են քառակուսի մատրից, որի որոշիչը կոչվում է A մատրիցի k-րդ կարգի մինոր: A մատրիցի՝ զրոյից տարբեր մինորների ամենամեծ r կարգը կոչվում է A մատրիցի ռանգ: Մատրիցի ռանգը սահմանվում է նաև որպես դրա գծորեն անկախ տողերի կամ սյուների քանակ և ապացուցվում է, որ այդ երկու սահմանումները համարժեք են: Գործնականում մատրիցի ռանգը որոշում են հետևյալ կերպ. եթե գտնվել է որևէ k-րդ կարգի զրոյից տարբեր մինոր, ապա հաջորդ քայլում դիտարկում են այն (k+1)-րդ կարգի մինորները, որոնք ընդգրկում են նախորդը:

366. Հաշվել հետևյալ մատրիցների ռանգը.

1) $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$, 2) $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$,

3) $C=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$:

367. Գտնել հետևյալ մատրիցների ռանգը.

1) $\begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, 2) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$, 3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,

4) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ 5) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 6) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$,

7) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$, 8) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$,

9) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$:

4. Գծային հավասարումների համակարգեր

n անհայտով n գծային հավասարումների համակարգը ունի հետևյալ տեսքը.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

ամ մատրիցային գրառումով՝ AX=B, որտեղ՝

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ . \\ . \qquad . \\ a_{n1} \ldots a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}:$$

Կրամերի կանոնը. եթե $\Delta=\det A\neq 0$, ապա համակարգը ունի միակ լուծում՝

$$X_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i=1,2, \ldots, n,$$

որտեղ Δ_i որոշիչները ստացվում են Δ որոշչից, դրա i-րդ սյունը տեղափոխելով ազատ անդամների սյունով:

$\det A\neq 0$ պայմանը նաև նշանակում է, որ գոյություն ունի A^{-1} ակադարձ մատրիցը, և համակարգի լուծումը մատրիցային գառումով կգրվի՝ $X=A^{-1}B$:

Լուծել համակարգերը Կրամերի կանոնով:

368. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 5 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$:

369. $\begin{cases} -3x_1 + 5x_2 = -12 \\ 2x_1 - 7x_2 = 8 \end{cases}$

370. $\begin{cases} 2x_2 - 3x_1 = 1 \\ 2x_1 - x_2 = 5 \end{cases}$:

371. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$:

372. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ -x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 5 \\ 2x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 5 \end{cases}$:

373. $\begin{cases} 7x_1 - x_2 + 8x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ 10x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

374. $\begin{cases} -4x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ 7x_1 + 5x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$

375. $\begin{cases} 8x_1 - 5x_2 + x_3 = -5 \\ x_1 - 3_2 - 9x_3 = 22 \\ -x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 4 \end{cases}$:

376. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -3 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$:

Գծային հավասարումների համակարգը կարելի է լուծել նաև անհայտների հաջորդական արտաքսման Գաուսի մեթոդով:

Լուծել համակարգերը Գաուսի մեթոդով:

377. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -6 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 16 \end{cases}$:

378. $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1 \\ 5x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases}$:

379. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 8 \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 11 \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$:

380. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = -4 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 11 \end{cases}$:

381. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ -2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$:

382. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \\ 6x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -\frac{1}{3} \end{cases}$:

383. $\begin{cases} 4x_1 - 8x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 5 \\ x_1 + 7x_2 + x_3 + x_4 = -7 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 4 \\ 7x_1 - 3x_2 + 5x_4 = -3 \end{cases}$:

Եթե համակարգի մեջ հավասարումների m թիվը շատ է փոփոխականների n թվից. ապա այդ m հավասարումներից ընտրում ենք այնպիսի n հավասարումների համակարգ, որը ունի միակ լուծում, և ստացված լուծումը տեղադրում ենք մնացած հավասարումների մեջ: Եթե այդ լուծումը բավարարում է մնացած հավասարումներին, ապա տրված համակարգը համատեղելի է, իսկ եթե այդ լուծումը չի բավարարում մնացած հավասարումներից գոնե մեկին, ապա համակարգը համատեղելի չէ:

Եթե անհայտների n թիվը մեծ է հավասարումների m թվից, ապա համակարգը ունի հետևյալ տեսքը.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Եթե A-ն անհայտների գործակիցներից կազմված մատրիցն է, իսկ $\overline{A}$ մատրիցը ստացվել է A-ին ավելացնելով ազատ անդամների սյունը (ընդլայնված մատրից), ապա տեղի ունի Կրոնեկեր-Կապելիի թեորեմը. որպեսզի համակարգը լինի համատեղելի, անհրաժեշտ է և բավարար, որ.

$$\text{rang}A = \text{rang}\,\overline{A}\,:$$

Եթե համակարգը համատեղելի է, և $\text{rang}A = r \leq m$, ապա, առանց ընդհանրությունը խախտելու, կարելի է ենթադրել, որ զրո չդարձող r կարգի մինորը գտնվում է A մատրիցի առաջին r տողերում և սյուներում: Դեն նետելով մնացած m-r հավասարումները (դրանք առաջին r հավասարումների հետևանքն են) և x_{r+1}, x_{r+2}, ... , x_n n-r հատ անհայտները տեղափոխելով հավասարման աջ մասը, կստանանք հետևյալ համակարգը.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{21r}x_r = b_2 - a_{2r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_r = b_r - a_{rr+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n \end{cases} :$$

$x_1, x_2, \dots, x_r$ անհայտները կոչվում են բազիսային անհայտներ, իսկ $x_{r+1}, \dots, x_n$ անհայտները՝ ազատ անհայտներ:

Ազատ անհայտների ցանկացած արժեքների համար համակարգը կունենա միակ լուծում:

Լուծել հետևյալ համակարգերը:

384. 1) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 + 3x_2 = 6 \end{cases}$, 2) $\begin{cases} -2x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 - x_2 = -6 \\ x_1 + x_2 = 5 \end{cases}$,

3) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 7 \end{cases}$, 4) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = -2 \\ x_1 + 8x_2 + 8x_3 + 5x_4 = 14 \end{cases}$:

385. $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 - 5x_2 = 8 \\ -2x_2 - x_1 = -1 \end{cases}$: **386.** $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 = 7 \\ x_1 + x_2 = 2 \\ -x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases}$:

387. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 5x_1 - 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$:

388. 1) $\begin{cases} \sqrt{5}x_1 - 5x_2 = \sqrt{5} \\ x_1 - \sqrt{5}x_2 = 5 \end{cases}$, 2) $\begin{cases} x_1 - \sqrt{2}x_2 = 1 \\ \sqrt{2}x_1 - 2x_2 = \sqrt{2} \end{cases}$,

3) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 0 \end{cases}$, 4) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = -6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -2 \\ \quad x_2 + 5x_3 = 2 \end{cases}$,

5) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + 7x_3 = 2 \end{cases}$, 6) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$,

7) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 6x_4 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 + 7x_2 - 10x_3 + 20x_4 = 0 \end{cases}$,

8) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \\ -2x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 7x_4 = -1 \end{cases}$:

ԳԼՈՒԽ III

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԱՆԱԼԻԶԻ ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

§1. ՀԱՋՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՍԱՀՄԱՆԸ

Հաջորդականություն կոչվում է բնական թվերի N բազմության վրա որոշված $f: N \to R$ ֆունկցիան:

$f(n)$ թիվը կոչվում է հաջորդականության n-րդ անդամ և նշանակվում է x_n:

389. Գրնել հաջորդականության առաջին 5 անդամները, եթե.

1) $x_n=4n+1$, 2) $y_n=\dfrac{n+3}{2n-1}$, 3) $z_n=\sin\dfrac{\pi n}{3}$:

390. Հաշվել հաջորդականությանփփփ առաջին մի քանի անդամները, եթե.

1) $x_n=\dfrac{7n-3}{3n+5}$, 2) $x_n=1+(-1)^n$, 3) $x_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$,

4) $x_n=\cos \pi n$, 5) $x_n=(-1)^n \arcsin\dfrac{1}{2}+\pi n$:

391. $x_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ հաջորդականության համար գտնել x_1, x_5, x_{n+1}, x_{2n} անդամները:

392. Գտնել տրված հաջորդականության ընդհանուր անդամի բանաձևը.

1) $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \ldots$, 2) $1, \dfrac{4}{3}, \dfrac{6}{4}, \dfrac{8}{5}, \ldots$, 3) $2, \dfrac{4}{3}, \dfrac{6}{5}, \dfrac{8}{7}, \ldots$,

4) $0, 2, 0, 2, \ldots$, 5) $1, 0, -3, 0, 5, 0, -7, \ldots$, 6) $1, 3, 1, 3, \ldots$:

Մաթեմատիկական ինդուկցիայի եղանակով ապացուցել հետևյալ առնչությունները:

393. $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$:

394. $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$:

395. $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$:

396. $(1+x)^n\geq 1+nx$, որտեղ՝ $x>-1$, և n-ը բնական թիվ է (Բեռնուլիի անհավասարությունը):

397. $\dfrac{1}{2}.\dfrac{3}{4}.\dfrac{5}{6}.\ \ldots\ .\dfrac{2n-1}{2n}<\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$:

398. $\dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_n+\ldots+x_{2^n}}{2^n}\geq \sqrt[2^n]{x_1.x_2.\ \ldots\ .x_{2^n}}$:

399. Օգտագործելով 398.-ը՝ ապացուցել, որ եթե $x_k\geq 0$, ապա

$$\frac{x_1+x+\ldots x_n}{n}\geq \sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}$$:

400. Հաշվել $1^4+2^4+3^4+\ldots+n^4$:

401. Հաշվել $1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2$:

402. Ապացուցել, որ.

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{n+1}:$$

403. Ապացուցել, որ.

$$\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right):$$

404. Ապացուցել, որ.

$$n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^{n}:$$

405. Ապացուցել, որ.

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+....+\frac{1}{\sqrt{n}}>2\sqrt{n+1}-2:$$

Սահմանում. a թիվը կոչվում է x_n հաջորդականության սահման, եթե $\forall\varepsilon > 0$ թվի համար $\exists\, n_0 = n_0(\varepsilon)$ բնական այնպիսի թիվ, որ N բազմությունից վերցրած $\forall n$-ի համար, որը մեծ է n_0-ից ($n > n_0$), տեղի ունի՝ $|x_n-a|< \varepsilon$: Նշելու համար, որ x_n-ի սահմանը a-ն է, գրում են՝ $\lim x_n=a$:

Վերջավոր սահման ունեցող հաջորդականությունը կոչվում է զուգամետ: Հաջորդականությունը կոչվում է անվերջ փոքր, եթե $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$: x_n-ը կոչվում է անվերջ մեծ, եթե $\forall E > 0$ թվի համար $\exists\, n_0=n_0(E)$ բնական այնպիսի թիվ, որ յուրաքանչյուր n-ի համար, որը մեծ է n_0-ից, տեղի ունի՝ $|x_n|>E$. գրում են՝ $\lim x_n = \infty$:

Կոշիի զուգամիտության հայտանիշը

Որպեսզի x_n հաջորդականությունը լինի զուգամետ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ $\forall\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունենա $n_0= n_0(\varepsilon)$ բնական այնպիսի թիվ, որ N բազմությունից վերցրած, n_0-ից մեծ $\forall$ n, m թվերի համար տեղի ունենա՝ $|x_n - x_m|<\varepsilon$:

406. Օգտվելով սահմանի սահմանումից, ապացուցել, որ.

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{n+1}=1,$ 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n+3}=\frac{3}{2},$

3) $\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+1}{n^2+2}=4$, 4) $\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=0$,

5) $\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+1}{3^n}=1$:

407. Ապացուցել, որ $x_n=\frac{n-1}{4n-3}$ հաջորդականության սահմանը հավասար չէ 1-ի:

408. Ապացուցել, որ $x_n=\frac{2^n+(-2)^n}{2^n}$ հաջորդականությունը զուգամետ չէ:

409. Ապացուցել, որ $x_n=\frac{1}{3n+1}$ փոփոխականը անվերջ փոքր է, իսկ $y_n=3n+1$ փոփոխականը՝ անվերջ մեծ:

410. Ապացուցել, որ եթե $|q|<1$, ապա $\lim q^n=0$:

411. Ձևակերպել հետևյալ հավասարությունների ճշգրիտ իմաստը:

ա) $\lim x_n=+\infty$, բ) $\lim x_n=-\infty$:

412. Ապացուցել, որ $x_n=n^{(-1)^n}$ հաջորդականությունը անսահմանափակ է և անվերջ մեծ չէ:

413. Ապացուցել, որ 0-ից տարբեր արժեքներ ընդունող անվերջ փոքր փոփոխականի հակադարձ մեծությունը անվերջ մեծ է:

414. Հաշվել $\lim_{n\to\infty}x_n$, եթե.

1) $x_n=\frac{3n-1}{2n+5}$, 2) $x_n=\frac{3n^2-n+2\sqrt{n}}{5+4n^2}$,

3) $x_n = \dfrac{6n+1}{n^2+3}$, 4) $x_n = \dfrac{4n^4 - n^2 + 2}{n^3 + 100}$,

5) $x_n = \sqrt{2n+3} - \sqrt{2n-1}$,

6) $x_n = \dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}$:

415. Հաշվել հետևյալ սահմանները.

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n}{n+1}$, 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n+1}{7-9n}$,

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^3}{3n^3}$, 4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2 - 7n + 1}{3 - 5n + 6n^2}$,

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2 + 5n + 4}{2 + 3n^2}$, 6) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^3 + 2n^2 - 3n + 7}{4n^3 - 2n + 11}$,

7) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}{4n^3 + n + 1}$, 8) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(n - \sqrt{n^2+1}\right)$,

9) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+7} - \sqrt{n}\right)$, 10) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3+n} - \sqrt{n}}$,

11) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{(n+1)^2} - \sqrt[3]{(n-1)^2}\right)$, 12) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}\sin n!}{n+1}$,

13) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n - 2^n}{3^n - 2^n}$, 14) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n + (-2)^n}{3^{n+1} + (-2)^{n+1}}$,

15) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+2^2+\ldots+2^n}{1+3+3^2+\ldots+3^n}$, 16) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{5^2} + \ldots + \dfrac{1}{5^n}\right)$:

416. Հաշվել հետևյալ սահմանները.

ա) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1^3}{n^4}+\frac{2^3}{n^4}+\ldots+\frac{n^3}{n^4}\right)$,

բ) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right)$,

գ) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}\right)$,

դ) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\ldots+\frac{2n-1}{2^n}\right)$,

ե) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\ldots\cdot\sqrt[2^n]{2}\right)$,

զ) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}\right)$:

Նշենք սահմանի գոյության երկու հայտանիշ.

1. Մոնոտոն և սահմանափակ հաջորդականությունը զուգամետ է:

2. Եթե $x_n \le z_n \le y_n$ և $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$, ապա $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$:

417. Պարզել՝ մոնոտո՞ն են արդյոք հետևյալ հաջորդականությունները.

1) $x_n = \frac{2n-1}{3n+1}$, 2) $x_n = \frac{3-n}{n+4}$,

3) $x_n = \frac{5n-3}{9n+5}$, 4) $x_n = \sin 2n$,

5) $x_n = \frac{10}{1}\cdot\frac{11}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{n+9}{2n-1}$:

418. Ապացուցել, որ $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ -ը մոնոտոն աճող, իսկ $y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ -ը մոնոտոն նվազող հաջորդականություններ են:

419. Ապացուցել, որ.

$$0 < e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \frac{e}{n}:$$

420. Ապացուցել, որ.

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}:$$

421. Պարզել՝ սահմանափա՞կ են արդյոք հետևյալ հաջորդականությունները.

1) $x_n = \frac{2n+7}{7n+2}$, 2) $x_n = \frac{3n^2}{n^2+5}$,

3) $x_n = (-1)^n \frac{2n \sin n}{n+1}$, 4) $x_n = n \cos \pi n$:

422. Ապացուցել, որ.

$$x_n = \frac{1}{5+1} + \frac{1}{5^2+1} + \frac{1}{5^3+1} + \ldots \frac{1}{5^n+1}$$

հաջորդականությունը զուգամետ է:

423. Ապացուցել, որ $x_n = \frac{a^n}{n!}$ $(a>0)$ հաջորդականությունը զուգամետ է և գտնել $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ -ը:

424. Ապացուցել հետևյալ հաջորդականությունների զուգամիտությունը.

ա) $x_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$,

բ) $x_n=\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$,

գ) $x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n$,

դ) $x_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n}$,

ե) $x_n=\frac{10}{1}\cdot\frac{11}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{n+9}{2n-1}$,

զ) $x_n=\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\ldots+\sqrt{n}}}}$ $\}$ n հատ:

425. Հաշվել.

ա) $\lim\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}$ $\}$ n ,

բ) $\lim\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)$:

426. $x_1=\sqrt{c}$, $x_n=\sqrt{c+x_{n-1}}$,եթե n=2, 3,4,... :

Հաշվել $\lim x_n$:

427. Դիցուք՝ x_n հաջորդականության համար տեղի ունի $0\le x_{m+n}\le x_m+x_n$ ցանկացած n և m բնական թվերի համար;: Ապացուցել, որ $\lim\frac{x_n}{n}$ սահմանը գոյություն ունի:

428. $x_1=a$, $x_2=b$, $x_n=\frac{x_{n-1}+x_{n-2}}{2}$, n=3, 4,...

Գտնել $\lim x_n$-ը:

429. x_n հաջորդականությունը որոշվում է.

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right) \quad n=1,2,\ldots \text{ և } x_1>0:$$

Հաշվել $\lim x_n$-ը:

430. ա) x_n հաջորդականությունը կոչվում է սահմանափակ վարիացիայի (փոփոխության), եթե $\exists$ այնպիսի c թիվ, որ $|x_2-x_1|+|x_3-x_2|+\ldots+|x_{n+1}-x_n|\le c$ $n=1,2,\ldots$ համար: Ապացուցել, որ սահմանափակ վարիացիայի հաջորդականությունը զուգամետ է:

բ) Ապացուցել հետևյալ հաջորդականության զուգամիտությունը.

$$x_{n+1}=2+\frac{1}{x_n},\quad x_1=2:$$

a թիվը կոչվում է հաջորդականության սահմանային կետ (մասնակի սահման), եթե կամայական դրական ε-ի համար գոյություն ունեն այդ հաջորդականության անվերջ թվով անդամներ, որոնց համար $|x_n-a|<\varepsilon$, կամ որ նույնն է, $\exists x_{n_k}$ ենթահաջորդականություն այնպես, որ $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=a$:

Բոլցանո-Վայերշտրասի սկզբունքը. ցանկացած սահմանափակ հաջորդականություն ունի գոնե մեկ վերջավոր մասնակի սահման:

Մասնակի սահմաններից ամենամեծը (ամենափոքրը) կոչվում է հաջորդականության վերին (ստորին) սահման և նշանակվում է $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n$ $\left(\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n\right)$: $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=\left(\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n\right)$ պայմանը անհրաժեշտ է և բավարար հաջորդականության զուգամետ լինելու համար:

431. Ապացուցել, որ եթե $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, ապա x_n-ի ցանկացած ենթահաջորդականություն նույնպես զուգամետ է a-ին:

432. Գտնել $x_n = 1+\frac{n}{n+1}\cos\frac{n\pi}{2}$ հաջորդականության վե-
ին և ստորին սահմանները:

433. x_n հաջորդականության համար գտնել $\inf x_n$, $\sup x_n$, $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ և $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ մեծությունները.

1) $x_n = 2+\frac{1}{n}$, 2) $x_n = \frac{n+1}{n}\cos^2\frac{\pi n}{4}$,

3) $x_n = (-1)^n(3n-1)$, 4) $x_n = \frac{n+2}{n-2}\sin\frac{\pi n}{3}$, $(n \ge 2)$,

5) $x_n = \frac{(-1)^n}{n}+\frac{1+(-1)^n}{2}$, 6) $x_n = n^{(-1)^n}$:

§2. ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՍԱՀՄԱՆԸ ԵՎ ԱՆԸՆԴՀԱՏՈՒ-ԹՅՈՒՆԸ

Դիցուք՝ $y=f(x)$ ֆունկցիան որոշված է X բազմության վրա, և ն X բազմության սահմանային կետ է:

A թիվը կոչվում է $y=f(x)$ ֆունկցիայի սահման, երբ $x\to a$, եթե սնկացած $\varepsilon > 0$ թվի համար կարելի է գտնել այնպիսի $\delta(\varepsilon)>0$ իվ, որ X տիրույթին պատկանող և $0<|x-a|<\delta$ պայմանին բավարարող ցանկացած x-ի համար տեղի ունի $|f(x)-A|<\varepsilon$ անհավասարությունը:

Դա գրվում է՝ $\lim_{x\to a} f(x) = A$:

Բերենք ֆունկցիայի սահմանի մեկ ուրիշ սահմանում, որը ներկայացված սահմանմանը համարժեք է:

A թիվը կոչվում է $y=f(x)$ ֆունկցիայի սահման, երբ $x\to a$, եթե ին ձգտող ցանկացած x_n $(x_n\neq a)$ հաջորդականության համար ամապատասխան $y_n=f(x_n)$ հաջորդականությունը ձգտում է A վին:

434. «ε - δ» լեզվով ֆունկցիայի սահմանի սահմանման միջոցով ապացուցել, որ.

$$\lim_{x\to 2}(4x+3)=11 \ :$$

435. Հաջորդականությունների լեզվով ֆունկցիայի սահմանի սահմանման միջոցով ապացուցել, որ $\lim\limits_{x\to 0} 2^{\frac{1}{x}}$ սահմանը գոյություն չունի:

436. «ε - δ» լեզվով ապացուցել, որ.

1) $\lim\limits_{x\to 1}(3x-8)=-5$, 2) $\lim\limits_{x\to 2} x^2=4$,

3) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x}=1$, 4) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}} \sin x=\frac{1}{2}$:

437. Հաջորդականությունների լեզվով ապացուցել, որ $\lim\limits_{x\to 1}\sin\frac{1}{x-1}$ սահմանը գոյություն չունի:

438. «ε - δ» լեզվով ձևակերպել հետևյալ պնդումները.

1) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$, 2) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, 3) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$:

439. Հաշվել հետևյալ սահմանները.

1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^5+8x+7}{3x^2-x+5}$, 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+3x)^2-(1+2x)^3}{x^2}$,

3) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x^5-5x-2}{10-3x-x^2}$, 4) $\lim\limits_{x\to 10}\frac{\sqrt{x-1}-3}{x-10}$,

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2+1}-3x\right)$, 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2+2x+1}{1-3x^2}$:

Հաշվել հետևյալ սահմանները.

440. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{5x+1}{x+5}$, **441.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$,

442. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$,

443. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x-5}$, **444.** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}$,

445. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-x-6}$, **446.** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$,

447. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}$, **448.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2-5x-1}{3-x-2x^2}$,

449. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x}{3x^2-2}$, **450.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-x+3}{x^3-2x+5}$,

451. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-5x+1}{x+7}$, **452.** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{9-x^2}{\sqrt{3x}-3}$,

453. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$, **454.** $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$,

455. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{x}$, **456.** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{1+x}}{x^2-9}$,

457. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$, **458.** $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$,

459. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x+7}-\sqrt{x}\right)$, **460.** $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x(x+3)}-x\right)$,

461. $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)$, **462.** $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2-5x+6}-x\right)$,

463. ա) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{2x^2+3}}{4x+2}$, բ) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{2x^2+3}}{4x+2}$,

464. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$, **465.** $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$,

466. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$, **467.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1}$ $(m,n\in N)$,

468. $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$, **469.** $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)$:

Հիմնական սահմաններն են.

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$,

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$,

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$,

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$:

Հաշվել հետևյալ սահմանները:

470. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{x}$: **471.** $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sin\pi x}{x-5}$:

472. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\sqrt{2}x}{\sin\sqrt{3}x}$: **473.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 11x}$:

474. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 3x}{\sin 4x}$: **475.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$:

476. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 5x-1}{x^2}$: **477.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x}{x}$:

478. $\lim\limits_{x\to 0}x\,\mathrm{ctg}3x$: **479.** $\lim\limits_{x\to\pi}\sin 5x\,\mathrm{ctg}8x$:

480. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$:

481. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sin x-\sin 3}{x-3}$:

482. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\cos x-\cos 5}{x-5}$:

483. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\operatorname{tg}\pi x}{x+2}$:

484. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{1-\operatorname{tg}x}$:

485. $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}$:

486. $\lim\limits_{x\to \infty} x\sin\dfrac{1}{x}$:

487. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{1-\sin\dfrac{x}{2}}{\pi-x}$:

488. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{1-2\cos x}{\pi-3x}$:

489. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$:

490. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$:

491. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}x}{x}$:

492. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt{x}}{\cos\dfrac{\pi}{2}x}$:

493. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3x+1}{x+2}\right)^{x+1}$:

494. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+x}{3-x}\right)^{x}$:

495. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{5x-7}{6x+1}\right)^{x}$:

496. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{3x+1}{x+4}\right)^{x}$:

497. $\lim\limits_{x\to 0-0}\left(\dfrac{x+8}{3x+7}\right)^{\frac{1}{x}}$:

498. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{x}$:

499. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1+2x}$:

500. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x+4}{x+3}\right)^{x+3}$:

501. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+1}\right)^{5x}$

502. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$

503. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{x^{-1}}$:

504. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{x^{-2}}$:

505. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\mathrm{ctg}^2 x}$:

506. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 3x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$:

507. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}(\mathrm{tg}x)^{\mathrm{tg}2x}$:

508. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\lg(1+10x)}{x}$:

509. $\lim\limits_{x\to +\infty} x[\ln(x+1)-\ln x]$:

510. $\lim\limits_{x\to +\infty}[\ln(2x+1)-\ln(x+2)]$:

511. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+3)-\ln 3}{x}$:

512. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln x-\ln a}{x-a}$:

513. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$:

514. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}$:

515. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{2x}-1}{x}$:

516. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-1}{x}$:

517. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-1}{\mathrm{tg}x}$:

518. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{\sin x}$:

519. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$:

520. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{3^x-1}$:

521. Ցույց տալ, որ f(x)=$\dfrac{\sin x}{x}$ ֆունկցիան անվերջ փոքր է, երբ $x\to\infty$:

522. Ցույց տալ, որ f(x)=1-x^2 ֆունկցիան անվերջ փոքր է, երբ $x\to 1$:

523. Ցույց տալ, որ f(x)=$\dfrac{1}{x-2}$ ֆունկցիան անվերջ մեծ է, երբ $x\to 2$:

524. Ցույց տալ, որ x-ը զրոյի ձգտելիս հետևյալ անվերջ փոքր ֆունկցիաները համարժեք են.

ա) $\sin x$ և x, բ) $\ln(1+x)$ և x,

գ) $(1+x)^2-1$ և $2x$, դ) a^x-1 և $x\ln a$,

ե) 1-$\cos x$ և $\frac{1}{2}x^2$, զ) $\arcsin x$ և x:

525. Գտնել x–ի՝ զրոյի ձգտելուց ստացվող հետևյալ անվերջ փոքր ֆունկցիաների կարգը x-ի նկատմամբ.

ա) $2x-3x^2+x^5$, բ) $\frac{2x}{1+x}$,

գ) $\sqrt{x+\sqrt{x}}$, դ) $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x^3}$,

ե) $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$, զ) $1-\cos x$,

է) $\operatorname{tg} x - \sin x$, ը) $\sin 2x - 2\sin x$:

526. Ապացուցել, որ երբ $x \to 0$, տեղի ունեն հետևյալ մոտավոր հավասարությունները (x^2 և ավելի բարձր կարգի անվերջ փոքրերը անտեսվում են).

ա) $\frac{1}{1+x} \approx 1-x$, բ) $\sqrt{a^2+x} \approx a+\frac{x}{2a}$, $(a>0)$

գ) $(1+x)^n \approx 1+nx$, $(n\in R)$ դ) $\ln(1+x) \approx x$:

527. Ձևակերպել հետևյալ հավասարությունների ճշգրիտ իմաստը՝ օգտագործելով (ε,δ), (E,δ), (E_1,E_2), (ε,E) զույգերից անհրաժեշտը.

ա) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=A$, բ) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=A$,

գ) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$, դ) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\infty$,

ե) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=+\infty$, զ) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=+\infty$,

է) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=-\infty$, ը) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=-\infty$,

թ) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=A$, ժ) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=A$, ի) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$, լ) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$,

խ) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, ծ) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$,

կ) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, հ) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$:

528. Գտնել հետևյալ ֆունկցիաների միակողմանի սահմանները.

1) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{|x+1|}$, երբ $x\to 1$,

2) $f(x)=3^{\frac{1}{2-x}}$, երբ $x\to 2$,

3) $f(x)=\begin{cases}-2x+3, & \text{երբ } x\le 1\\ 3x-5, & \text{երբ } x>1\end{cases}$, երբ $x\to 1$,

4) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}$, երբ $x\to 0$,

5) $f(x)=\dfrac{x-1}{|x-1|}$, երբ $x\to 1$,

6) $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$, երբ $x\to 0$:

529. Հաշվել հետևյալ միակողմանի սահմանները.

1) ա) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, բ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$,

2) ա) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln\left(1+e^x\right)}{x}$, բ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+e^x\right)}{x}$,

3) ա) $\lim\limits_{x\to1-0}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{1-x}$, բ) $\lim\limits_{x\to1+0}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{1-x}$:

530. Կառուցել հետևյալ ֆունկցիաների գրաֆիկները.

1) $y=\lim\limits_{n\to\infty}(\cos x)^{2n}$, 2) $y=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x}{1+x^n}$,

3) $y=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x^n}{1+x^n}$, 4) $y=\lim\limits_{n\to+\infty}\operatorname{arctg} nx$:

$y=f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է անընդհատ $x = x_0$ կետում, եթե.

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0),$$

այսինքն՝ ֆունկցիայի սահմանային արժեքը հավասար է դրա թվային արժեքին: $f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է անընդհատ X բազմության վրա, եթե այդ ֆունկցիան անընդհատ է X բազմության ամեն մի կետում: Նշենք, որ բոլոր պարզական ֆունկցիաները անընդհատ են իրենց որոշման տիրույթում: Եթե ինչ-որ պատճառով անընդհատության պայմանը տեղի չունի, ապա $f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է խզվող x_0 կետում: Եթե խզման x_0 կետում $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$, ապա x_0 կետը կոչվում է վերացնելի խզման կետ, իսկ եթե $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$, ապա x_0-ն կոչվում է առաջին սեռի խզման կետ: Մնացած այլ պատճառներով առաջացած խզումները կոչվում են երկրորդ սեռի խզումներ:

531. Ապացուցել, որ հետևյալ ֆունկցիաները անընդհատ են իրենց որոշման տիրույթում.

1) $f(x) = 3x - 2$, 2) $f(x) = 3 - 5x - 2x^2$,

3) $f(x) = |x|+1$, 4) $f(x) = \sqrt{x}$,

5) $f(x) = \cos x$, 6) $f(x) = 3^x$:

532. Հետևյալ ֆունկցիաները որոշված չեն $x=0$ կետում: Ընտրել $f(0)$-ն այնպես, որ $y=f(x)$-ը դառնա անընդհատ $x=0$ կետում:

1) $f(x)=\dfrac{(1+x)^2-1}{x}$, 2) $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x^2}$,

3) $f(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$, 4) $f(x)=x\,\mathrm{ctg}x$,

5) $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$, 6) $f(x)=\sin 4x\,\mathrm{ctg}3x$,

7) $f(x)=\sin\frac{1}{x}$, 8) $f(x)=\frac{\sin x}{|x|}$,

9) $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$, 10) $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$:

533. Հետազոտել հետևյալ ֆունկցիաները անընդհատության առումով և պարզել խզման կետերի բնույթը.

1) $f(x)=\begin{cases} x, & \text{երբ } |x|\le 1 \\ 1, & \text{երբ } |x|>1 \end{cases}$, 2) $f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{երբ } 0\le x\le 1 \\ 2-x, & \text{երբ } 1<x\le 2 \end{cases}$,

3) $f(x)=\begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{երբ } x\ne 0 \\ 1, & \text{երբ } x=0 \end{cases}$,

4) $f(x)=\begin{cases} \cos\frac{\pi x}{2}, & \text{երբ } |x|\le 1 \\ |x-1|, & \text{երբ } |x|>1 \end{cases}$

534. Գտնել հետևյալ ֆունկցիաների խզման կետերը և պարզել խզման բնույթը.

1) $f(x)=\frac{x^3+1}{x+1}$, 2) $f(x)=\frac{x^2}{x+2}$,

3) $f(x)=\frac{x}{|x|}$, 4) $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$,

5) $f(x)=\sin\frac{1}{x}$, 6) $f(x)=\frac{1}{\ln x}$,

7) $f(x)=\frac{x}{\sin x}$, 8) $f(x)=\sqrt[3]{\frac{1-\cos\pi x}{4-x^2}}$,

9) $f(x)=\frac{\cos\frac{\pi}{x}}{\cos\frac{-\pi}{x}}$, 10) $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$,

11) $f(x)=e^{x-\frac{1}{x}}$, 12) $f(x)=\frac{1}{x^2\sin^2 x}$,

13) $f(x)=\frac{1}{\sin x^2}$, 14) $f(x)=\frac{x^2-1}{\ln x^2}$,

15) $f(x)=\begin{cases}1, & \text{եթե } x\text{-ը ռացիոնալ է}\\ 0, & \text{եթե } x\text{-ը իռացիոնալ է}\end{cases}$ ։

535. Կառուցել ֆունկցիա, որը անընդհատ լինի միայն մեկ կետում:

536. Ապացուցել, որ Ռիմանի ֆունկցիան՝

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{n}, & \text{եթե } x=\frac{m}{n},\ m,n\in N \text{ և փոխադարձաբար պարզ են}\\ 0, & \text{եթե } x\text{-ը իռացիոնալ է}\end{cases}$$

անընդհատ է իռացիոնալ կետերում և խզվող ռացիոնալ կետերում:

537. Ապացուցել, որ գոյություն չունի իռացիոնալ կետերում խզվող և ռացիոնալ կետերում անընդհատ ֆունկցիա:

538. Ապացուցել, որ եթե $f(x)$ ($D(f)=R$) ֆունկցիան անընդհատ է R-ում, և $f(x+y)=f(x)+f(y)$, ապա $f(x)=cx$:

539. Ապացուցել, որ գոյություն ունի $f(x)$ ($D(f)=R$) ֆունկցիա այնպես, որ՝ $f(x+y)=f(x)+f(y)$, բայց և՝ $f(x)\neq cx$:

540. Ապացուցել, որ եթե $f(x)$ ($D(f)=R$) ֆունկցիան անընդհատ է R-ում և տարբեր է 0-ից, նաև $f(x+y)=f(x).f(y)$, ապա $f(x)=a^x$:

ԳԼՈՒԽ IV

ՄԵԿ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՇԻՎ

§1. ԱԾԱՆՑՅԱԼ ԵՎ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ

1. Ածանցյալի սահմանումը

Դիցուք՝ $y=f(x)$ ֆունկցիան որոշված է X միջակայքում: Վերցնենք $\forall x \in X$ և x արգումենտին տանք $\forall \Delta x$ աճ, այնպիսին, որ՝ $x+\Delta x \in X$:

Նշանակենք $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$: Δy-ը կոչվում է $y=f(x)$ ֆունկցիայի աճ x կետում:

Եթե գոյություն ունի ֆունկցիայի Δy աճի և արգումենտի Δx աճի հարաբերության վերջավոր սահմանը, երբ արգումենտի աճը ձգտում է զրոյի, ապա այդ

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

սահմանը կոչվում է $f(x)$ ֆունկցիայի ածանցյալ տրված x կետում: Ածանցյալը նշանակում են տարբեր սիմվոլներով՝

$$f'(x), \frac{df(x)}{dx}, y', \frac{dy}{dx}:$$

541. Օգտվելով ածանցյալի սահմանումից՝ հաշվել $f'(2)$-ը, եթե

1) $f(x) = 3x^2 - 5x$, 2) $f(x) = \sqrt{x}$, 3) $f(x) = \cos x$:

542. Ցույց տալ, որ հետևյալ ֆունկցիաները չունեն վերջավոր ածանցյալ $x=0$ կետում.

1) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, 2) $f(x)=4|x|+1$:

543. Օգտվելով ածանցյալի սահմանումից, հաշվել $f'(x)$-ը, եթե.

1) $f(x) = x^3$, 2) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, 3) $f(x) = ctg\, x$,

4) $f(x) = \log_2 x$, 5) $f(x) = 3^x$, 6) $f(x) = \sin x + \cos x$:

544. Ապացուցել, որ x=1 կետում հետևյալ ֆունկցիաները չունեն վերջավոր ածանցյալ.

1) $f(x) = |x-1|$, 2) $f(x) = |\ln x|$,

3) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{երբ } x \le 1 \\ -x^2 + 2x, & \text{երբ } x > 1 \end{cases}$:

2. Ֆունկցիաների ածանցումը

Եթե C-ն հաստատուն է, իսկ U=U(x) և V=V(x) ֆունկցիաները ունեն ածանցյալ (դիֆերենցելի են), ապա.

I. $C'=0$, **II.** $(U\pm V)'=U'\pm V'$ **III.** $(UV)'=U'V \pm V'U$

IV. $(CV)' = C\,U'$, **V.** $\left(\frac{U}{V}\right) = \frac{U'V - V'U}{V^2}$

VI. Եթե $y=f(u)$ և $u=\varphi(x)$ ֆունկցիաները ունեն ածանցյալներ, ապա.

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x :$$

Հիմնական պարրական ֆունկցիաների ածանցյալների բանաձևերը.

a. $(x^n)' = nx^{n-1}$ (n-ը հաստատուն է),

b. $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$,

c. $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$,

d. $(ctgx)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$,

e. $\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

f. $\left(\arccos x\right)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$,

g. $\left(\mathrm{arc\,tg}\, x\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$,

h. $\left(\mathrm{arc\,ctg}\, x\right)' = \dfrac{-1}{1+x^2}$,

i. $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$, $\left(e^x\right)' = e^x$,

j. $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \ln a}$, $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$:

545. Օգտվելով ածանցման կանոններից և բանաձևերից՝ հաշվել հետևյալ ֆունկցիաների ածանցյալները.

1) $f(x) = 2x^3 - 5x + 3$, 2) $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{x\sqrt{x}} + x^8$,

3) $f(x) = e^x \sin x$, 4) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$,

5) $f(x) = \sin^3 x$, 6) $f(x) = \ln(\cos x)$,

7) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$, 8) $f(x) = \sin x^2 + 7^{\arcsin 2x}$:

Հաշվել հետևյալ ֆունկցիաների ածանցյալները:

546. $y = 7x - 4$:

547. $y = 3x^2 - x - 1$:

548. $y = 7 - 5x^2 - x^5$:

549. $y = (3 - x)(x + 4)$:

550. $y = x(x + 1)(x + 2)$:

551. $y = ax^2 + bx + c$:

552. $y = 3 - 2x + \dfrac{1}{4}x^4$:

553. $y = \dfrac{x-1}{x+1}$:

554. $y = \dfrac{x(3-x)}{x+4}$:

555. $y = \dfrac{2x}{1-x^2}$:

556. $y=\frac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$:

557. $y=\frac{x^2+1}{x^3-x}$:

558. $y=\frac{a+bx}{c+dx}$:

559. $y=\frac{(1-x)^p}{(1+x)^q}$:

560. $y=x^3\sqrt{x^7}$:

561. $y=\sqrt[3]{x^2}-\frac{2}{\sqrt{x}}$:

562. $y=x\sqrt{1+x^2}$:

563. $y=\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$:

564. $y=\sqrt{x+\sqrt{x}}$:

565. $y=\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$:

566. $y=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$:

567. $y=\sin 5x$:

568. $y=3\cos 2x$:

569. $y=3\sin(5x-2)$:

570. $y=\cos(3-2x)$:

571. $y=\sin 2x-2\cos x$:

572. $y=\cos^7 x$:

573. $y=\sin 5x\cdot\cos 3x$:

574. $y=\cos 7x\cdot\cos 2x$:

575. $y=\cos 7x\cdot\sin^2\frac{x}{3}$:

576. $y=\sin^3 x^2$:

577. $y=\frac{1}{\cos^n x}$:

578. $y=\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$:

579. $y=x^3\operatorname{ctg}3x$:

580. $y=\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt[3]{x}}$:

581. $y=\sqrt{x}\sin 2x$:

582. $y=\frac{\cos x}{1+\sin x}$:

583. $y=\frac{\sin^2 x}{\sin x^3}$:

584. $y=\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$:

585. $y=\sqrt{1-\sin 4x}$:

586. $y=\cos^2\left(\sqrt{x}+1\right)$:

587. $y=\operatorname{tg}^2\left(3\sqrt{x}-1\right)$:

588. $y=3^{\cos x}$:

589. $y=5^{\sin 4x}$:

590. $y=x^2e^{-2x}$:

591. $y=2^{\mathrm{tg}\frac{1}{x}}$:

592. $y=\ln x-\ln a$:

593. $y=x(\ln x-1)$:

594. $y=\dfrac{x^2}{\ln x}$:

595. $y=x^3\ln x-\dfrac{x^3}{3}$:

596. $y=\dfrac{1}{x}+2\ln x-\dfrac{\ln x}{x}$:

597. $y=(\ln x)(\lg x)-(\ln a)(\log_a x)$:

598. $y=\lg\sin x$:

599. $y=\ln^2 x$:

600. $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)$:

601. $y=\ln\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$:

602. $y=\dfrac{1}{4(1+x^4)}+\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{x^4}{1+x^4}$:

603. $y=\ln(\ln x)$:

604. $y=\ln\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}$:

605. $y=\ln(\ln(\ln x))$:

606. $y=\sqrt{x+1}-\ln\left(1+\sqrt{x+1}\right)$:

607. $y=\ln\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}$:

608. $y=\ln\mathrm{tg}\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)$:

609. $y=x[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)]$:

610. $y=\arcsin\dfrac{x}{2}$:

611. $y=\arcsin x+\arccos x$:

612. $y=\arcsin 5x$:

613. $y=\arccos(2x-1)$:

614. $y=\arccos\dfrac{3}{x}$:

615. $y=\mathrm{arctg}x+\dfrac{1}{3}\mathrm{arctg}x^3$:

616. $y=e^x\arcsin x$:

617. $y=\mathrm{arctg}(\ln x)$:

618. $y=\arcsin(\sin x-\cos x)$:

619. $y=\arccos\left(\cos^2 x\right)$:

620. $y=\ln\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$:

621. $y=\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}^2 x\right)$:

622. $y=\operatorname{arctg}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$:

623. $y=\arccos\frac{1-x}{\sqrt{2}}$:

624. $y=\arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2}$:

625. $y=\frac{1}{x}\left(\ln^3 x+3\ln^2 x\right)+6\ln x+6$:

626. $y=\frac{(5+2x)^{10}}{\sin x}$:

627. $y=\frac{(3x+1)^{11}\cdot x}{\ln x}$:

628. $y=e^{x\sqrt{\sin x}}$:

629. $y=2x\operatorname{ctg}\frac{1}{x}-\frac{1}{14}\sin^2 7x$

630. $y=\operatorname{arctg}\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$:

631. $y=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}$:

632. Գտնել՝

$$\operatorname{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\qquad \operatorname{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\qquad \operatorname{th}x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$

հիպերբոլական ֆունկցիաների ածանցյալները:

633. Գտնել y'-ը, եթե.

1) $y=|x|$, 2) $y=x|x|$,

3) $y=\begin{cases}1-x, & \text{եթե } x\le 0\\ e^{-x}, & \text{եթե } x>0\end{cases}$:

634. Ցույց տալ, որ $y=xe^{-x}$ ֆունկցիան բավարարում է $xy'=(1-x)y$ հավասարմանը:

635. Ցույց տալ, որ $y = x e^{-\frac{x^2}{2}}$ ֆունկցիան բավարարում է $xy'=(1-x^2)y$ հավասարմանը:

636. Ցույց տալ, որ $y=\dfrac{1}{1+x+\ln x}$ ֆունկցիան բավարարում է $xy'=y(y\ln x-1)$ հավասարումը:

Նախօրոք լոգարիթմելը հաճախ հեշտացնում է ֆունկցիայի ածանցյալի հաշվումը:
$y=f(x)$ ֆունկցիայի լոգարիթմական ածանցյալ են անվանում այդ ֆունկցիայի լոգարիթմի ածանցյալը:

637. Հաշվել $f'(x)$-ը, եթե $f(x)=\sqrt{\dfrac{x(x-1)^3}{x+2}}$:

638. Հաշվել $y=[u(x)]^{v(x)},\ (u(x)>0)$ աստիճանացուցչային ֆունկցիայի ածանցյալը:

639. Օգտագործելով լոգարիթմական ածանցյալի գաղափարը՝ հաշվել հետևյալ ֆունկցիաների ածանցյալները.

1) $y=x\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$, 2) $y=(x-1)^3(x-2)^4(x-3)^5$,

3) $y=\dfrac{x^2}{1-x}\sqrt[3]{\dfrac{3-x}{(3+x)^2}}$, 4) $y=\sqrt{\dfrac{(x+1)^7(x-1^5)}{x^5(x+2)^3}}$,

5) $y=x^x$, 6) $y=x^{\sin x}$,

7) $y=(\sin x)^x$, 8) $y=x^{\sqrt{x}}$,

9) $y=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$, 10) $y=\sqrt[x]{\ln x}$,

11) $y=\left(\sqrt{x}\right)^{\sqrt[3]{x}}$, 12) $y=(\sin x)^{\arcsin x}$:

Գտնել հետևյալ ֆունկցիաների ածանցյալները:

640. $y=\sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$: **641.** $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$:

642. $y=\sqrt[m+n]{(1-x)^m(1+x)^n}$: **643.** $y=\dfrac{1}{\cos^n mx}$:

644. $y=\sin\left(\cos^2 x\right)\cdot\cos\left(\sin^2 x\right)$: **645.** $y=\ln\left(\ln^n mx\right)$:

646. $y=\left(\dfrac{a}{b}\right)^x\cdot\left(\dfrac{b}{x}\right)^a\cdot\left(\dfrac{x}{a}\right)^b$, $a>0,\ b>0$:

647. $y=\dfrac{1}{2\sqrt{6}}\ln\dfrac{x\sqrt{3}-\sqrt{2}}{x\sqrt{3}+\sqrt{2}}$: **648.** $y=\log_2\sin\left(2\pi x+\dfrac{\pi}{2}\right)$:

649. $y=\mathrm{sh}5x$: **650.** $y=\mathrm{ch}3x\cdot\mathrm{sh}\dfrac{x}{2}$:

651. $y=\mathrm{th}3x$: **652.** $y=\ln|x|$:

653. $y=\arcsin\dfrac{1}{|x|}$: **654.** $y=|\sin x|$:

655. $y=\log_x e$: **656.** $y=\log_{5x}4$:

657. $y=e^{-x}\,\mathrm{sh}x$: **658.** $y=\arccos\left(\dfrac{1}{\mathrm{ch}x}\right)$:

659. $y=\sqrt[3]{\dfrac{x\left(x^2+1\right)}{\sqrt[5]{5-x}}}$: **660.** $y=\sqrt[3]{x^2}\,\dfrac{1-x}{1+x^2}\sin^3 x\cos^2 x$:

661. $y=\left(\sqrt{\mathrm{tg}x}\right)^{x+1}$: **662.** $y=(\sin x)^{\cos x}$:

663. $y=(\cos x)^{\sin x}$: **664.** $y=\left(\sqrt{x}\right)^{\sin^2 x}$:

3. Ածանցյալի որոշ կիրառություններ տնտեսագիտության մեջ

Արտադրության ծախքերը արտադրանքի արտադրման (կամ ծառայության կատարման) համար անհրաժեշտ ծախքերն են, իսկ իրացման ծախքերը կապված են արտադրանքի իրացման հետ: Արտադրանքի արտադրման (ծառայության կատարման) և իրացման վրա կատարված նյութական աշխատանքային, ֆինանսական ծախքերի ամբողջությունը կազմում է արտադրանքի ինքնարժեքը:

Համասեռ արտադրանքի ինչպես արտադրության և իրացման ծախքերը, այնպես էլ ինքնարժեքը արտադրանքի քանակի ֆունկցիան են: Եթե արտադրանքի արտադրության քանակը (ծավալը) նշանակված է x-ով, իսկ արտադրության ծախքերը, y(x)-ով ապա.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x)$$

մեծությունը կոչվում է սահմանային ծախք:

Համանման ձևով՝ եթե արտադրանքի (բարիքի, ապրանքի) x միավորի իրացումից ստացված հասույթը նշանակված է P(x)-ով, ապա.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta P(x)}{\Delta x} = P'(x)$$

մեծությունը կոչվում է սահմանային հասույթ:

Ֆունկցիայի $\frac{\Delta y}{y}$ հարաբերական աճի և արգումենտի $\frac{\Delta x}{x}$ հարաբերական աճի հարաբերության սահմանը, երբ $\Delta x \to 0$, կոչվում է y(x) ֆունկցիայի ճկունություն x փոփոխականի նկատմամբ:

Այսպիսով, եթե y(x)-ը դիֆերենցելի ֆունկցիա է, ապա դրա $E_x(y)$ ճկունությունը կորոշվի հետևյալ բանաձևով.

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{x}{y} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} y'(x):$$

665. Արտադրանքի x ծավալից կախված՝ արտադրության ծախքերը արտահայտվում են $y = 100x - \frac{x^3}{30}$ բանաձևով: Որոշել արտադրության սահմանային ծախքերը, եթե արտադրության ծավալը կազմում է.

1) 5 միավոր,
2) 10 միավոր:

666. Արտադրության ծախքերը արտահայտվում են $y = 6\ln(1+3x)$ բանաձևով, որտեղ x-ը արտադրանքի ծավալն է: Որոշել արտադրության սահմանային ծախքերը, եթե արտադրության ծավալը հավասար է.

1) 3 միավորի, 2) 8 միավորի:

667. Հաշվել $y=3x-6$ ֆունկցիայի ճկունությունը: Գտնել ճկունության արժեքը, երբ $x = 10$:

668. Հաշվել $y = 1+2x-x^2$ ֆունկցիայի ճկունությունը, երբ $x = 1$:

669. Հաշվել $y=5\ln x$ ֆունկցիայի ճկունության արժեքները, երբ.

1) $x = 10$, 2) $x = e$, 3) $x = e^4$:

670. Դիցուք՝ $g(x)=10-x$ ֆունկցիան որևէ ապրանքի պահանջարկի ֆունկցիան է, որտեղ x-ը ապրանքի գինն է: Գտնել պահանջարկի ֆունկցիայի ճկունությունը, երբ $x = 2$:

671. Ապացուցել, որ եթե $E_x(y)$-ը $y=y(x)$ ֆունկցիայի ճկունությունն է, ապա $x \cdot y(x)$ ֆունկցիայի ճկունությունը հավասար է $(E_x(y) + 1)x$:

672. Ապացուցել, որ եթե պահանջարկը հակադարձ համեմատական է գնին (այսինքն՝ պահանջարկի ֆունկցիան ունի $y = \frac{k}{x}$ տեսքը), ապա գնի ցանկացած արժեքի դեպքում պահանջարկի ֆունկցիայի ճկունությունը հավասար է -1-ի:

673. Հաշվել $y=x^3-1$ ֆունկցիայի ճկունությունը: Գտնել ճկունության ցուցանիշը, երբ.

ա) $x = 2$, բ) $x = 5$:

674. Հաշվել $y = e^{5x}$ ֆունկցիայի ճկունությունը: Գտնել ճկունության ցուցանիշը, երբ.

ա) $x = 0$, բ) $x = 1$, գ) $x = 2$:

675. Հաշվել $y = ax^m$ ֆունկցիայի ճկունությունը, որտեղ a-ն և ը հաստատուններ են:

676. Հաշվել $y = ax^3 + b$ ֆունկցիայի ճկունությունը:

4. Բարձր կարգի ածանցյալներ

y=f(x) ֆունկցիայի երկրորդ կարգի ածանցյալ է կոչվում դրա առաջին կարգի ածանցյալի ածանցյալը.

$$f''(x)=(f'(x))':$$

Ընդհանրապես` $f^{(n)}(x)=[f^{(n-1)}(x)]'$:

Նշենք որոշ ֆունկցիաների n-րդ կարգի ածանցյալների բանաձևերը.

I. $\left(a^x\right)^{(n)} = a^x (\ln a)^n$, $\left(e^x\right)^{(n)} = e^x$,

II. $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}n\right)$,

III. $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}n\right)$,

IV. $\left(x^a\right)^{(n)} = a(a-1)(a-2)\ldots(a-n+1)x^{a-n}$,

V. $(\ln x)^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$:

677. Հաշվել տրված ֆունկցիաների երկրորդ կարգի ածանցյալը, եթե.

1) $y = 3x^7 - x^4 + 3x + 5$, 2) $y = x\sqrt{1+x^2}$,

3) $y = x \ln x$, 4) $y = \cos^2 x$:

678. Օգտվելով I – V բանաձևերից՝ գտնել հետևյալ ֆունկցիաների n - րդ կարգի ածանցյալները.

1) $y = x^5$, 2) $y = e^{3x}$,

3) $y = \sin 5x \cos 2x$, 4) $y = \log_2 x$:

679. Հաշվել $y'(0)$, $y''(0)$ և $y'''(0)$, եթե $y = e^{2x}\sin 3x$:

680. Հաշվել $y'''(2)$, եթե $y = \ln(x-1)$:

681. Հաշվել $y^{(4)}(1)$, եթե $y = x^3 \ln x$:

682. Հաշվել y''-ը, եթե.

1) $y = 2x^3 - 7x + 4$, 2) $y = x^8 + 7x^6 - 5x + 4$,

3) $y = x\sqrt{x}$, 4) $y = \dfrac{3x^2-2}{x+1}$,

5) $y = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, 6) $y = \operatorname{tg} x$,

7) $y = \left(1+x^2\right)\operatorname{arctg} x$, 8) $y = e^{-x^2}$,

9) $y = \sin^2 x$, 10) $y = \ln\sqrt[3]{1+x^2}$,

11) $y = (\arcsin x)^2$, 12) $y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$:

683. Հաշվել y'''-ը, եթե.

1) $y = x^3 - 5x^2 + 7x - 2$, 2) $y = (2x-3)^5$,

3) $y = \ln(1+x)$, 4) $y = \cos 5x$:

684. Ցույց տալ, որ $y = e^{-x}\cos x$ ֆունկցիան բավարարում է $y^{IV} + 4y = 0$ հավասարմանը:

685. Գտնել հետևյալ ֆունկցիաների n-րդ կարգի ածանցյալները.

1) $y = \sqrt{x}$, 2) $y = \sin 2x$, 3) $y = \cos 7x$,

4) $y = \dfrac{3}{x^m}$, 5) $y = x \ln x$, 6) $y = \operatorname{sh} x$,

7) $y = \sin x \cos 7x$, 8) $y = x \cdot e^x$, 9) $y = \dfrac{1+x}{1-x}$,

10) $y = \ln(ax + b)$:

5. Ֆունկցիայի դիֆերենցիալը

Եթե $y = f(x)$ ֆունկցիայի Δy աճը x կետում կարելի է ներկայացնել $\Delta y=A(x)\cdot dx+\alpha\cdot dx$ տեսքով, որտեղ $dx=\Delta x$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha = 0$, ապա $f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է դիֆերենցելի x կետում, իսկ Δy աճի գլխավոր մասը՝ $A(x)\cdot dx$–ը, կոչվում է $y=f(x)$ ֆունկցիայի դիֆերենցիալ և նշանակվում է dy սիմվոլով.

$$dy = A(x)dx:$$

Որպեսզի ֆունկցիան լինի դիֆերենցելի, անհրաժեշտ է և բավարար, որ գոյություն ունենա $f'(x)$ ածանցյալը, ընդ որում՝ $A(x) = f'(x)$ և, այսպիսով՝ $dy = f'(x)dx$:

686. Գտնել $y = 3x^2 - x + 4$ ֆունկցիայի դիֆերենցիալը $x = 2$ կետում, եթե $\Delta x = 0,1$:

687. Հաշվել հետևյալ ֆունկցիաների դիֆերենցիալները.

1) $y = \sin 3x$, 2) $y = \ln(1+x^2)$, 3) $y = \arcsin 2x$:

688. Ապացուցել, որ $y = ax + b$ գծային ֆունկցիայի համար Δy աճը և dy դիֆերենցիալը համընկնում են:

689. Հաշվել հետևյալ ֆունկցիաների դիֆերենցիալները $x = 1$ կետում՝ կամայական $\Delta x = dx$ –ի համար.

1) $y = \cos \pi x$, 2) $y = x^3 - 4x + 7$, 3) $y = \dfrac{1}{x}$,

4) $y = \arccos\dfrac{x}{a}$, 5) $y = \ln\left|\dfrac{x-2}{x+2}\right|$, 6) $y = xe^x$:

690. Հաշվել $y = f(x)$ ֆունկցիայի դիֆերենցիալը, եթե.

1) $f(x) = \sin x - x\cos x$, 2) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$,

3) $f(x) = \sqrt{\ln^2 x - 4}$, 4) $f(x) = \sin^2 3x$,

5) $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}$:

6. Լոպիտալի կանոնը

Լոպիտալի կանոնը վերաբերում է $\dfrac{0}{0}$ կամ $\dfrac{\infty}{\infty}$ տիպի անորոշություններին և հետևյալն է.

եթե $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաները դիֆերենցելի են a կետի որևէ շրջակայքում (բացի, գուցե, x=a կետից) ընդ որում՝ $g'(x)\neq 0$ և $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ կամ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, ապա՝

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

պայմանով, որ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ սահմանը գոյություն ունի: a-ն կարող է լինել վերջավոր թիվ կամ ∞ սիմվոլը:

691. Կիրառելով Լոպիտալի կանոնը՝ հաշվել հետևյալ սահմանները.

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}$, 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax} - e^{2ax}}{\ln(1+x)}$,

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{ch}x-\cos x}{x^2}$, 4) $\lim\limits_{x\to 0}x^n\ln x$, $n>0$:

Հաշվել հետևյալ սահմանները:

692. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-7x+6}$:

693. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^5-7x^3-5x^2-9}{x^4+2x^3-12x^2-4x-15}$:

694. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^5}$:

695. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$:

696. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}3x}{\operatorname{tg}x}$:

697. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(x^2-3)}{x^2+3x-10}$:

698. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sin\pi x}{x^2-5x+6}$:

699. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt{2+x}+x}$:

700. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\cos 3x-e^{-x}}$:

701. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos 2x}{\sin 2x}$:

702. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)}$:

703. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$:

704. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\operatorname{ctg}x-1}{\sin 4x}$:

705. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x-x^a}{x-a}$ $(a>0)$:

706. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$:

707. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\arcsin 3x}$:

708. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$:

709. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-3x-1}{\sin 5x}$:

710. $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg}x)^{\sin x}$:

711. $\lim\limits_{x\to +0}\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)^x$:

712. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$:

713. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}x-\dfrac{1}{x}\right)$:

714. $\lim\limits_{x\to +0}\left(\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$:

715. $\lim\limits_{x\to\infty}(\operatorname{th}x)^x$:

716. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$:

717. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{x}{\operatorname{ctg}x}-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$:

718. Ցույց տալ, որ.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=0 \quad \text{և} \quad \lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}=1$$

սահմանները հնարավոր չէ հաշվել Լոպիտալի կանոնով:

§2. ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՇՎԻ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ԹԵՈՐԵՄՆԵՐԸ, ԹԵՅԼՈՐԻ ԲԱՆԱՁԵՎԸ, ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒՄԸ ԱԾԱՆՑՅԱԼԻ ՕԳՆՈՒԹՅԱՄԲ

1. Դիֆերենցիալ հաշվի հիմնական թեորեմները, Թեյլորի բանաձևը

Եթե $y = f(x)$ ֆունկցիան x_0 կետի որևէ շրջակայքում ունի մինչև $(n+1)$-րդ կարգի ածանցյալները ներառյալ, ապա այդ շրջակայքի ցանկացած x կետում տեղի ունի Թեյլորի բանաձևը.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{f^n(x)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

որտեղ ξ-ն ընկած է x-ի և x_0-ի միջև: Այս բանաձևի մեջ տեղադրելով $x_0 = 0$, կստանանք Մակլորենի բանաձևը՝

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n + \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}:$$

Ներկայացնենք հետևյալ հինգ ֆունկցիաների վերլուծությունները.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}),$$

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)}{3!}x^3 + \ldots +$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - n + 1)}{n!}x^n + o(x^n),$$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n):$$

719. Ցույց տալ, որ $f(x)=x-x^3$ ֆունկցիան $[0,1]$ հատվածում բավարարում է Ռոլի թեորեմի պայմաններին և գտնել միջանկյալ կետը:

720. Բավարարո՞ւմ է արդյոք $f(x)=\sqrt[3]{(x-2)^2}$ ֆունկցիան $[0,4]$ հատվածում Ռոլի թեորեմի պայմաններին:

721. Դիցուք՝ $f(x)=x(x+1)(x+2)(x+3)$: Ապացուցել, որ $f'(x)=0$-ն ունի երեք իրական արմատ:

722. Ստուգել, որ $f(x)=x^2+2$ և $F(x)=x^3-1$ ֆունկցիաները $[1,2]$ հատվածում բավարարում են Կոշիի թեորեմի պայմաններին: Գտնել միջանկյալ կետը:

723. Ապացուցել, որ եթե $f(x)$-ը անընդհատ է $[a,b]$-ում, դիֆերենցելի է (a,b)-ում ($\exists\, f'(x)\ \forall\, x\in(a,b)$, և $f(x)$ գծային ֆունկցիա չէ, ապա (a,b)-ում $\exists c\in(a,b)$ այնպես, որ $|f'(c)|>\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$:

724. Ապացուցել, որ եթե $[a,b]$-ում $\exists\ f''(x)$-ը, և $f'(a)=f'(b)$, ապա $\exists\ c\in(a,b)$ այնպես, որ $|f''(c)|\geq\dfrac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$:

725. Նյութական կետը դադարի վիճակից շարժվում է և կանգ առնում: Ընդ որում, միավոր ժամանակում, որը տևել է 1 վայրկյան, անցնում է 1 մետր ճանապարհ: Շարժումը ուղղագիծ է: Ապացուցել, որ կա մի t_0 պահ, երբ $a(t)$ արագացումը $a(t_0)$-ն բավարարում է $|a(t_0)|\geq 4$ մ/վրկ^2 անհավասարությունը:

726. $f(x)=2x^3-3x^2+5x+1$ բազմանդամը վերլուծել $(x-1)$ երկանդամի աստիճաններով:

727. Հետևյալ բազմանդամները վերլուծել $(x+1)$ երկանդամի աստիճաններով:

1) $P(x)=1+3x+5x^2-x^3$, 2) $P(x)=x^4+4x^2-x+3$,

3) $P(x)=x^5-2x^4+x^3-x^2+2x-1$:

728. Գտնել հետևյալ ֆունկցիաների Մակլորենի բանաձևերի առաջին երեք գումարելիները.

1) $f(x)=e^{2x-x^2}$, 2) $f(x)=\ln\cos x$,

3) $f(x)=\dfrac{x}{e^x-1}$, 4) $f(x)=\operatorname{tg} x$:

729. Օգտվելով հինգ հիմնական վերլուծություններից՝ գրել հետևյալ ֆունկցիաների Մակլորենի բանաձևերը.

1) $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$, 2) $f(x)=\sin^2 x$, 3) $f(x)=\sin\dfrac{5x}{2}$,

4) $f(x)=\ln(4+x^2)$, 5) $f(x)=\sqrt[3]{8+x^2}$:

730. Օգտվելով հիմնական վերլուծություններից՝ հաշվել հետևյալ սահմանները.

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+3x}-\sqrt{1+2x}}{x^2}$, 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$,

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$, 4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5}\right)$:

2. Ֆունկցիաների մոնոտոնության պայմանը

$y=f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է աճող (նվազող) $[a;b]$ հատվածում, եթե $a\le x_1<x_2\le b$ պայմանից հետևում է $f(x_2)>f(x_1)$ $(f(x_2)<f(x_1))$ անհավասարությունը: Եթե ֆունկցիան աճող է կամ նվազող X բազմության վրա, ապա կոչվում է մոնոտոն այդ բազմության վրա:

Եթե դիֆերենցելի ֆունկցիան աճող (նվազող) է [a;b] հատվածի վրա, ապա՝ $f'(x)\geq 0$ ($f'(x)\leq 0$), $a\leq x\leq b$:

Եթե f(x) դիֆերենցելի ֆունկցիայի համար $f'(x)>0$ ($f'(x<0)$, $a<x<b$, ապա f(x)-ը աճում (նվազում) է [a;b]-ի վրա:

731. Գտնել հետևյալ ֆունկցիաների աճման և նվազման միջակայքերը.

1) $f(x) = x^2 - 2x$, 2) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$,

3) $f(x) = x + \sin x$, 4) $f(x)=\dfrac{2x}{\ln x}$:

732. Գտնել հետևյալ ֆունկցիաների մոնոտոնության միջակայքերը:

1) $f(x) = x^2 - 6x - 7$, 2) $f(x) = 5 - 7x + 2x^2$,

3) $f(x) = 1 + 7x - 8x^2$, 4) $f(x) = x^3 + 2x - 5$,

5) $y = x^2(x - 3)$, 6) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 24x + 7$,

7) $y = (x - 2)\sqrt{x}$, 8) $f(x) = 4x^3 - 21x^2 + 18x + 20$,

9) $y=\dfrac{x}{x-2}$, 10) $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$,

11) $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$, 12) $y=\dfrac{x}{x^2-6x-16}$,

13) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$, 14) $f(x) = 2x^2 - \ln x$,

15) $f(x) = e^x + 5x$, 16) $f(x) = x^2e^{-x}$,

17) $f(x)=\ln\left(1-x^2\right)$, 18) $f(x)=\cos x-x$,

19. $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{x}$, 20) $f(x)=x\sqrt{1-x^2}$:

733. Ձեռնարկությունը մեկ ամսում արտադրում է x միավոր արտադրանք: Ձեռնարկության ֆինանսական կուտակումների կախվածությունը արտադրանքի թողարկման ծավալից արտահայտվում է՝

$$U(x) = 2x^3 - 600x - 20$$

բանաձևով: Արտադրանքի թողարկման ինչ ծավալի դեպքում ձեռնարկության ֆինանսական կուտակումը կաճի:

734. Ձեռնարկությունը մեկ ամսում արտադրում է x միավոր արտադրանք: Ձեռնարկության ֆինանսական կուտակումների կախվածությունը արտադրանքի թողարկման ծավալից արտահայտվում է՝

$$f(x) = -0{,}01x^3 + 300x - 500$$

բանաձևով: Արտադրանքի թողարկման ինչ ծավալի դեպքում ձեռնարկության ֆինանսական կուտակումը կպակասի:

735. Արտադրության լրիվ ծախսերը արտահայտվում են $y = \frac{2}{3}x^3 - 12x^2 + 54x$ բանաձևով, որտեղ x-ը արտադրանքի ծավալն է: Հետազոտել այդ ֆունկցիայի փոփոխման բնույթը:

3. Ֆունկցիայի էքստրեմումները

$y=f(x)$ ֆունկցիան x_0 կետում ունի էքստրեմում (մաքսիմում կամ մինիմում), եթե x_0 կետի որևէ $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ շրջակայքի բոլոր $x(x \neq x_0)$ կետերի համար տեղի ունի $f(x_0)>f(x)$ կամ $f(x_0)<f(x)$ անհավասարությունը:

Եթե x_0-ն էքստրեմումի կետ է, և գոյություն ունի $f'(x_0)$, ապա $f'(x_0)=0$: Ֆունկցիայի որոշման տիրույթի այն կետերը, որտեղ $f'(x_0) = 0$, կամ $f'(x_0)$ գոյություն չունի, կոչվում են կրիտիկական կետեր (էքստրեմումի համար կասկածելի կետեր):

Էքստրեմումի առաջին բավարար պայմանը.

Եթե x_0 կրիտիկական կետի տարբեր կողմերում՝ $(x_0 - \delta; x_0)$ և $(x_0; x_0 + \delta)$ միջակայքերում, $f'(x)$ ածանցյալը ունի տարբեր նշաններ, ապա x_0-ն էքստրեմումի կետ է (ընդ որում, $+ \to -$ դեպքում՝ մաքսիմում, իսկ $- \to +$ դեպքում՝ մինիմում): Իսկ եթե $f'(x)$ ածանցյալը x_0 կետի տարբեր կողմերում ունի նույն նշանը, ապա x_0-ն էքստրեմումի կետ չէ:

Էքստրեմումի երկրորդ բավարար պայմանը.

Եթե որևէ x_0 կետում տեղի ունեն $f'(x_0)=0$ և $f''(x_0)\neq 0$ պայմանները, ապա x_0-ն էքստրեմումի կետ է, ընդ որում, $f''(x_0)<0$ դեպքում՝ մաքսիմումի, իսկ $f''(x_0)>0$ դեպքում՝ մինիմումի:

736. Գտնել հետևյալ ֆունկցիաների էքստրեմումները.

1) $f(x) = 2+ x - x^2$,
2) $f(x)=\frac{3}{4}x^4-x^3-9x^2+7$,

3) $f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x^2+2x+1}$,
4) $y = 2\sin x + \cos 2x$,

5) $y = x^2 - 4x + 6$,
6) $y = 3 - 2x - x^2$

7) $y = 2x^2 - x + 3$,
8) $y = - x^2 - x + 5$,

9) $y = x^3 + 2x - 5$,
10) $y = x^3 - 3x^2$,

11) $y=\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+2x+1$,
12) $y = x^3- 6x^2 + 9x - 4$,

13) $y = 2x^2 - x^4$,
14) $y = x^4 - 8x^3+22x^2 - 24x + 12$,

15) $y = x(x + 1)^3(x - 3)^2$,
16) $y = x(x - 1)^2(x - 2)^3$,

17) $y=x+\frac{1}{x}$,
18) $y = xe^{-x}$,

19) $y=\frac{x^2-2x+2}{x-1}$,
20) $y=\frac{x^2-4}{x+1}$,

21) $y=\frac{a^3}{a^2+x^2}$,
22) $y=\frac{x^2+3}{x+2}$,

23) $y = x - \ln x$,
24) $y=\frac{\ln^2 x}{x}$,

25) $y=\sqrt{2x-x^2}$,
26) $y=3\sqrt[3]{x^2}-x^2$,

27) $y=x\sqrt[3]{x-1}$,
28) $y=\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{(x+1)^2}$,

29) $y=e^x\sin x$,
30) $y = \sin 3x - 3\sin x$:

Ապացուցել հետևյալ անհավասարությունները

737. $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$, եթե $x > 0$:

738. $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$, եթե $x \neq 0$:

739. $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$, եթե $x > 0$:

740. $e^x > 1 + x$, եթե $x \neq 0$:

4. Ֆունկցիայի ամենամեծ և ամենափոքր արժեքները

[a;b] հատվածում անընդհատ f(x) ֆունկցիայի ամենամեծ ամենափոքր) արժեքը գտնելու համար պետք է հաշվել ֆունկ-իայի արժեքները կրիտիկական կետերում, f(a), f(b) արժեքները վերցնել ստացված թվերից ամենամեծը (ամենափոքրը):

741. Գտնել տրված ֆունկցիայի ամենամեծ և ամենափոքր ւրժեքները նշված հատվածների վրա.

1) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$, $x \in [-2;3]$,

2) $y = -3x^4 + 6x^2$, $x \in [-2;2]$,

3) $y = \frac{x-1}{x+1}$, $x \in [0;4]$, 4) $y = \frac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$, $x \in [0;1]$,

5) $y = x^2 \ln x$, $x \in [1;e]$, 6) $y = x + \sqrt{x}$, $x \in [0;4]$,

7) $y = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}$, $x \in [0;1]$,

8) $y = \operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}$, $x \in [0;1]$:

742. a դրական թիվը փրոհել երկու գումարելիների այնպես, որ դրանց արտադրյալը լինի մեծագույնը:

743. Գտնել տրված 2p պարագիծ ունեցող ուղղանկյուն եռանկյուններից ամենամեծ մակերես ունեցողը:

744. Տրված v ծավալ ունեցող գլաններից ո՞րն ունի լրիվ մակերևույթի փոքրագույն մակերես:

745. Գտնել M(3;3) կետի կարճագույն հեռավորությունը $y^2=6x$ պարաբոլից:

746. R շառավղով գնդին ներգծել ամենամեծ ծավալի գլան:

747. Գտնել ℓ ծնիչ ունեցող կոներից ամենամեծ ծավալ ունեցողը:

748. Գտնել տրված գնդին արտագծված կոներից ամենափոքր ծավալ ունեցողը:

749. A հաստատուն մեծության անհայտ արժեքը որոշելու համար կատարված n փորձերի արդյունքում ստացվել են $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ արժեքները: Բնական է անհայտ արժեքի լավագույն մոտավորություն անվանել այն թիվը, որի $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ արժեքներից ունեցած շեղումների քառակուսիների գումարը փոքրագույնն է: Գտնել լավագույն մոտավորությունը:

750. Բաց թիթեղյա տուփը, որի հիմքը քառակուսի է, ունի V լիտր տարողություն: Ինչպիսի չափերով պատրաստել այդպիսի տուփը, որպեսզի ծախսվի փոքրագույն քանակությամբ թիթեղ:

751. Տրված R շառավղով գնդին ներգծել մեծագույն ծավալ ունեցող կոն:

752. Տրված գլանին արտագծել ուղիղ շրջանային կոն՝ փոքրագույն ծավալով (գլանի և կոնի հիմքերի հարթությունները և հիմքերի շրջանների կենտրոնները համընկնում են):

753. Տրված շրջանից անջատել այնպիսի սեկտոր, որով կառուցված ձագարը ունենա մեծագույն տարողություն:

754. Տրված էլիպսին ներգծել մեծագույն մակերես ունեցող ուղղանկյուն այնպես, որ կողմերը զուգահեռ լինեն էլիպսի առանցքներին (գտնել ուղղանկյան կողմերը):

755. $y^2=2px$ պարաբոլով և $x=2a$ ուղղով կազմված սեգմենտին ներգծել մեծագույն մակերես ունեցող ուղղանկյուն: Գտնել ուղղանկյան գագաթների կոորդինատները:

756. $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ կորի վրա գտնել այն կետը, որից տարված շոշափողը OX առանցքի հետ կազմում է ամենամեծ սուր անկյունը:

757. ա) Գերձայնային ինքնաթիռը h մետր բարձրությամբ դիտորդի գլխավերևով անցնելուց t_0 վայրկյան անց դիտորդը լսում է ինքնաթիռի ձայնը: Գտնել ինքնաթիռի արագությունը: Ձայնի արագությունը V_0կմ/վրկ: (Ստանալ պայման, որի դեպքում խնդիրը լուծում ունի):

բ) Նավի լողարկման ժամանակ օրական ծախսերը բաղկացած են երկու մասից. I. հաստատուն, հավասար a ռուբլու, II. փոփոխական, որը աճում է նավի արագության խորանարդին համեմատական: Ինչպիսի V արագության դեպքում նավարկումը կլինի առավել խնայողական:

5. Ֆունկցիայի ուռուցիկությունը և գոգավորությունը, շրջման կետ

y=f(x) դիֆերենցելի ֆունկցիայի գրաֆիկը ուռուցիկ է (գոգավոր է) [a;b] հատվածում, եթե y=f(x) ($a\le x\le b$) կորը գտնվում է իր ցանկացած շոշափողից ներքև (վերև): Այն կետերը, որտեղ փոխվում է ֆունկցիայի գոգավորության ուղղությունը, կոչվում են շրջման կետեր: Եթե $f''(x)<0\;(a<x<b)$, ապա ֆունկցիայի

գրաֆիկը ուռուցիկ է [a;b] հատվածում, իսկ եթե $f''(x)>0$ $(a<x<b)$, ապա ֆունկցիայի գրաֆիկը գոգավոր է: Եթե $f''(x_0)=0$ կամ $f''(x_0)$ գոյություն չունի, և x_0-ի փարբեր կողմերում $f''(x)$-ը ունի փարբեր նշաններ, ապա x_0 կետը շրջման կետ է:

758. Գտնել հետևյալ ֆունկցիայի ուռուցիկության և գոգավորության միջակայքերը և շրջման կետերը.

1) $y=x^4+x^3-18x^2+24x-12$, 2) $y=3x^2-x^3$,
3) $y=x^3-6x^2$, 4) $y=x^4+6x^2$,
5) $y=3x^4-8x^3+16x^2+12$, 6) $y=x^7+7x+1$,
7) $y=xe^{2x}+1$, 8) $y=x^3\ln x+1$, 9) $y=\sqrt[3]{(x-2)^5}+3$,
10) $y=\ln(1+x^2)$, 11) $y=\frac{x}{1+x^2}$, 12) $y=\sqrt{1+x^2}$,
13) $y=e^{-x^2}$, 14) $y=x\sin(\ln x)$, 15) $y=\frac{x+1}{x^2+1}$:

6. Ասիմպտոտներ

Ուղիղը կոչվում է $y=f(x)$ կորի ասիմպտոտ, եթե կորի M կետի հեռավորությունը այդ ուղղից ձգտում է զրոյի, երբ M կետը, մնալով կորի վրա, անվերջ հեռանում է սկզբնակետից:

Սահմանումից հետևում է. եթե՝

$$\lim_{x\to a-0} f(x) \text{ և } \lim_{x\to a+0} f(x)$$

միակողմանի սահմաններից գոնե մեկը հավասար է անվերջի, ապա x=a ուղիղը ուղղահայաց ասիմպտոտ է: y=kx+b թեք ասիմպտոտների գոյության համար անհրաժեշտ է և բավարար.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=k \text{ և } \lim_{x\to\infty}\big(f(x)-kx\big)=b$$

սահմանների գոյությունը, ընդ որում, այս սահմանները հաշվելիս պետք է $x\to+\infty$ և $x\to-\infty$ դեպքերը քննարկել առանձին:

759. Գտնել հետևյալ կորերի ասիմպտոտները.

1) $y=\frac{5x}{x-2}$, 2) $y=\frac{3x^2}{x-1}$, 3) $y=3x+\operatorname{arctg}5x$,

4) $y=\frac{x}{x-5}$, 5) $y=4x^2+\frac{1}{x}$, 6) $y=\frac{4x}{x-4}+4x$,

7) $y=\sqrt[5]{\frac{x}{x-2}}$, 8) $y=\frac{\ln(x+1)}{x^2}$ 9) $y=xe^{\frac{1}{x}}$,

10) $y=\sqrt{1+x^2}+2x$, 11) $y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$,

12) $y=2\sqrt{x^2+4}$, 13) $y=x+\frac{\sin x}{x}$:

7. Ֆունկցիայի ընդհանուր հետազոտումը և գրաֆիկի կառուցումը .

Ֆունկցիայի հետազոտման և գրաֆիկի կառուցման համար պետք է կատարել հետևյալ ուսումնասիրությունները.

1) գտնել ֆունկցիայի որոշման տիրույթը և հետազոտել ֆունկցիայի վարքը այդ տիրույթի եզրերում,

2) պարզել ֆունկցիայի պարբերական, զույգ կամ կենտ լինելը,

3) գտնել ֆունկցիայի ասիմպտոտները,

4) գտնել էքստրեմումի կետերը և մոնոտոնության միջակայքերը,

5) գտնել ուռուցիկության և գոգավորության միջակայքերը և շրջման կետերը:

Հետազոտման արդյունքները օգտագործելով՝ կարելի է կառուցել ֆունկցիայի որակապես ճիշտ գրաֆիկը:

760. Հետազոտել հետևյալ ֆունկցիաները և կառուցել դրանց գրաֆիկները:

1) $y=\frac{x^3}{4\left(x^2-4\right)}$, 2) $y=3x-x^3$,

3) $y=1+x^2-\frac{x^4}{2}$, 4) $y=(x+1)(x-2)^2$,

5) $y=\frac{1}{4}x^2\left(x^2-3\right)^2$, 6) $y=\frac{1}{6}x^3\left(x^2-5\right)$,

7) $y=\frac{x^3}{2(1-x)^2}$, 8) $y=\frac{x^4}{x^3-1}$,

9) $y=\frac{x^3-3x}{x^2-1}$, 10) $y=\frac{x}{x^3+2}$,

11) $y=\frac{x}{x^2-4}$, 12) $y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$,

13) $y=\frac{x^3}{x^3+1}$, 14) $y=\sqrt[3]{x^2-2x}$,

15) $y=\frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$, 16) $y=\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x^2+1}$,

17) $y=\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$, 18) $y=\sqrt[3]{\frac{x^2}{x+1}}$,

19) $y=x+\ln\left(x^2-1\right)$, 20) $y=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$,

21) $y=\frac{1}{x\ln x}$, 22) $y=x^2\ln^2 x$,

23) $y=\frac{x}{2}+\mathrm{arctg}x$, 24) $y=x\,\mathrm{arctg}x$,

25) $y=\sin x+\cos x$, 26) $y=\frac{1}{2}\sin 2x+\cos x$,

27) $y=\arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2}$, 28) $y=x^2e^{\frac{1}{x}}$,

29) $y=x+e^{-x}$, 30) $y=(x+2)e^{\frac{1}{x}}$,

31) $y=\arccos\frac{1-x}{1-2x}$:

Գ Լ ՈՒ Խ V

ՄԻ ՔԱՆԻ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆՆԵՐԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ

§1. ՀԻՄՆԱԿԱՆ ԳԱՂԱՓԱՐՆԵՐ

Դիցուք՝ $A \subseteq R^n$ և $f : A \to R$, ապա ասում են, որ տրված է n փոփոխականների ֆունկցիա.

$$U = f(x_1, x_2, \dots, x_n):$$

Եթե c-ն պատկանում է $z=f(x,y)$ ֆունկցիայի արժեքների տիրույթին, ապա $f(x,y)=c$ բազմությունը XOY հարթության վրա կոչվում է $z=f(x,y)$ ֆունկցիայի մակարդակի գիծ:

Եթե $U=f(x,y,z)$, ապա $f(x,y,z)=c$ մակերևույթը OXYZ տարածության մեջ կոչվում է $U=f(x,y,z)$ ֆունկցիայի մակարդակի մակերևույթ: Մակարդակի գծերը, մակերևույթները կարևորվում են ֆունկցիաների առանձնահատկությունների ուսումնասիրության մեջ:

761. ա) Գտնել f(x,y)-ը, եթե.

ա) $f(x-y, x+y) = x^2+y^2+6xy$, բ) $f\left(\frac{y^2}{x}, \frac{x^2}{y}\right) = \frac{2x^3y^3}{x^6+y^6}$,

գ) $f(x+2y, 3x-y) = 7(x-y)$, դ) $f\left(\frac{x}{y}, x-y\right) = x+y$:

բ) Կառուցել այն D տիրույթը, որին պատկանող M(x,y) կետերի կոորդինատները բավարարում են հետևյալ անհավասարություններին.

1) $2 \le x \le 6,\ 1 \le y \le 3$, 2) $x^2+y^2 > 4$,

3) $1 \le x^2+y^2 \le 9$, 4) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4} < 1$:

762. Գտնել հետևյալ ֆունկցիաների մակարդակի գծերը.

1) $z = 2x + y$, 2) $z = x^2 + y^2$, 3) $z = \frac{x}{y}$,

4) $z = \ln\sqrt{\frac{y}{x}}$, 5) $z = \frac{1}{x^2+y^2}$, 6) $z = e^{xy}$,

7) $z = a^2 + x^2 - y^2$, 8) $z = \dfrac{1}{x^2 - y^2}$, 9) $z = 1 - |x| - |y|$,

10) $z = \dfrac{y}{\sqrt{x}}$, 11) $z = xy$, 12) $z = x^2 - y$,

13) $z = y - \ln x$:

763. Գտնել և պատկերել հետևյալ ֆունկցիաների որոշման տիրույթները.

1) $z = \dfrac{x + y}{2x - y}$,

2) $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$,

3) $z = \ln(3x + 2y + z - 6)$,

4) $z = \arcsin\dfrac{y}{x}$,

5) $z = a^2 - x^2 - 2y^2$,

6) $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$,

7) $z = \dfrac{1}{x^2 - y^2}$,

8) $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$,

9) $z = \sqrt{2x} - \dfrac{5}{\sqrt{y}}$,

10) $z = \dfrac{3xy}{x + y}$,

11) $z = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$,

12) $z = \dfrac{1}{\ln(x + y)}$,

13) $z = \arccos(x+y)$,

14) $z = x + \sqrt{x^2 - y^2}$,

15) $u = \sqrt{x + y + z}$,

16) $z = \ln\left(x^2 + y^2 + z^2 - 4\right)$,

17) $z = \sqrt{x} + \sqrt{y}$,

18) $z = \ln(x + y)$,

19) $z = \ln(x^2 + y)$,

20) $z = 1 + \sqrt{-(x - y)^2}$,

21) $z = x + \arccos y$,

22) $z = \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{4 - y^2}$,

23) $z = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2}$:

§2. ՄԻ ՔԱՆԻ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՍԱՀՄԱՆԸ ԵՎ ԱՆԸՆԴՀԱՏՈՒԹՅՈՒՆԸ

A թիվը կոչվում է Z=f(M)=f(x,y) ֆունկցիայի սահման, երբ M(x,y) կետը ձգտում է $M_0(x_0,y_0)$ կետին, եթե կամայական $\varepsilon>0$ թվի համար գոյություն ունի $\delta>0$ թիվ այնպես, որ $0<MM_0<\delta$ անհավասարությունից հետևում է $|f(M)-A|<\varepsilon$ անհավասարությունը: Դա գրվում է.

$$\lim_{M\to M_0} f(M)=A \quad \text{կամ} \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A \quad \text{տեսքով:}$$

Կարելի է դիտարկել նաև հաջորդական սահմաններ, երբ, նախ՝ $x\to x_0$ հաստատուն y-ի ($y\neq y_0$), դեպքում, որից հետո $y\to y_0$, կամ ընդհակառակը.

$$\lim_{y\to y_0}\left[\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right], \quad \text{կամ} \quad \lim_{x\to x_0}\left[\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right]:$$

z = f(x,y) ֆունկցիան կոչվում է անընդհատ $M_0(x_0,y_0)$ կետում, եթե տեղի ունի.

$$\lim_{M\to M_0} f(M)=f(M_0), \quad \text{կամ} \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$$

հավասարությունը: Ֆունկցիան կոչվում է անընդհատ D տիրույթում, եթե այն անընդհատ է D տիրույթի յուրաքանչյուր կետում: Եթե որևէ կետում անընդհատության պայմանը տեղի չունի, ապա այդ կետը կոչվում է z = f(x,y) ֆունկցիայի խզման կետ:

Մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի սահմանի և անընդհատության վերաբերյալ բոլոր թեորեմները որոշ վերաձևակերպումներով ուժի մեջ են նաև մի քանի փոփոխականների ֆունկցիաների համար:

764. Ապացուցել, որ $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$ ֆունկցիայի համար տեղի ունի.

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)=1, \qquad \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)=1,$$

բայց $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$-ը գոյություն չունի:

765. Ապացուցել, որ $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ ֆունկցիայի համար տեղի ունի.

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)=\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)=0,$$

բայց $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$-ը գոյություն չունի:

766. Ապացուցել, որ $f(x,y) = (x + y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$ ֆունկցիայի համար $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$, $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ երկու հաջորդական սահմանները գոյություն չունեն, իսկ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$-ը գոյություն ունի:

767. Հաշվել հետևյալ սահմանները.

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to -1}} (3xy-x^2+y^2+1)$, 2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{xy}$,

3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{2-\sqrt{4-xy}}{xy}$, 4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \dfrac{xy}{\sin xy}$,

5) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{2x^3+3y^2}{x^2+y^2}$, 6) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (1+xy)^{\frac{3}{xy}}$,

7) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to \infty}} \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$, 8) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$,

9) $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to 0}} \dfrac{\operatorname{tg}xy}{y}$, 10) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$,

11) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$,   12) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} \left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$,

13) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(x^2+y^2\right)^{x^2y^2}$,   14) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to 1}} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$,

15) $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to 2}} \dfrac{3x-2y}{x+y}$,   16) $\lim\limits_{\substack{x\to 5\\ y\to 5}} \dfrac{5-\sqrt{xy}}{xy-25}$,

17) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{3-\sqrt{xy+y}}$,   18) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \dfrac{\sin xy}{x}$:

768. Հետազոտել հետևյալ ֆունկցիաների անընդհատությունը և խզումները:

1) $z=\dfrac{x+y}{x-y}$,   2) $z=\dfrac{1}{x^2+y^2}$,   3) $z=\dfrac{1}{(x+y)^2}$,

4) $z=\ln\left|1-x^2-y^2\right|$, 5) $z=e^{\frac{1}{x^2+y^2}}$,   6) $z=\dfrac{1}{\sin x\sin y}$:

§3. ՄԱՍՆԱԿԻ ԱԾԱՆՑՅԱԼՆԵՐ ԵՎ ԼՐԻՎ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ

1. Մասնակի ածանցյալներ

$z=f(x,y)$ ֆունկցիայի առաջին կարգի մասնակի ածանցյալները սահմանվում են հետևյալ կերպ.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}=\frac{\partial z}{\partial x}\equiv f'_x(x,y)\equiv z'_x:$$

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y} \equiv f'_y(x,y) \equiv z'_y :$$

Այս սահմանումից հետևում է, որ z'_x-ը հաշվելու ժամանակ y-ը դիտարկվում է որպես հաստատուն և կատարվում է սովորական դիֆերենցում x-ի նկատմամբ: Նույն ձևով z'_y-ը հաշվելու ժամանակ x–ը դիտարկում են որպես հաստատուն: Մասնակի ածանցյալների համար ածանցման կանոնները և բանաձևերը համընկնում են մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի համար մատնանշված կանոններին:

z'_x և z'_y մասնակի ածանցյալներն իրենց հերթին կարող են ունենալ մասնակի ածանցյալներ, որոնք $z = f(x,y)$ ֆունկցիայի համար կկոչվեն երկրորդ կարգի մասնակի ածանցյալներ:

$(z'_x)'_x = z''_{x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x}$ - երկրորդ կարգի մասնակի ածանցյալ ըստ x-ի,

$(z'_y)'_y = z''_{y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y}$ - երկրորդ կարգի մասնակի ածանցյալ ըստ y-ի,

$(z'_x)'_y = z''_{xy}$ և $(z'_y)'_x = z''_{yx}$ - երկրորդ կարգի խառը ածանցյալներ, որոնք անընդհատության կետում իրար հավասար են:

769. Գտնել հետևյալ ֆունկցիաների առաջին կարգի մասնակի ածանցյալները.

1) $z = 2x^2y^2 + 3xy^2 + y^3$, 2) $z = (5x^3y^2 + 1)^3$,

3) $z = 2y\sqrt{x} + 3x^2\sqrt[3]{y}$, 4) $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$,

5) $z = \sin\frac{x}{y}$, 6) $z = e^{xy(x^2+y^2)}$,

7) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 8), $z = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$,

9) $z = (x-y)(x-z)(y-z)$, 10) $z = x^y$,

11) $z = \arcsin\frac{y}{x}$, 12) $z = e^{\frac{x}{y}} \ln y$:

770. Գտնել հետևյալ ֆունկցիաների երկրորդ կարգի մասնակի ածանցյալները.

1) $z = x^3y + y^3x$, 2) $z = \ln\left(x^2 + y^2\right)$,

3) $z = xe^{-xy}$, 4) $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$,

5) $z = \sin xy$:

771. Ցույց տալ, որ տրված ֆունկցիան բավարարում է հավասարմանը.

ա) $z = \ln\left(x^2 + xy + y^2\right)$, $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2$,

բ) $z = \frac{x^2}{2y} + \frac{x}{2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$, $x^2\frac{\partial z}{\partial x} + y^2\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^3}{y}$,

գ) $z = \sqrt{x}\cos\frac{x}{y}$, $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{2}$,

դ) $z = y\ln(x^2 - y^2)$, $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$,

ե) $z = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = 1$:

2. Լրիվ դիֆերենցիալ, բարձր կարգի դիֆերենցիալներ.

$z = f(x, y)$ ֆունկցիայի լրիվ աճ M(x,y) կետում կոչվում է $\Delta z = f(x, +\Delta x, y + \Delta y) - f(x; y)$ տարբերությունը: z=f(x,y) ֆունկցիան կոչվում է (x,y) կետում դիֆերենցելի, եթե այդ կետում լրիվ աճը կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով.

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho),$$

որտեղ՝ $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$, իսկ A և B թվերը կախում չունեն Δx և Δy աճերից: $z=f(x,y)$ ֆունկցիայի լրիվ դիֆերենցիալ կոչվում է Δz լրիվ աճի գծային մասը, այսինքն՝ $dz = A\Delta x + B\Delta y$:

Ֆունկցիայի լրիվ դիֆերենցիալը ներկայացվում է հետևյալ բանաձևով.

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy:$$

Նման ձևով երեք արգումենտների համար $u=f(x,y,z)$ ֆունկցիայի դիֆերենցիալը կլինի՝

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz:$$

Երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ է կոչվում առաջին կարգի դիֆերենցիալի դիֆերենցիալը. $d^2z=d(dz)$: Կարևոր է ընդգծել, որ dx և dy աճերը դիտարկվում են որպես հաստատուններ և դրանք պահում ենք նույնը երբ I կարգի դիֆերենցիալից անցնում ենք II կարգի դիֆերենցիալի: II կարգի դիֆերենցիալը ունի հետևյալ տեսքը.

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2:$$

772. Գտնել $f'_x(0,0)$ և $f'_y(0,0)$, եթե $f(x,y)=\sqrt[3]{xy}$, և պարզել ֆունկցիայի դիֆերենցելիությունը (0,0) կետում:

773. Պարզել հետևյալ ֆունկցիաների դիֆերենցելիությունը (0,0) կետում.

1) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, 2) $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$,

3) $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$,

4) $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & \text{եթե } x^2+y^2\neq 0\\ 0, \text{ եթե } x^2+y^2=0:\end{cases}$

774. Հաշվել հետևյալ ֆունկցիաների առաջին և երկրորդ կարգի դիֆերենցիալները.

1) $z = x^2 + xy + y^2$, 2) $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$,

3) $z = xe^y + ye^x$, 4) $z = x\sin y + y\sin x$,

5) $z = \ln(x + \ln y)$, 6) $z = xy\sin xy$,

7) $z = e^{\frac{y}{x}}$, 8) $z = \dfrac{xy}{x - y}$, 9) $z = xy\ln y$:

§4. ԲԱՐԴ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԱԾԱՆՑՅԱԼԸ: ԱԾԱՆՑՅԱԼ ՏՎՅԱԼ ՈՒՂՂՈՒԹՅԱՄԲ: ԳՐԱԴԻԵՆՏ

Դիցուք՝ z=f(x;y), որտեղ՝ $x = \varphi(t), y = \psi(t)$, և գոյություն ունի $=f(\varphi(t),\psi(t))$ բարդ ֆունկցիան: Եթե $f(x;y)$, $\varphi(t)$ և $\psi(t)$ ունկցիաները դիֆերենցելի են, ապա $z = f(\varphi(t),\psi(t))$ բարդ ունկցիայի ածանցյալը հաշվվում է հետևյալ բանաձևով.

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} :$$

Եթե z=f(x;y), որտեղ՝ $x = \varphi(u,v), y = \psi(u,v)$ և $(x;y)$, $\varphi(u,v)$, $\psi(u,v)$ ֆունկցիաները դիֆերենցելի են, ապա.

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial \Psi}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial \Psi}{\partial v}$$

Եթե OX առանցքը L ուղղության հետ կազմում է α անկյուն, և =f(x;y) ֆունկցիան դիֆերենցելի է, ապա դրա ածանցյալը L ւղղությամբ հաշվվում է հետևյալ բանաձևով.

$$\frac{\partial z}{\partial L} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\alpha :$$

$\left(\frac{\partial z(M_0)}{\partial x};\frac{\partial z(M_0)}{\partial y}\right)$ կոորդինատներով վեկտորը կոչվում է z=f(M ֆունկցիայի գրադիենտ M_0 կետում.

$$\operatorname{grad} z=\frac{\partial z}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial z}{\partial y}\bar{j}:$$

Եթե L ուղղությունը համընկնում է gradz -ի ուղղությանը ապա $\frac{\partial z}{\partial L}$ ածանցյալը ընդունում է իր ամենամեծ արժեքը այ կետում $(\operatorname{grad} z\neq 0)$:

775. Գտնել $\frac{dz}{dt}$-ն, եթե.

1) $z=x^2+xy+y^2, x=t^2, y=t^3,$

2) $z=e^{2(x^2-y^2)}, x=\cos t, y=\sin t,$

3) $z=\ln\sin\frac{x}{\sqrt{y}}, x=3t^2, y=\sqrt{1+t^2},$

4) $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}, x=e^{2t}+1, y=e^{2t}-1:$

776. Գտնել $\frac{\partial z}{\partial u}$ – ն և $\frac{\partial z}{\partial v}$ – ն, եթե $z=\frac{x^2}{y}$, որտեղ՝ $x=u-2v$, $y=v+2u:$

777. Գտնել $\frac{\partial z}{\partial u}$ և $\frac{\partial z}{\partial v}$ ածանցյալները, եթե.

1) $z=x^2+xy+y^2, x=u+2v, y=2u-v,$

2) $z=x^2+xy+y^2, x=uv, y=u^2+v^2,$

3) $z=x^2+xy+y^2, x=\cos(u+v), y=\sin uv:$

778. Ապացուցել՝ եթե z=f(x;y), որտեղ՝ $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$, ապա $\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$:

779. Ապացուցել՝ եթե

$z = xy + F\left(\frac{y}{x}\right)$, ապա $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z + xy$:

780. Ապացուցել՝ եթե

$z = y\varphi(u)$, որտեղ $u = x^2 - y^2$, ապա $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$:

781. ա) Գտնել $z = x^2 - 5y^2$ ֆունկցիայի ածանցյալը $M_0(2;1)$ կետում OX առանցքի հետ 30^0 անկյուն կազմող L ուղղությամբ:

բ) Հաշվել $z = x^3\sqrt{y^3}$ ֆունկցիայի ածանցյալները $M_0(-2;4)$ կետում OX առանցքի հետ $\alpha=30^0$, 45^0, 60^0, 90^0, 0^0 անկյուններ ազմող L ուղղություններով:

782. Հաշվել $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ֆունկցիայի ածանցյալը M_0 կետում $\overline{M_0M_1}$ վեկտորի ուղղությամբ.

ա) $M_0(3,4)$, $M_1(5,6)$, բ) $M_0(-4,3)$, $M_1(0,6)$:

783. Գտնել հետևյալ ֆունկցիաների գրադիենտները նշված կետերում.

1) $z = x^2 + y^3 - 3xy$, $M_0(2;5)$,

2) $z = \sqrt{x^2 - y^2}$, $M_0(5;3)$,

3) $z = \ln\cos\frac{x}{y}$, $M_0(\frac{\pi}{4};1)$,

4) $u = xyz$, $M_0(-2;1;3)$,

5) $z = 3x^2 + xy - y^2$, $M_0(-2;1)$:

§5. ՄԻ ՔԱՆԻ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆՆԵՐԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԷՔՍՏՐԵՄՈՒՄՆԵՐԸ

$M_0(x_0;y_0)$ կետը $z=f(x;y)$ ֆունկցիայի համար կոչվում է մաքսիմումի (մինիմումի) կետ, եթե գոյություն ունի M_0 կետի այնպիսի շրջակայք, որ այդ շրջակայքին պատկանող բոլոր $M(x;y)$ $(M\neq M_0)$ կետերի համար $f(x_0;y_0)> f(x;y)$ $(f(x_0;y_0)< f(x;y))$:

Մաքսիմումի և մինիմումի կետերը միասին կոչվում են՝ էքստրեմումի կետեր: Եթե $z=f(x;y)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է, ապա դրա մասնակի ածանցյալները էքստրեմումի կետերում հավասար են զրոյի.

$$\frac{\partial f(x_0;y_0)}{\partial x}=0,\ \frac{\partial f(x_0;y_0)}{\partial y}=0:$$

Դիֆերենցելի ֆունկցիաների համար այս պայմանները էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմաններ են: Այս պայմաններին բավարարող կետերը կոչվում են ստացիոնար կետեր: Ձևակերպենք էքստրեմումի բավարար պայմանը ստացիոնար կետերի համար (երկու փոփոխականի դեպքը):

Դիցուք՝ $M_0(x_0;y_0)$ կետը ստացիոնար կետ է: Նշանակենք.

$$A=\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x^2},\ B=\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x\partial y}, C=\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial y^2}:$$

Եթե $\Delta=AC-B^2>0$, ապա $z=f(x;y)$ ֆունկցիան M_0 կետում ունի էքստրեմում, ընդ որում, $A<0$ դեպքում՝ մաքսիմում, իսկ $A>0$ դեպքում՝ մինիմում: Եթե $\Delta=AC-B^2<0$, ապա M_0-ն էքստրեմումի կետ չէ: Եթե $\Delta=0$, ապա պետք է կատարել լրացուցիչ ուսումնասիրություններ:

Գործնականում հաճախ պահանջվում է գտնել $z=f(x;y)$ ֆունկցիայի էքստրեմումներն այն պայմանի դեպքում, երբ x և y փոփոխականները բավարարում են նաև $\varphi(x;y)=0$ հավասարմանը (կապի հավասարում): Այսպիսի էքստրեմումները կոչվում են պայմանական: Պայմանական էքստրեմումները գտնելու խնդիրը բերվում է

$$F=f(x;y)+\lambda\varphi(x;y)$$

ագրանժի ֆունկցիայի սովորական էքստրեմումները գտնելու
ադրին, որտեղ λ-ն անորոշ գործակից է: Լագրանժի ֆունկցիա-
համար էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմաններն են.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}+\lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}+\lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}=0 : \\ \varphi(x;y)=0 \end{cases}$$

այմանական էքստրեմումի բավարար պայման է Լագրանժի
ունկցիայի երկրորդ կարգի դիֆերենցիալի

$$d^2F=F''_{x^2}dx^2+2F''_{xy}dxdy+F''_{y^2}dy^2$$

անը $(x_0,\ y_0)$ ստացիոնար կետում, եթե dx-ը և dy-ը
$_x(x_0,y_0)dx+\varphi'_y(x_0,y_0)dy=0$ հավասարությանը բավարա-
ղ անկախ փոփոխականների կամայական աճերն են:

Եթե $d^2F>0$ ունենք պայմանական մինիմում, $d^2F<0$ պայ-
մանական մաքսիմում:

784. Գտնել հետևյալ ֆունկցիաների էքստրեմումները.

1) $z=x^2+xy+y^2-3x-6y$, 2) $z=x^3+y^3-3xy$,

3) $z=x^2+xy+y^2-2x-y$, 4) $z=x^4-2x^2+y^4+4xy-2y^2$,

5) $z=x^3y^2(6-x-y)$, 6) $z=\dfrac{1}{2}xy+(47-x-y)\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}\right)$,

7) $z=xy+\dfrac{50}{x}+\dfrac{20}{y},(x>0,y>0)$, 8) $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$,

9) $z=x^2+xy+y^2-4\ln x-10\ln y$, 10) $z=xy\ln(x^2+y^2)$,

11) $z=(5x+7y-25)e^{-(x^2+xy+y^2)}$, 12) $z=(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$,

13) $z=\sin x+\cos y+\cos(x-y)$, եթե $0\le x\le\dfrac{\pi}{2}, 0\le y\le\dfrac{\pi}{2}$,

14) $z=\sin x\sin y\sin(x+y)$, եթե $0\le x\le\pi, 0\le y\le\pi$:

785. Գտնել հետևյալ ֆունկցիաների պայմանական էքստրեմումները.

1) $z = x^2 + y^2$, եթե $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$, 2) $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, եթե $x + y = 2$,

3) $z = 2x + y$, եթե $x^2 + y^2 = 1$, 4) $z = xy$, եթե $x^2 + y^2 = 2$,

5) $z = x + y$, եթե $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{2}$,

6) $z = -xy$, եթե $2x + 3y - 5 = 0$:

786. $y^2 = 4x$ պարաբոլի վրա գտնել այն կետը, որի հեռավորությունը x-y+4=0 ուղղից ամենափոքրն է:

787. $x^2 - y^2 = 4$ հիպերբոլի վրա գտնել այն կետը, որի հեռավորությունը A(0,2) կետից փոքրագույնն է:

788. $x^2 + 4y^2 = 4$ էլիպսի վրա գտնել այն կետերը, որոնք 2x+3y-6=0 ուղղից ունեն առավելագույն և նվազագույն հեռավորություններ:

789. ***1.*** Ապացուցել, որ եթե n≥1, x≥0 և y≥0, ապա

$$\frac{x^n + y^n}{2} \geq \left(\frac{x + y}{2}\right)^n :$$

Լուծել որպես պայմանական էքստրեմումի խնդիր:

789.*2* .Գտնել a և b թվերը y=ax+b կախվածության դեպքում, եթե դիտումների արդյունքում ստացվել է հետևյալ աղյուսակը.

ա)

x	1	2	3	4	5	6
y	2	4,9	7,9	11,1	14,1	17

բ)

x	1	2	3	4	5
y	2,9	6,1	9,2	11,8	16

ԳԼՈՒԽ VI

ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐ

§1. ԱՆՈՐՈՇ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐ

1. Նախնական ֆունկցիա և անորոշ ինտեգրալ: Ինտեգրման հիմնական բանաձևերը

F(x) ֆունկցիան կոչվում է y=f(x) ֆունկցիայի նախնական ֆունկցիա X տիրույթում, եթե.

$$F'(x)=f(x) \text{ կամ՝ } dF(x)=f(x)dx,\ x\in X:$$

Ամեն մի անընդհատ f(x) ֆունկցիա ունի անվերջ բազմությամբ տարբեր նախնական ֆունկցիաներ, որոնք իրարից տարբերվում են հաստատուն գումարելիով:

Եթե F(x)-ը f(x)-ի նախնականն է, ապա F(x)+C ֆունկցիան, որտեղ C-ն կամայական հաստատուն է, նույնպես f(x)-ի նախնականն է, քանի որ.

$$[F(x)+C]'=F'(x)=f(x):$$

f(x) ֆունկցիայի բոլոր նախնականների համախմբությունը կոչվում է f(x) ֆունկցիայի անորոշ ինտեգրալ և նշանակվում է հետևյալ խորհրդանիշով՝ $\int f(x)dx$: Այսպիսով, սահմանման համաձայն՝ $\int f(x)dx=F(x)+C \Leftrightarrow F'(x)=f(x)$:

Անորոշ ինտեգրալի հատկությունները.

I. $\left[\int f(x)dx\right]'=f(x)$ կամ $d\int f(x)dx=f(x)dx$:

II. $\int F'(x)dx=F(x)+C$ կամ $\int dF(x)=F(x)+C$:

III. $\int af(x)dx=a\int f(x)dx$, որտեղ՝ a - ն հաստատուն է $(a\neq 0)$:

IV. $\int[f_1(x)\pm f_2(x)]dx=\int f_1(x)dx\pm\int f_2(x)dx$:

Ինտեգրման հիմնական բանաձևերը.

1. $\int u^{\alpha}du=\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\ \alpha\neq-1$:

1՛. $\int 1\cdot dx=\int dx=x+C$:

2. $\int u^{-1}du=\int\frac{du}{u}=\ln|u|+C$:

3. $\int a^{u}du=\frac{a^{u}}{\ln a}+C$:

3՛. $\int e^{u}du=e^{u}+C$:

4. $\int\sin u\,du=-\cos u+C$:

5. $\int\cos u\,du=\sin u+C$:

6. $\int\frac{du}{\cos^{2}u}=\operatorname{tg}u+C$:

7. $\int\frac{du}{\sin^{2}u}=-\operatorname{ctg}u+C$:

8. $\int\frac{du}{u^{2}+a^{2}}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a}+C=-\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{u}{a}+C$:

9. $\int\frac{du}{u^{2}-a^{2}}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right|+C$:

10. $\int\frac{du}{\sqrt{a^{2}-u^{2}}}=\arcsin\frac{u}{a}+C=-\arccos\frac{u}{a}+C$:

11. $\int\frac{du}{\sqrt{u^{2}\pm a^{2}}}=\ln\left|u+\sqrt{u^{2}\pm a^{2}}\right|+C$:

Այս բանաձևերում a-ն դրական հաստատուն է, իսկ $u=\varphi(x)$–ը՝ x անկախ փոփոխականի դիֆերենցելի ֆունկցիա $(\exists du=\varphi'(x)dx)$: Մասնավորապես, եթե u=x, ապա ստացվում են ինտեգրման պարզագույն բանաձևերը.

$$\int x^{\alpha}dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\ \int x^{-1}dx=\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+c \text{ և այլն:}$$

Անհրաժեշտ է հիշել.

$$\int\frac{u'}{u}dx = \ln|u| + C,\ \int\frac{u'dx}{2\sqrt{u}} = \sqrt{u} + C$$

հավասարությունները՝ որպես համապատասխան ածանցման բանաձևերի հակադարձում. դրանք որոշ դեպքերում արագացնում են հաշվարկը:

Նշենք ինտեգրալ հաշվելու ևս մի կանոն.

եթե $\int f(t)dt = F(t) + C$, ապա $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$:

Այստեղից էլ՝

$$\int\sin kxdx = \frac{1}{k}\cos kx + c,\ \int\cos kxdx = \frac{1}{k}\sin kx + c,\ \int e^{kx}dx = \frac{1}{k}e^{kx} + c$$

և այլն:

Հաճախ ինտեգրման բանաձևերը կիրառելու համար նախ հարկ է կատարել, այսպես կոչված, արտադրիչը դիֆերենցիալի նշանի տակ տանելու գործողությունը: Անորոշ ինտեգրալի առաջին հատկությունը՝

$$f(x)dx = d\left(\int f(x)dx\right),$$

ցույց է տալիս, որ այդ գործողությունը կատարելիս դիֆերենցիալի նշանի տակ ստացվում է f(x)-ի նախնականը:

Օրինակ՝

$dx = d(x+c),\ adx = d(ax+b),\ e^x dx = de^x,$

$2xdx = dx^2,\ \cos xdx = d\sin x,\ x^3dx = d\frac{x^4}{4},\ \frac{1}{x}dx = d\ln x,$

$\frac{1}{x^2+1}dx = d\operatorname{arctg}x,\ x^4dx = \frac{1}{5}dx^5,\ \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d\arcsin x,$

$\frac{dx}{\cos^2 x} = d\operatorname{tg}x,\ \frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}} = d\operatorname{tg}\frac{x}{2},\ 2\sin x\cos xdx = d\sin^2 x$ և այլն:

Այսպիսով՝ արտադրիչը դիֆերենցիալի նշանի տակ տանելուց կատարվում է արտադրիչի ինտեգրում:

Կատարել ինտեգրում (1, 2, 8, 9, 10, 11 բանաձևեր).

790. $\int(4x^3-5x^2+9x-2)dx;$ **791.** $\int\frac{dx}{x^3};$

792. $\int(ax^2+bx+c)dx;$ **793.** $\int x^3(3x^2-5x+2)dx;$

794. $\int(3+2x^5)^2dx;$ **795.** $\int x\sqrt[5]{x^2}dx;$

796. $\int\sqrt[3]{x}(1-\sqrt{x})dx$ **797.** $\int\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\sqrt[4]{x^3}\right)dx;$

798. $\int\sqrt{5x}dx;$ **799.** $\int\frac{dx}{\sqrt{3x}};$

800. $\int\frac{5x^3+4x^2-3}{x^2}dx;$ **801.** $\int(5x+2)^4dx;$

802. $\int\frac{8dx}{(3x+2)^7};$ **803.** $\int\sqrt{2+5x}dx;$

804. $\int\frac{dx}{\sqrt{2-3x}};$ **805.** $\int\frac{5x^2dx}{(x^3+2)^2};$

806. $\int x^3(4-5x^4)^5dx;$ **807.** $\int x^2\sqrt{4x^3+3}dx;$

808. $\int 5x\sqrt{7x^2+8}dx;$ **809.** $\int(x^2-3x+1)^{10}(2x-3)dx;$

810. $\int\frac{7x}{\sqrt[4]{3x^2-4}}dx;$ **811.** $\int\sqrt[3]{x}(3x^{\frac{4}{3}}+5)^{\frac{7}{3}}dx;$

812. $\int\frac{2-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}dx;$ **813.** $\int\frac{2-x^4}{1+x^2}dx;$

814. $\int\frac{dx}{3x};$ **815.** $\int\frac{dx}{x\ln x};$ **816.** $\int\frac{(2\ln x+3)^3}{x}dx;$

817. $\int\frac{dx}{2+5x};$ **818.** $\int\frac{3xdx}{5-x^2};$ **819.** $\int\frac{2x^2dx}{4x^3+5};$

820. $\int \frac{dx}{4x^2-9}$;

821. $\int \frac{dx}{(x-7)\sqrt{x}}$;

822. $\int \frac{e^x dx}{5+e^x}$;

823. $\int \frac{3e^{2x} dx}{4+5e^{2x}}$;

824. $\int \sin^5 x \cos x dx$;

825. $\int \sqrt{\sin x} \cos x dx$;

826. $\int (2\sin\frac{x}{2}+3)^2 \cos\frac{x}{2} dx$;

827. $\int \frac{5\sin x dx}{3+2\cos x}$;

828. $\int \frac{e^x+\cos x}{e^x+\sin x} dx$;

829. $\int \frac{3\cos 2x dx}{4-3\sin 2x}$;

830. $\int \frac{dx}{(2-3\mathrm{tg}x)\cos^2 x}$;

831. $\int \frac{\mathrm{tg}5x dx}{\cos^2 5x}$;

832. $\int \frac{dx}{(4+\mathrm{tg}3x)\cos^2 3x}$;

833. $\int \frac{4\cos x dx}{\sqrt{5-3\sin x}}$;

834. $\int \frac{dx}{\sin x}$;

835. $\int \frac{2x^2-8}{16-x^4} dx$;

836. $\int \frac{dx}{5x^2+6}$;

837. $\int \frac{dx}{\sqrt{4+3x^2}}$;

838. $\int \frac{dx}{7-9x}$;

839. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}$;

840. $\int \frac{x^3 dx}{x^8-2}$;

841. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$;

842. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$;

843. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}$;

844. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$;

845. $\int \frac{\arccos\frac{x}{2}}{\sqrt{4-x^2}} dx$;

846. $\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{2-\sin^4 x}} dx$;

847. $\int \frac{dx}{x(4-\ln^2 x)}$:

Կապարել ցուցչային ֆունկցիաների ինտեգրում.

848. $\int 5^x e^x dx$; **849.** $\int 5\, e^{3x} dx$; **850.** $\int 3e^{\frac{x}{2}} dx$;

851. $\int \frac{dx}{e^{2x}}$; **852.** $\int (e^{2x} + 3x) dx$;

853. $\int (e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}) dx$; **854.** $\int (e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}})^2 dx$;

855. $\int \sqrt[3]{e^x} dx$ **856.** $\int (e^x - e^{-x})^3 dx$;

857. $\int e^{\cos x} \sin x dx$; **858.** $\int e^{\sin x} \cos x dx$;

859. $\int x^2 e^{x^3} dx$; **860.** $\int \frac{e^{\sqrt{x}} dx}{\sqrt{x}}$;

861. $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$; **862.** $\int \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{x^3} dx$;

863. $\int \frac{4x^3}{e^{x^4}} dx$; **864.** $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 3} dx$;

865. $\int \frac{e^{4x} + 3}{e^{4x}} dx$; **866.** $\int \frac{5e^{tg3x}}{\cos^2 3x} dx$;

867. $\int \frac{e^{\cos x} \sin x}{e^{\cos x} + 4} dx$; **868.** $\int \frac{5 \cdot 3^{\ln x}}{x} dx$;

869. $\int x(1-x)^{10} dx$; **870.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}$;

871. $\int \frac{x^3 - 1}{x + 1} dx$; **872.** $\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)} dx$:

2. Ինտեգրում տեղադրման կամ փոփոխականի փոխարինման եղանակով

Ինտեգրման կարևորագույն մեթոդներից մեկը փոփոխականի փոխարինման մեթոդն է: Այսպես, եթե՝

$\int f(x)dx = F(x) + C$, ապա.

$$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C:$$

Այստեղ ենթադրվում է $f(\varphi(t))$ ֆունկցիայի գոյությունը, $f(x)$, $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$ ֆունկցիաների անընդհատությունը:

φ ֆունկցիան աշխատում ենք ընտրել այնպես, որ $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ ֆունկցիան ինտեգրելու համար ավելի հարմար լինի, քան f(x)-ը:

Նշենք եռանկյունաչափական տեղադրումների որոշ դասեր.

ա) եթե ինտեգրալը պարունակում է $\sqrt{a^2 - x^2}$ արտահայտությունը, ապա հարմար է տեղադրել $x = a\sin t$ (կամ $x = a\cos t$), այդ դեպքում՝

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t} = a\sqrt{1 - \sin^2 t} = a\sqrt{1 - \cos^2 t} = a\cos t;$$

բ) եթե ինտեգրալը պարունակում է $\sqrt{x^2 - a^2}$ արտահայտությունը, ապա հարմար է տեղադրել $x = a\sec t$, որտեղից.

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2\sec^2 t - a^2} = a\sqrt{\sec^2 t - 1} = a\mathrm{tg}t;$$

գ) եթե ինտեգրալը պարունակում է $\sqrt{x^2 + a^2}$ արտահայտությունը, ապա հարմար է տեղադրել $x = a\mathrm{tg}t$ կամ $x = a\mathrm{ctg}t$, որտեղից.

$$\sqrt{x^2 + a^2} = \sqrt{a^2\mathrm{tg}^2 t + a^2} = a\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2 t} = a\sec t:$$

873. Ինտեգրել՝ կապարելով նշված տեղադրումները.

1. $\int \frac{x^2dx}{x^6 - 6x^3 + 13}$, $\quad x^3 - 3 = t;$
2. $\int \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x}dx$, $\quad 1 + \ln x = t;$
3. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 2}}$, $\quad x = \frac{1}{t};$
4. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x + 1}}$, $\quad t = \sqrt{x + 1};$

5. $\int\frac{\cos x dx}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$, $\quad t=\sin x$;

6. $\int\frac{x^2 dx}{\sqrt{2-x}}$, $\quad \sqrt{2-x}=t$;

7. $\int\frac{x^5 dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $\quad \sqrt{1-x^2}=t$;

8. $\int x^5(2-5x^3)^{\frac{2}{3}}dx$, $\quad 2-5x^3=t^3$;

9. $\int\cos^5 x\sqrt{\sin x}dx$, $\quad \sin x=t$;

10. $\int\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx$, $\quad t=\operatorname{arctg}\sqrt{x}$;

11. $\int\frac{\sin 2x dx}{\sqrt{3-\cos^4 x}}$, $\quad \cos^2 x=t$;

12. $\int\frac{dx}{x\sqrt{4-\ln^2 x}}$, $\quad \ln x=t$;

13. $\int x\sqrt{x-1}dx$, $\quad \sqrt{x-1}=t$;

14. $\int x^3 e^{x^4}dx$, $\quad x^4=t$:

874. Հարմար տեղադրում կատարելով՝ հաշվել հետևյալ ինտեգրալները.

1. $\int\frac{1+x}{1+\sqrt{x}}dx$;

2. $\int\frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

3. $\int\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}dx$;

4. $\int\frac{dx}{x\sqrt{2x+1}}$;

5. $\int\frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$;

6. $\int\frac{\sin^3 x dx}{\sqrt{\cos x}}$;

7. $\int\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$;

8. $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}$;

9. $\int\frac{dx}{x^3\sqrt[3]{1+x^3}}$;

10. $\int\frac{e^x dx}{3+4e^x}$;

11. $\int\frac{dx}{\sin 2x}$;

12. $\int\frac{x^2 dx}{(x^2+1)^2}$;

13. $\int\sqrt{a^2-x^2}dx$;

14. $\int\frac{dx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$;

15. $\int\frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$:

3. Մասերով ինտեգրման եղանակ

Եթե u=u(x)-ը և v=v(x)-ը դիֆերենցելի ֆունկցիաներ են, ապա դրանց արտադրյալի համար ունենք՝ d(uv)=udv+vdu, որն ինտեգրելով, կստանանք՝

$$\int udv = uv - \int vdu :$$

Այս բանաձևը կոչվում է մասերով ինտեգրման բանաձև: Տրված ինտեգրալի նկատմամբ այս եղանակը կիրառելու համար պետք է կարողանալ ընդինտեգրալ արտահայտությունը տրոհել երկու արտադրիչների՝ որոնցից մեկը նշանակելով u-ով, մյուսը՝ dv-ով:

Երբեմն կարիք է լինում մասերով ինտեգրման բանաձևը կիրառել հաջորդաբար մի քանի անգամ:

Ամենից արդյունավետ կիրառումներն այն դեպքերում են, երբ ընդինտեգրալ արտահայտության մեջ որպես բազմապատկիչներ կան ցուցչային, լոգարիթմական, եռանկյունաչափական և հակադարձ եռանկյունաչափական ֆունկցիաներ: Օգտակար է հիշել, որ $x^n e^x$, $x^n \sin x$, $x^n \cos x$ ֆունկցիաները ինտեգրելիս որպես u պետք է վերցնել x^n-ը, իսկ $x^n \ln x$, $x^n \mathrm{arctg}x$, $x^n \arcsin x$ ֆունկցիաների դեպքում՝ $\ln x$, $\mathrm{arctg}x$, $\arcsin x$ ֆունկցիաները:

Մասերով ինտեգրման եղանակով հաշվել հետևյալ ինտեգրալները.

875. $\int x\cos x dx$; **876.** $\int \ln x dx$; **877.** $\int x\ln x dx$;

878. $\int xe^{x} dx$; **879.** $\int x^{2}\sin x dx$; **880.** $\int x^{2}\cos x dx$;

881. $\int \operatorname{arctg} x dx$; **882.** $\int x^{3}\ln x dx$; **883.** $\int \arcsin x dx$;

884. $\int x\sin 3x dx$; **885.** $\int x \operatorname{arctg} x dx$; **886.** $\int \frac{\ln x}{x^{2}} dx$;

887. $\int \frac{\arcsin x}{x^{2}} dx$; **888.** $\int \arccos x dx$; **889.** $\int x^{3}e^{x} dx$;

890. $\int \operatorname{arcctg} x dx$; **891.** $\int (5x-2)e^{3x} dx$;

892. $\int (4x-3)e^{-2x} dx$; **893.** $\int \frac{xdx}{\cos^{2} x}$; **894.** $\int x\sin^{2} x dx$;

895. $\int x\arcsin x dx$; **896.** $\int e^{x}\sin x dx$; **897.** $\int e^{x}\cos x dx$;

898. $\int e^{ax}\sin bx dx$; **899.** $\int e^{ax}\cos bx dx$:

4. Ռացիոնալ ֆունկցիաների ինտեգրումը

Եթե $P_n(x)$-ը n-րդ կարգի բազմանդամ է, իսկ $Q_m(x)$-ը՝ m-րդ կարգի, ապա՝

$$R(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

կոտորակը կոչվում է ռացիոնալ ֆունկցիա: Եթե $n \geq m$, ապա $R(x)$-ը կոչվում է անկանոն ռացիոնալ կոտորակ, իսկ $n<m$ դեպքում՝ կանոնավոր: Անկանոն ռացիոնալ կոտորակից կարելի է բաժանման միջոցով անջատել ամբողջ մասը՝

$$R(x)=M(x)+\frac{r_k(x)}{Q_m(x)}.$$

որտեղ՝ $M(x)$-ը բազմանդամ է, հետևաբար, դրա ինտեգրումը դժվարություն չի ներկայացնում, իսկ $r_k(x)$-ը $(k<m)$ մնացորդն է:

Այսպիսով, ցանկացած ռացիոնալ ֆունկցիայի ինտեգրումը հանգում է կանոնավոր ռացիոնալ կոտորակի ինտեգրման, որն, իր հերթին, բերվում է պարզ կոտորակների ինտեգրման:

Պարզ (պարզական) կոտորակները ունեն հետևյալ տեսքը՝

I. $\dfrac{A}{(x-a)^m}$, $m\in N$; II. $\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$, $n\in N$;

որտեղ՝ $\dfrac{p^2}{4}-q<0$, այսինքն՝ x^2+px+q քառակուսի եռանդամը չունի իրական արմատներ:

Բոլոր դեպքերում էլ ենթադրվում է, որ A, B, p, q, և a-ն իրական թվեր են:

Առաջին տիպի պարզ կոտորակները ինտեգրվում են 1. և 2. բանաձևերով.

ա) $m=1\Rightarrow \displaystyle\int\frac{Adx}{x-a}=A\ln|x-a|+C,$

բ) $m>1\Rightarrow \displaystyle\int\frac{Adx}{(x-a)^m}=-\frac{A}{m-1}\cdot\frac{1}{(x-a)^{m-1}}+C:$

Ցույց տանք II տիպի պարզ կոտորակի ինտեգրման եղանակը 1 դեպքում: Ունենք.

$$\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx,\qquad \frac{p^2}{4}-q<0:$$

Համարիչում անջատենք հայտարարի եռանդամի ածանցյալը.

$$Ax+B=(2x+p)\frac{A}{2}-\frac{Ap}{2}+B:$$

Այսպիսով.

$$\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx=\frac{A}{2}\int\frac{2x+p}{x^2+px+q}dx+(B-\frac{Ap}{2})\int\frac{dx}{x^2+px+q}=$$

$$=\frac{A}{2}\int\frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q}+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{(x+\frac{p}{2})^2+\frac{4q-p^2}{4}}=$$

$$=\frac{A}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C:$$

Նշենք, որ n>1 դեպքում երկրորդ տիպի պարզ կոտորակը ինտեգրվում է անդրադարձ բանաձևի օգնությամբ:

$$J_{n+1}=\int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}}=\frac{x}{2na^2\left(x^2+a^2\right)^n}+\frac{2n-1}{2na^2}J_n :$$

Հաշվել հետևյալ ինտեգրալները.

900. $\int\frac{3x+7}{4x-5}dx$, **901.** $\int\frac{4-3x}{2+5x}dx$, **902.** $\int\frac{3x-4}{x^2-2x-3}dx$,

903. $\int\frac{x-5}{x^2-7x+12}dx$, **904.** $\int\frac{dx}{x^2-2x+2}$,

905. $\int\frac{dx}{x^2+6x+25}$, **906.** $\int\frac{dx}{x^2-8x+1}$,

907. $\int\frac{dx}{9x^2-6x-8}$, **908.** $\int\frac{dx}{4x^2-4x+17}$,

909. $\int\frac{dx}{25x^2+10x+37}$, **910.** $\int\frac{3x-1}{x^2-4x+8}dx$,

911. $\int\frac{x+5}{x^2+8x+25}dx$, **912.** $\int\frac{dx}{(x^2+2x+10)^2}$,

913. $\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}$, **914.** $\int\frac{2x^2+3x-4}{x^2-5x+6}dx$,

915. $\int\frac{x^3+2x}{x^2-8x+9}dx$, **916.** $\int\frac{dx}{(x+1)(x-2)(x+3)}dx$,

917. $\int\frac{dx}{x^3-9x}$, **918.** $\int\frac{dx}{x^4+x^2}$,

919. $\int\frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}dx$, **920.** $\int\frac{dx}{x(x+1)^2}$,

921. $\int\frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)}dx$, **922.** $\int\frac{dx}{(x-2)(x^2+1)}$,

923. $\int\frac{dx}{x^3+1}$, **924.** $\int\frac{dx}{x^5-x^2}$,

925. $\int\frac{2x+3}{x^3-x^2+x-1}dx$, **926.** $\int\frac{x^4}{x^4-16}dx$:

5. Եռանկյունաչափական ֆունկցիաների մի քանի դա- րի ինտեգրումը

Եթե R(u;v)-ն երկու փոփոխականի ռացիոնալ ֆունկցիա է, պա R(sinx; cosx)dx դիֆերենցիալի ինտեգրումը բերվում է ացիոնալ ֆունկցիաների ինտեգրման՝ $\mathrm{tg}\frac{x}{2}=t$ փոփոխականի ոխարինմամբ:

Եթե R(u)-ն u-ի ռացիոնալ ֆունկցիա է, ապա R(sinx) cosx կամ cosx)sinx ֆունկցիաների ինտեգրումը բերվում է ռացիոնալ ունկցիաների ինտեգրման՝ ավելի պարզ sinx=t կամ cosx=t ոփոխականի փոխարինմամբ:

$$\int \sin ax \cos bx dx, \qquad \int \sin ax \sin bx dx, \qquad \int \cos ax \cos bx dx$$

տեգրալները հաշվելիս օգտվում ենք եռանկյունաչափական ունկցիաների արտադրյալը գումարի վերածելու բանաձևերից:

Կատարել ինտեգրում.

927. $\int \frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}$;

928. $\int \frac{dx}{3+5\sin x+3\cos x}$;

929. $\int \frac{\sin x}{1-\sin x}dx$;

930. $\int \frac{dx}{\sin x\cos^2 x}$;

931. $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$;

932. $\int \frac{\sin x\cos x}{3\sin^2 x+4}dx$;

933. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x+\sin x}dx$;

934. $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$;

935. $\int \frac{\cos^5 x}{\sin x}dx$;

936. $\int \frac{\mathrm{ctg}^2 x}{\sin x}dx$;

937. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$;

938. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^6 x}dx$;

939. $\int \frac{dx}{\sin x\cos^3 x}$;

940. $\int \sin 3x dx$;

941. $\int \sin\frac{x}{3}dx$;

942. $\int \cos 2x dx$;

943. $\int \cos\frac{x}{5}dx$; **944.** $\int \mathrm{tg}5xdx$;

945. $\int \mathrm{ctg}\frac{x}{4}dx$; **946.** $\int \frac{dx}{\cos^2 5x}$;

947. $\int \frac{dx}{\sin^2 3x}$; **948.** $\int \frac{xdx}{\cos^2(1-x^2)}$;

949. $\int \frac{5x^2dx}{\sin^2(4-x^3)}$; **950.** $\int \frac{\cos\frac{1}{x}dx}{x^2}$;

951. $\int \frac{\sin\sqrt{5x}}{\sqrt{5x}}dx$; **952.** $\int x^2\mathrm{tg}(x^3)dx$;

953. $\int 5x^3\mathrm{ctg}(x^4)dx$; **954.** $\int e^{3x}\sin(e^{3x})dx$;

955. $\int \sin^4 x\cos xdx$; **956.** $\int (x^2-\sin 3x)dx$;

957. $\int \frac{\sin 5x}{\sqrt{2+\cos 5x}}dx$; **958.** $\int \sin^3\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}dx$;

959. $\int \sin 5x\cos 5xdx$; **960.** $\int \sin 3x\cos 5xdx$;

961. $\int \sin 2x\cos 7xdx$; **962.** $\int \sin 5x\sin 3xdx$;

963. $\int \sin 4x\sin 7xdx$; **964.** $\int \cos 3x\cos 2xdx$;

965. $\int \cos 8x\cos 10xdx$; **966.** $\int \sin^2 xdx$;

967. $\int \cos^2 xdx$; **968.** $\int \sin^2\frac{x}{3}dx$; **969.** $\int \cos^2\frac{x}{4}dx$;

970. $\int \sin^3 xdx$; **971.** $\int \sin^3 x\cos^2 xdx$;

972. $\int \sin^4 x\cos^3 xdx$; **973.** $\int \sin^3 x\cos^4 xdx$;

974. $\int \sin^2 x\cos^5 xdx$; **975.** $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx$;

976. $\int \cos^3 xdx$; **977.** $\int \sin^2 2x\cos^2 2xdx$;

978. $\int \sin^4 x dx$; **979.** $\int \cos^4 x dx$; **980.** $\int tg^2 x dx$;

981. $\int tg^3 x dx$; **982.** $\int ctg^2 x dx$; **983.** $\int ctg^3 x dx$;

984. $\int tg^4 x dx$; **985.** $\int tg^5 x dx$; **986.** $\int ctg^4 x dx$;

987. $\int ctg^5 x dx$:

6. Պարզագույն իռացիոնալ ֆունկցիաների ինտեգրումը

Սովորաբար պարզ իռացիոնալ արտահայտությունների ինտեգրալները պարզական ձևափոխություններով կամ ինտեգրման տարբեր մեթոդներով բերվում են աղյուսակային ինտեգրալների:

$x^m(a+bx^n)^p dx$... դիֆերենցիալները (m, n, p թվերը ռացիոնալ են), որոնք կոչվում են բինոմական դիֆերենցիալներ, ինտեգրվում են միայն հետևյալ դեպքերում՝

ա) եթե p-ն ամբողջ թիվ է, ապա բինոմական դիֆերենցիալի ինտեգրումը բերվում է ռացիոնալ ֆունկցիայի ինտեգրման՝ $t=\sqrt[k]{x}$ տեղադրումով, որտեղ k-ն m և n անկրճատելի կոտորակների հայտարարների ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկն է,

բ) եթե $\frac{m+1}{n}$ թիվն է ամբողջ, ապա նշանակում ենք $t=\sqrt[k]{a+bx^n}$, որտեղ՝ k-ն p անկրճատելի կոտորակի հայտարարն է,

գ) եթե $\frac{m+1}{n}+p$ թիվն է ամբողջ, ապա $t=\sqrt[k]{ax^{-n}+b}$, որտեղ՝ k-ն p անկրճատելի կոտորակի հայտարարն է:

Հաշվել հետևյալ ինտեգրալները.

988. $\int \frac{dx}{\sqrt{3+12x-4x^2}}$; **989.** $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+8x+25}}$;

990. $\int \frac{3x+5}{\sqrt{4x^2+3}}dx;$

991. $\int \frac{x-5}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx;$

992. $\int \frac{3x-4}{\sqrt{6x-x^2-8}}dx;$

993. $\int \frac{2x-1}{\sqrt{2x^2+8x+1}}dx;$

994. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x+1}};$

995. $\int \frac{5x+3}{\sqrt{5+4x-4x^2}}dx;$

996. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}};$

997. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+5x}};$

998. $\int \frac{5dx}{\sqrt{9-8x-7x^2}};$

999. $\int \frac{2dx}{\sqrt{3-2x-x^2}};$

1000. $\int \frac{6x+5}{\sqrt{9x^2+1}}dx;$

1001. $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x}}dx;$

1002. $\int \frac{1-2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx;$

1003. $\int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}}dx;$

1004. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{(x^2+1)^3}}dx;$

1005. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}};$

1006. $\sqrt{x^3+x^4}dx;$

1007. $\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}dx;$

1008. $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}dx;$

1009. $x\sqrt{1-x}dx;$

1010. $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}dx;$

1011. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}};$

1012. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}};$

1013. $\int \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}dx;$

1014. $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{x-1}+1};$

1015. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx:$

§2. ՈՐՈՇՅԱԼ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐ

1. Որոշյալ ինտեգրալի սահմանումը. Նյուտոն- Լայբնիցի բանաձևը

Դիցուք՝ $y=f(x)$ սահմանափակ ֆունկցիան որոշված է $[a;b]$ հատվածի վրա: $[a;b]$ հատվածը x_i կետերով տրոհենք կամայական n մասերի: Նշանակենք՝

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b,$$
$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1};\ i = 1,2,\ldots n,$$
$$\lambda = \max_i\{\Delta x_i\}:$$

Ամեն մի $[x_{i-1};x_i]$ հատվածից վերցնելով մի ξ_i կետ, կազմենք հետևյալ գումարը.

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n$$

S_n գումարը կոչվում է $y=f(x)$ ֆունկցիայի ինտեգրալային գումար $[a;b]$ հատվածում:

Եթե գոյություն ունի $\lim\limits_{\lambda\to 0} S_n = S$ վերջավոր սահմանը, անկախ $[a;b]$ հատվածի տրոհման եղանակից և ξ_i կետերի ընտրությունից, ապա $f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է ինտեգրելի $[a;b]$ հատվածում, իսկ S վերջավոր սահմանը՝ $y=f(x)$ ֆունկցիայի որոշյալ ինտեգրալ $[a;b]$ հատվածում և նշանակվում է հետևյալ սիմվոլով.

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx:$$

a և b թվերը կոչվում են ինտեգրալի, համապատասխանաբար՝ ստորին և վերին սահմաններ:

Դիցուք՝ $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է $[a;b]$ միջակայքում: Այս դեպքում այդ միջակայքում գոյություն ունի $f(x)$ ֆունկցիայի անորոշ ինտեգրալը՝

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

և ճիշտ է հետևյալ բանաձևը.

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a):$$

Այս բանաձևը կոչվում է Նյուտոն-Լայբնիցի բանաձև: Այսպիսով, $[a;b]$ հատվածում անընդհատ f(x) ֆունկցիայի որոշյալ ինտեգրալը հաշվելու համար նախ գտնում ենք դրա նախնականը (անորոշ ինտեգրալը), ապա տեղադրում սահմանները:

1016. Հաշվել հետևյալ որոշյալ ինտեգրալները.

1) $\int_1^3 x^3dx;$ 2) $\int_0^2 x^2\sqrt{x^3+1}dx;$ 3) $\int_{e^2}^{e^3} \frac{\ln^2 xdx}{x}:$

Հաշվել հետևյալ որոշյալ ինտեգրալները, ելնելով որոշյալ ինտեգրալի սահմանումից՝ ինտեգրման միջակայքի տրոհումը և կետերի ընտրությունը կատարելով հարմար եղանակով.

1017. $\int_{-1}^2 x^2dx;$ **1018.** $\int_0^1 2^x dx;$

1019. $\int_0^1 x^3dx;$ **1020.** $\int_1^2 \frac{dx}{x};$ $x_i = 2^{\frac{i}{n}}:$

Հաշվել հետևյալ որոշյալ ինտեգրալները Նյուտոն-Լայբնիցի բանաձևով.

1021. $\int_{-2}^1 x^2dx;$ **1022.** $\int_0^8 (\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x^2})dx;$

1023. $\int_0^\pi \sin xdx;$ **1024.** $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos xdx;$

1025. $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}};$ **1026.** $\int\limits_0^1 (3x-2)^4 dx;$

1027. $\int\limits_e^{e^2} \frac{2\ln x+1}{x} dx;$ **1028.** $\int\limits_0^5 \sqrt{4+x}\,dx;$

1029. $\int\limits_{-3}^{-1} \frac{dx}{(10+3x)^3};$ **1030.** $\int\limits_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx;$

1031. $\int\limits_0^{16} \frac{dx}{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}};$ **1032.** $\int\limits_0^4 x\sqrt{x^2+9}\,dx;$

1033. $\int\limits_e^{e^2} \frac{\ln^3 x dx}{x};$ **1034.** $\int\limits_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^3}};$

1035. $\int\limits_{\ln 6}^{\ln 22} \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x+3}};$ **1036.** $\int\limits_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}};$

1037. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5};$ **1038.** $\int\limits_0^2 xe^{x^2} dx;$

1039. $\int\limits_{e^2}^{e^5} \frac{\ln x-1}{x\sqrt{\ln x-1}} dx;$ **1040.** $\int\limits_1^{e^3} \frac{dx}{x(1+\ln x)}$:

Որոշյալ ինտեգրալի օգնությամբ հաշվել հետևյալ սահմանները.

1041. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}\right);$

1042. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}\right);$

1043. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n^2+1^2}+\frac{1}{n^2+2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2+n^2}\right);$

1044. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^p+2^p+\ldots+n^p}{n^{p+1}}$:

2. Մասերով ինտեգրման եղանակը որոշյալ ինտեգրալի համար

Ենթադրենք՝ u=u(x) և v=v(x) ֆունկցիաները իրենց ածանցյալների հետ միասին անընդհատ են $[a;b]$ հատվածում: Դիֆերենցելով uv արտադրյալը՝ կստանանք. d(uv)=udv+vdu: Ինտեգրելով այս բանաձևի երկու կողմերը a-ից մինչև b, կունենանք մասերով ինտեգրման բանաձևը որոշյալ ինտեգրալի համար:

$$\int_a^b u\,dv = (uv)\Big|_a^b - \int_a^b v\,du :$$

Հաշվել մասերով ինտեգրման եղանակով.

1045. $\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}dx;$ **1046.** $\int_1^e x\ln x dx;$

1047. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx;$ **1048.** $\int_0^{\pi} x^2\cos x dx;$

1049. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{xdx}{\sin^2 x};$ **1050.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin^2 x dx;$

1051. $\int_1^2 x^3\ln x dx;$ **1052.** $\int_1^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx;$

1053. $\int_0^1 \mathrm{arctg} x dx;$ **1054.** $\int_0^1 xe^{3x}dx;$

1055. $\int_0^1 e^x x^2 dx;$ **1056.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{3x}\cos x dx;$

1057. $\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x| dx;$ **1058.** $\int_0^1 \arcsin x dx;$ **1059.** $\int_0^{\sqrt{3}} x\,\mathrm{arctg} x dx :$

3. Փոփոխականի փոխարինումը որոշյալ ինտեգրալում

Դիցուք՝ y=f(x) ֆունկցիան անընդհատ է $[a;b]$ հատվածում, $x=\varphi(t)$ $(\alpha \le t \le \beta)$ ֆունկցիայի արժեքները դուրս չեն գալիս $[a;b]$ հատվածից, ընդ որում՝ $\varphi(\alpha)=a, \varphi(\beta)=b$, $[a;b]$ հատվածում $\varphi(t)$ ֆունկցիան ունի անընդհատ $\varphi'(t)$ ածանցյալ:

Այս պայմանների դեպքում ճիշտ է հետևյալ բանաձևը՝

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt:$$

Հաշվել հետևյալ ինտեգրալները՝ կատարելով նշված տեղադրումները.

1060. $\int_1^6 \frac{dx}{1+\sqrt{3x-2}}$, $\sqrt{3x-2}=t$; **1061.** $\int_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$, $\sqrt{e^x+1}=t$;

1062. $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$, $\sqrt{x}=t$; **1063.** $\int_0^2 \sqrt{16-6x}dx$, $\sqrt{16-6x}=t$;

1064. $\int_0^3 x\sqrt{x^2+16}dx$, $\sqrt{x^2+16}=t$;

1065. $\int_0^{\ln 5} \sqrt{e^x-1}dx$, $\sqrt{e^x-1}=t$;

1066. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\alpha \sin^4\alpha d\alpha$, $\sin\alpha=t$; **1067.** $\int_0^1 \frac{dx}{1+e^{2x}}$, $x=\ln t$;

1068. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cos^5 x dx$, $\cos x=t$; **1069.** $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$, $x=\mathrm{tg}t$;

1070. $\int_0^3 \sqrt{25-3x}dx$, $\sqrt{25-3x}=t$; **1071.** $\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}dx}{x^2}$, $x=\cos t$:

Հետևյալ ինտեգրալները հաշվել փոփոխականի հարմար փոխարինումով.

1072. $\int\limits_{-1}^{1}\frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}$, **1073.** $\int\limits_{0}^{a}x^2\sqrt{a^2-x^2}dx$,

1074. $\int\limits_{0}^{0,75}\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$, **1075.** $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 4}\frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$:

1076. Ապացուցել՝ եթե f(x)-ը անընդհատ է $[0,1]$ հատվածում, ապա.

ա) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)dx=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)dx$;

բ) $\int\limits_{0}^{\pi}xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int\limits_{0}^{\pi}f(\sin x)dx$:

1077. Ապացուցել՝ եթե f(x)-ը անընդհատ է $[-\ell,\ell]$ հատվածում և զույգ, ապա.

$$\int\limits_{-\ell}^{\ell}f(x)dx=2\int\limits_{0}^{\ell}f(x)dx,$$

իսկ եթե կենտ, ապա. $\int\limits_{-\ell}^{\ell}f(x)dx=0$:

4. Անիսկական ինտեգրալներ

Ենթադրենք՝ y=f(x) ֆունկցիան որոշված է $[a;+\infty)$ միջակայքում և ցանկացած A>a թվի համար ինտեգրելի է $[a;A]$ հատվածում: Եթե գոյություն ունի $\lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_{a}^{A}f(x)dx$ սահմանը, ապա դա կոչվում է f(x) ֆունկցիայի անիսկական ինտեգրալ $[a;+\infty)$ միջակայքում և նշանակվում է հետևյալ կերպ`

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx :$$

Եթե այդ սահմանը վերջավոր է, ապա y=f(x) ֆունկցիան կոչվում է ինտեգրելի $[a;+\infty)$ միջակայքում, իսկ $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ ինտեգրալը` զուգամետ: Հակառակ դեպքում, եթե այդ սահմանը անվերջ է կամ գոյություն չունի, այդ ինտեգրալը կոչվում է տարամետ: Նման ձևով էլ սահմանվում են անիսկական ինտեգրալները $(-\infty;a]$ և $(-\infty;+\infty)$ միջակայքերում:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{A\to-\infty}\int_A^a f(x)dx,\quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{A\to-\infty\\ B\to+\infty}}\int_A^B f(x)dx :$$

Այժմ սահմանենք անիսկական ինտեգրալ այնպիսի ֆունկցիայի համար, որը $[a;b]$ հատվածում սահմանափակ չէ:

Դիցուք` y=f(x) ֆունկցիան որոշված է $[a;b)$ կիսաբաց միջակայքում, ընդ որում` $\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = \infty$ (այս դեպքում x=b կետը կոչվում է f(x) ֆունկցիայի եզակի կետ): Ենթադրենք նաև, որ ցանկացած $\varepsilon > 0$ թվի համար $(0 < \varepsilon < b-a)$ $y = f(x)$ ֆունկցիան ինտեգրելի է $[a;b-\varepsilon]$ հատվածում: Եթե գոյություն ունի $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ սահմանը, ապա այն կոչվում է y=f(x) ֆունկցիայի անիսկական ինտեգրալ $[a;b]$ միջակայքում և նշանակվում է.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx :$$

Այստեղ ևս, եթե սահմանը վերջավոր է, ապա անիսկական ինտեգրալը կոչվում է զուգամետ, հակառակ դեպքում` տարամետ:

Եթե y=f(x) ֆունկցիայի եզակի կետը հատվածի ձախ ծայրն է կամ $[a;b]$ հատվածի ներքին c կետը, ապա, անիսկական ինտեգրալները, համապատասխանաբար, սահմանվում են հետևյալ ձևով.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx,$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\delta\to+0\\ \varepsilon\to+0}}\left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\delta}^b f(x)dx\right]:$$

Հաշվել հետևյալ անիսկական ինտեգրալները.

1078. $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x},\ a>1:$ **1079.** $\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}x}{1+x^2}dx:$ **1080.** $\int_0^{+\infty}\frac{xdx}{1+x^2}:$

1081. $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}:$ **1082.** $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^2};$ **1083.** $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2};$

1084. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2};$ **1085.** $\int_{-1}^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};$ **1086.** $\int_0^2\frac{2dx}{\sqrt{4-x^2}};$

1087. $\int_0^{+\infty}e^{-3x}dx;$ **1088.** $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2xdx}{1+x^4};$ **1089.** $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2};$

1090. $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x-2};$ **1091.** $\int_0^1\ln xdx;$

1092. $\int_0^{+\infty}e^{-ax}\cos bxdx, a>0;$ **1093.** $\int_0^{+\infty}e^{-ax}\sin bxdx,\ a>0;$

1094. ա) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin xdx;$ բ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos xdx:$

Հետազոտել հետևյալ ինտեգրալների զուգամիտությունը.

1095. $\int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 - x^2 + 1}$; **1096.** $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$;

1097. $\int_0^{2} \frac{dx}{\ln x}$; **1098.** $\int_0^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n} dx$;

1099. $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{arctg} x}{x^n} dx$; **1100.** $\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^n} dx$; $n \geq 0$:

5. Որոշյալ ինտեգրալի կիրառությունները

ա) Հարթ պատկերի մակերեսի հաշվումը.

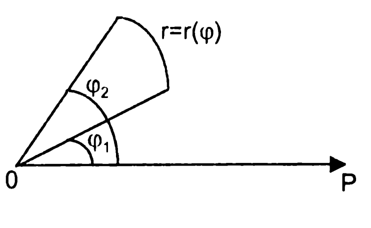
Եթե կորագիծ սեղանը սահմանափակված է վերևից $y = f(x) \geq 0$ անընդհատ կորով, ներքևից՝ OX առանցքով և կողքերից՝ x=a, x=b ուղիղներով, ապա կորագիծ սեղանի մակերեսը որոշվում է՝ $S = \int_a^b f(x)dx$ բանաձևով:

Ընդհանուր դեպքում, երբ հարթ պատկերը սահմանափակված է $y = f_1(x)$ և $y = f_2(x)$ $(f_2(x) \geq f_1(x),\ a \leq x \leq b)$ x=a, x=b գծերով, ապա այդ պատկերի մակերեսը հաշվվում է հետևյալ բանաձևով.

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx :$$

Եթե պատկերը սահմանափակված է $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$, $r = r(\varphi)$ գծերով (կոչվում է կորագիծ սեկտոր), ապա դրա մակերեսը հաշվվում է հետևյալ բանաձևով.

$$S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi)d\varphi :$$



Գտնել տրված գծերով սահմանափակված հարթ պատկերների մակերեսները:

1101. $y=\dfrac{bx-x^2}{3}$, $y=0$, $x=1$, $x=4$:

1102. $x^2=4y$, $y^2=4x$:

1103. $y=x^2$, $x=2$, $x=4$, $y=0$:

1104. $y=x^2-6x$, $x=1$, $x=4$, $y=0$:

1105. $y=3-2x-x^2$, $y=0$:

1106. $y=x^2-6x+5$, $2y-x+1=0$:

1107. $x^2-2y=0$, $x+y-4=0$:

1108. $y=3x^2+1$, $y=3x+7$:

1109. $y=3+2x-x^2$, $y+x-3=0$:

1110. $y=x^2$, $y=6-2x^2$:

1111. $y=x^2-2$, $y=6-x^2$:

1112. $xy=4$, $y+x-5=0$:

1113. $xy=6$, $y=7-x$:

1114. $y=\dfrac{a^3}{x^2+a^2}$, $y=0$:

1115. $y=\ln x$, $y=0$, $x=1$, $x=e$:

1116. $y^2+8x=16$, $y^2-24x=48$:

1117. $y=\dfrac{1}{1+x^2}$, $y=\dfrac{x^2}{2}$:

1118. $r^2=a^2\cos 2\varphi$ (լեմնիսկատ):

1119. $r=a(1-\cos\varphi)$:

1120. $r=a\sin 3\varphi$:

1121. $r=\dfrac{a}{\varphi}$, $\dfrac{\pi}{4}\le\varphi\le 2\pi$:

1122. $r=a\sin 2\varphi$:

1123. $r = a\cos 3\varphi$:

1124. $r = ae^{\varphi},\ -\pi \le \varphi \le \pi$:

1125. Ապացուցել՝ եթե ուռուցիկ պատկերի տրամագիծը՝ d=1 ($d=\sup M_1M_2$, որտեղ՝ M_1M_2–ը պատկանում է պատկերին), ապա պատկերի մակերեսը բավարարում է.

$$S \le \frac{\pi}{4}$$ անհավասարությանը:

բ) Աղեղի երկարության հաշվումը

Որոշ կորի $y = f(x)$ $(a \le x \le b)$ աղեղի երկարությունը՝ y=f(x)-ը, անընդհատ դիֆերենցելի ֆունկցիա է. հաշվվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx:$$

$r = r(\varphi), \alpha \le \varphi \le \beta$ աղեղի երկարությունը, որտեղ՝ $r(\varphi)$-ն անընդհատ դիֆերենցելի ֆունկցիա է, հաշվվում է հետևյալ բանաձևով.

$$L = \int_a^b \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2}\,d\varphi:$$

Գտնել հետևյալ կորերի աղեղների երկարությունները:

1126. $y = x\sqrt{x},\ 0 \le x \le 4$:

1127. $y^2 = 8x,\ \ 0 \le x \le \frac{1}{4}$:

1128. $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x,\ \ 1 \le x \le e$:

1129. $y = \ln\cos x,\ \ 0 \le x \le \frac{\pi}{12}$:

1130. $r = a(1 + \cos\varphi)$:

1131. $r = a\sin^3\frac{\varphi}{3}$:

1132. $r = a\varphi,\ \ 0 \le \varphi \le 2\pi$:

գ) Պտտման մարմնի ծավալի հաշվումը.

Կորագիծ սեղանի OX առանցքի շուրջը պտտելուց առաջացած մարմնի ծավալը որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx :$$

Ընդհանուր դեպքում, x=a և x=b հարթությունների միջև ընկած մարմնի ծավալը հաշվվում է.

$$V = \int_a^b S(x)dx$$

բանաձևով, որտեղ՝ S(x)-ը այդ մարմնի և x կետում OX առանցքին ուղղահայաց հարթության հատույթի մակերեսն է:

Դիցուք՝ պահանջվում է հաշվել այն մարմնի ծավալը, որն առաջանում է $y = f_1(x)$ և $y = f_2(x)$, $(f_1(x) \le f_2(x))$, x=a, x=b գծերի միջև գտնվող հարթ պատկերը OX առանցքի շուրջ պտտելուց:

Որոնելի ծավալը կարելի է դիտել որպես երկու սեղանակերպերի պտտումից առաջացած ծավալների տարբերություն.

$$V = \pi \int_a^b \left[(f_2(x))^2 - (f_1(x))^2\right] dx :$$

Գտնել այն մարմնի ծավալը, որն առաջանում է տրված գծերով սահմանափակված հարթ պատկերը պտտելով կոորդինատային առանցքներից մեկի շուրջը.

ա) OX առանցքի շուրջը:

1133. $y = \sin x, \quad y = 0, x = 0, x = \pi :$

1134. $y = x^2 + 1, \quad y = 2x + 1 :$

1135. $y = x^2 + 1, \quad x = 1, y = 0, x = 0 :$

1136. $y = x^2 + 2, \quad 2x - y + 2 = 0 :$

1137. $xy = 9, \quad y = 10 - x :$

1138. $y = x^2 + 4, \quad x = 3, y = 0, x = 0 :$

1139. $y = \sqrt{x-5}, \quad x = 9, y = 0 :$

1140. $y = \sqrt{x-3}, \quad x = 7, y = 0 :$

1141. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$:

1142. $y^2=9x, \quad y=3x$:

1143. $y^2=9x, \quad x^2=9y$:

1144. $y^2=4x, \quad x^2=4y$:

բ) OY առանցքի շուրջը:

1145. $y=e^{-x}, \quad y=0, \quad 0\le x<+\infty$:

1146. $y^2=4-x, \quad x=0$:

1147. $x^2-y^2=4, \quad y=-2, y=2$:

1148. $y=\cos x, \quad y=-1$, երբ $-\pi\le x\le\pi$:

1149. $y=x\sqrt{-x}, \quad x=-4, y=0$:

1150. $y^2=(x+4)^3, \quad x=0$:

ԳԼՈՒԽ VII

ՇԱՐՔԵՐ

§1. ԹՎԱՅԻՆ ՇԱՐՔԵՐ

1. Հիմնական գաղափարներ

Հետևյալ տեսքի արտահայտությունը՝

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n,$$

որտեղ a_1, a_2, a_3, ... մի որևէ անվերջ հաջորդականության անդամներն են, կոչվում է անվերջ շարք կամ պարզապես շարք:

a_n-ը ($n=1,2,\ldots$) կոչվում է շարքի n-րդ անդամ կամ ընդհանուր անդամ: Նշանակենք. $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$:

S_n-ը կոչվում է շարքի n-րդ մասնակի գումար:

Շարքը կոչվում է զուգամետ, եթե S_n հաջորդականությունը ունի վերջավոր S սահմանը, այսինքն՝

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

ընդ որում S թիվը կոչվում է շարքի գումար:

Շարքը կոչվում է տարամետ, եթե S_n հաջորդականությունը տարամետ է, այսինքն S_n-ի սահմանը գոյություն չունի կամ հավասար է ∞:

Կոշիի զուգամիտության հայտանիշը.

Որպեսզի շարքը լինի զուգամետ անհրաժեշտ է և բավարար, որ $\forall\varepsilon > 0$ թվի համար $\exists$ ունենա $n_0 = n_0(\varepsilon)$ բնական թիվ այնպիսին, որ n_0-ից մեծ բոլոր բնական n թվերի և $\forall p$ բնական թվի համար տեղի ունենա

$$\left|S_{n+p} - S_n\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| < \varepsilon:$$

Շարքերի զուգամիտության սահմանման միջոցով պարզել հետևյալ շարքերի զուգամիտության հարցը և զուգամիտության դեպքում գտնել շարքի գումարը:

1151. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots$

1152. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$

1153. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots$

1154. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}=1-1+1-\ldots+(-1)^{n-1}+\ldots$

1155. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$:

1156. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$:

1157. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$:

1158. $\sum_{n=0}^{\infty}q^n,\ |q|<1$:

1159. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{2}\cdot n$:

1160. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)$:

1161. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$:

1162. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$:

1163. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{9n^2+12n-5}$:

1164. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{4n^2+8n+3}$:

1165. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{9n^2+3n-2}$:

1166. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{9n^2+6n-8}$:

1167. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{4n^2+4n-3}$:

1168. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{9n^2+21n-8}$:

1169. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$:

1170. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$:

1171. Ապացուցել՝ եթե $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ և $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ շարքերը զուգամետ են,

և $a_n \le c_n \le b_n$, ապա $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ շարքը զուգամետ է:

1172. Ապացուցել, որ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ շարքը, եթե $p>1$, զուգամետ շարք է:

2. Շարքի զուգամիտության անհրաժեշտ պայմանը

Եթե շարքը զուգամետ է, ապա դրա ընդհանուր անդամը ձգտում է 0-ի, հակառակն, ընդհանրապես ասած, ճիշտ չէ: Օրինակ՝ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ շարքի համար $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, բայց շարքը տարամետ է:

Պարզել՝ հետևյալ շարքերի համար անհրաժեշտ պայմանը բավարարվա՞ծ է, թե՞ ոչ:

1173. $\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{arctg} \frac{1}{n}$:

1174. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^3+1}}$:

1175. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{(n+1)(n+2)}}$:

1176. $\sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{1}{n}$:

1177. $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{1}{\sqrt{n}}$:

1178. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3n}$:

3. Դրական անդամներով շարքեր: Բաղդատման հայտանիշեր

Բաղդատման առաջին հայտանիշը

Դիցուք՝ տրված են (1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \; (a_n > 0)$ և (2) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \; (b_n > 0)$ շարքերը: Եթե $a_n \le b_n$, $n = 1,2,\ldots$, ապա (2) շարքի զուգամիտությունից հետևում է (1) շարքի զուգամիտությունը, իսկ (1) շարքի տարամիտությունից հետևում է (2) շարքի տարամիտությունը:

Բաղդատման առաջին հայտանիշի օգնությամբ պարզել հետևյալ շարքերի վարքը.

1179. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}$;

1180. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$;

1181. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(n+1)^3}}$;

1182. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$;

1183. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+1}$;

1184. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^3}$;

1185. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\frac{1}{n}$;

1186. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2+1}$;

1187. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$:

Բաղդատման երկրորդ հայտանիշը

Եթե գոյություն ունի $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=C(0<C<+\infty)$, ապա (1) և (2) շարքերը միաժամանակ են զուգամետ կամ տարամետ:

Բաղդատման երկրորդ հայտանիշի օգնությամբ պարզել հետևյալ շարքերի վարքը.

1188. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)}}$;

1189. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$;

1190. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{1}{\sqrt{n}}$;

1191. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$;

1192. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$;

1193. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\frac{1}{\sqrt{n}}$;

1194. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n(n+2)(n+3)}}$;

1195. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{n^2+1}$;

1196. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$;

1197. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{3n+4}}$;

1198. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$;

1199. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^3+2}}$;

1200. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n^2}$:

Դալամբերի հայտանիշը

Եթե դրական անդամներով շարքի համար գոյություն ունի $q<1$ հաստատուն թիվ այնպես, որ ինչ-որ n_0-ից մեծ բոլոր n-երի համար տեղի ունի $\frac{a_{n+1}}{a_n}<q$ պայմանը, ապա շարքը զուգամետ է, իսկ եթե ինչ-որ n_0-ից մեծ բոլոր n-երի համար տեղի ունի $\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$ պայմանը, ապա շարքը տարամետ է:

Եթե դրական անդամներով շարքի համար գոյություն ունի $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=D$ վերջավոր սահմանը, ապա $D<1$ դեպքում շարքը զուգամետ է, $D>1$ դեպքում՝ տարամետ, իսկ $D=1$ դեպքում զուգամիտության հարցն անորոշ է:

Օգտվելով Դալամբերի հայտանիշից՝ պարզել հետևյալ շարքերի վարքը.

1201. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$;

1202. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$;

1203. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n-1}}{(n+1)!}$;

1204. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(n+1)!}$;

1205. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$;

1206. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n^2-1}}{2^{n^2}\sqrt{n}}$;

1207. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$;

1208. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3}{4^n}$;

1209. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot5\cdot\ldots(2n+1)}{1\cdot4\cdot\ldots(3n-2)}$;

1210. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots(3n-1)}{1\cdot5\cdot9\cdot\ldots(4n-3)}$;

1211. ա) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2n+1}}{n!}$, բ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$, գ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$, դ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n n!}{n^n}$:

Կոշիի հայտանիշը

Եթե դրական անդամներով շարքի համար գոյություն ունի $q<1$ հաստատուն թիվ այնպես, որ ինչ-որ n_0-ից մեծ բոլոր n-երի համար տեղի ունի $\sqrt[n]{a_n}<q$ պայմանը, ապա շարքը զուգամետ է, իսկ եթե ինչ-որ n_0-ից մեծ բոլոր n-երի համար տեղի ունի $\sqrt[n]{a_n}>1$ պայմանը, ապա շարքը տարամետ է:

Եթե դրական անդամներով շարքի համար գոյություն ունի $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=k$ վերջավոր սահմանը, ապա $k<1$ դեպքում շարքը զուգամետ է, $k>1$ դեպքում՝ տարամետ, իսկ $k=1$ դեպքում զուգամիտության հարցն անորոշ է:

Օգտվելով Կոշիի հայտանիշից՝ պարզել հետևյալ շարքերի վարքը.

1212. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^n$;

1213. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin^n\frac{\pi}{n}$;

1214. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{n^n}$;

1215. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{2}{5}\right)^n$;

1216. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$;

1217. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+1}{3n^2-1}\right)^n$;

1218. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$;

1219. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}e^n$;

1220. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^{n}$; **1221.** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{n}$

Կոշիի ինտեգրալային հայտանիշը

Դիցուք $y=f(x)>0$ ֆունկցիան անընդհատ է և մոնոտոն նվազող $[1;+\infty)$ միջակայքում, $f(n)=a_n$: Այս պայմանների դեպքում $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ շարքը և $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ անիսկական ինտեգրալը միաժամանակ են զուգամետ կամ տարամետ:

Օգտվելով ինտեգրալային հայտանիշից՝ պարզել հետևյալ շարքերի վարքը.

1222. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}(p\geq 1)$; **1223.** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$;

1224. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$; **1225.** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^2}$;

1226. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$; **1227.** $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^p}$, $p\geq 1$;

1228. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}e^{\sqrt{n}}}$; **1229.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e^{\sqrt{n}}}$:

§2. ԿԱՄԱՅԱԿԱՆ ՇԱՐՔԵՐ

Այն շարքերը, որոնց անդամների նշանները հերթականությամբ են փոխվում, կոչվում են նշանափոխ շարքեր: Օրինակ.

$1-1+1-1+\ldots+(-1)^{n-1}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$, կամ՝

$$-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\ldots+\frac{(-1)^n}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}:$$

Դիտարկենք հետևյալ նշանափոխ շարքը.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}C_n=C_1-C_2+C_3-C_4+\ldots+(-1)^{n-1}C_n+\ldots,$$

որտեղ՝ $C_n>0$:

Լայբնիցի թեորեմը նշանափոխ շարքերի վերաբերյալ

Եթե՝ 1) $\lim\limits_{n\to\infty}C_n=0$, 2) $C_{n+1}<C_n$, $(n=1,2,3,\ldots)$, ապա նշանափոխ շարքը զուգամետ է:

Օգտվելով Լայբնիցի թեորեմից՝ պարզել հետևյալ շարքերի վարքը.

1230. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$;

1231. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}$;

1232. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$;

1233. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln\ln n}$;

1234. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n}{(2n+1)^n}$;

1235. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{\pi}{\sqrt{n}}$;

1236. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{2^n}$:

1237. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$;

1238. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{3n-7}$;

1239. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\ln n}{n}$:

Բացարձակ և պայմանական զուգամիտություն

Դիտարկենք (A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ և (B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ շարքերը:

Եթե (A) շարքը զուգամետ է, իսկ (B) շարքը՝ տարամետ, ապա (A) շարքը կոչվում է պայմանական զուգամետ:

Եթե (B) շարքը զուգամետ է, ապա (A) շարքը կոչվում է բացարձակ զուգամետ:

Նշենք, որ (B) շարքի զուգամիտությունից հետևում է (A) շարքի զուգամիտությունը:

Պարզել հետևյալ շարքերի զուգամիտության բնույթը բացարձակ զուգամիտության առումով.

1240. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$; **1241.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$;

1242. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{1}{n}$; **1243.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+1}$;

1244. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\operatorname{tg}\frac{1}{\sqrt{n}}$; **1245.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sin\frac{1}{n^2}$;

1246. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n\ln^2 n}$; **1247.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n}$;

1248. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{1\ln+8}$; **1249.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{2^n}$;

1250. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\alpha}{(\ln 10)^n}$; **1251.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p(\ln n)^\alpha}$:

§3. ԱՍՏԻՃԱՆԱՅԻՆ ՇԱՐՔԵՐ

Աստիճանային է կոչվում հետևյալ տեսքի շարքը.

$$a_0+a_1x+a_2x.^2+\ldots+a_nx^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,$$

որտեղ՝ $a_0, a_1, \ldots., a_n \ldots,$ թվերը հաստատուններ են, իսկ x-ը փոփոխական է: Աստիճանային շարքը կոչվում է զուգամետ x_0 կետում, եթե զուգամետ է $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx_0^n$ թվային շարքը:

Աստիճանային շարքի զուգամիտության տիրույթ է կոչվում այն x-երի բազմությունը, որոնց համար շարքը զուգամետ է: Աստիճանային շարքը բացարձակ զուգամետ է (-R; R) տեսքի միջակայքում: R-ը կոչվում է աստիճանային շարքի զուգամիտության շառավիղ: Դա հաշվվում է

$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$ բանաձևով, կամ $R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ բանաձևով, եթե

վերջին սահմանը գոյություն ունի: Եթե $R = +\infty$, ապա աստիճանային շարքը բացարձակ զուգամետ է ամբողջ առանցքի վրա, իսկ եթե $R = 0$, ապա աստիճանային շարքը զուգամետ է միայն $x = 0$ կետում: Եթե $0 < R < +\infty$, ապա $x = \pm R$ կետերում շարքի զուգամիտությունը ստուգում ենք առանձին:

Գտնել հետևյալ աստիճանային շարքերի զուգամիտության տիրույթները.

1252. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n2^n}$;

1253. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(2n+1)}$;

1254. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 x^n}{(2n)!}$;

1255. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} \frac{x^{2n}}{3^n}$;

1256. $\sum_{n=1}^{\infty} (1+\frac{1}{n})^{n^2} x^n$;

1257. $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \operatorname{tg}\frac{1}{n}$;

1258. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{\ln n}$;

1259. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n4^{n-1}}$;

1260. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2x-3)^n}{2n-1}$;

1261. $\frac{2x+1}{1} + \frac{(2x+1)^2}{4} + \frac{(2x+1)^3}{7} + \dots$;

1262. $\frac{x-1}{1\cdot 2} + \frac{(x-1)^2}{3\cdot 2^2} + \frac{(x-1)^3}{5\cdot 2^3} + \dots$;

1263. Գտնել զուգամիտության միջակայքը և շարքի գումարը.

ա) $1+2x+3x^2+4x^3+\ldots$;

բ) $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots$;

գ) $1-3x^2+5x^4-7x^6+\ldots$;

դ) $x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots$:

§4. ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՎԵՐԼՈՒԾՈՒՄԸ ԱՍՏԻՃԱՆԱՅԻՆ ՇԱՐՔԻ

Եթե f(x) ֆունկցիան a կետի շրջակայքում կարելի է վերլուծել աստիճանային շարքի, ապա այդ շարքը ունի հետևյալ տեսքը.

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots$$

$$\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots:$$

Այս շարքը կոչվում է f(x)-ի Թեյլորի շարք: Եթե a=0, ապա Թեյլորի շարքը անվանում են նաև Մակլորենի շարք.

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^n(0)}{n!}x^n+\ldots \quad :$$

Նշենք հիմնական վերլուծությունները.

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots \quad (-\infty<x<+\infty),$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots \quad (-\infty<x<+\infty),$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots \quad (-\infty<x<+\infty),$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots \quad (-1<x\le 1),$$

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots$$

$(-1 < x < 1)$:

Գտնել հետևյալ ֆունկցիաների Մակլորենի շարքի վերլուծությունների առաջին երեք՝ զրոյից տարբեր անդամները:

1264. $e^{\cos x}$, **1265.** $\sec x$, **1266.** $\mathrm{tg}x$,

1267. $\mathrm{arctg}x$, **1268.** $\ln(x+\sqrt{x^2+1})$, **1269.** $\mathrm{th}x$:

Օգտվելով հիմնական վերլուծություններից և անվերջ նվազող երկրաչափական պրոգրեսիայի գումարի բանաձևից՝ հետևյալ ֆունկցիաները վերլուծել աստիճանային շարքերի և գտնել այդ շարքերի զուգամիտության շառավիղները.

1270. $\frac{3x-5}{x^2-4x+3}$, **1271.** $\frac{3x+1}{2x+1}$,

1272. $\frac{3}{1+x-2x^2}$, **1273.** $\cos 2x$,

1274. xe^{-2x}, **1275.** $\sqrt[3]{8+x}$,

1276. $\ln\frac{1+x}{1-x}$, **1277.** $\sin^2 x\cos^2 x$,

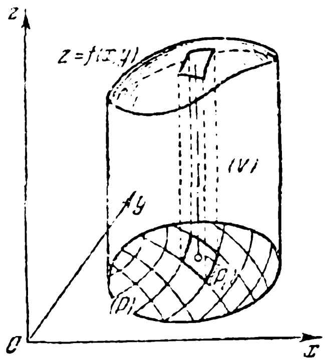
1278. $\mathrm{ch}x$, **1279.** $\mathrm{sh}x$:

ԳԼՈՒԽ VIII

ԿՐԿՆԱԿԻ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐ

1. Կրկնակի ինտեգրալի սահմանումը և հաշվումը

Դիցուք՝ $z=f(x,y)$ ֆունկցիան որոշված և սահմանափակ է XOY հարթության վրա փրված D փակ, քառակուսելի (մակերես ունեցող) տիրույթում: D-ն կորերի ցանցով տրոհենք $S_i(i=1,2,3,\ldots,n)$ ենթատիրույթների՝ դրանց մակերեսները նշանակելով ΔS_i, իսկ տրամագծերը՝ $\lambda_i(\lambda_i=\sup|M_1M_2|, M_1, M_2\in S_i)$:



Յուրաքանչյուր S_i ենթատիրույթից վերցնելով մեկ $P_i(\xi_i,\eta_i)$ կետ՝ հաշվենք այդ կետում ֆունկցիայի արժեքի և ենթատիրույթի ΔS_i մակերեսի արտադրյալը՝ $f(\xi_i,\eta_i)\Delta S_i$: Կազմենք բոլոր այսպիսի արտադրյալների գումարը: $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta S_i$ կոչվում է $f(x,y)$ ֆունկցիայի ինտեգրալային գումար՝ տարածված D տիրույթով: Եթե անկախ տիրույթի տրոհման կերպից, անկախ (ξ_i,η_i) կետերի ընտրությունից, ինտեգրալային գումարը, երբ $(\lambda=\max\limits_{i=1,2,..}\lambda_i)$ λ-ն ձգտում է 0-ի, ունի վերջավոր սահման, այսինքն՝ $\exists\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta S_i=I$, ապա այդ սահմանը կոչվում է $f(x,y)$ ֆունկցիայի կրկնակի ինտեգրալ՝ D տիրույթով. և նշանակում են

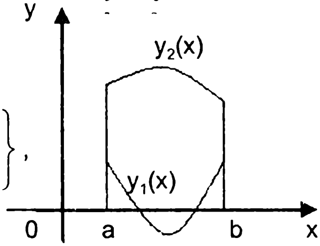
$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy:$$

Փակ տիրույթում անընդհատ ֆունկցիան ինտեգրելի է:

Եթե D տիրույթում f(x,y)>0, ապա f(x,y)-ի կրկնակի ինտեգրալը՝ D տիրույթով, թվապես հավասար է այն մարմնի ծավալին, որը տարածվում է ուղղահայաց D տիրույթին և ընկած է D տիրույթի և z=f(x,y) մակերևույթի միջև:

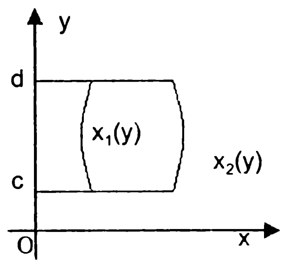
Ուղղանկյուն D $(a \le x \le b,\ c \le y \le d)$ տիրույթով տարածված կրկնակի ինտեգրալը բերվում է հաջորդական ինտեգրալների հետևյալ կերպ.

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx :$$



Եթե $D = \left\{ (x,y) \middle| \begin{array}{l} a \le x \le b \\ y_1(x) \le y \le y_2(x) \end{array} \right\}$,

ապա $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy :$



Եթե $D = \left\{ (x,y) \middle| \begin{array}{l} c \le y \le d \\ x_1(y) \le x \le x_2(y) \end{array} \right\}$,

ապա $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx :$

Հաջորդական ինտեգրումով հաշվել հետևյալ կրկնակի ինտեգրալները:

1280. $\iint\limits_D (x+y)dxdy$, եթե $0 \le x \le 1$ և $0 \le y \le 1$:

1281. $\iint\limits_D xe^{xy}dxdy$, եթե $1 \le x \le 2$ և $0 \le y \le 1$:

1282. $\iint\limits_D (x-y)dxdy$, եթե D-ն սահմանափակված է x=0,y=0, y=x+2 գծերով:

1283. $\iint\limits_D ye^{xy}dxdy$, եթե D-ն սահմանափակված է x=1,y=1, xy=3 գծերով:

1284. Տրված հաջորդական ինտեգրալների համար գրել կորերի հավասարումները, որոնք սահմանափակում են ինտեգրման տիրույթները և կառուցել այդ տիրույթները:

1) $\int\limits_1^2 dx \int\limits_x^{x+3} f(x,y)dy$:   2) $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{2-x^2} f(x,y)dy$:

3) $\int\limits_0^2 dy \int\limits_{2-y}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx$:   4) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{\sqrt{x}}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy$:

1285. Տրված S տիրույթում գրել $\iint\limits_S f(x,y)dxdy$ - ը հաջորդական ինտեգրալների տեսքով՝ տարբեր կարգերով վերցրած:

1) S տիրույթը A(1;2), B(5;2), C(5;4), D(1;4) գագաթներով ուղղանկյունն է:

2) S-ը y=x, y=x-3, y=2, y=4 գծերով սահմանափակված տիրույթն է:

3) S-ը սահմանափակված է $x^2+y^2=2a^2$, $x^2=ay\,(a>0)$ կորերով, պայմանով, որ y>0 S-ի կետերում:

4) S-ը $y^2=ax$, $x^2+y^2=2ax$, $y=0$ գծերով սահմանափակված այն տիրույթն է, որի կետերում y>0 (a>0):

5) S-ը $x^2+y^2=ax$, $x^2+y^2=2ax$, $y=0$ գծերով սահմանափակված այն տիրույթն է, որի կետերում y>0 (a>0):

Հետևյալ հաջորդական ինտեգրալներում փոխել ինտեգրման կարգը:

1286. $\int\limits_{-2}^{6}dx\int\limits_{-3-\sqrt{12+4x-x^2}}^{-3+\sqrt{12+4x-x^2}}f(x,y)dy$: **1287.** $\int\limits_{-1}^{1}dy\int\limits_{y^2-1}^{1-y^2}f(x,y)dx$:

1288. $\int\limits_{0}^{4}dx\int\limits_{\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}}f(x,y)dy$: **1289.** $\int\limits_{0}^{a}dx\int\limits_{\sqrt{2ax-x^2}}^{a+\sqrt{a^2-x^2}}f(x,y)dy$:

1290. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}dy\int\limits_{y^2-1}^{\frac{y^2}{2}}f(x,y)dx$:

1291. $\int\limits_{3}^{7}dx\int\limits_{\frac{9}{x}}^{3}f(x,y)dy+\int\limits_{7}^{9}dx\int\limits_{\frac{9}{x}}^{10-x}f(x,y)dy$:

1292. $\int\limits_{0}^{1}dy\int\limits_{\frac{y^2}{9}}^{y}f(x,y)dx+\int\limits_{1}^{3}dy\int\limits_{\frac{y^2}{9}}^{1}f(x,y)dx$:

1293. $\int\limits_{-2}^{2}dx\int\limits_{0}^{\frac{x+2}{2}}f(x,y)dy+\int\limits_{2}^{\frac{10}{3}}dx\int\limits_{\sqrt{x^2-4}}^{\frac{x+2}{2}}f(x,y)dy$:

Հաշվել հետևյալ ինտեգրալները.

1294. $\iint\limits_S\frac{dxdy}{(x+y)^2},\ S=\left\{(x,y)\middle|\begin{matrix}3\le x\le 4\\1\le y\le 2\end{matrix}\right\}$:

1295. $\iint\limits_S(5x^2y-2y^3)dxdy,\ S=\left\{(x,y)\middle|\begin{matrix}2\le x\le 5\\1\le y\le 3\end{matrix}\right\}$:

1296. $\iint\limits_S\frac{x^2dxdy}{1+y^2},\ S=\left\{(x,y)\middle|\begin{matrix}0\le x\le 1\\0\le y\le 1\end{matrix}\right\}$:

1297. $\iint\limits_S (x^2+2y)dxdy,\ S=\left\{(x,y)\left|\begin{matrix}0\le x\le 1\\ 0\le y\le 2\end{matrix}\right.\right\}$:

1298. $\iint\limits_S (x^2+y)dxdy,\ S=\left\{(x,y)\left|\begin{matrix}y\ge x^2\\ x\ge y^2\end{matrix}\right.\right\}$:

1299. $\iint\limits_S \frac{x^2}{y^2}dxdy$, որտեղ՝ S-ը սահմանափակված է x=2, y=x, xy=1 գծերով:

1300. $\iint\limits_S \cos(x+y)dxdy$, որտեղ՝ S-ը x=0, y=π, y=x գծերով սահմանափակված տիրույթն է:

1301. $\iint\limits_S (2x+y)dxdy$, որտեղ՝ S-ը x+y=3, x=0, y=0 գծերով սահմանափակված տիրույթն է:

1302. $\iint\limits_S (x+6y)dxdy$, որտեղ՝ S-ը y=5x, y=x, x=1 գծերով սահմանափակված տիրույթն է:

1303. $\iint\limits_S (x+2y)dxdy$, որտեղ՝ S-ը $y=x^2$, $y=x^3$ գծերով սահմանափակված տիրույթն է:

1304. $\iint\limits_S (4-y)dxdy$, որտեղ՝ S-ը $x=2\sqrt{y}$, y=1, x=0 գծերով սահմանափակված տիրույթն է:

1305. $\iint\limits_S xdxdy$, որտեղ՝ S-ը O(0,0), A(1,1), B(0,1) գագաթներով եռանկյունն է:

1306. $\iint\limits_S \frac{dxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$, որտեղ՝ S-ը 0 կենտրոնով և a շառավղով շրջանի I քառորդում ընկած մասն է:

2. Փոփոխականի փոխարինում կրկնակի ինտեգրալում

Դիցուք՝ x=x(u,v) և y=y(u,v) անընդհատ դիֆերենցելի ֆունկցիաները փոխմիարժեքորեն արտապատկերում են OXY հարթության D փակ տիրույթը OUV հարթության D′ տիրույթի վրա և արտապատկերման J յակոբիանը.

$$J=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}\neq 0,$$

այսինքն՝ պահպանում են դրական կամ բացասական նշանը, ապա տեղի ունի.

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_{D'} f(x(u,v),y(u,v))|J|dudv$$

փոփոխականի փոխարինման բանաձևը կրկնակի ինտեգրալի համար:

Անցնելով բևեռային կոորդինատների՝ հաշվել հետևյալ կրկնակի ինտեգրալները.

1307. $\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$:

1308. $\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(x^2+y^2)dxdy$:

1309. $\iint\limits_{\pi^2\le x^2+y^2\le 4\pi^2}\sin\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$:

1310. $\iint\limits_{\frac{\pi^2}{9}\le x^2+y^2\le\frac{\pi^2}{4}}\frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$:

1311. $\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2}e^{x^2+y^2}dxdy$:

1312. $\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2}e^{-x^2-y^2}dxdy$:

1313. $\iint\limits_{x^2+y^2\le 2x}(x^2+y^2)dxdy$:

1314. $\iint\limits_{x^2+y^2\le 2x+2y}(x+y)dxdy$:

1315. $$\iint\limits_{\begin{cases}(x^2+y^2)^2\le 4(x^2-y^2)\\ x\ge 0\end{cases}} \sqrt{4-x^2-y^2}\,dxdy:$$

1316. $$\iint\limits_{\begin{cases}x^2+y^2\le 1\\ x\ge 0\end{cases}} \frac{dxdy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}:$$

1317. $$\iint\limits_{\begin{cases}2x\le x^2+y^2\le 4x\\ y\ge 0\end{cases}} ydxdy:$$

1318. $$\iint\limits_{1\le x^2+y^2\le e^2} \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}dxdy:$$

1319. Հաշվել Պուասոնի ինտեգրալը՝

ա) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx$, բ) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2}dx,\ \alpha>0:$

ԳԼՈՒԽ IX

ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

§1. ՀԻՄՆԱԿԱՆ ԳԱՂԱՓԱՐՆԵՐ

Սովորական դիֆերենցիալ հավասարում է կոչվում այնպիսի հավասարումը, որի մեջ մասնակցում են x անկախ փոփոխականը, y=y(x) անհայտ ֆունկցիան (որի գտնելը դիֆերենցիալ հավասարման լուծման խնդիրն է) և դրա ածանցյալները կամ դիֆերենցիալները: Այդպիսի դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր տեսքը կլինի՝

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0:$$

Դիֆերենցիալ հավասարման մեջ մասնակցող ածանցյալների ամենաբարձր n կարգը կոչվում է դիֆերենցիալ հավասարման կարգ: Այսպես, $y''-3y'=x$ դիֆերենցիալ հավասարումը երկրորդ կարգի է, $y^{IV}=\sin x$ դիֆերենցիալ հավասարումը չորրորդ կարգի է և այլն: Եթե $y=\varphi(x)$ ֆունկցիան բավարարում է դիֆերենցիալ հավասարումը, ապա այդ ֆունկցիան կոչվում է դիֆերենցիալ հավասարման լուծում:

1320. Ստուգել, որ տրված դիֆերենցիալ հավասարումների համար տրված ֆունկցիաները լուծում են:

1) $y' - \dfrac{y}{x} + 1 = 0,\ y = -x\ln|x|$:

2) $yy' = 1 - 2x,\ y = \sqrt{2x - 2x^2}$:

3) $xy' + y = y^2,\ y = \dfrac{1}{1-x}$:

4) $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0,\ y = 2x$:

5) $y'' + 9y = 0,\ y = \sin 3x + \cos 3x$:

Եթե n-րդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարման լուծումը պարունակում է n հատ կամայական հաստատուններ, որոնց քանակը հնարավոր չէ պակասեցնել նոր նշանակումներով, ապա այդպիսի լուծումը կոչվում է դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծում՝

$$y=\varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n):$$

Եթե ընդհանուր լուծումը ստացվում է անբացահայտ տեսքով՝

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n)=0,$$

ապա դա անվանում են դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր ինտեգրալ:

1321. Ստուգել, որ $y=C_1e^x+C_2e^{-x}$ ֆունկցիան $y''-y=0$ երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումն է:

Ընդհանուր լուծման (ինտեգրալի) մեջ մտնող կամայական հաստատուններին տալով տարբեր թվային արժեքներ՝ ընդհանուր լուծումից ստանում ենք մասնակի լուծումներ (ինտեգրալներ): Դիֆերենցիալ հավասարման որոշակի մասնակի լուծում ստանալու համար տրված են լինում, այսպես կոչված, սկզբնական պայմաններ:

§2. ԱՌԱՋԻՆ ԿԱՐԳԻ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

Ածանցյալի նկատմամբ լուծված առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր տեսքն է.

$$y'=f(x;y): \qquad (*)$$

Այս հավասարման լուծման եղանակները կախված են f(x;y) ֆունկցիայի բնույթից:

1. Անջատվող փոփոխականներով դիֆերենցիալ հավասարումներ

Եթե (*)-ի մեջ $f(x;y)=f_1(x)\cdot f_2(y)$, ապա ստացված $y'=f_1(x)\cdot f_2(y)$ հավասարումը կոչվում է անջատվող փոփոխականներով դիֆերենցիալ հավասարում: Ցույց տանք այս հավասարման լուծման եղանակը.

$$y'=f_1(x)\cdot f_2(y) \Rightarrow \frac{dy}{dx}=f_1(x)\cdot f_2(y) \Rightarrow \frac{dy}{f_2(y)}=f_1(x)dx:$$

Փոփոխականները անջատվեցին, ինտեգրում ենք հավասարման երկու կողմերը.

$$\int\frac{dy}{f_2(y)}=\int f_1(x)dx:$$

Ինտեգրումը կատարելուց հետո կստանանք հավասարման ընդհանուր ինտեգրալը:

1322. Լուծել հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումները.

1) $2yy'=3x$;　　2) $y^2y'+x^2=1$;

3) $y'=e^{x+y}$;　　4) $y'\operatorname{tg}x=y$;

5) $y'+\dfrac{x\sin x}{y\cos y}=0$;　　6) $ye^{2x}dx-(1+e^{2x})dy=0$;

7) $dy-2\sqrt{y}\ln x dx=0$;　　8) $y'=\cos(x+y)$;

9) $y'=y(1+\cos x)$;　　10. $y'=3y$:

1323. Գտնել տրված սկզբնական պայմանին բավարարող մասնակի լուծումը.

1) $(1+y^2)dx-xydy=0,\quad y(1)=0$:

2) $y'\sin x=y\ln y,\quad y(\frac{\pi}{2})=e$:

3) $x^2y'+y^2=0,\quad y(-1)=1$:

4) $y'=x-\sin 2x,\quad y(0)=4{,}5$:

2. Առաջին կարգի համասեռ դիֆերենցիալ հավասարումներ.

Եթե (*)-ի մեջ f(x;y) ֆունկցիան զրո կարգի համասեռ ֆունկցիա է, այսինքն՝ բոլոր թույլատրելի t թվերի համար տեղի ունի f(tx; ty)= f(x;y) պայմանը, ապա (*) հավասարումը կոչվում է համասեռ դիֆերենցիալ հավասարում: Նշենք, որ զրո կարգի համասեռ ֆունկցիան կախված է միայն արգումենտների հարաբերությունից, այսինքն՝ համասեռ հավասարումը գրվում է

$y'=\varphi(\frac{y}{x})$ տեսքով և $\frac{y}{x}=u(x)$ նշանակումով բերվում է անջատվող փոփոխականներով դիֆերենցիալ հավասարման:

1324. Լուծել հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումները.

1) $y'=\frac{x-y}{y+x}$; 2) $(x-y)dx+xdy=0$;

3) $y'=\frac{2xy}{x^2-y^2}$; 4) $xy'=y\ln\frac{y}{x}$;

5) $x(y'+e^{\frac{y}{x}})=y$; 6) $xy'-y=\sqrt{x^2-y^2}$;

7) $(2x-y+4)dy+(x-2y+5)dx=0$;

8) $(x+y+1)dx+(2x+2y-1)dy=0$:

1325. Գտնել տրված սկզբնական պայմանին բավարարող մասնակի լուծումը.

1) $y'=\frac{y^2-2xy-x^2}{y^2+2xy-x^2}$, $y(1)=-1$:

2) $(\sqrt{xy}-x)dy+ydx=0$, $y(1)=1$:

3) $xy'=y(1+\ln\frac{y}{x})$, $y(1)=\frac{1}{\sqrt{e}}$:

4) $(x^2+y^2)dx-2xydy=0$, $y(4)=0$:

3. Առաջին կարգի գծային և Բեռնուլիի դիֆերենցիալ հավասարումներ

Առաջին կարգի գծային դիֆերենցիալ հավասարում է կոչվում հետևյալ տեսքի հավասարումը.

$$y'+p(x)y=q(x):$$

Այս հավասարման լուծումը փնտրենք y=u(x)v(x) տեսքով: Տեղադրելով հավասարման մեջ՝ կստանանք.

$$(u(x)v(x))'+p(x)u(x)v(x)=q(x)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow u'(x)v(x)+(v'(x)+p(x)v(x))u(x)=q(x):$$
v(x) անհայտ ֆունկցիան ընտրենք այնպես, որ.
$$v'(x)+p(x)v(x)=0\Rightarrow\frac{dv}{dx}=-p(x)v(x)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\frac{dv}{v(x)}=-p(x)dx\Rightarrow\int\frac{dv}{v}=-\int p(x)dx\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ln|v|=-\int p(x)dx\Rightarrow v=e^{-\int p(x)dx}:$$
Այսպես ընտրված v(x) ֆունկցիայի համար տրված դիֆերենցիալ հավասարումը կընդունի $u'(x)v(x)=q(x)$ տեսքը: Սա նույնպես անջատվող փոփոխականներով դիֆերենցիալ հավասարում է, որը լուծելով, գտնում ենք u(x) ֆունկցիան և, հետևաբար, $y=u(x)v(x)$ ընդհանուր լուծումը:

$y'+p(x)y=q(x)y^n$ Բեռնուլիի հավասարումը $z=y^{1-n}$ տեղադրումով բերվում է առաջին կարգի գծային դիֆերենցիալ հավասարման:

Բեռնուլիի հավասարումը նույնպես կարելի է լուծել $y=u(x)\cdot v(x)$ տեղադրումով:

1326. Լուծել հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումները.

1) $y'+2y=4x;$
2) $y'+2xy=xe^{-x^2};$
3) $(1+x^2)y'=2xy+(1+x^2)^2;$
4) $y'+\frac{y}{x}=2\ln x+1;$
5) $y'=\frac{2y}{x+1}+e^x(1+x)^2;$
6) $xy'+x^2+xy=y;$
7) $y'+\frac{y}{x}+xy^2=0;$
8) $2xyy'-y^2+x=0;$
9) $y'x+y=-xy^2;$
10) $y'-xy=-y^3e^{-x^2};$
11) $x^2y'=y^2+xy:$

1327. Գտնել տրված սկզբնական պայմանին բավարարող մասնակի լուծումը:

1) $y'+y\,\mathrm{tg}x=\sec x$, $\quad y(0)=0$,

2) $xy'-\dfrac{y}{x+1}=x$, $\quad y(1)=0$,

3) $y'=(2y+1)\mathrm{ctg}x$, $\quad y(\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{1}{2}$,

4) $t^2\dfrac{ds}{dt}=2st-3$, $\quad S(-1)=1$:

4. Լրիվ դիֆերենցիալով հավասարումներ

Առաջին կարգի հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումը.

$$P(x;y)dx+Q(x;y)dy=0 \qquad (1)$$

կոչվում է լրիվ դիֆերենցիալով հավասարում, եթե հավասարման ձախ մասը մի ինչ-որ u(x;y) ֆունկցիայի լրիվ դիֆերենցիալ է

$$du=P(x;y)dx+Q(x;y)dy:$$

$\dfrac{\partial P}{\partial y}$-ի և $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$-ի անընդհատության դեպքում հավասարումը կլինի լրիվ դիֆերենցիալով, եթե $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$:

(1) հավասարումը կարելի է արտագրել du=0 տեսքով: Այս հավասարման ընդհանուր ինտեգրալը կլինի u(x;y)=C, որտեղ՝ C-ն կամայական հաստատուն է: Այսպիսով, որպեսզի լուծենք լրիվ դիֆերենցիալով հավասարումը, պետք է գտնենք նշված u(x;y) ֆունկցիան, որը որոշվում է.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P(x;y) \text{ և } \frac{\partial u}{\partial y}=Q(x;y)$$

հավասարումներից՝ շնորհիվ $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ պայմանի:

1328. Լուծել հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումները, նախօրոք ստուգելով, որ դրանք լրիվ դիֆերենցիալով հավասարումներ են:

1) $(1-6xy^2)dx+(3y^2-6x^2y)dy=0;$

2) $(x+y)dx+(x+2y)dy=0;$

3) $(2x^3-xy^2)dx+(2y^3-x^2y)dy=0;$

4) $(3x^2+6xy-2y^2)dx+(3x^2-4xy-3y^2)dy=0;$

5) $xdx+ydy=\dfrac{xdy-ydx}{x^2+y^2};$

6) $(y+\dfrac{2}{x^2})dx+(x-\dfrac{3}{y^2})dy=0;$

7) $(2x-ye^{-x})dx+e^{-x}dy=0;$

8) $(\sin y-y\sin x+\dfrac{1}{x})dx+(x\cos y+\cos x-\dfrac{1}{y})dy=0;$

9) $(3x^2-2y)dx+2(y-x)dy=0:$

1329. Գտնել տրված սկզբնական պայմանին բավարարող մասնակի ինտեգրալը:

1) $(10xy-8y+1)dx+(5x^2-8x+3)dy=0,\quad y(3)=1;$

2) $(x+e^{\frac{x}{y}})dx+e^{\frac{x}{y}}(1-\dfrac{x}{y})dy=0,\quad y(0)=2:$

§3. ԿԱՐԳԻ ԻՋԵՑՈՒՄ ԹՈՒՅԼԱՏՐՈՂ ԲԱՐՁՐ ԿԱՐԳԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

1. $F(x,y',y'')=0$ տեսքի հավասարումը, որը y չի պարունակում բացահայտ տեսքով, լուծվում է $y'=p$, $y''=\dfrac{dp}{dx}$ տեղադրումով՝ բերվելով է $F(x,p,p')=0$ տեսքի հավասարման:

2. $F(y, y', y'') = 0$ տեսքի հավասարումը, որը x չի պարունակում $y' = p$, $y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{dp}{dy} \cdot p$ տեղադրումով բերվում է $F(y, p, \frac{dp}{dy} p) = 0$ տեսքի հավասարման:

1330. Կարգը իջեցնելով՝ գտնել դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը կամ ընդհանուր ինտեգրալը.

1) $y'' x \ln x = y'$; 2) $2yy'' = (y')^2 + 1$; 3) $y'' + 2y(y')^3 = 0$;
4) $y'' \operatorname{tg} y = 2(y')^2$; 5) $xy'' - y' = e^x x^2$; 6) $y'' y^3 = 1$:

1331. Գտնել հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումների ընդհանուր լուծումները.

1) $y'' = \frac{1}{\cos^2 x}$; 2) $y'' = \frac{1}{1 + x^2}$;
3) $y''' = \frac{6}{x^3}$; 4) $y'' = xe^{2x}$:

§4. ԵՐԿՐՈՐԴ ԿԱՐԳԻ ՀԱՍՏԱՏՈՒՆ ԳՈՐԾԱԿԻՑՆԵՐՈՎ ԳԾԱՅԻՆ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

Այդպես են կոչվում $y'' + py' + qy = f(x)$ տեսքի դիֆերենցիալ հավասարումները, ընդ որում, եթե f(x)=0, ապա ստացված $y'' + py' + qy = 0$ հավասարումը կոչվում է համասեռ, հակառակ դեպքում՝ ոչ համասեռ: Եթե r_1-ը և r_2-ը բնութագրիչ $r^2 + pr + q = 0$ հավասարման արմատներն են, ապա համասեռ հավասարման ընդհանուր լուծումը գրվում է հետևյալ տեսքով.

ա) $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$, եթե $D = p^2 - 4q > 0$, $r_1 \neq r_2$;
բ) $y = e^{r_1 x}(C_1 + C_2 x)$, եթե $D = p^2 - 4q = 0$, $r_1 = r_2$;
գ) $y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$, եթե $D = p^2 - 4q < 0$, $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$:

1332. Լուծել հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումները.

1) $y''-5y'+6y=0;$ 2) $y''+4y'-21y=0;$

3) $3y''-5y'+2y=0;$ 4) $y''-7y=0;$

5) $y''+2y'+y=0;$ 6) $4y''-12y'+9y=0;$

7) $y''+y=0;$ 8) $y''-4y'+13y=0;$

9) $y''+3y'-10y=0;$ 10) $4y''+4y'+y=0;$

11) $y''-8y'+41y=0$:

1333. Գտնել սկզբնական պայմաններին բավարարող մասնակի լուծումը.

1) $y''-5y'+4y=0, \quad y(0)=y'(0)=1$:

2) $y''-2y'+y=0, \quad y(2)=1, y'(2)=-2$:

Ոչ համասեռ հավասարման ընդհանուր լուծումը գրվում է՝ $y=\overline{y}(x)+y_0(x)$ տեսքով, որտեղ՝ $\overline{y}(x)$–ը համապատասխան համասեռ հավասարման ընդհանուր լուծումն է, իսկ $y_0(x)$–ը տրված ոչ համասեռ հավասարման որևէ մասնակի լուծումը: Այդ մասնակի լուծումը փնտրում ենք՝ ելնելով f(x)-ի հատուկ տեսքից, կամ ավելի ընդհանուր՝ հաստատունի վարիացիայի մեթոդով:

1334. Գտնել հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումների ընդհանուր լուծումները.

1) $y''+4y'-5y=1;$ 2) $y''-2y'+2y=2x;$

3) $y''-6y'+9y=2x^2-x+3;$ 4) $2y''+5y'=5x^2-2x-1;$

5) $y''-7y'+6y=\sin x;$ 6) $2y''+y'-y=2e^x;$

7) $12y''+y'-y=3x^2+7;$ 8) $y''-y'-6y=e^x+\sin 3x;$

9) $y''-5y'+6y=13\sin 3x;$ 10) $y''-m^2y=e^{-mx}$:

1335. Գտնել տրված սկզբնական պայմաններին բավարարող մասնակի լուծումը:

1) $y''-2y'+10y=10x^2+18x+6,\qquad y(0)=1,\ y'(0)=3{,}2:$

2) $4y''+16y'+15y=4e^{-\frac{3}{2}x},\qquad y(0)=3,\ y'(0)=-5{,}5:$

3) $y''+y=x+2e^x,\qquad y(0)=2,\ y'(0)=7:$

4) $y''-2y=xe^{-x},\qquad y(0)=4,\ y'(0)=-3:$

Հետևյալ հավասարումները լուծել հաստատունների վարիացիայի մեթոդով:
$y_0(x)=A(x)y_1(x)+B(x)y_2(x)$, $A(x)$, $B(x)$ ֆունկցիաները որոշվում են.

$$\begin{cases} A'y_1+B'y_2=0 \\ A'y_1'+B'y_2'=f(x) \end{cases}$$ համակարգից:

1336. $y''+4y=\dfrac{1}{\sin 2x}:$

1337. $y''+y=\operatorname{tg}x:$

1338. $y''-2y'+y=\dfrac{e^x}{x^2}:$

1339. $y''+4y'+4y=\dfrac{e^{-2x}}{x^3}:$

1340. Լուծել հավասարումները.

1) $4y''-y=x^3-24x;$

2) $y''-y=e^{-x};$

3) $2yy''=(y')^2;$

4) $y''\operatorname{tg}x=y'+1;$

5) $yy''+(y')^2=0;$

6) $x^3y''+x^2y'=1;$

7) $2y'+y=y^3(x-1);$

8) $x^2y'=y^2-xy:$

ՊԱՏԱՍԽԱՆՆԵՐ

2. $\{1,2,...,6,8,10,12\}$, $\{2,4,10\}$, $\{1,3,5,12\}$, $\{6,8\}$: ***4.*** $(-3;5),[0,2],(-3,0),(2,5)$:

11. $\varphi(x)=\begin{cases}0{,}5, \text{ եթե } x=0\\ \dfrac{1}{n+2}, \text{եթե } x=\dfrac{1}{n}, n\in N\\ x, \text{եթե } x\neq\dfrac{1}{n}, 0\end{cases}$: ***14.*** 2^n: ***20.*** $\sup[2,3)=3, \inf[2,3)=2$:

21. 1)1,0: 2)0, -5: 3)1, 0: 4)+∞, 5: ***22.*** Ոչ: Ոչ: ***24.*** 8, $\dfrac{3x-2}{x+1}$, $3+\dfrac{5}{x}$, $\dfrac{2x+3}{1-x}$, $\dfrac{6x+2}{2x-1}$, $\dfrac{3t+2}{t-1}$: ***25.*** 1)$[-1;5]$: 2)$(-1;3)$: 3)$(1,+\infty)$: 4)$\left[-\dfrac{3}{2},\dfrac{5}{2}\right]$: 5)$(-\infty,5)$: 6)$(-1,1)\cup(2,+\infty)$: 7)$[-1,7]$: 8)$(-2,-1)\cup(-1,1]$: 9)$(0,1)\cup(1,+\infty)$: 10)$\left[-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k;\dfrac{\pi}{2}+2\pi k\right], k\in z$: 11)$\left(-\infty,\dfrac{5}{2}\right)$: 12)$[1,e]$: 13)$\dfrac{\pi}{2}+2\pi k\ \ k\in z$: ***26.*** 0, 0, 4: ***27.*** 1, $\dfrac{1+x}{1-x}$, $\dfrac{-x}{x+2}$, $\dfrac{2}{1+x}$: ***28.*** $-5x^2-7$, $2x^3+x$: ***31.*** 1)$3x^2-7x+6$: 2)$\dfrac{1}{x}+x^2$: ***33.*** 1) զ.: 2) կ.: 3) -: 4) -: 5) կ.: 6)զ.: 7)կ.: 8)-: 9)զ.: 10)զ.: 11)կ.: 12)կ.: ***34.*** 1)$\dfrac{2\pi}{5}$: 2)6π: 3)π: 4)$\dfrac{2\pi}{a}$: 5)$\dfrac{\pi}{2}$: 6)π: 7)6π: 8)–: 9)–: ***39.*** ա) $x=\dfrac{y-3}{2}$; R : բ) $x=-\sqrt[4]{y}$; $[0,+\infty)$: գ) $x=\sqrt[4]{y}$; $[0,+\infty)$: դ) $x=\dfrac{1-y}{1+y}$; $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$: ե) $x=-\sqrt{4-y^2}$; $[0,2]$: զ) $x=\sqrt{4-y^2}$; $[0,2]$:

է) $x=\begin{cases}y, \text{ եթե } y\in(-\infty,1)\\ \sqrt{y}, \text{եթե } y\in[1,16]\\ \log_2 y, \text{եթե } y\in(16,+\infty)\end{cases}$, R : ***63.*** $23+\sqrt{17}$: ***64.*** 5: ***65.*** 1) 5: 2) $\sqrt{74}$: 3) $6\sqrt{2}$: ***66.*** $5+\sqrt{17}+\sqrt{26}$: ***69.*** $\beta>90^0$: ***70.*** -3 կամ 7: ***71.*** (0,-6), (0,10): ***72.*** (5;0): ***73.*** (4;4), (20;20): ***74.*** (-10;15), (14;15): ***75.*** $\dfrac{17}{2}$: ***76.*** $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$:

77. $\frac{\sqrt{290}}{2}, \frac{\sqrt{170}}{2}, 5\sqrt{2}$: ***78.*** (-5,4), (1,8), (7,0): ***79.***(9,6), (-7,2), (1,14):

80. $\left(-\frac{3}{2},6\right),\left(-\frac{15}{4},7\right),\left(\frac{3}{4},5\right)$: ***81.***(6,2), (4,-2): ***82.*** (-2,-2), (1,0), (4,2),

(7,4): ***83.*** $\left(\frac{11}{5},\frac{32}{5}\right)$: ***84.*** $\left(\frac{9}{2},\frac{13}{2}\right)$: ***85.*** $\left(\frac{20}{3},\frac{2}{3}\right)$: ***86.*** (-1,8): ***87.*** $\sqrt{37}, 3\sqrt{2}, 5$:

88.(4,3): ***89.*** $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$: ***90.***(-3,1): ***91.***(3,4), $\left(\frac{7}{2},\frac{1}{2}\right)$, (5,6):

92. 11x-5y+14=0: ***93.*** x+y-3=0: ***94.*** $y^2=4x+4$: ***95.*** $y=\frac{1}{4}x^2-x+1$:

96. $x=-\frac{y^2}{4}-\frac{y}{2}-\frac{9}{4}$: ***97.*** y=3: ***98.*** $(x+6)^2+(y-4)^2=32$: ***99.*** $x^2+y^2=9$:

100. $3x^2-y^2=48$: ***101.*** $x^2+5y^2=5$: ***102.*** $y=2$ եթե $x\geq 2$: ***103.*** $\frac{5}{2}$: ***104.*** $\left(5,\frac{7}{2}\right)$:

105. Անցնում է A և D, իսկ չի անցնում B և C կետերով: ***106.*** 1) $\frac{5}{7}, 2$:

2) $-\frac{2}{3}, -3$: 3) Չունի, չի կտրում: 4) $\frac{7}{4}, 0$: ***107.*** 1) $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x+4$:

2) $y=\sqrt{3}x+4$: 3) $y=-\sqrt{3}x+4$: 4) $y=\frac{-1}{\sqrt{3}}x+4$: ***108.*** 1) y=x: 2) $y=\sqrt{3}x$:

3)y=-x: 4)y=0: ***109.*** $\frac{\pi}{6}$: ***110.*** $\frac{x}{4}+\frac{y}{-5}=1$: ***111.*** 1) $\frac{x}{2}+\frac{y}{5}=1$: 2) $\frac{x}{-2}+\frac{y}{5}=1$:

3) $\frac{x}{-2}+\frac{y}{-5}=1$: 4) $\frac{x}{2}+\frac{y}{-5}=1$: ***112.*** 1) $\frac{x}{5}+\frac{y}{-3}=1$: 2) $\frac{x}{-4}+\frac{y}{-8/3}=1$:

3) $\frac{x}{2/3}+\frac{y}{-2}=1$: 4) $\frac{x}{1}+\frac{y}{1}=1$: ***113.*** 9: ***114.*** 1) a=7, b=3: 2) a= -2, b=3:

3)a=4,b=3: 4)O(0,0),(3,2): 5) a=1,b= -2: 6) $\left(\frac{3}{5},0\right),\left(\frac{3}{5},2\right)$: 7)O(0,0),(0,2):

8) $\left(0,-\frac{3}{2}\right),\left(2,-\frac{3}{2}\right)$: 9) (0,0), (2,0): ***115.*** $y=-\sqrt{3}x+1-3\sqrt{3}$: ***116.*** 1)0:

2) $\frac{\pi}{2}$: 3) $\frac{\pi}{4}$: 4) 0: 5) $\frac{\pi}{2}$: 6) $\frac{\pi}{4}$: 7) $\frac{3\pi}{4}$: 8) $\pi-\operatorname{arctg}\frac{23}{14}$: 9) $\frac{\pi}{3}$:
117. 1)y=7: 2)x=-3: 3)5x-2y+29=0: 4)x+3y-18=0: ***118.*** 1) 2x-y+1=0:
2) 3x+7y-41=0: 3) y=5: 4)x=2: ***119.*** 1) 7x+13y--20=0: 2) 9x-4y-5=0:

120. x+6y+9=0: ***121.*** 2x-3y+11=0: ***122.*** 2x+3y-14=0: ***123.*** 1) $\frac{3\pi}{4}$: 2) $\frac{\pi}{6}$:

3) $\pi-\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$: 4) $\pi-\operatorname{arctg}9$: ***124.*** 5x+2y-20=0: ***125.*** 3x+2y-12=0:

126. x-y+8=0: ***127.*** 2x+3y+14=0: ***128.*** $\left(\frac{8}{3},-2\right)$: ***129.*** 2x-5y-4=0,

2x-5y+25=0: ***130.*** 2x-y+1=0, x+3y-10=0, 3x-5y-2=0: ***131.***x-4y-2=0,
x+4y+6=0, x=6: ***132.*** 3x-8y+12=0, 9x-y-10=0, 6x+7y-22=0:
133. 8x+14y-7=0, 14x+4y+39=0, 6x-10y+5=0: ***134.*** 3x-2y=0, x+y-8=0:
135. y=x: ***138.*** x+5y-17=0: ***139.*** x-2y+3=0: ***140.*** 3x-y-10=0, x+y-2=0:

141. (1,0): ***142.*** $\left(1,\frac{1}{2}\right)$: ***143.*** (3,-5): ***144.*** 1) չունի, 2) չունի, 3) ունի,

4) չունի, 5) ունի, 6) ունի: ***145.***1) $\sqrt{2}x+\sqrt{2}y-6=0$: 2) $x-\sqrt{3}y+6=0$:

3) $\sqrt{2}x-\sqrt{2}y-6=0$: ***146.*** 1) $\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y-5=0$: 2) $-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-\frac{13}{10}=0$:

3) $-\frac{2}{\sqrt{5}}x+\frac{1}{\sqrt{5}}y-\sqrt{5}=0$: 4) $\frac{\sqrt{2}}{3}x-\frac{\sqrt{7}}{3}y-\frac{5}{2}=0$: ***147.***1) $\frac{5}{2},\left(\frac{5}{3},-\frac{5\sqrt{5}}{6}\right)$:

2) $8,\left(-\frac{24}{5},-\frac{32}{5}\right)$: ***148.***1) $\frac{1}{2}$: 2)0:3) $\frac{\sqrt{34}}{2}$: ***149.*** $\frac{12\sqrt{5}}{5}$: ***150.***1)x-4y-2=0:

2) $\frac{19}{\sqrt{17}}$: 3) $\operatorname{arctg}\frac{25}{19}$: ***151.***6x-8y-55=0;6x-8y+25=0: ***152.*** $2\sqrt{6}x+5y+21=0$;

$2\sqrt{6}+5y-49=0$: ***153.*** $\frac{\sqrt{34}}{2}$: ***154.*** 4: ***155.*** $\sqrt{5}$: ***156.*** 3x+21y-19=0,

21x-3y-25=0: ***157.*** x-3y-2=0, 3x-y-12=0: ***158.*** 5x-12y-65=0,

5x+12y-65=0: ***159.*** y=2, 3x+4y+10=0: ***160.*** $\frac{8}{5},8$: ***161.*** (0,0), (0,1):

162. 3x+4y-10=0, x-2y+10=0, 3x-y-5=0: ***163.***x=-5, x+6y-19=0,
x-6y+17=0: ***164.***(4,10): ***165.***(4,0): ***166.*** $\left(5-2\sqrt{3}\right)x'-\left(5\sqrt{3}+2\right)y'+28=0$:
167. (5,5), (3,-3), (10,-6):

168. 1) $A\left(\frac{3+4\sqrt{3}}{2},\frac{-4+3\sqrt{3}}{2}\right)$, $B\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2},\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$, $C(4\sqrt{3},-4)$: 2) $A\left(\frac{7\sqrt{2}}{2},\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$, $B(\sqrt{2},0)$, $C(4\sqrt{2},-4\sqrt{2})$: 3) $A\left(\frac{4+3\sqrt{3}}{2},\frac{3-4\sqrt{3}}{2}\right)$, $B\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2},\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$, $C(4,-4\sqrt{3})$:

169. $x'=x+4,\ y'=y+5$: ***170.*** 1) $y'^2=4x',\ y'=y+2, x'=x-3$: 2) $x'^2+y'^2=169,\ x'=x-6, y'=y+9$: 3) $x'^2+4y'^2=16,\ x'=x-3, y'=y+1$: 4) $x'^2+y'^2=25,\ y'=y+7, x'=x-6$: ***171.*** $x=x'-\frac{5}{3},\ y=y'+\frac{4}{3}, y'=\frac{-29}{9x'}$:

172. 1) $x'^2+4y'^2=16$: 2) $x'^2-4y'^2=16$: ***173.*** 1) 45^0, 2) arctg2:

176. $(x+3)^2+(y-4)^2=9$: ***177.*** 1) Հատում է, 2) Շոշափում է, 3) Չունի ընդհանուր կետ: ***178.*** 1) (-2,3),2: 2) (3,-1),4: 3) $\left(2,\frac{1}{3}\right),\frac{1}{3}$: 4) (4,-3),5: 5) (-5,9),6: ***179.*** 2x-5y+19=0: ***180.*** $x^2+(y-3)^2=18$:

181. $(x-1)^2+(y-1)^2=1,\quad (x-5)^2+(y-5)^2=25$:

182. $(x-2)^2+(y+2)^2=4$: $(x-4+2\sqrt{3})^2+(y+4-2\sqrt{3})^2=(4-2\sqrt{3})^2$:

183. $(x+3)^2+(y-3)^2=9$: ***184.*** $(x-3)^2+(y+4)^2=9$, $(x+3)^2+(y+4)^2=9$:

185. $(x-3)^2+(y+1)^2=89$: ***186.*** ± 2: ***187.*** (5,-6):

188. $(x-3)^2+(y+4)^2=9$: ***189.*** 2: ***190.*** $(x+4)^2+(y+1)^2=25$: ***191.*** $\sqrt{10}$, $\sqrt{2,5}$, $(2-\sqrt{7,5},-3),(2+\sqrt{7,5},-3)$: ***192.*** 12,9, $(-3\sqrt{7},0),(3\sqrt{7},0)$:

193. 5,2, $(-\sqrt{21},0),(\sqrt{21},0)$: ***194.*** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{36/25}=1$: ***195.*** $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$:

196. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$: ***197.*** $\frac{x^2}{30}+\frac{y^2}{24}=1$: ***198.*** $\frac{x^2}{50}+\frac{y^2}{25}=1$: ***199.*** 1) Հատվում են: 2) Չեն հատվում: ***200.*** 1)3, $\sqrt{5}$: 2) 5,4: 3) 4, $2\sqrt{3}$:

201. $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$: ***202.*** 3,4,(-5,0),(5,0), $y=\pm\frac{4}{3}x$:

203. 1) $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{51}=1$: 2) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ կամ $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$: ***204.*** $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{72}=1$:

205. $(-2\sqrt{10},0),(2\sqrt{10},0), y=\pm\frac{1}{3}x$: ***206.*** $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$: ***207.*** $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{20}=1$:

208. a=b=$\sqrt{10}$: ***209.*** 1) 4x-3y-17=0, 4x+3y+1=0: 2) 3x-4y+19=0, 3x+4y+11=0: ***210.*** 3, (2,1): ***211.*** 1) $y^2=16x$, 2) $y^2=6x$: ***212.*** 1) $y^2=-3x$, 2) $x^2=12y$: ***213.*** $y=-2(x-2)^2+2$: ***214.*** $(1,2\sqrt{3}),(1,-2\sqrt{3})$: ***215.*** (2, -1), $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$: ***216.*** 1) (2,0),2: 2) (0,2), $\frac{1}{2}$: 3) (1,3), $\frac{1}{8}$: 4) (-4,3),p=1:

217. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$: ***218.*** $2(k^2x^2+y^2)=a^2(k^2+1)$, երբ $k=1$ $x^2+y^2=a^2$:

219. $3a^2\sqrt{3}$: ***221.*** $\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$: ***224.*** xy=4:

228. ա) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$, բ) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$, գ) $y^2=6x$: ***229.*** $\sqrt{145},\sqrt{26},13$:

231. 1) $\sqrt{57}$:2) $\sqrt{19}$: ***232.*** $2\sqrt{17}$, $2\sqrt{10}$, 10: ***233.*** (-3,4,6): ***234.*** $\left(-\frac{9}{5},0,0\right)$:

235. $\left(-3,-\frac{3}{4},0\right)$: ***236.*** $\left(0,0,\frac{8}{3}\right)$: ***238.*** (5,-5,-8), (-1,4,13): ***239.*** $\frac{2}{3}$:

240. $\left(6,3,\frac{20}{3}\right)$: ***241.*** $\left(\frac{15}{4},\frac{17}{4},0\right)$: ***242.*** 4x+5y+z-14=0: ***243.*** 1) z=1, 2) 10x-3y+17=0: ***244.*** 2x+3y+8z-40=0: ***245.*** x-2y-3z+14=0:

246. x+y+z-4=0: ***247.*** 1) $\frac{-11x}{15}+\frac{2}{3}y-\frac{2}{15}z-2=0$, 2) $-\frac{6}{11}x+\frac{2}{11}y+\frac{9}{11}z-4=0$,

3) $\frac{x}{\sqrt{14}}+\frac{2y}{\sqrt{14}}-\frac{3z}{\sqrt{14}}-\frac{1}{\sqrt{14}}=0$: ***248.*** 2: ***249.*** 1) $\frac{11}{6}$, 2) $\frac{19}{2}$, 3) $\frac{2}{\sqrt{3}}$: ***250.*** $2\sqrt{2}$:

251. 2: ***252.*** $\frac{2}{15},\frac{-11}{15},\frac{2}{3}$: ***253.*** $\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{-2}{3}$: ***254.*** x+4y+2z-2=0: ***255.*** 3y+2z=0:

256. $\arccos\frac{2}{3},\arccos\frac{-2}{3},\arccos\frac{1}{3}$: ***257.*** 8: ***258.*** 3x-2y+6z+19=0:

259. 1) հատվում են, 2) հատվում են, 3) զուգահեռ են, 4) զուգահեռ են:

260. 1) $-\frac{1}{2}$: 2) $-\frac{2}{7}$: ***261.*** x+2y-3z-12=0: ***262.*** 3x-y=0, x+3y=0:

263. 2y-5z+1=0: ***264.*** $\frac{x-3}{1}=\frac{y-5}{1}=\frac{z}{-1}$: ***265.*** 1) Ոչ: 2) Այո:3) Ոչ:

266. 1) -3: 2) 9: ***267.*** 1) $\frac{x}{3}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{1}$: 2) $\frac{x}{4}=\frac{z}{-6}=\frac{y}{0}$: 3) y=0 և z=0:

268. 1) Այո: 2) Ոչ: ***269.*** 1) $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z+3}{5}$: 2) $\frac{x-2}{5}=\frac{y}{2}=\frac{z+3}{-1}$:

3) y=0 և z=-3: 4) x=2 և y=0: 5) $\frac{x-2}{-2}=\frac{y}{4}=\frac{z+3}{5}$:

270.1) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-1}{-2}$: 2) $\frac{x-3}{-2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{-3}$: 3) $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{-5}$:

4) $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{1}$ և $z=5$: ***271.*** $\frac{\pi}{6}$: ***272.*** $\frac{x+4}{1}=\frac{y-3}{3}=\frac{z}{5}$: ***273.*** (0,1,0):

274. $\arccos\frac{20}{21}$: ***275.*** 1) (0,-5,1); 2) չեն հատվում, 3) չեն հատվում:

276. $\arcsin\frac{\sqrt{6}}{6}$: ***277.*** x+2y-2z-1=0: ***278.*** x-2y+z+5=0: ***279.*** (5,5,-2):

280. (5,5,5): ***281.*** 3x+2y+z-8=0: ***282.***(-1;2;2), $\frac{\pi}{6}$: ***283.*** 8x-5y+z-11=0:

284. $\sqrt{30}$: ***290.***1: ***295.***1)Այո: 2) Ոչ: 3) Ոչ: 4) Ոչ: ***302.*** $\alpha=\arccos\frac{x}{\|a\|}$,

$\beta=\arccos\frac{y}{\|a\|},\gamma=\arccos\frac{z}{\|a\|}$: ***303***. 13: ***304.*** (17,3,0): ***305.***(9,-11,-2,15):

306. (0,11,2,-2): ***307.*** (1,2,3,4): ***308.*** $\sqrt{110}$: ***310.*** $\bar{a}\perp\bar{b},\bar{a}\|\bar{c}$: ***311.*** 0,6:

312. 1,1: ***313.*** 1) $\arccos\frac{-3\sqrt{5}}{7}$: 2) $\frac{3\pi}{4}$: ***314.*** $\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}$: ***316.*** $a>-\frac{1}{2}$:

319. $4\bar{a}_1-\bar{a}_2+3\bar{a}_3$: ***320.***(1,-4,-3): ***322.*** 1) $-2-\sqrt{21}, -2+\sqrt{21}$: 2) 0:

323. $\bar{p}_1+4\bar{p}_2+3\bar{p}_3$: ***324.*** 1) $-\bar{p}_1+2\bar{p}_2+3\bar{p}_3$: 2) $\frac{1}{6}\bar{p}_1+\frac{1}{6}\bar{p}_2+\frac{5}{6}\bar{p}_3$:

325. 1) 10: 2) 4ab: 3) 0: 4) 0: 5) 0: 6) 11x+6: ***326.*** 25: ***327.***10: ***328.*** -29:
329. sin(α-β): ***330.*** cos(α-β): ***331.*** 2a: ***332.*** sin(α-β)sin(α+β): ***333.*** 0:

334. 21: ***335.***17: ***336.*** -5: ***337.***0: ***338.*** -34: ***339.***180: ***340.***100: ***341.*** $-2b^2$:
342.1: ***343.***$\cos 2\alpha(1+\sin\alpha\cos\alpha)$: ***344.*** 1) $-4\pm\sqrt{22}$; 2) 0,1; 3) 0; 4) $x\in R$:
345. 1) $x\in(4,+\infty)$; 2) $x\in(-6,-4)$: ***347.*** -77: ***348.*** 66: ***349.*** 15: ***350.*** 15:

351. $\begin{pmatrix}-6 & 8\\ 4 & 7\end{pmatrix}$: ***352.*** $\begin{pmatrix}-1 & 6 & 5\\ -3 & 8 & 5\\ 0 & -4 & -1\end{pmatrix}$: ***353.*** $\begin{pmatrix}-2 & 11 & -8\\ 2 & 2 & 2\\ -5 & -4 & 6\end{pmatrix}$: ***354.*** 1) $\begin{pmatrix}4 & 2 & -2\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & 0 & -3\end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix}11 & -4 & -1\\ -12 & 1 & 7\\ 3 & -5 & 6\end{pmatrix}$: ***355.*** $\begin{pmatrix}-26 & 3 & 4\\ -21 & 10 & 30\end{pmatrix}$: ***356.*** 1) $\begin{pmatrix}5 & 5\\ 7 & 0\end{pmatrix}$: 2) $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$: 3) $\begin{pmatrix}40 & 15\\ 59 & 26\end{pmatrix}$:

4) $\begin{pmatrix}-6 & 5\\ 15 & 7\end{pmatrix}$: 5) $\begin{pmatrix}0 & 17\\ 5 & -11\end{pmatrix}$: 6) $\begin{pmatrix}-7 & 7 & 19\\ -3 & 5 & 7\\ 1 & 10 & -9\end{pmatrix}$: 7) $\begin{pmatrix}10 & 5 & 7\\ -10 & -3 & 4\\ -11 & -6 & -12\end{pmatrix}$: 8) $\begin{pmatrix}-8\\ 15\\ -5\end{pmatrix}$:

9) $\begin{pmatrix}22 & -2 & -1\\ 5 & -1 & 12\\ 31 & -5 & -7\end{pmatrix}$: 10) $\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$: 11) $\begin{pmatrix}52\\ 61\\ 21\end{pmatrix}$: ***358.*** $\begin{pmatrix}16 & 7\\ -218 & -96\end{pmatrix}$:

359. 1) $\begin{pmatrix}3 & -2\\ -4 & 3\end{pmatrix}$: 2) $\begin{pmatrix}\frac{1}{7} & -\frac{1}{7}\\ -\frac{5}{28} & -\frac{1}{14}\end{pmatrix}$: 3) $\begin{pmatrix}1 & -1\\ -7 & 8\end{pmatrix}$: 4) $\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$:

5) $\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2}\\ \frac{7}{2} & -4 & -\frac{5}{2}\\ -\frac{5}{2} & 3 & \frac{3}{2}\end{pmatrix}$: 6) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-2 & 0 & -2\\ 0 & -2 & 2\\ -2 & 2 & 0\end{pmatrix}$: 7) $\frac{1}{96}\begin{pmatrix}-20 & 4 & 4 & 28\\ 4 & 4 & 28 & -20\\ 4 & 28 & -20 & 4\\ 28 & -20 & 4 & 4\end{pmatrix}$:

360. 1) $\begin{pmatrix}-2 & -1\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$: 2) $\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\\ 5 & 7 & 1\end{pmatrix}$: 3) $\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ 1 & 0 & -2\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$: 4) $\frac{1}{7}\begin{pmatrix}42 & 9 & 20\\ 7 & -3 & 5\\ -35 & 1 & -18\end{pmatrix}$:

5) $\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -3\\ 0\end{pmatrix}$: ***363.*** 1) $\begin{pmatrix}15 & 4\\ 4 & 13\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}17 & -2 & 21 & -1\\ -2 & 5 & -3 & 7\\ 21 & -3 & 26 & -2\\ -1 & 7 & -2 & 10\end{pmatrix}$: 2) $\begin{pmatrix}5 & -6 & -4\\ -6 & 12 & 0\\ -4 & 0 & 8\end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 5 & -1 & 5 \\ -1 & 5 & -1 & 5 & -1 \\ 5 & -1 & 5 & -1 & 5 \\ -1 & 5 & -1 & 5 & -1 \\ 5 & -1 & 5 & -1 & 5 \end{pmatrix}$: ***366.*** 1) 2: 2) 2: 3) 3: ***367.*** 1) 2: 2) 1: 3) 2: 4) 3: 5) 2:

6) 2: 7) 2: 8) 4: 9) 3: ***368.*** $\left(\frac{1}{2}, 2, \frac{3}{2}\right)$: ***369.*** (4,0): ***370.*** (11,17):

371. (1,1,1): ***372.*** (3,-3,2): ***373.*** (0,0,0): ***374.*** (-2,3,1): ***375.*** (1,2,-3): ***376.*** (1,1,-1,2): ***377.*** (1,2,3): ***378.*** (1,1,1): ***379.*** (2,3,1): ***380.*** (1,1,2):

381. (1,0,1): ***382.*** $\left(\frac{1}{3}, 1, 2\right)$: ***383.*** (-2,-1,1,1): ***384.*** 1) (3,1): 2) $(x_1, x_2) \in \varnothing$:

3) $\left(\frac{11+2t}{4}, \frac{17+10t}{8}, t\right), t \in R$: 4) $\left(\frac{10-16t_1+t_2}{-5}, \frac{10-7t_1-3t_2}{5}, t_1, t_2\right), t_1, t_2 \in R$:

385. (3,-1): ***386.*** $(x_1, x_2) \in \varnothing$: ***387.*** $(x_1, x_2, x_3) \in \varnothing$: ***388.*** 1) $(x_1, x_2) \in \varnothing$:

2) $(1+\sqrt{2}t, t)$: 3) $\left(-\frac{2t}{5}, \frac{11t}{5}, t\right)$: 4)(3t-4;2-5t;t): 5) $\left(\frac{1-5t}{3}, \frac{t-2}{3}, t\right)$:

6) $\left(\frac{4-t}{2}, t, \frac{2+5t}{2}\right)$: 7) $\left(\frac{38}{3}t, \frac{-14}{3}t, 0, t\right)$: 8) $\left(\frac{25t+8}{-5}, \frac{30t+39}{20}, \frac{6t+1}{-4}, t\right)$:

389. 1) 5,9,13,17,21; 2) $4, \frac{5}{3}, \frac{6}{5}, 1, \frac{8}{9}$: 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}$:

390. 1) $\frac{1}{2}, 1, \frac{9}{7}$: 2) 0,2,0: 3) $\left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$: 4) -1,1,-1: 5) $\frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}$:

391. 2, $\frac{7776}{3125} \approx 2{,}49, \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}, \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}$: ***392.*** 1) $\frac{1}{n}$: 2) $\frac{2n}{n+1}$:

3) $\frac{2n}{2n-1}$: 4) $1+(-1)^n$: 5) $(2n-1)\sin\frac{\pi}{2}n$, 6) $2+(-1)^n$:

400. $\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$: ***401.*** $\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$:

414. 1) $\frac{3}{2}$: 2) $\frac{3}{4}$: 3) 0: 4) ∞: 5) 0: 6) $\frac{1}{2}$: ***415.*** 1) 5: 2) $-\frac{1}{3}$: 3) $\frac{1}{3}$: 4) $\frac{1}{2}$: 5) $\frac{1}{3}$:

6) $\frac{5}{4}$: 7) $\frac{1}{12}$: 8) $-\frac{1}{2}$: 9) 0: 10) ∞: 11) 0: 12) 0: 13) 1: 14) $\frac{1}{3}$: 15) 0: 16) $\frac{5}{4}$:

416. ա) $\frac{1}{4}$: բ) 1: գ) $\frac{1}{4}$: դ) 3: ե) 2: զ) 0: **417.** 1) Նվազող է: 2) Աճող է:

3) Մոնոտոն չէ:4)Մոնոտոն չէ:**421.**1) $\frac{2}{7} < x_n \le 1$: 2)$\frac{1}{2} \le x_n < 3$: 3)$|x_n| \le 2$:

4) Սահմանափակ չէ: **425.** 1) 2: 2) ln2: **426.** $\frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$: **428.** $\frac{a+2b}{3}$:

429. 1: **432.** 2, 0: **433.** 1) $\inf x_n = 2, \sup x_n = 3, \underline{\lim} x_n = \overline{\lim} x_n = 2$:

2) $\inf x_n = 0 = \underline{\lim} x_n, \sup x_n = \frac{5}{4}, \overline{\lim} x_n = 1$:

3) $\sup x_n = \overline{\lim} x_n = +\infty, \inf x_n = \underline{\lim} x_n = -\infty$: 4) $\inf x_n = \frac{-3\sqrt{3}}{2}$,

$\sup x_n = \frac{9\sqrt{3}}{10}, \underline{\lim} x_n = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \overline{\lim} x_n = \frac{\sqrt{3}}{2}$: 5) $\inf x_n = -1, \sup x_n = \frac{3}{2}$,

$\underline{\lim} x_n = 0, \overline{\lim} x_n = 1$: 6) $\inf x_n = \underline{\lim} x_n = 0, \sup x_n = \overline{\lim} x_n = +\infty$:

439. 1) $\frac{17}{7}$: 2) -3: 3) -1: 4) 0: 5) $-\frac{5}{3}$: **440.** 2: **441.** 1: **442.** 6: **443.**10:

444. 1: **445.** $\frac{1}{5}$: **446.** $-\frac{1}{2}$: **447.** 1: **448.** -3: **449.** 0: **450.** 0: **451.** ∞:

452. -12: **453.** $\frac{1}{2}$: **454.** $-\frac{1}{56}$: **455.** 1: **456.** $-\frac{1}{16}$: **457.** $\frac{1}{144}$: **458.** -2:

459. 0: **460.** $\frac{3}{2}$: **461.** $\frac{1}{2}$: **462.** $-\frac{5}{2}$: **463.** 1) $\frac{\sqrt{2}}{4}$, 2)$\frac{-\sqrt{2}}{4}$: **464.** $\frac{3}{2}$:

465. $\frac{1}{4}$: **466.** $\frac{4}{3}$: **467.** $\frac{m}{n}$: **468.** 0: **469.** 1: **470.** 7: **471.** $-\pi$: **472.** $\sqrt{2}$:

473. $\frac{5}{11}$: **474.** $-\frac{3}{4}$: **475.** $\frac{1}{2}$: **476.** $\frac{-25}{4}$: **477.** 1: **478.** $\frac{1}{3}$: **479.** $\frac{5}{8}$:

480. $\frac{1}{4}$: **481.** $\cos 3$: **482.** $-\sin 5$: **483.** π: **484.** $\frac{-\sqrt{2}}{2}$: **485.** 0: **486.** 1:

487. 0: **488.** $\frac{-\sqrt{3}}{3}$: **489.** $\frac{1}{2}$: **490.** 1: **491.** 1: **492.** $\frac{1}{\pi}$: **493.** $\frac{1}{2}$: **494.** 1:

495. 0: **496.**$+\infty$: **497.** 0: **498.**e^{-2}: **499.**e^2: **500.**e: **501.**$e^{-\frac{10}{3}}$: **502.**e^3:

503. e: ***504.*** $\frac{1}{\sqrt{e}}$: ***505.*** e: ***506.*** e^4: ***507.*** e^{-1}: ***508.*** $\frac{10}{\ln 10}$: ***509.*** 1:

510. ln2: ***511.*** $\frac{1}{3}$: ***512.*** $\frac{1}{a}$: ***513.*** 1: ***514.*** $\frac{-1}{2}$: ***515.*** 2ln3: ***516.*** a: ***517.*** 4:

518. 2: ***519.*** a-b: ***520.*** $\frac{1}{\ln 3}$: ***525.*** ա) 1: բ) 1: գ) $\frac{1}{4}$: դ) $\frac{2}{3}$: ե) 1: զ) 2:
է) 3: ը) 3: ***528.*** 1) $f(1-0)=-2$, $f(1+0)=2$: 2) $f(2-0)=+\infty$, $f(2+0)=0$: 3) $f(1-0)=1$, $f(1+0)=-2$: 4) $f(0-0)=-\sqrt{2}$, $f(0+0)=\sqrt{2}$:
5) $f(1-0)=-1$, $f(1+0)=1$: 6) $f(0-0)=1$, $f(0+0)=0$:

529. 1) ա) -1, բ) 1: 2) ա) 0, բ) 1: 3) ա) $\frac{\pi}{2}$, բ) $-\frac{\pi}{2}$: ***532.*** 1) 2: 2) $\frac{1}{2}$:

3) 0: 4) 1: 5) 0: 6) $\frac{4}{3}$: 7) Հնարավոր չէ: 8) Հնարավոր չէ: 9) e: 10) 0:

533. 1) Խզվում է միայն x=-1 կետում, I սեռի խզում: 2) Խզման կետ չունի: 3) Խզման կետ չունի: 4) Խզվում է միայն x=-1 կետում, I սեռի խզում: ***534.*** 1) x=-1, վերացնելի խզում: 2) x=-2, $f(-2-0)=-\infty$, $f(-2+0)=+\infty$: 3) x=0, I սեռի խզում: 4) x=0 վերացնելի խզում: 5) x=0, II սեռի խզում: 6) x=0 վերացնելի խզում; x=1, $f(1-0)=-\infty$, $f(1+0)=+\infty$: 7) x=0 վերացնելի խզում; $x=\pi n, n\in Z, n\neq 0$ ձգտում է ∞-ի: 8) x=±2 վերացնելի խզում: 9) x=0 վերացնելի խզում, $x=\frac{2}{2k+1}$ վերացնելի խզում: 10) x=0, I սեռի խզում: 11) x=0, $f(0-0)=+\infty$, $f(0+0)=0$: 12) $x=\pi k, k\in Z$, ձգտում է ∞-ի: 13) $x=\sqrt{\pi k}, k\in Z$, ձգտում է ∞-ի: 14) x=±1 վերացնելի խզում, x=0, II սեռի խզում: ***541.*** 1) 7: 2) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$: 3) –sin2: ***543.*** 1) $3x^2$:

2) $\frac{-2}{x^3}$: 3) $\frac{-1}{\sin^2 x}$: 4) $\frac{1}{x\ln 2}$: 5) $3^x \ln 2$: 6) cosx-sinx: ***545.*** 1) $6x^2$-5:

2) $\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{-3}{2x^2\sqrt{x}}+8x^7$: 3) e^x(sinx+cosx): 4) $\frac{1-x^2-x}{(x^2+1)^2}$:

5) $3\sin^2 x\cos x$: 6) $-\text{tg}x$: 7) $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$: 8) $2x\cos x^2 + 7^{\arcsin 2x}\cdot\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$:

546. 7: ***547.*** 6x-1: ***548.*** $-10x-5x^4$: ***549.*** -2x-1: ***550.*** $3x^2+6x+2$:

551. 2ax+b: ***552.*** x^3-2: ***553.*** $\frac{2}{(x+1)^2}$: ***554.*** $\frac{12-8x-x^2}{(x+4)^2}$: ***555.*** $\frac{2+2x^2}{(1-x^2)^2}$:

556. $\frac{2-4x}{(1-x+x^2)^2}$: ***557.*** $\frac{1-x^4-4x^2}{(x^3-x)^2}$: ***558.*** $\frac{bc-ad}{(c+dx)^2}$:

559. $\frac{(1-x)^p}{(1+x)^q}\left(\frac{-p}{1-x}+\frac{-q}{1+x}\right)$: ***560.*** $6{,}5x^{5,5}$: ***561.*** $\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{x\sqrt{x}}$:

562. $\frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}$: ***563.*** $\frac{-1}{x^2}-\frac{1}{2x\sqrt{x}}-\frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$: ***564.*** $\frac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x^2+x\sqrt{x}}}$:

565. $\frac{a^2}{\left(a^2-x^2\right)^{3/2}}$: ***566.*** $\frac{-1}{\sqrt{1-x}\sqrt{(1+x)^3}}$: ***567.*** 5cos5x: ***568.*** -6sin2x:

569. 15cos(5x-2): ***570.*** 2sin(3-2x): ***571.*** 2cos2x+2sinx: ***572.*** $-7\cos^6 x\sin x$:

573. 5cos5xcos3x-3sin5xsin3x: ***574.*** -7sin7xcos2x-2cos7xsin2x:

575. $-7\sin 7x\sin^2\frac{x}{3}+\frac{1}{3}\cos 7x\sin\frac{2x}{3}$: ***576.*** $6x\sin^2 x^2\cos x^2$: ***577.*** $\frac{n\sin x}{(\cos x)^{n+1}}$:

578. $\frac{2}{\sin^2 x}$: ***579.*** $3x^2\text{ctg}3x-\frac{3x^3}{\sin^2 3x}$: ***580.*** $\frac{3x-\sin x\cos x}{3\sqrt[3]{x^4}\cos^2 x}$:

581. $\frac{\sin 2x+4x\cos 2x}{2\sqrt{x}}$: ***582.*** $\frac{-1}{1+\sin x}$: ***583.*** $\frac{\sin 2x\sin x^3-3x^2\cos x^3\sin^2 x}{\sin^2 x^3}$:

584. $\frac{2}{(\sin x+\cos x)^2}$: ***585.*** $\frac{-2\cos 4x}{\sqrt{1-\sin 4x}}$: ***586.*** $-\frac{\sin 2(\sqrt{x}+1)}{2\sqrt{x}}$:

587. $\frac{3\text{tg}\left(3\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}\cos^2(3\sqrt{x}-1)}$: ***588.*** $-\sin x\, 3^{\cos x}\ln 3$: ***589.*** $4\cos 4x\, 5^{\sin 4x}\ln 5$:

590. $2x(1-x)e^{-2x}$: ***591.*** $\frac{-1}{x^2\cos^2\frac{1}{x}}2^{\text{tg}\frac{1}{x}}\ln 2$: ***592.*** $\frac{1}{x}$: ***593.*** lnx:

594. $\dfrac{x(2\ln x-1)}{\ln^2 x}$: **595.** $3x^2\ln x$: **596.** $\dfrac{2x+2-\ln x}{x^2}$: **597.** $\dfrac{2\lg x-1}{x}$:

598. $\dfrac{\mathrm{ctg}x}{\ln 10}$: **599.** $\dfrac{2\ln x}{x}$: **600.** $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a}}$: **601.** $\dfrac{2x}{1-x^4}$: **602.** $\dfrac{-x^3}{(1+x^4)^2}+\dfrac{1}{x}-\dfrac{x^3}{1+x^4}$:

603. $\dfrac{1}{x\ln x}$: **604.** $\dfrac{-1}{\cos x}$: **605.** $\dfrac{1}{x\ln x\ln\ln x}$: **606.** $\dfrac{1}{2(1+\sqrt{x+1})}$:

607. $\dfrac{1}{\sin x}$: **608.** $\dfrac{1}{\cos x}$: **609.** $\cos(\ln x)+\sin(\ln x)$: **610.** $\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$: **611.** 0:

612. $\dfrac{5}{\sqrt{1-25x^2}}$: **613.** $\dfrac{-1}{\sqrt{x-x^2}}$: **614.** $\dfrac{3}{|x|\sqrt{x^2-9}}$: **615.** $\dfrac{1+x^4}{1+x^6}$:

616. $e^x\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\arcsin x\right)$: **617.** $\dfrac{1}{x(1+\ln^2 x)}$: **618.** $\dfrac{\cos x+\sin x}{\sqrt{\sin 2x}}$:

619. $\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos^4 x}}$: **620.** $\dfrac{1}{2\arccos\dfrac{1}{\sqrt{x}}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x^3-x^2}}$: **621.** $\dfrac{\sin 2x}{\cos^4 x+\sin^4 x}$:

622. $\dfrac{1}{2(1+x^2)}$: **623.** $\dfrac{1}{\sqrt{1+2x-x^2}}$: **624.** $\dfrac{-2x}{|x|(1+x^2)}$:

625. $\dfrac{-1}{x^2}\ln^3 x+\dfrac{6}{x^2}\ln x+\dfrac{6}{x}$: **626.** $\dfrac{(5+2x)^9(20\sin x+(5+2x)\cos x)}{\sin^2 x}$:

627. $\dfrac{(3x+1)^{10}(36x\ln x+\ln x-3x-1)}{\ln^2 x}$: **628.** $\dfrac{e^{x\sqrt{\sin x}}(\sin x+\cos x)}{2\sqrt{\sin x}}$:

629. $2\mathrm{ctg}\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x\sin^2\dfrac{1}{x}}-\dfrac{1}{2}\sin 14x$: **630.** $\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$:

631. $\sqrt{a^2-x^2}$: **632.** $\mathrm{ch}x,\ \mathrm{sh}x,\ \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$: **633.** 1) $\begin{cases}1, \text{եթե } x>0\\ -1, \text{եթե } x>0\end{cases}$,

2) $2|x|$, եթե $x\neq 0$, 3) $\begin{cases}-1, \text{եթե } x\le 0\\ -e^{-x}, \text{եթե } x>0\end{cases}$:

637. $\left(\frac{1}{2x}+\frac{3}{2(x-1)}-\frac{1}{x+2}\right)\cdot\sqrt{\frac{x(x-1)^3}{x+2}}$; **638.** $u^v\left(v'\ln u+v\frac{u'}{u}\right)$;

639. 1) $\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{1-x^2}\right)\cdot\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$;

2) $\left(\frac{3}{x-1}+\frac{4}{x-2}+\frac{5}{x-3}\right)\cdot(x-1)^3(x-2)^4(x-3)^5$;

3) $\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{1-x}+\frac{1}{3}\left(\frac{-1}{3-x}-\frac{2}{3+x}\right)\right)\cdot\frac{x^2}{1-x}\sqrt[3]{\frac{3-x}{(3+x)^2}}$;

4) $\frac{1}{2}\left(\frac{7}{x+1}+\frac{5}{x-1}-\frac{5}{x}-\frac{3}{x+2}\right)\sqrt{\frac{(x+1)^7(x-1)^5}{x^5(x+2)^3}}$; 5) $x^x(1+\ln x)$;

6) $x^{\sin x}\left(\frac{\sin x}{x}+\cos x\ln x\right)$; 7) $(\sin x)^x(x\,\mathrm{ctg}x+\ln\sin x)$;

8) $x^{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\right)$; 9) $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\cdot\left(\frac{-1}{x+1}+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$;

10) $\sqrt[x]{\ln x}\left(\frac{1}{x^2\ln x}-\frac{1}{x^2}\ln\ln x\right)$; 11) $\left(\sqrt{x}\right)^{\sqrt[3]{x}}\left(\frac{1}{2\sqrt[3]{x^2}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\ln\sqrt{x}\right)$;

12) $(\sin x)^{\arcsin x}\left(\mathrm{ctg}x\arcsin x+\frac{\ln\sin x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$; **640.** $\frac{2x^2}{1-x^6}\sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$;

641. $\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right)\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$;

642. $\frac{1}{m+n}\left(\frac{-m}{1-x}+\frac{n}{1+x}\right)\sqrt[m+n]{(1-x)^m(1+x)^n}$; **643.** $\frac{mn\sin mx}{\cos^{n+1}mx}$;

644. $-\sin 2x\cos(\cos 2x)$; **645.** $\frac{n}{x\ln mx}$; **646.** $\left(\ln\frac{a}{b}-\frac{a}{x}+bx\right)\left(\frac{a}{b}\right)^x\left(\frac{b}{x}\right)^a\left(\frac{x}{a}\right)^b$

647. $\frac{1}{3x^2-2}$; **648.** $\frac{2\pi}{\ln 2}\mathrm{tg}2\pi x$; **649.** $5\mathrm{ch}5x$; **650.** $3\mathrm{sh}3x\,\mathrm{sh}\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{ch}3x\,\mathrm{ch}\frac{x}{2}$;

651. $\frac{3}{ch^2 3x}$: **652.** $\frac{1}{x}$: **653.** $\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$: **654.** cosx, եթե sinx>0, -cosx, եթե sinx<0: **655.** $\frac{-1}{x\ln^2 x}$: **656.** $\frac{-\ln 4}{x\ln^2 5x}$: **657.** e^{-2x}: **658.** $\frac{1}{chx}$:

659. $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{2x}{x^2+1}+\frac{1}{5(5-x)}\right)\sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{\sqrt[5]{5-x}}}$:

660. $\left(\frac{2}{3x}+\frac{1}{1-x}-\frac{2x}{1+x^2}+3ctgx-2tgx\right)\sqrt[3]{x^2}\,\frac{1-x}{1+x^2}\sin^3 x\cos^2 x$:

661. $\left(\sqrt{tgx}\right)^{x+1}\left(\frac{x+1}{\sin 2x}+\ln\sqrt{tgx}\right)$: **662.** $(\sin x)^{\cos x}\left(\frac{\cos^2 x}{\sin x}-\sin x\ln\sin x\right)$:

663. $(\cos x)^{\sin x}\left(\frac{-\sin^2 x}{\cos x}+\cos x\ln\cos x\right)$: **664.** $\left(\sqrt{x}\right)^{\sin^2 x}\left(\frac{\sin^2 x}{2x}+\sin 2x\ln\sqrt{x}\right)$:

665. 1) 97,5: 2) 90: **666.** 1) 1,8: 2) 0,72: **667.** $\frac{5}{4}$: **668.** 0: **669.** 1) $\frac{1}{\ln 10}$: 2)1: 3) $\frac{5}{4}$: **670.** $-\frac{1}{4}$: **673.** 1) $\frac{24}{7}$: 2) $\frac{375}{124}$: **674.** 1)0: 2)5: 3)10: **675.** m:

676. $\frac{3ax^3}{ax^3+b}$: **677.** 1) $126x^5-12x^2$: 2) $\frac{x\left(3+2x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}$: 3) $\frac{1}{x}$: 4) -2cos2x:

678. 1) $5\cdot 4\cdot 3....(5-(n-1))x^{5-n}$: 2) $3^n e^{3x}$:

3) $\frac{1}{2}\left[7^n\sin\left(7x+\frac{\pi}{2}n\right)+3^n\sin\left(3x+\frac{\pi}{2}n\right)\right]$: 4) $\frac{1}{\ln 2}\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$:

679. 3, 12, 9: **680.** 2: **681.** 6: **682.** 1) 12x: 2) $56x^6+210x^4$: 3) $\frac{3}{4\sqrt{x}}$:

4) $\frac{2}{(x+1)^3}$: 5) $\frac{3x}{(1-x^2)^{5/2}}$: 6) $\frac{2\sin x}{\cos^3 x}$: 7) $2arctgx+\frac{2x}{1+x^2}$: 8) $e^{-x^2}\left(4x^2-2\right)$:

9) 2cos2x: 10) $\frac{2}{3}\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$: 11) $2\left(\frac{1}{1-x^2}+\frac{x\arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}}\right)$:

12) $\dfrac{3x}{(1-x^2)^{3/2}}+\dfrac{1+2x^2}{(1-x^2)^{5/2}}\arcsin x$: ***683.*** 1) 6: 2) $480(2x-3)^2$: 3) $\dfrac{2}{(1+x)^3}$:

4) -125sin5x: ***685.*** 1) n=1, $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $n\ge 2$, $\dfrac{(-1)^{n-1}}{2^n}(2n-3)!!\cdot x^{-\frac{2n-1}{2}}$:

2) $2^n\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{2}n\right)$: 3) $7^n\cos\left(7x+\dfrac{\pi}{2}n\right)$: 4) $3(-1)^n m(m-1)\ldots(m-(n-1))x^{-m-n}$:

5) $n\ge 2, (-1)^{n-2}(n-2)!\,x^{-n+1}$: 6) $\dfrac{e^x+(-1)^{n-1}e^{-x}}{2}$:

7) $\dfrac{1}{2}\left(8^n\sin\left(8x+n\dfrac{\pi}{2}\right)-6^n\sin\left(6x+n\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$:

8) ne^x+xe^x : 9) $n\ge 2, y^{(n)}=2(-1)^{n-1}n!(x-1)^{-n-1}$:

10) $a^n(-1)^{n-1}(n-1)!(ax+b)^{-n}$: ***686.*** 1,1: ***687.*** 1) 3cos3xdx: 2) $\dfrac{2xdx}{1+x^2}$:

3) $\dfrac{2dx}{\sqrt{1-4x^2}}$: ***689.*** 1) $-\pi\sin\pi x dx$: 2) $(3x^2-4)dx$: 3) $-\dfrac{1}{x^2}dx$:

4) $\dfrac{-adx}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$: 5) $\dfrac{2dx}{x^2-4}$: 6) $e^x(x+1)dx$: ***690.*** 1) xsinxdx: 2) $\dfrac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}$:

3) $\dfrac{\ln xdx}{x\sqrt{\ln^2 x-4}}$: 4) sin6xdx: 5) $\dfrac{adx}{a^2+x^2}$: ***691.*** 1) $\dfrac{a}{b}$: 2) –a: 3) 1: 4) 0:

692. $\dfrac{1}{2}$: ***693.*** $\dfrac{63}{43}$: ***694.*** ∞: ***695.*** 0: ***696.*** 3: ***697.*** $\dfrac{4}{7}$: ***698.*** -π: ***699.*** $\dfrac{4}{9}$:

700. 0: ***701.*** 0: ***702.*** 1: ***703.*** $\dfrac{a^2}{b^2}$: ***704.*** $\dfrac{1}{2}$: ***705.*** $a^a(\ln a-1)$: ***706.*** $\dfrac{-e}{2}$:

707. $\dfrac{2}{3}$: ***708.*** 2: ***709.*** $\dfrac{9}{50}$: ***710.*** 1: ***711.*** 1: ***712.*** $\dfrac{1}{2}$: ***713.*** 0: ***714.*** $e^{\frac{1}{3}}$:

715. 1: ***716.*** 1: ***717.*** -1: ***719.*** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$: ***720.*** ∩ξ: ***722.*** $\dfrac{14}{9}$:

726. $5+5(x-1)+3(x-1)^2+2(x-1)^3$: ***727.*** 1) $4-10(x+1)+8(x+1)^2-(x+1)^3$:
2) $9-13(x+1)+10(x+1)^2-4(x+1)^3+(x+1)^4$:

3) $-8+20(x+1)-26(x+1)^2+19(x+1)^3-7(x+1)^4+(x+1)^5$: **728.** 1) $1+2x-x^2$:

2) $-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{45}x^6$: 3) $1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}x^2$: 4) $x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5$:

729. 1) $e^{\frac{-x^2}{2}}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2^2 2!}+\frac{\left(-x^2\right)^3}{2^3 3!}+\ldots+\frac{\left(-x^2\right)^n}{2^n n!}+o\left(x^{2n}\right)$:

2) $\sin^2 x=\frac{(2x)^2}{2\cdot 2!}-\frac{(2x)^4}{2\cdot 4!}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}(2x)^{2n}}{2(2n)!}+o\left(x^{2n}\right)$:

3) $\sin\frac{5x}{2}=\frac{5x}{2}-\frac{(5x)^3}{2^3\cdot 3!}+\frac{(5x)^5}{2^5\cdot 5!}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}(5x)^{2n-1}}{2^{2n-1}(2n-1)!}+o\left(x^{2n}\right)$:

4) $\ln(4+x^2)=\ln 4+\frac{x^2}{4}-\frac{x^4}{4^2\cdot 2}+\frac{x^6}{4^3\cdot 3}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{4^n\cdot n}+o\left(x^{2n}\right)$:

5) $$\sqrt[3]{8+x^2}=2\left(1+\frac{1}{3}\frac{x^2}{8}+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}\left(\frac{x^2}{8}\right)^2+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}\left(\frac{x^2}{8}\right)^3+\ldots+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{3}-(n-1)\right)}{n!}\left(\frac{x^2}{8}\right)^n+o\left(x^{2n}\right)\right)$$: **730.** 1) $-\frac{1}{2}$: 2) $\frac{1}{3}$: 3) $-\frac{1}{12}$:

4) $\frac{1}{3}$: **731.** 1) $f(x)\downarrow$, եթե $x\in(-\infty,1]$, $f(x)\uparrow$, եթե $x\in[1,+\infty)$:

2) $f(x)\uparrow$, եթե $x\in(-\infty,1]$, եթե $x\in[2,+\infty)$, $f(x)\downarrow$, եթե $x\in[1,2]$:

3) $f(x)\uparrow$, եթե $x\in R$: 4) $f(x)\downarrow$, եթե $x\in(0,1]$, եթե $x\in(1,e)$, $f(x)\uparrow$, եթե $x\in[e,+\infty)$:

732. 1) $(-\infty,3]^{\downarrow},[3,+\infty)^{\uparrow}$: 2) $\left(-\infty,\frac{7}{4}\right]^{\downarrow},\left[\frac{7}{4},+\infty\right)^{\uparrow}$: 3) $\left(-\infty,\frac{7}{16}\right]^{\uparrow},\left[\frac{7}{16},+\infty\right)^{\downarrow}$:

4) $(-\infty,+\infty)^{\uparrow}$: 5) $(-\infty,0]^{\uparrow},[0,2]^{\downarrow}[2,+\infty)^{\uparrow}$: 6) $(-\infty,-1]^{\uparrow},[-1,4]^{\downarrow}[4,+\infty)^{\uparrow}$:

7) $\left[0,\frac{2}{3}\right]^{\downarrow}\left[\frac{2}{3},+\infty\right)^{\uparrow}$: 8) $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]^{\uparrow},\left[\frac{1}{2},3\right]^{\downarrow}[3,+\infty)^{\uparrow}$: 9) $(-\infty,2)^{\downarrow}$, $(2,+\infty)^{\downarrow}$:

10) $(-\infty,-1)^{\uparrow}$, $(-1,+\infty)^{\uparrow}$: 11) $(-\infty,-1]^{\downarrow},[-1,1]^{\uparrow}[1,+\infty)^{\downarrow}$:

12) $(-\infty,-2)^{\downarrow}$, $(-2,8)^{\downarrow}$, $(8,+\infty)^{\downarrow}$: 13) $(-\infty,0]^{\downarrow}, [0,+\infty)^{\uparrow}$:

14) $\left(0,\frac{1}{2}\right]^{\downarrow}, \left[\frac{1}{2},+\infty\right)^{\uparrow}$: 15) $(-\infty,+\infty)^{\uparrow}$: 16) $(-\infty,0]^{\downarrow}, [0,2]^{\uparrow} [2,+\infty)^{\downarrow}$:

17) $(-1,0]^{\uparrow}, [0,1)^{\downarrow}$: 18) $(-\infty,+\infty)^{\downarrow}$: 19) $(-\infty,0)^{\uparrow}, (0,+\infty)^{\uparrow}$:

20) $\left[-1,\frac{-\sqrt{2}}{2}\right]^{\downarrow}, \left[\frac{-\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]^{\uparrow}, \left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]^{\downarrow}$: ***736.*** 1) $f_{max}(\frac{1}{2}) = 2{,}25$:

2) $f_{min}(-2) = -9$, $f_{min}(3) = -40{,}25$, $f_{max}(0) = 7$: 3) $f_{min}(\frac{7}{5}) = -\frac{1}{24}$:

4) $y_{max}(\frac{\pi}{6} + 2\pi k) = \frac{3}{2}, k \in z$; $y_{max}(\frac{5\pi}{6} + 2\pi k) = \frac{3}{2}$;

$y_{min}(\frac{\pi}{2} + 2\pi k) = 1$: $y_{min}(\frac{3\pi}{2} + 2\pi k) = -3$: 5) $y_{min}(2) = 2$: 6) $y_{max}(-1) = 4$:

7) $y_{min}(\frac{1}{4}) = \frac{23}{8}$: 8) $y_{max}(-\frac{1}{2}) = \frac{21}{4}$: 9) Չունի: 10) $y_{max}(0) = 0$, $y_{min}(2) = -4$:

11) $y_{max}(1) = \frac{11}{6}$, $y_{min}(2) = \frac{5}{3}$: 12) $y_{max}(1) = 0$, $y_{min}(3) = -4$:

13) $y_{max}(\pm 1) = 1$, $y_{min}(0) = 0$: 14) $y_{min}(1) = 3$, $y_{max}(2) = 4$, $y_{min}(3) = 3$:

15) $y_{min}\left(\frac{3-\sqrt{17}}{4}\right)$, $y_{max}\left(\frac{3+\sqrt{17}}{4}\right)$, $y_{min}(3) = 0$: 16) $y_{min}\left(\frac{5 \pm \sqrt{13}}{6}\right)$,

$y_{max}(1) = 0$: 17) $y_{max}(-1) = -2$, $y_{min}(1) = 2$: 18) $y_{max}(1) = \frac{1}{e}$:

19) $y_{max}(0) = -2$, $y_{min}(2) = 2$: 20) Չունի: 21) $y_{max}(0) = a$,

22) $y_{max}(-2-\sqrt{7}), y_{min}(-2+\sqrt{7})$: 23) $y_{min}(1) = 1$: 24) $y_{min}(1) = \frac{1}{e}$,

$y_{max}(e^2) = \frac{4}{e^2}$: 25) $y_{max}(1) = 1$: 26) $y_{max}(\pm 1) = 2$, $y_{min}(0) = 0$:

27) $y_{min}(\frac{3}{4}) = -\frac{3}{8}\sqrt[3]{2}$: 28) $y_{max}(0) = 2$, $y_{min}(\pm 1) = \sqrt[3]{4}$:

29) $y_{min}(-\frac{\pi}{4} + 2\pi k) = \sqrt{2}$, $y_{max}(\frac{3\pi}{4} + 2\pi k) = -\sqrt{2}$: 30) $y_{min}(\frac{\pi}{2} + 2\pi k) = -2$,

$y_{max}(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k) = 4$: ***741.*** 1) $y_{մ.}(-1)=8$, $y_{փ.}(2)=-19$: 2) $y_{մ.}(1)=3$, $y_{փ.}(2)=-24$:

3) $y_{մ.}(-2)=16/3$, $y_{փ.}(3)=-37/4$: 4) $y_{մ.}(4)=3/5$, $y_{փ.}(0)=-1$: 5) $y_{մ.}(0)=1$,

$y_{\text{փ.}}(1/2)=3/5$: 6) $y_{\text{մ.}}(e)=e^2$, $y_{\text{փ.}}(1)=0$: 7) $y_{\text{մ.}}(4)=6$, $y_{\text{փ.}}(0)=0$: 8) $y_{\text{մ.}}(0)=2$, $y_{\text{փ.}}(1)=\sqrt[3]{2}$:9)$y_{\text{մ.}}(0)=\pi/4$,$y_{\text{փ.}}(1)=0$: ***742.*** $\frac{a}{2},\frac{a}{2}$:

743. $\left(2-\sqrt{2}\right)p,\left(2-\sqrt{2}\right)p,\left(\sqrt{2}-1\right)2p$: ***744.*** $h=2R=2\sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}}$:

745. $\frac{3}{2}\sqrt{8-6\sqrt[3]{2}}$: ***746.*** $R\sqrt{\frac{2}{3}},2R\frac{\sqrt{3}}{3}H$: ***747.*** $\ell\sqrt{\frac{2}{3}},h=\frac{\ell\sqrt{3}}{3}$:

748. H կոն=4R գունդ: ***749.*** $\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$: ***750.*** $\sqrt[3]{2v},h=\frac{\sqrt[3]{2v}}{2}$:

751. H կոն=4/3R: ***752.*** R կոն=3/2 r գլան: ***753.*** $2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$: ***754.*** $a\sqrt{2},b\sqrt{2}$:

755. $\left(\frac{2}{3}a,\pm2\sqrt{\frac{pa}{3}}\right)$: ***756.*** $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{3}{4}\right)$: ***757.*** ա) $\frac{hv_0}{\sqrt{h^2-v_0^2t_0^2}}$: բ) $\sqrt[3]{\frac{a}{2k}}$,

որտեղ՝ k-ն համեմատականության գործակիցն է:

758. 1) $(-\infty,-2)^{\cup}$, $(2;1{,}5)^{\cap}$, $(1{,}5;+\infty)^{\cup}$ $x_{\text{շրջ.}}=-2;1{,}5$:

2) $(-\infty;1)^{\cup}$ $(1,+\infty)^{\cap}$ $x_{\text{շրջ.}}=1$: 3) $(-\infty;2)^{\cap}$, $(2,+\infty)^{\cup}$ $x_{\text{շրջ.}}=2$:

4) $(-\infty,-1)^{\cup}$, $(-1;1)^{\cap}$, $(1,+\infty)^{\cup}$ $x_{\text{շրջ.}}=\pm1$: 5) $\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right)^{\cup}$, $\left(-\frac{1}{3},1\right)^{\cap}$

$(1,+\infty)^{\cup}$ $x_{\text{շրջ.}}=-\frac{1}{3},1$: 6) $(-\infty,+\infty)^{\cup}$: 7) $(-\infty,-1)^{\cap}$, $(-1,+\infty)^{\cup}$ $x_{\text{շրջ.}}=-1$:

8) $\left(0,\frac{1}{\sqrt[6]{e^5}}\right)^{\cap}$, $\left(\frac{1}{\sqrt[6]{e^5}},+\infty\right)^{\cup}$ $x_{\text{շրջ.}}=\frac{1}{\sqrt[6]{e^5}}$: 9) $(-\infty,2)^{\cap}$, $(2,+\infty)^{\cup}$, $x_{\text{շրջ.}}=2$:

10) $(-\infty,-1)^{\cap}$, $(-1;1)^{\cup}$, $(1,+\infty)^{\cap}$ $x_{\text{շրջ.}}=\pm1$: 11) $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)^{\cap}$, $\left(-\sqrt{3};0\right)^{\cup}$,

$\left(0;\sqrt{3}\right)^{\cap}$, $\left(\sqrt{3},+\infty\right)^{\cup}$ $x_{\text{շրջ.}}=\pm\sqrt{3}$: 12) $(-\infty,+\infty)^{\cup}$: 13) $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\cup}$,

$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\cap}$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)^{\cup}$ $x_{\text{շրջ.}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$: 14) $\left(e^{-\frac{3\pi}{4}+T},e^{\frac{\pi}{4}+T}\right)^{\cup}$, $\left(e^{\frac{\pi}{4}+T},e^{\frac{5\pi}{4}+T}\right)^{\cap}$,

$T=2\pi k$, $x_{\text{շրջ.}}=e^{\frac{\pi}{4}+\pi k}$ $k\in z$: 15) $\left(-\infty,-2-\sqrt{3}\right)^{\cap}$, $\left(-2-\sqrt{3},-2+\sqrt{3}\right)^{\cup}$,

$\left(-2+\sqrt{3},1\right)^{\cap},(1,+\infty)^{\cup}$ $x_{շրջ.}=-2\pm\sqrt{3},1$: ***759.*** 1) x=2, y=5: 2) x=1, y=3x+3: 3) x=3x+π/2, y=3x-π/2: 4) x=5, y=1: 5) x=0: 6) x=4, y=4x+4: 7) x=2, y=1: 8) x=0, y=0: 9) y=x+1: 10) y=3x: 11) $y=\frac{b}{a}x$: 12) y=2x: 13) y=x: ***760.*** 1) Խզում x=±2, y| =0⇒x=0, $y_{max}(-2\sqrt{3})=\frac{-3\sqrt{3}}{4}$, $y_{min}(2\sqrt{3})=\frac{3\sqrt{3}}{4}$ շրջում (0,0), ասիմպտոտներ x=±2, y=x/4:
2) f(-x)=-f(x), y| =0⇒x=0, $x=\pm\sqrt{3}$, $y_{min}(-1)=-2$, $y_{max}(1)=2$, շրջում (0,0): 3) f(-x)=f(x), y| =0⇒ $x=1\pm\sqrt{3}$, $y_{max}(\pm1)=\frac{3}{2}$, $y_{min}(0)=1$, շրջում $\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{23}{18}\right)$: 4) y| =0⇒x=-1, x=2, $y_{min}(2)=0$, $y_{max}(0)=4$, շրջում (1,2):
5) f(-x)=f(x), y| =0⇒x=0, $x=\pm\sqrt{3}$, $y_{min}(0)=0$, $y_{max}(\pm1)=1$, $y_{min}(\pm3)=0$, շրջում, երբ $\left(\pm\sqrt{\frac{6\pm\sqrt{21}}{5}},\frac{234\pm2\sqrt{21}}{500}\right)$: 6)f(-x)=-f(x), $y_{min}(\sqrt{3})=-\sqrt{3}$, $y_{max}(-\sqrt{3})=\sqrt{3}$, շրջում 0(0,0), $\left(\pm\sqrt{\frac{3}{2}},\pm\frac{7}{8}\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$: 7) Խզում, երբ x=1, $y_{min}(3)=\frac{27}{12}$, շրջում (0,0), ասիմպտոտներ x=1, $y=\frac{x}{2}+1$. 8) Խզում, երբ x=1, y| =0⇒x=0, $y_{max}(0)=0$, $y_{min}(\sqrt[3]{4})=\frac{4\sqrt[3]{4}}{3}$ շրջում $\left(-\sqrt[3]{2},-\frac{2\sqrt[3]{2}}{3}\right)$, ասիմպտոտներ x=1, y=x: 9) f(-x)=-f(x), խզում, երբ x=±1, y| =0⇒x=0, $x=\pm\sqrt{3}$, շրջում (0,0), ասիմպտոտներ x=-1, x=1,y=x: 10) Խզում, երբ $x=-\sqrt[3]{2}$, y| =0⇒x=0, $y_{max}(1)=\frac{1}{3}$, շրջում $\left(\sqrt[3]{4},\frac{\sqrt[3]{4}}{6}\right)$, ասիմպտոտներ $x=-\sqrt[3]{2}$, y=0: 11) f(-x)=-f(x), խզում, երբ x=±2, y| =0⇒x=0, շրջում (0,0), ասիմպտոտներ x=-2, x=2,y=0:

12) f(-x)=f(x), y| =0⇒x=±1, $y_{min}(0)=-1$, շրջում $\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{1}{2}\right)$, ասիմպ-տոտներ y=1: 13) Խզում, եթե x=-1, y| =0⇒x=0, շրջում (0,0), ասիմպ-տոտներ x=-1, y=1: 14) D(y)=R, y| =0⇒x=0, x=2, $y_{min}(1)=-1$, շրջում (0,0), (2,0): 15) y| =0⇒x=2, y(0)=-2, $y_{min}(-\frac{1}{2})=-\frac{3\sqrt{5}}{5}$, շրջում $\left(\frac{-3\pm\sqrt{41}}{8}, y\left(\frac{-3\pm\sqrt{41}}{8}\right)\right)$, ասիմպտոտներ y=-1, y=1:

16) f(-x)=f(x),y(0)=-1, x→0 ⇒y′→∞, $y_{min}(0)=-1$, ասիմպտոտ y=0:

17) f(-x)=-f(x), y| =0⇒x=0, խզում x=±1, $y_{min}(\sqrt{3})=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$, $y_{max}(-\sqrt{3})=-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$, շրջում (0,0), $\left(-3,-\frac{3}{2}\right)$, $\left(3,\frac{3}{2}\right)$: 18) Խզում x=-1, $y_{min}(0)=0$, $y_{max}(-2)=-\sqrt[3]{4}$, շրջում $\left(-2,\pm\sqrt{3},\pm\sqrt[3]{\frac{\sqrt{27}\mp 5}{2}}\right)$ ասիմպտոտ x=-1: 19) D(y)=$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$, $y_{max}(-1-\sqrt{2})=-1-\sqrt{2}+\ln(2+2\sqrt{2})$, ասիմպտոտներ x=-1, x=1: 20) y| =0⇒x=1, $y_{max}(e^2)=\frac{e}{2}$, շրջում $\left(e^{\frac{8}{3}},\frac{8}{3}e^{-\frac{4}{3}}\right)$, ասիմպտոտ x=0, y=0: 21) D(y)=$(0,1)\cup(1,+\infty)$, խզում x=0, x=1, $y_{min}\left(\frac{1}{e}\right)=-e$, ասիմպտոտ x=1, y=0: 22) D(y)=$(0,+\infty)$, y| =0⇒x=1, x→0+0, y→0+0, $y_{max}\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e^2}$, $y_{min}(1)=0$, շրջում $\ln x=-3\pm\sqrt{8}$:

23) շրջում (0,0), ասիմպտոտներ $y=-\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}$, $y=\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}$:

24) $y_{min}(0)=0$, ասիմպտոտներ $y=-\frac{\pi}{2}x-1$, $y=\frac{\pi}{2}x-1$:

25) y(x+2π)=y(x), $x\in[0,2\pi]\Rightarrow y_{max}\left(\frac{\pi}{4}\right)=1, y_{min}\left(\frac{5\pi}{4}\right)=-1$ շրջում $\left(\frac{3\pi}{4},0\right)$,

$\left(\frac{7\pi}{4},0\right)$: 26) y(x+2π)=y(x), $[0,2\pi] \Rightarrow y_{max}\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{4}, y_{min}\left(\frac{5\pi}{6}\right)=-\frac{3\sqrt{3}}{4}$, շրջում $\left(\frac{3\pi}{2},0\right),\left(\frac{\pi}{2},0\right)\left(\pi+\arcsin\frac{-1}{4},y\right)\left(2\pi+\arcsin\frac{-1}{4},y\right)$: 27) f(-x)=f(x), $y|=0 \Rightarrow x=\pm 1$, $y_{max}(0)=\frac{\pi}{2}$, $y'(0+0)=-2, y'(0-0)=2$ ասիմպտոտ $y=-\frac{\pi}{2}$:

28) Խզում x=0, $y_{min}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{e^2}{4}$, ասիմպտոտ x=0, (x→0+0) $(-\infty,0)^{\cap}$, $(0,+\infty)^{\cap}$: 29) y(0)=1, $y_{min}(0)=1$, ասիմպտոտ y=x, երբ x→+∞:

30) Խզում, եթե x=0, $y|=0 \Rightarrow x=2$, $y_{max}(-1)=e^{-1}=0{,}37$, $y_{min}(2)=4\sqrt{e}\approx 6{,}59$, ասիմպտոտ y=x+2, x=0:

31)D(y)=$(-\infty,0)\cup\left(\frac{2}{3},+\infty\right)$, $y_{եզր.}(0)=0, y_{եզր.}\left(\frac{2}{3}\right)=\pi$, $(-\infty,0)^{\cap}$, $(0,+\infty)^{\cup}$, ասիմպտոտ $y=\frac{\pi}{3}$: ***761.*** ա) $2y^2-x^2$: բ) $\frac{2xy}{x^2+y^2}$: գ) -2x+3y: դ) $y\frac{x+1}{x-1}$:

762. 1) 2x+y=c: 2) $x^2+y^2=c, c>0$: 3) $\frac{x}{y}=c$: 4) $\frac{y}{x}=e^{2c}$: 5) $\frac{1}{x^2+y^2}=c, c>0$: 6) xy=lnc, c>0: 7) $a^2+x^2-y^2=c$: 8) $\frac{1}{x^2-y^2}=c, c\neq 0$: 9) $|x|+|y|=1-c, c\leq 1$: 10) $\frac{y}{\sqrt{x}}=c$: 11) xy=c: 12) $x^2-y=c$: 13) y=lnx+c: ***763.*** 1) 2x-y≠0: 2) $x^2+y^2\leq 16$: 3) 3x+2y+z-6>0: 4) $\left|\frac{y}{x}\right|\leq 1$: 5) R^2: 6) $x^2+y^2\neq 0$: 7) $x^2-y^2\neq 0$: 8) $x^2+y^2-1\geq 0$: 9) x≥0 և y>0: 10) x+y≠0: 11) $x^2+y^2<4$: 12) x+y>0 և x+y≠1: 13) $|x+y|\leq 1$: 14) $|x|>|y|$: 15) x+y+z≥0: 16) $x^2+y^2+z^2-4>0$: 17) x≥0 և y≥0: 18) x+y>0: 19) $x^2+y>0$: 20) x=y: 21) $|y|\leq 1$: 22) $|x|\geq 2$ և $|y|\leq 2$: 23) $|x|\leq 1$ և $|y|\leq 1$: ***767.*** 1) -8: 2) 0: 3) $\frac{1}{4}$: 4) 1: 5) Գոյություն չունի: 6) e^3: 7) 0: 8) 0: 9) 3: 10) Գոյություն չունի: 11) 0: 12) 0: 13) 1: 14) e: 15) 1: 16) $\frac{-1}{10}$: 17) 0: 18) 2: **768.** 1) Խզում, եթե x=y, երբ $\begin{matrix} x\to 0 \\ y\to 0 \end{matrix}$, limf(x,y) գոյություն չունի, $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to a}} f(x,y)=\infty (a\neq 0)$: 2) Խզում, երբ x=0 և

y=0, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{1}{x^2+y^2}=\infty$: 3) Խզում, երբ x=-y, $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to -a}} \frac{1}{(x+y)^2}=+\infty$:

4) Խզում, երբ $x^2+y^2=1$, $\lim\limits_{x^2+y^2\to 1-0} \ln(1-x^2-y^2)=-\infty$: 5) Խզում, երբ

x=y=0, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} e^{\frac{1}{x^2+y^2}}=+\infty$: 6) Խզում, երբ $x=\pi n$, $n\in z$, կամ՝ $y=\pi k$,

$k\in z$, $\lim\limits_{\substack{x\to \pi n\\ y\neq \pi k}} \frac{1}{\sin x\sin y}=\infty$ կամ՝ $\lim\limits_{\substack{x\to \pi k\\ x\neq \pi n}} \frac{1}{\sin x\sin y}=\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to \pi n\\ y\to \pi k}} \frac{1}{\sin x\sin y}=\infty$:

769. 1) $z'_x=4xy^2+3y^2$, $z'_y=4x^2y+6xy+3y^2$, 2) $z'_x=45x^2y^2(5x^3y^2+1)^2$, $z'_y=30x^3y(5x^3y^2+1)^2$: 3) $z'_x=\frac{y}{\sqrt{x}}+6x\sqrt[3]{y}$, $z'_y=2\sqrt{x}+\frac{x^2}{\sqrt[3]{y^2}}$:

4) $z'_x=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, 5) $z'_y=\frac{y}{x\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2}$: 5) $z'_x=\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}$, $z'_y=-\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}$: 6) $z'_x=e^{xy(x^2+y^2)}(3x^2y+y^3)$, $z'_y=e^{xy(x^2+y^2)}(x^3+3xy^2)$:

7) $u'_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $u'_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $u'_z=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$:

8) $u'_x=\frac{1}{y}-\frac{z}{x^2}$, $u'_y=\frac{1}{z}-\frac{x}{y^2}$, $u'_z=\frac{1}{x}-\frac{y}{z^2}$: 9) $u'_x=(y-z)(2x-y-z)$, $u'_y=(x-z)(z+x-2y)$, $u'_z=(x-y)(2z-x-y)$: 10) $z'_x=yx^{y-1}$, $z'_y=x^y\ln x$: 11) $z'_x=\frac{-y}{|x|\sqrt{x^2-y^2}}$, $z'_y=\frac{|x|}{x\sqrt{x^2-y^2}}$: 12) $z'_x=e^{\frac{x}{y}}\frac{\ln y}{y}$, $z'_y=e^{\frac{x}{y}}\frac{y-x\ln y}{y^2}$: ***770.*** 1) $z''_{x^2}=6xy$, $z''_{xy}=3x^2+3y^2$, $z''_{y^2}=6xy$:

2) $z''_{x^2}=\dfrac{2y^2-2x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$, $z''_{xy}=\dfrac{-4xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$, $z''_{y^2}=\dfrac{2x^2-2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$:

3) $z''_{x^2}=e^{-xy}(xy^2-2y)$, $z''_{xy}=e^{-xy}(x^2y-2x)$, $z''_{y^2}=x^3e^{-xy}$:

4) $z''_{x^2}=\dfrac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$, $z''_{xy}=\dfrac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$, $z''_{y^2}=\dfrac{-2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$:

5) $z''_{x^2}=-y^2\sin xy$, $z''_{xy}=\cos xy-xy\sin xy$, $z''_{y^2}=-x^2\sin xy$:

772. $f'_x(0,0)=0, f'_y(0,0)=0, f(x,y)$ -ը (0,0) կետում դիֆերենցելի չէ:

773. 1) դիֆերենցելի չէ, 2) դիֆերենցելի չէ, 3)դիֆերենցելի չէ, 4)դիֆերենցելի է: ***774.*** 1) $dz=(y+2x)dx+(x+2y)dy$, $d^2z=2(dx^2+dxdy+dy^2)$:

2) $dz=\dfrac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$, $d^2z=\dfrac{2xydx^2+2\left(y^2-x^2\right)dxdy-2xdy^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$,

3) $dz=(e^y+ye^x)dx+(xe^y+e^x)dy$, $d^2z=ye^xdx^2+2(e^y+e^x)dxdy+xe^ydy^2$:

4) $dz=(\sin y+y\cos x)dx+(x\cos y+\sin x)dy$,
$d^2z=-\sin x dx^2+2(\cos y+\cos x)dxdy-x\sin y dy^2$:

5) $dz=\dfrac{ydx+dy}{y(x+\ln y)}$, $d^2z=\dfrac{-y^2dx^2-2ydxdy-(x+\ln y+1)dy^2}{y^2(x+\ln y)^2}$:

6) $dz=(y\sin xy+xy^2\cos xy)dx+(x\sin xy+x^2y\cos xy)dy$,
$d^2z=(2y^2\cos xy-xy^3\sin xy)dx^2+2(\sin xy+3xy\cos xy-$
$-x^2y^2\sin xy)dxdy+(2x^2\cos xy-x^3y\sin xy)dy^2$:

7) $dz=\dfrac{e^{\frac{y}{x}}(-ydx+xdy)}{x^2}$, $d^2z=e^{\frac{y}{x}}\dfrac{\left(y^2+2xy\right)dx^2-2\left(xy+x^2\right)dxdy+x^2dy^2}{x^4}$:

8) $dz=\dfrac{-y^2dx+x^2dy}{(x-y)^2}$, $d^2z=\dfrac{2y^2dx^2-4xydxdy+2x^2dy^2}{(x-y)^3}$:

9) $dz=y\ln y dx+x(1+\ln y)dy$, $d^2z=2(1+\ln y)dxdy+\dfrac{x}{y}dy^2$:

775. 1) $\dfrac{dz}{dt}=\left(4t^3+5t^4+6t^5\right)$: 2) $\dfrac{dz}{dt}=-4e^{2\cos 2t}\sin 2t$:

3) $\dfrac{dz}{dt}=\dfrac{3t\left(4+3t^2\right)}{2\sqrt[4]{1+t^2}\left(1+t^2\right)}\operatorname{ctg}\dfrac{3t^2}{\sqrt[4]{1+t^2}}$: 4) $\dfrac{dz}{dt}=\dfrac{2e^{2t}}{e^{4t}+1}$:

776. $\dfrac{\partial z}{\partial u}=2\dfrac{5uv-u^2-6v^2}{(v+2u)^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v}=\dfrac{4v^2-9u^2+16uv}{(v+2u)^2}$:

777. 1) $\frac{\partial z}{\partial u}=14u+3v,\ \frac{\partial z}{\partial v}=3u+6v$:

2) $\frac{\partial z}{\partial u}=4u^3+6uv+3u^2v+v^3,\frac{\partial z}{\partial v}=6u^2v+4v^3+u^3+3uv^2$:

3) $\frac{\partial z}{\partial u}=-\sin 2(u+v)-\sin(u+v)\sin uv+v\cos(u+v)\cos uv+v\sin 2uv,$

$\frac{\partial z}{\partial v}=-\sin 2(u+v)-\sin(u+v)\sin uv+u\cos(u+v)\cos uv+u\sin 2uv$:

781. ա) $\alpha=60^0,\ 48-12\sqrt{3};\ \alpha=45^0, 36\sqrt{2};\ \alpha=90^0,\ -24;\ \alpha=0^0,\ 48$: բ) $2\sqrt{3}-5$:

782. ա) $0,7\sqrt{2}$: բ)-1: ***783.*** 1)(-11,-4): 2)(-11,69): 3) $\left(\frac{5}{4},-\frac{3}{4}\right)$: 4) $\left(-1,\frac{\pi}{4}\right)$:

5) (3,-6,-2): ***784.*** 1) $z_{min}(0,3)=-9$: 2) $z_{min}(1,1)=-1$: 3) $z_{min}(1,0)=-1$:

4) $z_{min}\left(\pm\sqrt{2},\mp\sqrt{2}\right)=-8$: 5) $z_{max}(3,2)=108$, $z_{min}(x,0)=0$, երբ $x\in(0,6)$, $z_{max}(x,0)=0$, երբ $x\in(-\infty,0)\cup(6,+\infty)$: 6) $z_{max}(21,20)=282$: 7) $z_{min}(5,2)=30$:

8) $z_{max}(0,0)=1$: 9) $z_{min}(1,2)=7-10\ln 2$: 10) $z_{min}\, z\left(\frac{1}{\pm\sqrt{e}},\frac{1}{\pm\sqrt{e}}\right)=-\frac{1}{2e}$,

$z_{max}\left(\frac{1}{\pm\sqrt{e}},\frac{1}{\mp\sqrt{e}}\right)=\frac{1}{2e}$: 11) $z_{max}(1,3)=e^{-13}$, $z_{min}\left(-\frac{1}{26},-\frac{3}{26}\right)=-26e^{-\frac{1}{52}}$:

12) $z_{min}(0,0)=0$, $z_{max}\left(x,\pm\sqrt{1-x^2}\right)=e^{-1}$: 13) $z_{max}\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$:

14) $z_{max}\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{8}$, $z_{min}\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{-3\sqrt{3}}{8}$:

785. 1) $z_{պայմ.min}(1,44;1,92)=5,76$: 2) $z_{պայմ\ min}(1,1)=2$:

3) $z_{պայմ.min}\left(0,4\sqrt{5};0,2\sqrt{5}\right)=-\sqrt{5}$: 4) $z_{պայմ.\ max}(\pm 1;\pm 1)=1$:

5) $z_{պայմ.\ max}(-2,-2)=-4$, $z_{պայմ.\ min}(2,2)=4$: 6) $z_{պայմ.min}\left(\frac{5}{4},\frac{5}{6}\right)=-\frac{25}{24}$: ***786.*** (1,2):

787. $(\pm\sqrt{5}, 1)$,: ***788.*** $\left(-\frac{8}{5},-\frac{3}{5}\right),\left(\frac{8}{5},\frac{3}{5}\right)$: ***789. 2.*** ա) a=3,023, b=-1,08:

բ) a=3,19, b=-0,37: ***790.*** $x^4-5\frac{x^3}{3}+\frac{9x^2}{2}-2x+c$: ***791.*** $-\frac{1}{2x^2}+c$:

792. $a\frac{x^3}{3}+b\frac{x^2}{2}+cx+c_1$: ***793.*** $\frac{1}{2}x^6-\frac{5}{2}x^2+2x+c$:

794. $9x+2x^6+\frac{4x^{11}}{11}+c$: ***795.*** $\frac{5}{12}x^2\sqrt[5]{x^2}+c$: ***796.*** $\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}-\frac{6}{11}x\sqrt[6]{x^5}+c$:

797. $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+\frac{4}{7}x\sqrt[4]{x^3}+c$: **798.** $\frac{2}{3}x\sqrt{5x}+c$: **799.** $\frac{2}{3}\sqrt{3x}+c$:

800. $\frac{5}{2}x^2+4x+\frac{3}{x}+c$: **801.** $\frac{(5x+2)^5}{25}+c$: **802.** $\frac{-4}{9(3x+2)^6}+c$:

803. $\frac{2}{15}(2+5x)^{\frac{3}{2}}+c$: **804.** $-\frac{2}{3}\sqrt{2-3x}+c$: **805.** $\frac{-5}{3(x^3+2)}+c$:

806. $\frac{(4-5x^4)^6}{-120}+c$: **807.** $\frac{(4x^3+3)^{\frac{3}{2}}}{18}+c$: **808.** $\frac{5}{21}(7x^2+8)^{\frac{3}{2}}+c$:

809. $\frac{(x^2-3x+1)^{11}}{11}+c$: **810.** $\frac{14}{9}(3x^2-4)^{\frac{3}{4}}+c$: **811.** $\frac{3}{40}\left(3x^{\frac{4}{3}}+5\right)^{\frac{10}{3}}+c$:

812. 2arcsinx-x+c: **813.** arctgx+x-$\frac{x^3}{3}+c$: **814.** $\frac{1}{3}\ln|x|+c$:

815. $\ln|\ln x|+c$: **816.** $\frac{(2\ln x+3)^4}{8}+c$: **817.** $\frac{1}{5}\ln|2+5x|+c$:

818. $\frac{3}{2}\ln|5-x^2|+c$: **819.** $\frac{1}{6}\ln|5+4x^3|+c$: **820.** $\frac{1}{12}\ln\left|\frac{2x-3}{2x+3}\right|+c$:

821. $\frac{1}{\sqrt{7}}\ln\left|\frac{\sqrt{x}-\sqrt{7}}{\sqrt{x}+\sqrt{7}}\right|+c$: **822.** $\ln|5+e^x|+c$: **823.** $\frac{3}{10}\ln|4+5e^{2x}|+c$:

824. $\frac{\sin^6 x}{6}+c$: **825.** $\frac{2}{3}(\sin x)^{\frac{3}{2}}+c$: **826.** $\frac{\left(2\sin\frac{x}{2}+3\right)^3}{3}+c$:

827. $\frac{-5}{2}\ln|3+2\cos x|+c$: **828.** $\ln|e^x+\sin x|+c$: **829.** $-\frac{1}{2}\ln|4-3\sin 2x|+c$:

830. $-\frac{1}{3}\ln|2-3\mathrm{tg}x|+c$: **831.** $\frac{1}{10}\mathrm{tg}^2 5x+c$: **832.** $\frac{1}{3}\ln|4+\mathrm{tg}3x|+c$:

833. $-\frac{8}{3}\sqrt{5-3\sin x}+c$: **834.** $\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right|+c$: **835.** $\mathrm{arctg}\frac{x}{2}+c$:

836. $\frac{1}{\sqrt{30}}\mathrm{arctg}\frac{x\sqrt{30}}{6}+c$: **837.** $\frac{\sqrt{3}}{3}\ln\left|x\sqrt{3}+\sqrt{4+3x^2}\right|+c$:

838. $-\frac{1}{9}\ln|7-9x|+c$: **839.** $\frac{\sqrt{3}}{3}\arcsin\frac{x\sqrt{6}}{2}+c$: **840.** $\frac{1}{8\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^4-\sqrt{2}}{x^4+\sqrt{2}}\right|+c$:

841. $\ln\frac{|x|}{1+\sqrt{1+x^2}}+c$: **842.** $-\arcsin\frac{1}{|x|}+c$: **843.** $2\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{1+x}\right)+c$:

844. $2\arcsin\sqrt{x}+c$: **845.** $-\frac{1}{2}\arccos^2\frac{x}{2}+c$: **846.** $\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sin^2 x}{\sqrt{2}}+c$:

847. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+\ln x}{2-\ln x}\right|+c$: **848.** $\frac{5^x e^x}{1+\ln 5}+c$: **849.** $\frac{5}{3}e^{3x}+c$: **850.** $6e^{\frac{x}{2}}+c$:

851. $\frac{1}{-2e^{2x}}+c$: **852.** $\frac{1}{2}\left(e^{2x}+3x^2\right)+c$: **853.** $2\left(e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{-x}{2}}\right)+c$:

854. $e^x-2x-e^{-x}+c$: **855.** $3e^{\frac{x}{3}}+c$: **856.** $\frac{1}{3}\left(e^{3x}+e^{-3x}\right)-3\left(e^x+e^{-x}\right)+c$:

857. $-e^{\cos x}+c$: **858.** $e^{\sin x}+c$: **859.** $\frac{1}{3}e^{x^3}+c$: **860.** $2e^{\sqrt{x}}+c$:

861. $-e^{\frac{1}{x}}+c$: **862.** $-\frac{1}{2}e^{\frac{1}{x^2}}+c$: **863.** $-e^{x^4}+c$: **864.** $\frac{1}{2}\ln\left(e^{2x}+3\right)+c$:

865. $x-\frac{3}{4}e^{-4x}+c$: **866.** $\frac{5}{3}e^{tg3x}+c$: **867.** $-\ln\left(e^{\cos x}+4\right)+c$:

868. $5\frac{3^{\ln x}}{\ln 3}+c$: **869.** $\frac{(x-1)^{12}}{12}+\frac{(x-1)^{11}}{11}+c$: **870.** $\frac{1}{3}\left((x+1)^{\frac{3}{2}}-(x-1)^{\frac{3}{2}}\right)+c$:

871. $\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x-2\ln|x+1|+c$: **872.** $\ln|x|+2\operatorname{arctg}x+c$:

873. 1) $\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{x^2-3}{2}+c$: 2) $\frac{2}{3}(1+\ln x)^{\frac{3}{2}}+c$: 3) $-\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{\sqrt{2}}{|x|}+c$:

4) $\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}-2\sqrt{x+1}+c$: 5) $\ln\left(\sin x+\sqrt{1+\sin^2 x}\right)+c$:

6) $\frac{-2}{15}\sqrt{2-x}\left(32+8x+3x^2\right)+c$: 7) $-\frac{1}{15}\left(8+4x^2+3x^4\right)\sqrt{1-x^2}+c$:

8) $\frac{-25x^3-6}{1000}\left(2-5x^3\right)^{\frac{5}{3}}+c$: 9) $\left(\frac{2}{3}-\frac{4}{7}\sin^2 x+\frac{2}{11}\sin^4 x\right)\sqrt{\sin^3 x}+c$:

10) $\operatorname{arctg}^2\sqrt{x}+c$: 11) $-\arcsin\frac{\cos^2 x}{\sqrt{3}}+c$: 12) $\arcsin\frac{\ln x}{2}+c$:

874. 1) $\frac{2}{3}x\sqrt{x}-x+4\sqrt{x}-4\left(1+\sqrt{x}\right)+c$: 2) $\frac{\arcsin^3 x}{3}+c$:

3) $\frac{2}{3}\left(e^x-2\right)\sqrt{e^x+1}+c$: 4) $\ln\left|\frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1}\right|+c$: 5) $2\operatorname{arctg}\sqrt{e^x-1}+c$:

6) $\frac{2}{5}\left(\cos^2 x-5\right)\sqrt{\cos x}+c$: 7) $\ln\frac{|x|}{1+\sqrt{1-x^2}}+c$: 8) $\frac{\sqrt{x^2-9}}{9x}+c$:

9) $\frac{-\sqrt[3]{\left(1+x^3\right)^2}}{2x^2}+c$: 10) $\frac{1}{4}\ln\left(3+4e^x\right)+c$: 11) $\frac{1}{2}\ln|\operatorname{tg}x|+c$:

12) $\frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg}x-\frac{x}{x^2+1}\right)+c$: 13) $\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+c$:

14) $\frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}+c$: 15) $\frac{1}{2}\arcsin x-\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+c$: **875.** $x\sin x+\cos x+c$:

876. $x\ln x-x+c$: **877.** $\frac{x^2}{2}\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)+c$: **878.** $e^x(x-1)+c$:

879. $-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+c$: **880.** $x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+c$:

881. $x\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+c$: **882.** $\frac{x^4}{4}\left(\ln x-\frac{1}{4}\right)+c$:

883. $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+c$: **884.** $-\frac{1}{3}x\cos 3x+\frac{1}{9}\sin 3x+c$:

885. $\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}x+c$: **886.** $-\frac{1}{x}\left(\ln x+1\right)+c$:

887. $-\frac{1}{x}\arcsin x+\ln\frac{|x|}{1+\sqrt{1-x^2}}+c$: **888.** $x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+c$:

889. $e^x\left(x^3-3x^2+6x-6\right)+c$: **890.** $x\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+c$:

891. $\frac{1}{3}e^{3x}\left(5x-2-\frac{5}{3}\right)+c$: **892.** $-\frac{1}{2}e^{-2x}\left(4x-1\right)+c$:

893. $x\operatorname{tg}x+\ln|\cos x|+c$: **894.** $\frac{x^2}{4}-\frac{x}{4}\sin 2x-\frac{1}{8}\cos 2x+c$.

895. $\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{4}\right)\arcsin x+\frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2}+c$: **896.** $\frac{e^x}{2}\left(\sin x-\cos x\right)+c$:

897. $\frac{e^x}{2}(\cos x+\sin x)+c$: **898.** $\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx-b\cos bx)+c$:

899. $\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx+b\sin bx)+c$: **900.** $\frac{3}{4}x+\frac{43}{16}\ln|4x-5|+c$:

901. $\frac{-3}{5}x+\frac{26}{25}\ln|2+5x|+c$: **902.** $\frac{7}{4}\ln|x+1|+\frac{5}{4}\ln|x-3|+c$:

903. $\ln\frac{(x-3)^2}{|x-4|}+c$: **904.** arctg(x-1)+c: **905.** $\operatorname{arctg}\frac{x+3}{4}+c$:

906. $\frac{1}{2\sqrt{15}}\ln\left|\frac{x-4-\sqrt{15}}{x-4+\sqrt{15}}\right|+c$: **907.** $\frac{1}{18}\ln\left|\frac{3x-4}{3x+2}\right|+c$: **908.** $\frac{1}{8}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{4}+c$:

909. $\frac{1}{30}\operatorname{arctg}\frac{5x+1}{6}+c$: **910.** $\frac{3}{2}\ln\left|x^2-4x+8\right|+\frac{5}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{2}+c$:

911. $\frac{1}{2}\ln\left|x^2+8x+25\right|+\operatorname{arctg}\frac{x+4}{3}+c$: **912.** $\frac{x+1}{18(x^2+2x+10)}+\frac{1}{54}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{3}+c$:

913. $\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+c$: **914.** $2x-10\ln|x-2|+23\ln|x-3|+c$:

915. $\frac{x^2}{2}+8x+13{,}5\ln|x-9|-6{,}5\ln|x+1|+c$:

916. $\frac{1}{10}\ln|x+3|+\frac{1}{15}\ln|x-2|-\frac{1}{6}\ln|x+1|+c$: **917.** $\frac{1}{18}\ln\left|1-\frac{9}{x^2}\right|+c$:

918. $-\frac{1}{x}-\operatorname{arctg}x+c$: **919.** $\ln\frac{|x-1|^3|x-4|^5}{|x-2|^7}+c$: **920.** $\frac{1}{x+1}+\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+c$:

921. $\frac{5}{32}\ln\left|\frac{x+1}{x+3}\right|-\frac{3}{8(x-1)}-\frac{1}{(x-1)^2}+c$: **922.** $\frac{1}{10}\ln\frac{(x-2)^2}{x^2+1}-\frac{2}{5}\operatorname{arctg}x+c$:

923. $\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+c$:

924. $\frac{1}{x}+\frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+c$:

925. $\frac{5}{4}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+1}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+c$: **926.** $x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|-\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+c$:

927. $\dfrac{-1}{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+2}+c$: **928.** $\dfrac{1}{5}\ln\left|3+5\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right|+c$: **929.** $-x-\dfrac{2}{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}-1}+c$:

930. $\ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{\cos x}+c$: **931.** $\dfrac{\sin x}{2\cos^2 x}+\dfrac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+c$:

932. $\dfrac{1}{6}\ln\left(3\sin^2 x+4\right)+c$: **933.** $\ln|\sin x|-\sin x+c$: **934.** $-\operatorname{ctg}x-\dfrac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x+c$:

935. $\ln|\sin x|-\sin^2 x+\dfrac{1}{4}\sin^4 x+c$: **936.** $-\dfrac{1}{2}\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|+c$:

937. tgx-ctgx+c: **938.** $\dfrac{1}{3\sin^3 x}-\dfrac{1}{5\sin^5 x}+c$: **939.** $\dfrac{1}{2\cos^2 x}+\ln|\operatorname{tg}x|+c$:

940. $-\dfrac{1}{3}\cos 3x+c$: **941.** $-3\cos\dfrac{x}{3}+c$: **942.** $\dfrac{1}{2}\sin 2x+c$: **943.** $5\sin\dfrac{x}{5}+c$:

944. $-\dfrac{1}{5}\ln|\cos 5x|+c$: **945.** $4\ln\left|\sin\dfrac{x}{4}\right|+c$: **946.** $\dfrac{1}{5}\operatorname{tg}5x+c$:

947. $-\dfrac{1}{3}\operatorname{ctg}3x+c$: **948.** $-\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}\left(1-x^2\right)+c$: **949.** $\dfrac{5}{3}\operatorname{ctg}\left(4-x^3\right)+c$:

950. $-\sin\dfrac{1}{x}+c$: **951.** $-\dfrac{2}{5}\cos\sqrt{5x}+c$: **952.** $-\dfrac{1}{3}\ln\cos x^3+c$:

953. $\dfrac{5}{4}\ln\left|\sin x^4\right|+c$: **954.** $-\dfrac{1}{3}\cos e^{3x}+c$: **955.** $\dfrac{\sin^5 x}{5}+c$:

956. $\dfrac{1}{3}\left(x^3+\cos 3x\right)+c$: **957.** $-\dfrac{2}{5}\sqrt{2+\cos 5x}+c$: **958.** $\dfrac{1}{2}\sin^4\dfrac{x}{2}+c$:

959. $\dfrac{1}{10}\sin^2 5x+c$: **960.** $-\dfrac{1}{16}\cos 8x+\dfrac{1}{4}\cos 2x+c$:

961. $-\dfrac{1}{18}\cos 9x+\dfrac{1}{10}\cos 5x+c$: **962.** $\dfrac{1}{4}\sin 2x-\dfrac{1}{16}\sin 8x+c$:

963. $\dfrac{1}{6}\sin 3x-\dfrac{1}{22}\sin 11x+c$: **964.** $\dfrac{1}{10}\sin 5x+\dfrac{1}{2}\sin x+c$:

965. $\dfrac{1}{36}\sin 18x+\dfrac{1}{4}\sin 2x+c$: **966.** $\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{4}\sin 2x+c$:

967. $\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{4}\sin 2x+c$: **968.** $\dfrac{x}{2}-\dfrac{3}{4}\sin\dfrac{2x}{3}+c$: **969.** $\dfrac{x}{2}+\sin\dfrac{x}{2}+c$:

970. $\dfrac{\cos^3 x}{3}-\cos x+c$: **971.** $\dfrac{\cos^5 x}{5}-\dfrac{\cos^3 x}{3}+c$: **972.** $\dfrac{\sin^5 x}{5}-\dfrac{\sin^7 x}{7}+c$:

973. $\frac{\cos^7 x}{7}-\frac{\cos^5 x}{5}+c$: **974.** $\frac{\sin^3 x}{3}-\frac{2}{5}\sin^5 x+\frac{\sin^7 x}{7}+c$:

975. $\frac{1}{3\cos^3 x}-\frac{1}{\cos x}+c$: **976.** $\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}+c$: **977.** $\frac{x}{8}-\frac{\sin 8x}{64}+c$:

978. $\frac{3x}{8}-\frac{\sin 2x}{4}+\frac{1}{32}\sin 4x+c$: **979.** $\frac{3x}{8}+\frac{\sin 2x}{4}+\frac{1}{32}\sin 4x+c$:

980. tgx-x+c: **981.** $\frac{tg^2 x}{2}+\ln|\cos x|+c$: **982.** –ctgx-x+c:

983. $-\frac{ctg^2 x}{2}-\ln|\sin x|+c$: **984.** $\frac{tg^3 x}{3}-tgx+x+c$:

985. $\frac{tg^4 x}{4}-\frac{tg^2 x}{2}-\ln|\cos x|+c$: **986.** $\frac{-ctg^3 x}{3}+ctgx+x+c$:

987. $\frac{ctg^4 x}{4}+\frac{ctg^2 x}{2}+\ln|\sin x|+c$: **988.** $\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x-3}{\sqrt{3}}+c$:

989. $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+4+\sqrt{x^4+8x^2+25}\right)+c$: **990.** $\frac{3}{4}\sqrt{4x^2+3}+\frac{5}{2}\ln\left(2x+\sqrt{4x^2+3}\right)+c$:

991. $-\sqrt{3+2x-x^2}-4\arcsin\frac{x-1}{2}+c$: **992.** $-3\sqrt{6x-x^2-8}+5\arcsin(x-3)+c$:

993. $\sqrt{2x^2+8x+1}-\frac{5}{\sqrt{2}}\ln\left|(x+2)\sqrt{2}+\sqrt{2x^2+8x+1}\right|+c$: **994.** $\ln\left|x-\frac{1}{2}+\sqrt{x^2-x-1}\right|+c$:

995. $-5\sqrt{5+4x-x^2}+13\arcsin\frac{x-2}{3}+c$: **996.** $\arcsin(x-1)+c$:

997. $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{6x+5}{2\sqrt{3}}+\sqrt{3x^2+5}\right|+c$: **998.** $\frac{5}{\sqrt{7}}\arcsin\frac{7x+4}{\sqrt{79}}+c$:

999. $2\arcsin\frac{x+1}{2}+c$: **1000.** $\frac{2}{3}\sqrt{9x^2+1}+\frac{5}{3}\ln\left[3x+\sqrt{9x^2+1}\right]+c$:

1001. $\sqrt{x^2+2x}+2\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x}\right|+c$: **1002.** $\frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2}+\frac{1}{2}\arcsin 2x+c$:

1003. $-2\sqrt{1-x-x^2}-9\arcsin\frac{2x+1}{\sqrt{5}}+c$: **1004.** $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}+c$:

1005. $\ln\frac{|x|}{x+2+2\sqrt{x^2+x+1}}+c$: **1006.** $\left(\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{12}x-\frac{1}{8}\right)\sqrt{x+x^2}+\frac{1}{8}\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{1+x}\right)+c$:

1007. $\frac{-3x\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}+21\left(\frac{\sqrt[6]{x^5}}{5}-\frac{\sqrt{x}}{3}+\sqrt[6]{x}\right)-21\mathrm{arctg}\sqrt[6]{x}+c$:

1008. $\frac{x+2}{5}\sqrt[3]{(3x+1)^2}+c$: **1009.** $\frac{2}{5}\sqrt{(1-x)^5}-\frac{2}{3}\sqrt{(1-x)^3}+c$:

1010. $2\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x-2}{2}}+c$: **1011.** $\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt[4]{1+x^4}+x}{\sqrt[4]{1+x^4}-x}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}+c$:

1012. $\frac{3}{5}z^5-2z^3+3z+c$, որտեղ՝ $z=\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}$:

1013. $-\frac{\sqrt{(4-x^2)^3}}{3}-4\sqrt{4-x^2}+c$: **1014.** $\frac{3}{5}\sqrt[3]{(x-1)^5}-\frac{3}{4}\sqrt[3]{(x-1)^4}+x+c$:

1015. $\frac{12}{7}(1+\sqrt[4]{x})^{\frac{7}{3}}-3(1+\sqrt[4]{x})^{\frac{4}{3}}+c$: **1016.** 1) 20: 2) $\frac{52}{9}$: 3) $\frac{19}{3}$: **1017.** 3:

1018. $\frac{1}{\ln 2}$: **1019.** $\frac{1}{4}$: **1020.** ln2: **1021.** 3: **1022.** $40\frac{8}{15}$: **1023.** 2: **1024.** 2:

1025. $\frac{\pi}{3}$: **1026.** $\frac{11}{5}$: **1027.** 4: **1028.** $\frac{38}{3}$: **1029.** $\frac{8}{49}$: **1030.** $\frac{1}{3}$: **1031.** 12:

1032. $\frac{98}{3}$: **1033.** $\frac{15}{4}$: **1034.** $\frac{2}{3}(\sqrt{2}-1)$: **1035.** 4: **1036.** 2: **1037.** $\operatorname{arctg}\frac{1}{7}$:

1038. $\frac{e^4-1}{2}$: **1039.** $\frac{14}{3}$: **1040.** ln4: **1041.** $\frac{1}{2}$: **1042.** ln2: **1043.** $\frac{\pi}{4}$:

1044. $\frac{1}{p+1}$: **1045.** $\pi\sqrt{2}-4$: **1046.** $\frac{e^2+1}{4}$: **1047.** 1: **1048.** -2π:

1049. $\frac{9-4\sqrt{3}}{36}\pi+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$: **1050.** $\frac{\pi^2+4}{16}$: **1051.** $4\ln 2-\frac{15}{16}$: **1052.** 4:

1053. $\frac{\pi-2\ln 2}{4}$: **1054.** $\frac{2e^3+1}{9}$: **1055.** e-2: **1056.** $\frac{e^{\frac{3\pi}{2}}-3}{10}$: **1057.** $2-\frac{2}{e}$:

1058. $\frac{\pi}{2}-1$: **1059.** $\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$: **1060.** $\frac{2}{3}\left(3+\ln\frac{2}{5}\right)$: **1061.** $\ln\frac{3}{2}$: **1062.** 2(2-ln3):

1063. $\frac{56}{9}$: **1064.** $\frac{61}{3}$: **1065.** 4-2arctg2: **1066.** $\frac{1}{5}$: **1067.** $1+\frac{1}{2}\ln\frac{2}{1+e^2}$:

1068. $\frac{2}{7}$: **1069.** $2-\sqrt{2}$ · **1070.** $13\frac{5}{9}$: **1071.** $1-\frac{\pi}{4}$: **1072.** $\frac{1}{6}$: **1073.** $\frac{\pi a^2}{16}$:

1074. $\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\ln 9+4\sqrt{2}}{7}$: **1075.** $\frac{\pi}{6}$: **1078.** $\frac{1}{\ln a}$: **1079.** $\frac{\pi}{8}$: **1080.** $+\infty$: **1081.** $\frac{\pi}{2}$:

1082. $\frac{1}{2}$: **1083.** $\frac{\pi}{2}$: **1084.** π: **1085.** π: **1086.** π: **1087.** $\frac{1}{3}$: **1088.** 0:

1089. π: **1090.** $\frac{1}{3}\ln 4$: **1091.** -1: **1092.** $\frac{a}{a^2+b^2}$: **1093.** $\frac{b}{a^2+b^2}$:

1094. ա) $-\frac{\pi}{2}\ln 2$: բ) $-\frac{\pi}{2}\ln 2$: ***1095.*** գ.: ***1096.*** գ.: ***1097.*** տ.: ***1098.*** m>-1 և n-m>1, գ.: ***1099.*** 1<n<2, գ.: ***1100.*** n>0 և a≠0 գ.: ***1101.*** 8: ***1102.*** $5\frac{1}{3}$:
1103. $18\frac{2}{3}$: ***1104.*** 24. ***1105.*** $10\frac{2}{3}$: ***1106.*** $15\frac{3}{16}$: ***1107.*** 18: ***1108.*** 13,5:
1109. 4,5: ***1110.*** $8\sqrt{2}$: ***1111.*** $21\frac{1}{3}$: ***1112.*** 7,5-4ln4: ***1113.*** 17,5-6ln6:
1114. πa^2: ***1115.*** 1: ***1161***. $\frac{32\sqrt{6}}{3}$: ***1117.*** $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}$: ***1118***. a^2: ***1119***. $\frac{3\pi a^2}{2}$:
1120. $\frac{\pi a^2}{4}$: ***1121.*** $\frac{7a^2}{4\pi}$: ***1122.*** $\frac{\pi a^2}{2}$: ***1123.*** $\frac{\pi a^2}{4}$: ***1124.*** $\frac{a^2}{2}\text{sh}2\pi$: ***1126.*** $\frac{8}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right)$: ***1127.*** $\frac{3}{2}+2\ln 2$: ***1128.*** $\frac{e^2+1}{4}$: ***1129.*** $\ln\text{tg}\frac{7\pi}{24}$: ***1130.*** 8a:
1131. $\frac{3\pi a}{2}$: ***1132.*** $\pi a\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{a}{2}\ln\left(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2}\right)$: ***1133.*** $\frac{\pi^2}{2}$: ***1134.*** $\frac{104\pi}{15}$:
1135. $\frac{28\pi}{15}$: ***1136.*** 9,6π: ***1137.*** $\frac{512\pi}{3}$: ***1138.*** $\frac{843\pi}{5}$: ***1139.*** 8π: ***1141.*** $\frac{4}{3}\pi ab^2$:
1142. $\frac{3\pi}{2}$: ***1143.*** 218,7π: ***1144.*** $\frac{96\pi}{5}$: ***1145.*** 2π: ***1146.*** $\frac{512\pi}{15}$: ***1147.*** $\frac{64\pi}{3}$:
1148. $3\pi^2$: ***1149.*** $\frac{512\pi}{7}$: ***1150.*** $\frac{2048\pi}{35}$: ***1151.*** 1: ***1152.*** 1: ***1153.*** տ.: ***1154.*** տ.:
1155. $\frac{3}{4}$: ***1156.*** $\frac{1}{2}$: ***1157.*** 3: ***1158.*** $\frac{1}{1-q}$: ***1159.*** տ.: ***1160.*** $\frac{3}{2}$: ***1161***. 3:
1162. $\frac{1}{8}$: ***1163.*** 0,7: ***1164.*** $\frac{1}{3}$: ***1165.*** $\frac{1}{2}$: ***1166.*** $\frac{5}{4}$: ***1167.*** $\frac{4}{3}$: ***1168.*** $\frac{33}{40}$:
1169. տ.: ***1170.*** տ.: ***1173.*** չի բ.: ***1174.*** բ.: ***1175***. չի բ.: ***1176.*** չի բ.: ***1177.*** բ.: ***1178.*** չի բ.: ***1179***. տ.: ***1180.*** տ.: ***1181.*** գ.: ***1182.*** տ.: ***1183.*** գ.: ***1184.*** գ.: ***1185.*** տ.: ***1186.*** տ.: ***1187.*** տ.: ***1188.*** տ.: ***1189.*** տ.: ***1190.*** տ.: ***1191.*** գ.: ***1192.*** գ.: ***1193.*** տ.: ***1194.*** տ.: ***1195.*** գ.: ***1196.*** գ.: ***1197.*** գ.: ***1198.*** գ.: ***1199.*** գ.: ***1200.*** գ.: ***1201.*** գ.: ***1202.*** գ.: ***1203.*** գ.: ***1204.*** գ.: ***1205.*** գ.: ***1206.*** տ.: ***1207.*** տ.: ***1208.*** գ.: ***1209.*** գ.: ***1210.*** գ.: ***1211.*** ա) գ. բ) գ. գ) տ. դ) տ.: ***1212.*** գ.: ***1213.*** գ.: ***1214***. գ.: ***1215.*** գ.: ***1216.*** գ.: ***1217.*** գ.: ***1218.*** տ.: ***1219.*** տ.: ***1220.*** գ.: ***1221.*** գ.: ***1222.*** գ. երբ p≠1, տ. p=1: ***1223.*** տ.: ***1224***. գ.: ***1225.*** գ.: ***1226.*** գ. երբ p>1, տ. p≤1: ***1227.*** գ. երբ p>1, տ. p=1: ***1228.*** գ.: ***1229.*** գ.: ***1230.*** գ.: ***1231.*** գ.: ***1232.*** գ.: ***1233.*** գ.: ***1234.*** գ.: ***1235.*** գ.: ***1236.*** գ.: ***1237.*** գ.: ***1238.*** տ.: ***1239.*** գ.: ***1240.*** պ.գ.: ***1241.*** բ.գ.: ***1242.*** պ.գ.: ***1243.*** պ.գ.: ***1244.*** պ.գ.: ***1245.*** բ.գ.: ***1246.*** բ.գ.:

1247. պ.զ.: **1248.** տ.: **1249.** բ.զ.: **1250.** բ.զ.: **1251.** p>1 կամ p=1, α>1 բ.զ., 1>p>0 կամ p=0, α>0 պ.զ.: **1252.** $[-2,2)$: **1253.** $[-1,1]$:

1254. (-4,4): **1255.** $\left(-\sqrt{3e},\sqrt{3e}\right)$: **1256.** $\left(-\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right)$: **1257.** $[-1,1)$:

1258. $[-1,1)$: **1259.** $[-5,3)$: **1260.** $(1,2]$: **1261.** $[-1,0)$:

1262. $[-1,3)$: **1263.** ա) $(-1,1), \frac{1}{(1-x)^2}$: բ) $[-1,1]$, arctgx :

գ) $(-1,1)\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$: դ) $[-1,1), -\ln(1-x)$: **1264.** $e\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{6}-\ldots\right)$:

1265. $1+\frac{x^2}{2}+\frac{5}{24}x^4+\ldots$: **1266.** $x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+\ldots$: **1267.** $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots$:

1268. $x-\frac{x^3}{6}+\frac{3}{48}x^5-\ldots$: **269.** $x-\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5-\ldots$:

1270. $-\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{2}{3^{n+1}}\right)x^n, R=1$: **1271.** $1+\sum_{n=1}^{\infty}(-2)^{n-1}x^n, R=\frac{1}{2}$:

1272. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-(-2)^{n+1}\right)x^n, R=\frac{1}{2}$: **1273.** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{4^n}{(2n)!}x^{2n}, R=+\infty$:

1274. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n!}x^{n+1}, R=+\infty$:

1275. $2+\frac{x}{12}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot 2\cdot 5\cdot 8\ldots(3n-4)}{3^n\cdot 2^{3n-1}n!}x^n, R=8$:

1276. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2n-1}x^{2n-1}, R=1$: **1277.** $\frac{1}{8}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{16^n}{(2n)!}x^{2n}, R=+\infty$:

1278. $1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots, R=+\infty$: **1279.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}, R=+\infty$:

1280. 1: **1281.** e^2-e-1: **1282.** $\frac{-11}{6}$: **1283.** e^3+e: **1284.** 1) x=1, x=2, y=x, y=x+3: 2) x=-1, x=1, $y=x^2$, $y=2-x^2$: 3) y=0, y=2, $x=\sqrt{2-y}, x=\sqrt{4-y^2}$:

4) $x=0, x=1, y=\sqrt{x}, y=\sqrt{2-x^2}$: ***1285.*** 1) $\int_1^5 dx\int_2^4 f(x,y)dy=\int_2^4 dy\int_1^5 f(x,y)dx$:

2) $\int_2^4 dy\int_y^{y+3} f(x,y)dx=\int_2^4 dx\int_2^x f(x,y)dy+\int_4^5 dx\int_2^4 f(x,y)dy+\int_5^7 dx\int_{x-3}^4 f(x,y)dy$:

3) $\int_{-a}^a dx\int_{\frac{x^2}{a}}^{\sqrt{2a^2-x^2}} f(x,y)dy=\int_0^a dy\int_{-\sqrt{ay}}^{\sqrt{ay}} f(x,y)dx+\int_a^{a\sqrt{2}} dy\int_{-\sqrt{2a^2-y^2}}^{\sqrt{2a^2-y^2}} f(x,y)dx$:

4) $\int_0^a dx\int_{\sqrt{ax}}^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x,y)dy=\int_0^a dy\int_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{\frac{y^2}{a}} f(x,y)dx$:

5) $\int_0^a dx\int_{\sqrt{ax-x^2}}^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x,y)dy+\int_a^{2a} dx\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x,y)dy=$

$=\int_0^{\frac{a}{2}} dy\int_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-y^2}} f(x,y)dx+\int_0^{\frac{a}{2}} dy\int_{\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-y^2}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)dx+\int_{\frac{a}{2}}^a dy\int_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{a+\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)dx$:

1286. $\int_{-7}^1 dy\int_{2-\sqrt{7-6y-y^2}}^{2+\sqrt{7-6y-y^2}} f(x,y)dx$: ***1287.*** $\int_{-1}^0 dx\int_{-\sqrt{1+x}}^{\sqrt{1+x}} f(x,y)dy+\int_0^1 dx\int_{-\sqrt{1-x}}^{\sqrt{1-x}} f(x,y)dy$:

1288. $\int_0^2 dy\int_0^{2-\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx+\int_0^2 dy\int_{2+\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{16-y^2}} f(x,y)dx+\int_2^4 dy\int_0^{\sqrt{16-y^2}} f(x,y)dx$:

1289. $\int_0^a dy\int_0^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)dx+\int_a^{2a} dy\int_0^{\sqrt{2ay-y^2}} f(x,y)dx$:

1290. $\int_{-1}^0 dx\int_{-\sqrt{x+1}}^{\sqrt{x+1}} f(x,y)dy+\int_0^1 dx\int_{\sqrt{2x}}^{\sqrt{x+1}} f(x,y)dy+\int_0^1 dx\int_{-\sqrt{x+1}}^{-\sqrt{2x}} f(x,y)dy$:

1291. $\int\limits_{1}^{3}dy\int\limits_{\frac{9}{y}}^{10-y}f(x,y)dx$: ***1292.*** $\int\limits_{0}^{1}dx\int\limits_{x}^{3\sqrt{x}}f(x,y)dy$: ***1293.*** $\int\limits_{0}^{\frac{8}{3}}dy\int\limits_{2y-2}^{\sqrt{y^2+4}}f(x,y)dx$:

1294. $\ln\frac{25}{24}$: ***1295.*** 660. ***1296.*** $\frac{\pi}{12}$: ***1297.*** $4\frac{2}{3}$: ***1298.*** $\frac{33}{140}$: ***1299.*** $2\frac{1}{4}$:

1300. -2: ***1301.*** $\frac{27}{2}$: ***1302.*** $25\frac{1}{3}$: ***1303.*** $\frac{9}{20}$: ***1304.*** $\frac{68}{15}$: ***1305.*** $\frac{1}{6}$:

1306. $\frac{\pi a}{2}$: ***1307.*** $\frac{2\pi a^3}{3}$: ***1308.*** $\frac{\pi}{2}$: ***1309.*** $-6\pi^2$: ***1310.*** π: ***1311.*** πe^{R^2}:

1312. $-\pi e^{-R}$. ***1313.*** $\frac{3\pi}{2}$: ***1314.*** 4π: ***1315.*** $\frac{4\pi}{3}-\frac{64\sqrt{2}-80}{9}$: ***1316.*** $\pi\left(\sqrt{2}-1\right)$:

1317. $\frac{14}{3}$: ***1318.*** 2π: ***1319.*** ш) $\sqrt{2\pi}$: р) $\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$: ***1322.*** 1) $2y^2 - 3x^2 = c$:
2) $x^3+y^3-3x=c$: 3) $e^x+e^{-y}=c$: 4) $y=c\sin x$: 5) $y\sin y+\cos y-x\cos x+\sin x=c$:
6) $y=c\sqrt{1+e^{2x}}$: 7) $\sqrt{y}+x(1-\ln x)=c$: 8) $\mathrm{tg}\frac{x+y}{2}-x=c$: 9) $y=ce^{x+\sin x}$:

1323. 1) $x^2-y^2=1$: 2) $y=e^{\mathrm{tg}\frac{x}{2}}$: 3) $y=-x$: 4) $y=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x+4$:

1324. 1) $x^2-2xy-y^2=c$: 2) $y=x\ln\frac{c}{x}$, $x=0$: 3) $x^2+y^2=cy$: 4) $y=xe^{1+cx}$:
5) $y=-x\ln\ln cx$: 6) $y=x\sin\ln cx, y=\pm x$: 7) $(x+y-1)^3=c(x-y+3)$:
8) $x+2y+3\ln|x+y-2|=c$, $x+y=2$: ***1325.*** 1) $y=-x$: 2) $\ln|y|+2\sqrt{\frac{x}{y}}=2$:
3) $y=xe^{-\frac{x}{2}}$: 4) $x^2-y^2=4x$: ***1326.*** 1) $y=ce^{-2x}+2x-1$: 2) $y=e^{-x^2}\left(\frac{x^2}{2}+c\right)$:
3) $y=(x+c)\left(1+x^2\right)$: 4) $y=x\ln x+\frac{c}{x}$: 5) $y=(x+1)^2\left(e^x+c\right)$:
6) $y=x\left(ce^{-x}-1\right)$: 7) $y\left(x^2+cx\right)=1$: 8) $y^2=x\ln\frac{c}{x}$: ***1327.*** 1) $y=\sin x$:
2) $y=\frac{x}{x+1}\left(x-1+\ln|x|\right)$: 3) $y=2\sin^2 x-\frac{1}{2}$: 4) $S=2t^2+\frac{1}{t}$:
1328. 1) $x-3x^2y^2+y^3=c$: 2) $x^2+2xy+2y^2=c$: 3) $x^4-x^2y^2+y^4=c$:

4)$x^3+3x^2y-2xy^2-y^3=c$: 5) $x^2+y^2-2\mathrm{arctg}\frac{y}{x}=c$: 6) $xy-\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=c$:

7) $x^2+ye^{-x}=c$: 8) $x\sin y+y\cos x+\ln\left|\frac{x}{y}\right|=c$: 9) $x^3-2xy+y^2=c$:

1329. 1) $5x^2y-8xy+x+3y=27$: 2) $x^2+2ye^{\frac{x}{y}}=4$:

1330. 1) $y=c_1x(\ln x-1)+c_2$: 2) $4(c_{1y}-1)=(c_1x+c_2)^2$:

3) $y^3+c_1y+c_2=3x$: 4) $\mathrm{ctg}y=c_2-c_1x$: 5) $y=e^{x-1}(x-1)+c_1x^2+c_2$:

6) $c_1y^2=1+(c_1x+c_2)^2$: ***1331.*** 1) $y=-\ln\cos x+c_1x+c_2$:

2) $y=x\mathrm{arctg}x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+c_1x+c_2$: 3) $y=3\ln|x|+c_1x^2+c_2x+c_3$:

4) $y=\frac{1}{4}xe^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+c_1x+c_2$: ***1332.*** 1) $y=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}$:

2) $y=c_1e^{-7x}+c_2e^{3x}$: 3) $y=c_1e^{x}+c_2e^{\frac{2}{3}x}$: 4) $y=c_1e^{-x\sqrt{7}}+c_2e^{x\sqrt{7}}$:

5) $y=e^{-x}(c_1+c_2x)$: 6) $y=e^{\frac{3}{2}x}(c_1+c_2x)$: 7) $y=c_1\cos x+c_2\sin x$:

8) $y=e^{2x}(c_1\cos 3x+c_2\sin 3x)$: 9) $y=c_1e^{-5x}+c_2e^{2x}$:

10) $y=e^{-0.5x}(c_1+c_2x)$: 11) $y=e^{4x}(c_1\cos 5x+c_2\sin 5x)$:

1333. 1) $y=e^{x}$: 2) $y=(7-3x)e^{x-2}$: ***1334.*** 1) $y=c_1e^{x}+c_2e^{-5x}-\frac{1}{5}$:

2) $y=e^{x}(c_1\cos x+c_2\sin x)+x+1$:

3) $y=(c_1+c_2x)e^{3x}+\frac{2}{9}x^2+\frac{5x}{27}+\frac{11}{27}$: 4) $y=c_1+c_2e^{-\frac{5}{2}x}+\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{5}x^2+\frac{7}{25}x$:

5) $y=c_1e^{x}+c_2e^{6x}+\frac{1}{74}(5\sin x+7\cos x)$: 6) $y=c_1e^{-x}+c_2e^{\frac{1}{2}x}+e^{x}$:

7) $y=c_1e^{-\frac{1}{3}x}+c_2e^{\frac{1}{4}x}-3x^2-6x-85$:

8) $y=c_1e^{3x}+c_2e^{-2x}-\frac{1}{6}e^{x}-\frac{1}{78}(5\sin 3x-\cos 3x)$:

9) $y=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}+\frac{1}{6}(5\cos 3x-\sin 3x)$: 10) $y=c_1e^{-mx}+c_2e^{mx}-\frac{1}{2m}xe^{-mx}$:

1335. 1) $y=e^{x}(0{,}16\cos 3x+0{,}28\sin 3x)+x^2+2{,}2x+0{,}84$:

2) $y=(1+x)e^{-\frac{3}{2}x}+2e^{-\frac{5}{2}x}$; 3) $y=6\sin x+\cos x+x+e^{x}$;

4) $y=e^{\sqrt{2}x}+e^{-\sqrt{2}x}-(x-2)e^{-x}$;

1336. $y=\left(c_1-\frac{x}{2}\right)\cos 2x+\left(c_2+\frac{1}{4}\ln\sin 2x\right)\sin 2x$;

1337. $c_1\sin x+c_2\cos x-\cos x\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$; ***1338.*** $y=(c_1+c_2x-\ln x)e^{x}$;

1339. $y=\left(c_1+c_2x+\frac{1}{2x}\right)e^{-2x}$; ***1340.*** 1) $y=c_1e^{\frac{x}{2}}+c_2e^{\frac{-x}{2}}-x^3$;

2) $y=c_1e^{x}+c_2e^{-x}-\frac{x}{2}e^{-x}$; 3) $y=(c_1x+c_2)^2$; 4) $y=c_2-c_1\cos x-x$;

5) $y^2=c_1x+c_2$; 6) $y=\frac{1}{x}+c_1\ln x+c_2$; 7) $y^2=\frac{1}{x+ce^{x}}$; 8) $y=\frac{2x}{1+cx^2}$;

Ցանկ

Գլուխ I
Մաթեմատիկայի ներածություն

§1. Բազմություններ և գործողություններ դրանց հետ 3
§2. Մեկ փոփոխականի ֆունկցիաներ.. 8

Գլուխ II
Անալիտիկ երկրաչափության և գծային հանրահաշվի տարրերը

§1. Անալիտիկ երկրաչափության հարթությանվրա................. 13
§2. Անալիտիկ երկրաչափության տարրերը տարածության մեջ 37
§3. Գծային հանրահաշվի տարրերը 47

Գլուխ III
Մաթեմատիկական անալիզի ներածություն

§1. Հաջորդականության սահմանը 72
§2. Ֆունկցիայի սահմանը և անընդհատությունը 81

Գլուխ IV
Մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի դիֆերենցիալ հաշիվ

§1. Ածանցյալ և դիֆերենցիալ 93
§2 Դիֆերենցիալ հաշվի հիմնական թեորեմները, Թեյլորի բանաձևը, ֆունկցիայի հետազոտումը ածանցյալի օգնությամբ 109

Գլուխ V
Մի քանի փոփոխականների ֆունկցիաներ

§1. Հիմնական գաղափարներ 121

§2. Մի քանի փոփոխականի ֆունկցիայի սահմանը և անընդհատությունը 123
§3. Մասնական ածանցյալներ և լրիվ դիֆերենցիալ 125
§4. Բարդ ֆունկցիայի ածանցյալը: Ածանցյալ տվյալ ուղղությամբ: Գրադիենտ 129
§5. Մի քանի փոփոխականների ֆունկցիաների էքստրեմումները 132

Գլուխ VI
Ինտեգրալներ

§1. Անորոշ ինտեգրա ներ 135
§2. Որոշյալ ինտեգրալներ 151

Գլուխ VII
Շարքեր

§1. Թվային շարքեր 164
§2. Կամայական շարքեր 170
§3. Աստիճանային շարքեր 172
§4. Ֆունկցիայի վերլուծում ըստ աստիճանային շարքի 174

Գլուխ VIII
Կրկնակի ինտեգրալներ 176

Գլուխ IX
Դիֆերենցիալ հավասարումներ

§1. Հիմնական գաղափարներ 183
§2. Առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարումներ 184
§3. Կարգի իջեցում թույլատրող բարձր կարգի հավասարումներ 189
§4. Երկրորդ կարգի հաստատուն գործակիցներով գծային դիֆերենցիալ հավասարումներ 190

Պատասխաններ 193