КОМБИНАТОРИКА

Alexander Lazarev

Institute of Control Science of Russian Academy of Sciences

2009-2010 учебный год

Outline

Введение

Комбинаторика – раздел математики, в котором изучаются вопросы о том, сколько различных конфигураций (комбинаций), подчиненных тем или иным условиям, можно составить из заданных объектов.

Основная проблема комбинаторики

- Основная проблема комбинаторики – подсчет числа элементов в конечном множестве.

Два принципа комбинаторики

При подсчете числа различных комбинаций в комбинаторике используются следующие два основных правила.
Правило произведения. Если объект A может быть выбран m различными способами и после каждого из таких выборов объект B в свою очередь может быть выбран n различными способами, то выбор двух объектов A и B в указанном порядке может быть осуществлен mn способами.
Правило суммы. Если объект A может быть выбран m различными способами, а объект B может быть выбран другими n различными способами при условии, что одновременный выбор A и B невозможен, то выбор A или B может быть осуществлен $m + n$ способами.

Функции и размещения

Классической задачей комбинаторики является задача определения числа способов размещения некоторых объектов в каком-то количестве "ящиков" так, чтобы были выполнены заданные ограничения. Эту задачу можно сформулировать несколько более формально следующим образом. Термины "функция "отображение "преобразование" и "соответствие" будут в дальнейшем использоваться как синонимы. При этом запись $f : X \to Y$ означает, что f есть функция с областью определения X, область значений которой содержится во множестве Y, то есть для каждого $x \in X$ функция f определяет единственный элемент $y = f(x) \in Y$.

Пусть даны множества X, Y, причем множество X содержит n элементов ($|X| = n$), а множество Y содержит m элементов ($|Y| = m$). В этих терминах задача может быть сформулирована следующим образом: сколько существует функций (отображений) , удовлетворяющих заданным ограничениям. Элементы множества X соответствуют объектам, элементы множества Y – "ящикам" а каждая функция $f : X \rightarrow Y$ определяет некоторое размещение, указывая для каждого объекта $x \in X$ "ящик" $y = f(x) \in Y$, в котором данный объект находится.

Другую традиционную интерпретацию можно получить, трактуя Y как множество цветов, а $f(x)$ как "цвет объекта x". Сколькими способами можно покрасить объекты так, чтобы были соблюдены некоторые ограничения.

Наконец, каждому отображению $f: X \to Y, |X| = n, |Y| = m$, можно взаимно однозначно сопоставить слово$< f(x_1), ..., f(x_n) >=< y_1, y_2, ..., y_n >$ в алфавите из m символов. Получаем третью эквивалентную формулировку задачи: подсчет числа слов в алфавите, удовлетворяющих заданным ограничениям.

Лемма 1. Если $|X| = n, |Y| = m$, то количество всех функций $f : X \to Y$ равно m^n.
Эквивалентное утверждение. Число слов длины n в алфавите из m символов равно m^n.
Доказательство. Без потери общности можно всегда считать, что $X = \{1, ..., n\}, Y = \{1, ..., m\}$. Каждую функцию можно тогда отождествить с последовательностью $< f(1), ..., f(n) >=< y_1, ..., y_n >$. Каждый член y_i последовательности можно выбрать m способами, что дает m^n возможностей выбора последовательности $< y_1, ..., y_n >$.

Определения.
Отображение $\varphi : X \to Y$ сюръективно, если для каждого элемента $y \in Y$ существует хотя бы один элемент $x \in X$, такой что $\varphi(x) = y$ (в каждом ящике при размещении находится хотя бы один объект, все буквы алфавита используются в слове, все цвета используются при окраске).
Отображение $\varphi : X \to Y$ инъективно, если $x_1 \neq x_2 \Rightarrow \varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$.
Если x – действительное число, положим по определению $[x]_n = x(x-1)(x-2)...(x-n+1)$. Обозначение $[x]_n$ читается как "n факториал от x вниз" или "нижняя n-ая степень x".

Лемма 2. Число инъективных отображений (инъекций) множества X из n элементов, $|X| = n$, во множество Y из m элементов, $|Y| = m$, есть $[m]_n$.
Эквивалентное утверждение. Число слов длины n без повторений букв в алфавите из m букв есть $[m]_n$.

Доказательство. Будем определять на этот раз число инъективных, (то есть имеющих все различные члены) последовательностей $< y_1, ..., y_n >$. Элемент y_1 может быть выбран m способами, элемент y_2 можно выбрать $m-1$ способом из оставшихся элементов. В общем случае, если уже выбраны элементы $y_1, ..., y_{i-1}$, то в качестве y_i может быть выбран любой из $m-i+1$ элементов множества $Y \setminus \{y_1, ..., y_{i-1}\}$. (Принимаем, что $m \geq n$, если $n > m$, то и $[m]_n$ и искомое число функций равно 0). Это дает $m(m-1)...(m-n+1)$ возможность выбора инъективных последовательностей $< y_1, ..., y_n >$.

$$[m]_n = m(m-1)...(m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!}$$

Определение. Каждое взаимно однозначное отображение $f : X \to X$ называется перестановкой множества X. Число всех перестановок n- элементного множества равно $n!$.
Число всех расписаний обслуживания n работ на приборе будет равно $n!$. Поиск оптимального расписания (с наилучшим значением целевой функции) "затрудненно" из-за того, что $n!$ очень большое число для "реальных" $n\dots$

Числа Стирлинга первого рода

Выражение $[x]_n$ является полиномом степени n от скалярной переменной x, следовательно его можно представить в виде следующего разложения по степеням x:

$$[x]_n = s(n,0) + s(n,1)x + ... + s(n,n)x^n.$$

По определению, коэффициенты s(n,k) такого разложения называются числами Стирлинга первого рода.

Лемма 3. Числа Стирлинга первого рода удовлетворяют следующим рекуррентным соотношениям:

$$s(n+1,k)=s(n,k-1)-ns(n,k), k=1,\ldots,n;$$

$$s(n,0)=0; s(n,n)=1.$$

Доказательство. По определению

$$[x]_{n+1} = [x]_n(x-n).$$

Представляя полиномы в левой и правой частях равенства в виде разложения по степеням x, получим

$$s(n+1,n+1)x^{n+1} + \cdots + s(n+1,k)x^k + \cdots + s(n+1,0) =$$

$$[s(n,n) + \cdots + s(n,k-1)x^{k-1} + s(n,k)x^k + \cdots + s(n,0)](x-n).$$

Вычисляя и приравнивая коэффициенты при x^k слева и справа, получаем первую формулу утверждения.

Циклическая структура перестановок

Перестановку можно представлять как слово или как функцию. В частности, функция $\pi : [n] \to [n]$, задаваемая равенством $\pi(i) = a_i$, соответствует слову $a_1 a_2 ... a_n$. Если рассматривать перестановку конечного множества S как взаимно однозначное отображение $\pi : S \to S$, то естественно для каждого $x \in S$ рассмотреть последовательность $x, \pi(x), \pi^2(x), \ldots, \pi^{k-1}(x), \ldots$ В конце концов (так как π – взаимно однозначное соответствие, и множество S предполагается конечным) мы вновь получим x. Таким образом, для некоторого единственного наименьшего $k \geq 1$ имеем, что $\pi^k(x) = x$ и элементы $x, \pi(x), \pi^2(x), \ldots, \pi^{k-1}(x)$ все различны.

Последовательность $(x, \pi(x), \pi^2(x), \ldots, \pi^{k-1}(x))$ называют циклом перестановки длины k. Циклы $(x, \pi(x), \pi^2(x), \ldots, \pi^{k-1}(x)$ и $(\pi^i(x), \pi^{i+1}(x), ..., \pi^{k-1}(x), x, ..., \pi^{i-1}(x))$ считаются эквивалентными.

Каждый элемент S встречается тогда в единственном цикле перестановки π, и мы можем рассматривать π как объединение непересекающихся циклов или, по-другому, как произведение различных циклов $C_1, \ldots, C_n$.
Пример, если перестановка $\pi : [7] \to [7]$ определена как

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 2 & 7 & 1 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

то есть
$\pi(1) = 4, \pi(2) = 2, \pi(3) = 7, \pi(4) = 1, \pi(5) = 3, \pi(6) = 6, \pi(7) = 5$, поэтому $\pi = (14)(2)(375)(6)$.

Возможны различные обозначения такого представления перестановки; например, имеем: $\pi = (753)(14)(6)(2)$. Обычно, определяют следующее представление:

- в каждом цикле пишется первым его наибольший элемент;

Возможны различные обозначения такого представления перестановки; например, имеем: $\pi = (753)(14)(6)(2)$. Обычно, определяют следующее представление:

- в каждом цикле пишется первым его наибольший элемент;
- циклы записываются в порядке возрастания их максимальных элементов.

Пусть $c(n,k)$ - число таких перестановок множества из n элементов, которые имеют k циклов. Будем обозначать множество всех перестановок n-элементного множества символом σ_n.

Лемма 4. Числа $c(n,k)$ удовлетворяют следующему рекуррентному соотношению:

$$c(n,k) = (n-1)c(n-1,k) + c(n-1,k-1), n,k \geq 1,$$

с начальными условиями $c(n,k) = 0$ при $n \leq 0$ или $k \leq 0$, за исключением $c(0,0) = 1$.

Доказательство. Возьмем произвольную перестановку $\pi \in \sigma_{n-1}$ с k циклами. Мы можем вставить символ n после любого из символов множества $\{1, 2, ..., n-1\}$ в разложении перестановки π на непересекающиеся циклы $n-1$ способом, получив таким образом разложение на непересекающиеся циклы перестановки $\pi' \in \sigma_n$ с k циклами, где n встречается в цикле длины, не меньшей 2. Следовательно, существует $(n-1)c(n-1, k)$ перестановок $\pi' \in \sigma_n$ с k циклами, для которых $\pi'(n) \neq n$. С другой стороны, если выбрана перестановка $\pi' \in \sigma_{n-1}$ с $k-1$ циклом, её можно достроить до перестановки $\pi' \in \sigma_n$ с k циклами, удовлетворяющей условию $\pi'(n) = n$. Положим

$$\pi'(i) = \begin{cases} \pi(i), & i \in \{1, \dots, n-1\}, \\ n, & i = n. \end{cases}$$

Следовательно, имеется $c(n-1, k-1)$ перестановок $\pi' \in \sigma_n$ с k циклами, для которых $\pi'(n) = n$.

Числа $c(n,k) = (-1)^{n-k} s(n,k)$ известны под названием чисел Стирлинга первого рода без знака.
Лемма 5. Пусть x – скалярная переменная. Фиксируем $n \geq 0$. Тогда имеет место

$$\sum_{k=0}^{n} c(n,k) x^k = x(x+1)\dots(x+n-1).$$

Доказательство. Положим

$$F_n(x) = F_{n-1}(x)(x+n-1) = \sum_{k=1}^{n} b(n-1,k-1)x^k + (n-1)\sum_{k=0}^{n-1} b(n-1,k)x^k$$

Отсюда следует, что
$b(n,k) = (n-1)b(n-1,k) + b(n-1,k-1)$. Поэтому $b(n,k)$ удовлетворяют тем же рекуррентным соотношениям и начальным условиям, что и $c(n,k)$, а значит, они совпадают.

Упорядоченные размещения

Пусть x – действительное число. Положим, по определению,

$$[x]^n = x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1).$$

Обозначение $[x]^n$ читается как "n факториал от x вверх"или "верхняя n-ая степень x".
Определение. Пусть X – множество из n объектов $\{1, 2, ..., n\}$, которые должны быть размещены по m ящикам так, чтобы каждый ящик содержал бы последовательность, а не множество, как прежде, помещенных в нем объектов. Два размещения совпадают (равны), если в каждом ящике содержится одна и та же последовательность объектов. Размещения такого типа называются упорядоченными размещениями n объектов по m ящикам.

Лемма 6. Число упорядоченных размещений n объектов по m ящикам равно $[m]^n = m(m+1)...(m+n-1)$ (полагаем $[m]^o = 1$).
Без доказательства...

Отметим простые, часто используемые соотношения:

$$[m]_n = (m - n + 1)[m]_{n-1}; [m]^n = (m + n - 1)[m]^{n-1};$$

$$[m]_n = \frac{m!}{(m-n)!}; [m]^n = \frac{(m+n-1)!}{(m-1)!};$$

$$[m]^n = [m + n - 1]_n; [m]^n = [m]^{n-1}(m + n - 1).$$

Определение. Пусть A – алфавит (то есть конечное множество символов) со множеством букв $\{a_1, ..., a_m\}$, упорядоченных так, что

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_m.$$

Слово $x_1 x_2 ... x_n$ длины n – монотонное, если $x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n$.

Лемма 7. Число монотонных слов длины n в алфавите из m букв равно $\frac{[m]^n}{n!}$.

Доказательство. Рассмотрим упорядоченное размещение n объектов $\{1, 2, ..., n\}$ по m ящикам $\{a_1, ..., a_m\}$ и пусть ему соответствует монотонное слово следующим образом:

$$\overbrace{\underbrace{|3|}_{a_1}\ \underbrace{|251|}_{a_2}\ldots\underbrace{|64n|}_{a_m}}^{m}$$

В соответствующем слове буква a_1 написана столько раз, сколько объектов в ящике a_1, затем буква a_2 столько раз, сколько объектов в ящике a_2, ... Каждому упорядоченному размещению n объектов соответствует единственное монотонное слово. Все монотонные слова таким образом могут быть получены. Монотонному слову, с другой стороны, соответствует ровно $n!$ различных упорядоченных размещений. Поэтому число монотонных слов есть $\frac{[m]^n}{n!}$.

Задачи

Задача Муавра. Найдем число способов представления целого положительного числа m как упорядоченной суммы n неотрицательных целых чисел

$$m = u_1 + \ldots + u_n.$$

Два представления

$$m = u_1 + \ldots + u_n$$

и

$$m = u_1' + \ldots + u_n'$$

будем считать совпадающими тогда и только тогда, когда

$$u_1 = u_1', \ldots, u_n = u_n',$$

то есть когда совпадают слагаемые и порядок их следования.

Положим значение σ_k равным частичной сумме первых k членов последовательности $n_1, ..., n_k$

$$\sigma_k = n_1 + n_2 + ... + n_k.$$

Каждому представлению m в виде суммы n слагаемых взаимно однозначно соответствует слово $\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_{n-1}m$, где $\sigma_n = m$ и $0 \leq \sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \cdots \leq \sigma_{n-1} \leq \sigma_n = m$. Таким образом, количество представлений числа m в виде упорядоченной суммы неотрицательных целых слагаемых равно количеству монотонных слов $\sigma_1\sigma_2\sigma_{n-1}$ длины $n-1$ в алфавите из $m+1$ символа, $\sigma_i \in \{0, 1, 2, \ldots, m\}$. Число представлений равно:

$$\frac{[m+1]^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!}.$$

Задача 2. Имеется 5 семей по 4 человека в каждой семье. Из 20 человек 6 человек заболели инфекционной болезнью ($N1H1$?).
Сколько имеется возможностей, что необходимо ввести

карантин:

- только для 2-х семей

Задача 2. Имеется 5 семей по 4 человека в каждой семье. Из 20 человек 6 человек заболели инфекционной болезнью ($N1H1$?).
Сколько имеется возможностей, что необходимо ввести

карантин:

- только для 2-х семей
- $C_{20}^{6} C_{5}^{2}((C_{4}^{3})^{2} + C_{2}^{1} C_{4}^{2} C_{4}^{4})$;

Задача 2. Имеется 5 семей по 4 человека в каждой семье. Из 20 человек 6 человек заболели инфекционной болезнью ($N1H1$?).
Сколько имеется возможностей, что необходимо ввести

карантин:

- только для 2-х семей
- $C_{20}^{6}C_{5}^{2}((C_{4}^{3})^{2}+C_{2}^{1}C_{4}^{2}C_{4}^{4})$;
- только для 3-х семей

Задача 2. Имеется 5 семей по 4 человека в каждой семье. Из 20 человек 6 человек заболели инфекционной болезнью ($N1H1$?).
Сколько имеется возможностей, что необходимо ввести

карантин:

- только для 2-х семей
- $C_{20}^{6} C_{5}^{2}((C_{4}^{3})^{2} + C_{2}^{1} C_{4}^{2} C_{4}^{4});$
- только для 3-х семей
- $C_{20}^{6} C_{5}^{3}((C_{4}^{2})^{3} + C_{3}^{1} C_{4}^{1} C_{2}^{1} C_{4}^{2} C_{4}^{3} + C_{3}^{2} C_{4}^{1} C_{4}^{1} C_{4}^{4});$

Задача 2. Имеется 5 семей по 4 человека в каждой семье. Из 20 человек 6 человек заболели инфекционной болезнью ($N1H1$?).
Сколько имеется возможностей, что необходимо ввести

карантин:

- только для 2-х семей
- $C_{20}^{6}C_{5}^{2}((C_{4}^{3})^{2}+C_{2}^{1}C_{4}^{2}C_{4}^{4})$;
- только для 3-х семей
- $C_{20}^{6}C_{5}^{3}((C_{4}^{2})^{3}+C_{3}^{1}C_{4}^{1}C_{2}^{1}C_{4}^{2}C_{4}^{3}+C_{3}^{2}C_{4}^{1}C_{4}^{1}C_{4}^{4})$;
- для всех семей

Задача 2. Имеется 5 семей по 4 человека в каждой семье. Из 20 человек 6 человек заболели инфекционной болезнью ($N1H1?$).
Сколько имеется возможностей, что необходимо ввести

карантин:

- только для 2-х семей
- $C_{20}^{6}C_{5}^{2}((C_{4}^{3})^{2}+C_{2}^{1}C_{4}^{2}C_{4}^{4});$
- только для 3-х семей
- $C_{20}^{6}C_{5}^{3}((C_{4}^{2})^{3}+C_{3}^{1}C_{4}^{1}C_{2}^{1}C_{4}^{2}C_{4}^{3}+C_{3}^{2}C_{4}^{1}C_{4}^{1}C_{4}^{4});$
- для всех семей
- $C_{20}^{6}C_{5}^{5}((C_{5}^{1}C_{4}^{2}(C_{4}^{1})^{4}).$

Сочетания и биномиальные коэффициенты

Пусть дано конечное множество X , содержащее m различных элементов. Сколько различных k-элементных подмножеств, которые можно образовать из элементов множества X. Два подмножества считаются различными, если они различаются хотя бы одним входящим в них элементом.
Такие подмножества называются сочетаниями из m элементов по k элементов.
Лемма 8. Число различных подмножеств из k элементов множества $A, |A| = m$, есть

$$C_m^k = \frac{m!}{(m-k)!k!}.$$

Доказательство. Построим таблицу T всех строго возрастающих (монотонных, без повторений букв) слов длины k в алфавите A из m букв.
Пример. Пусть множество A состоит из пяти различных элементов: $A = \{a, b, c, d, e\}$. Положим $k = 3$. Тогда таблица T всех строго возрастающих слов длины 3 в алфавите A имеет следующий вид: abc; acd; ade; abd; ace; abe; bcd; bde; bce; cde.
Переставим буквы в каждом слове всеми возможными способами и обозначим получившуюся таблицу T'. T' – множество всех слов без повторения букв длины k в алфавите A. В таблице T' нет пропусков: каждое слово длины k появится в таблице T'. В таблице T' нет повторений: два слова из T' либо получены из одного слова из T и тогда отличаются порядком букв, либо из разных слов T и тогда различаются буквами.

Согласно **Лемме 2**

Лемма 2. Число инъективных отображений (инъекций) множества X из n элементов, $|X| = n$, во множество Y из m элементов, $|Y| = m$, есть $[m]_n$.

поэтому

$$|T| = \frac{[m]_n}{k!} = \frac{m!}{(m-k)!k!}.$$

Производящие функции

Путь задана последовательность $\{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$ (неважно, конечная или бесконечная). Производящей функцией последовательности $\{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$ называется функция $f(x) = \sum_{n=0} a_n x^n$.

При этом все рассматриваемые ряды в случае бесконечной последовательности считаются формально сходящимися (если эти ряды сходятся в какой-то области к функции $f(x)$), поскольку мы интересуемся не областью сходимости соответствующих рядов, а лишь соотношениями между коэффициентами таких рядов.

Примеры:

- $\frac{1}{x-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \ldots$

Примеры:

- $\frac{1}{x-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \ldots$
- $\{1, \ldots, 1, \ldots\}$;

Примеры:

- $\frac{1}{x-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots$
- $\{1, \dots, 1, \dots\}$;
- $\frac{1}{(x-1)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + (n+1)x^n + \dots$

Примеры:

- $\frac{1}{x-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots$
- $\{1, \dots, 1, \dots\}$;
- $\frac{1}{(x-1)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + (n+1)x^n + \dots$
- $\{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$.

Пусть $B(x) = \sum\limits_{n=0} b_n x^n$ – производящая функция последовательности $\{b_1, b_2, ..., b_n, ...\}$ и $C(x) = \sum\limits_{n=0} c_n x^n$ – производящая функция последовательности $\{c_1, c_2, ..., c_n, ...\}$. Тогда из равенства

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 \cdots + c_n x^n + \cdots =$$
$$= (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \cdots + a_n x^n + \dots)\times$$
$$(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 \cdots + b_n x^n + \dots)$$

имеем

$$c_0 = a_0 b_0;$$

$$c_1 = a_1 b_0 + a_0 b_1;$$

$$\ldots$$

$$c_n = a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + a_{n-2} b_2 \cdots + a_0 b_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k, \; n = 0, 1, 2, \ldots$$

В таком случае говорят, что последовательность коэффициентов c_n есть свертка (произведение Коши) последовательностей $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ и $\{b_0, b_1, \ldots, b_n\}$.

Биномиальные коэффициенты

$$(1+x)^m = \sum_{k=0}^{m} C_m^k x^k$$

Соотношения для биномиальных коэффициентов:

$$C_m^k = C_m^{m-k};$$

$$C_m^k = C_{m-1}^k + C_{m-1}^{k-1};$$

$$2^m = \sum_{k=0}^{m} C_m^k;$$

$$(1+x)^m = \sum_{k=0}^{m} C_m^k x^k$$

$$((1+x)^m)' = (\sum_{k=0}^{m} C_m^k x^k)' \Rightarrow m(1+x)^{m-1} = \sum_{k=0}^{m} k C_m^k x^{k-1} \Rightarrow$$

$$x = 1 \Rightarrow m2^{m-1} = \sum_{k=0}^{m} k C_m^k$$

$$(1+x)^{m+n} = (1+x)^m (1+x)^n \Rightarrow C_{m+n}^k = \sum_{\alpha=0}^{k} C_m^\alpha C_n^{k-\alpha}$$

$$\Rightarrow C_{2n}^n = \sum_{\alpha=0}^{n} (C_n^\alpha)^2$$

$$(1+x)^m = \sum_{k=0}^{m} C_m^k x^k \Rightarrow x = -1 \Rightarrow$$

$$\sum_{\alpha=0}^{m} (-1)^\alpha C_m^\alpha = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{k=0}^{[\frac{m}{2}]} C_m^{2k} = \sum_{k=0}^{[\frac{m}{2}]} C_m^{2k+1} = 2^{m-1}$$

Исчисление конечных разностей

Пусть дана функция $\varphi(x)$, определенная на множестве действительных (возможно целых) чисел и принимающая действительные значения. Определим новую функцию $\Delta\varphi(x)$, называемую первой разностью (оператор первого порядка) φ, формулой

$$\Delta\varphi(x) = \varphi(x+1) - \varphi(x).$$

Можно применить оператор Δ k раз и получить k-ый разностный оператор

$$\Delta^k\varphi(x) = \Delta(\Delta^{k-1}\varphi(x)).$$

Оператор E, называемый операторем сдвига,

$$E\varphi(x) = \varphi(x+1).$$

Единичный оператор

$$I\varphi(x) = \varphi(x).$$

$$\Delta = E - I.$$

$$\Delta\varphi(x) = E\varphi(x) - I\varphi(x) = (E - I)\varphi(x).$$

Разности более высоких порядков определяются рекуррентным соотношением:

$$\Delta^n\varphi(x) = \Delta^{n-1}(\Delta\varphi(x)) = \Delta^{n-1}\varphi(x+1) - \Delta^{n-1}\varphi(x) =$$

$$(E-I)((E-I)^{n-1}\varphi(x)) = (E-I)^n\varphi(x) =$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^k I^{n-k}E^k\varphi(x) =$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^k\varphi(x+k).$$

Следовательно,

$$\Delta^n \varphi(0) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k \varphi(k),$$

$$\varphi(n) = E^n \varphi(0) = (\Delta + I)^n \varphi(0) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \Delta^k \varphi(0).$$

$$\Delta\varphi(n) = \varphi(n+1) - \varphi(n)$$

n	0		1		2		3		4		5
$\varphi(n) = n^4$	0		1		16		81		256		625
$\Delta\varphi(n)$		1		15		65		175		369	
$\Delta^2\varphi(n)$			14		50		110		194		
$\Delta^3\varphi(n)$				36		60		84			
$\Delta^4\varphi(n)$					24		24				
$\Delta^5\varphi(n)$						0					

$$n^4 = 0C_n^0 + 1C_n^1 + 14C_n^2 + 36C_n^3 + 24C_n^4 + 0C_n^5$$

$$\varphi(n) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \Delta^k \varphi(0).$$

Разложения

Разложение n есть представление числа n в виде упорядоченной суммы положительных целых.

$$4 = 1+1+1+1 = 2+1+1 = 1+2+1 = 1+1+2 =$$

$$= 3+1 = 1+3 = 2+2 = 4$$

Если разложение σ содержит в точности k слагаемых, то говорят, что имеет k частей и называется k-разложением. Проблема, тесно связанная с разложениями, есть задача подсчета числа $N(n,k)$ решений уравнения

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$$

в неотрицательных целых числах. Решение такого уравнения называется слабым разложением n на k частей, или слабым k-разложением числа n. (Решение в положительных целых числах есть просто k-разложение n.)

$$x_1 + x_2 + ... + x_k = n$$

Положим,

$$x_i = y_i - 1, i = 1, \ldots, k.$$

$$y_1 + y_2 + ... + y_k = n + k,$$

то есть число k-разложений числа $n + k$.
Поэтому,

$$N(n, k) = C_{n+k-1}^{k-1}.$$

Разбиения

Разбиение конечного множества $X, \mid X \mid = n$, есть неупорядоченный набор $\pi = \{B_1, B_2, ..., B_k\}$ подмножеств множества X таких, что

$B_i \neq \oslash$ для всех i от 1 до k;

$B_i \cap B_j = \oslash$, если $i \neq j$;

$B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_k = X$.

Число разбиений множества, состоящего из n элементов, на k классов $S(n, k)$ – число Стирлинга второго рода.

Лемма 3. Числа Стирлинга первого рода удовлетворяют следующим рекуррентным соотношениям:

$$s(n+1,k) = s(n,k-1) - ns(n,k), k = 1,\ldots,n;$$

$$s(n,0) = 0; s(n,n) = 1.$$

Числа $c(n, k) = (-1)^{n-k} s(n, k)$ известны под названием чисел Стирлинга первого рода без знака.

Лемма 5. Пусть x – скалярная переменная. Фиксируем $n \geq 0$. Тогда имеет место

$$\sum_{k=0}^{n} c(n, k) x^k = x(x+1) \dots (x+n-1).$$

Числа Стирлинга второго рода.

Полагают, что $S(0,0) = 1$.

$S(0,k) = 0$ при $k > 0$,

$S(n,k) = 0$ при $k > n$,

$S(n,0) = 0$ при $n > 0$,

$S(n,1) = 1$,

$S(n,2) = 2^{n-1} - 1$,

$S(n,n) = 1$,

$S(n,n-1) = C_n^2$.

Лемма 9. Числа Стирлинга второго рода удовлетворяют следующему основному рекуррентному соотношению:

$$S(n+1,k)=S(n,k-1)+kS(n,k).$$

Доказательство. Рассмотрим таблицу разбиений $n+1$ объекта на k классов.
1) Для некоторых разбиений $(n+1)$-ый объект есть единственный элемент в классе. Число таких разбиений есть $S(n, k-1)$.
2) Для других разбиений $(n+1)$-ый объект не является единственным элементом класса ни для какого класса. Следовательно, существует $kS(n, k)$ таких разбиений, так как каждому разбиению множества $\{1, ..., n\}$ на k классов соответствует в точности k разбиений, образованных добавлением элемента $n+1$ поочередно к каждому классу. Таким образом, мы представили все разбиения $n+1$ элемента на k классов в виде объединения непересекающихся подмножеств разбиений двух перечисленных типов. Поэтому $S(n+1, k) = S(n, k-1) + kS(n, k)$.

Лемма 10. Число сюръективных отображений множества $X, |X| = n$, на множество $Y, |Y| = m$, равно $m!S(n, m)$.

Отображение $\varphi : X \to Y$ сюръективно, если для каждого элемента $y \in Y$ существует хотя бы один элемент $x \in X$, такой что $\varphi(x) = y$.

Доказательство. Каждое сюръективное отображение $X = \{1, 2, ..., n\}$ на $Y = \{y_1, y_2, ..., y_m\}$ индуцирует разбиение X на m различных классов $1, 2, ..., m$ (в класс i попадают все такие x, что $\varphi(x) = y_i$); — прямой ход...

Обратный ход, каждому разбиению X на m классов соответствует $m!$ сюръективных отображений X на Y. Действительно, выражение $m!S(n,m)$ дает число способов разбить X на m классов, а затем линейно упорядочить классы, скажем, $(B_1, B_2, ..., B_m)$. Свяжем последовательность $(B_1, B_2, ..., B_m)$ с сюръективной функцией φ, определенной формулой $\varphi(i) = y_j$, если $i \in B_j$. Это устанавливает требуемое соответствие между количеством сюръективных отображений и числом разбиений.

Ниже приводится список некоторых основных формул для количества разбиений множества из n элементов на k классов — $S(n, k)$.

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n, k)[x]_k;$$

Числа $S(n, k)$ играют обратную роль по отношению к числам $s(n, k)$ – позволяют перейти от базиса $\{1, x, x^2, ...\}$ к базису $\{[x]_1, [x]_2, ...\}$.

$$S(n+1, m) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k S(k, m-1) = \sum_{k=m-1}^{n} C_n^k S(k, m-1).$$

$$\Delta\varphi(n) = \varphi(n+1) - \varphi(n)$$

n	0		1		2		3		4		5
$\varphi(n) = n^4$	0		1		16		81		256		625
$\Delta\varphi(n)$		1		15		65		175		369	
$\Delta^2\varphi(n)$			14		50		110		194		
$\Delta^3\varphi(n)$				36		60		84			
$\Delta^4\varphi(n)$					24		24				
$\Delta^5\varphi(n)$						0					

$$n^4 = 0C_n^0 + 1C_n^1 + 14C_n^2 + 36C_n^3 + 24C_n^4 + 0C_n^5$$

$$\varphi(n) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \Delta^k \varphi(0).$$

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)[x]_k;\ n^4 = \sum_{k=0}^{4} S(4,k)[4]_k;$$

$$[n]_k = n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} = k!C_n^k;$$

$$n^4 = \sum_{k=0}^{4} k!S(4,k)C_4^k;$$

$$n^4 = 0C_n^0 + 1C_n^1 + 14C_n^2 + 36C_n^3 + 24C_n^4 + 0C_n^5$$

$$0!S(4,0) = 0; 1!S(4,1) = 1; 2!S(4,2) = 14;$$

$$3!S(4,3) = 36; 4!S(4,4) = 24; 5!S(4,5) = 0.$$

Числа Белла

Общее число разбиений множества $X, |X| = n \geq 1$, на произвольные классы называется числом Белла и обозначается $B(n)$.

$$B(n) = \sum_{k=0}^{n} S(n, k), \quad B(0) = 1$$

Верно следующее рекуррентное соотношение:

$$B(n+1)=\sum_{k=0}^{n} C_n^k B(k)$$

$$B(n+1)=\sum_{r=1}^{n+1} S(n+1,r)=\sum_{r=1}^{n+1}\sum_{k=0}^{n} C_n^k S(k,r-1)=$$

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \sum_{r=1}^{n+1} S(k,r-1)=\sum_{k=0}^{n} C_n^k B(k).$$

Принцип включений - исключений

Этот раздел посвящен важному комбинаторному методу — принципу включений-исключений, известному также под названиями: символический метод, принцип перекрестной классификации, метод решета. Логическое тождество, на котором основаны все эти методы, известны давно. Еще в 1713 году Монмор эффективно использовал упомянутый метод в решении знаменитой задачи о встречах (о числе перестановок из n элементов, в которых ни один элемент не сохраняет своей позиции).

Монмор Пьер де — французский математик (1678—1719). Настоящая его фамилия Ремон (Remond de Montmort), Монмор же называлось особенно любимое им поместье.

Принцип включений-исключений в перечислительной комбинаторике есть метод определения мощности множества S, который начинает с большего множества и каким-либо путем вычитает или аннулирует нежелательные элементы. Сначала дается приблизительный ответ, содержащий большее число элементов, затем вычитается число элементов, большее чем ошибка, полученная на первом шаге, пока мы не придем к правильному ответу. Это комбинаторная сущность принципа включения-исключения.

Пусть даны два конечных множества A и B.

$$| A \cup B | = | A | + | B | - | A \cap B | .$$

Пусть даны три конечных множества A, B и C.

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| = & \quad |A| + |B| + |C| \\ & - |A \cap B| - |A \cap C| - |C \cap B| \\ & + |A \cap B \cap C|. \end{aligned}$$

Пусть имеется N объектов и n различных свойств $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Каждый из объектов может обладать любым из этих свойств (в любом наборе), т.е. обладать любым набором этих свойств, или не обладать никаким из свойств. Пусть $N(\alpha_1)$ – число объектов обладающих свойством α_1. Некоторые из этих объектов могут обладать и другими свойствами в дополнение к α_1. (На самом деле в этом и состоит вся идея метода включений-исключений). Пусть теперь $N(\alpha_2)$ – число объектов, обладающих свойством α_2, и так далее. Соответственно, через $N(\alpha_1, \alpha_2)$ обозначим количество объектов, обладающих двумя свойствами: свойством α_1 и свойством α_2.

Пусть $N(\overline{\alpha_1})$ - число объектов, не обладающих свойством α_1. Чертой над символом свойства будем указывать, что речь идет об объектах, не обладающих таким свойством. Тогда в принятом обозначении $N_0 = N(\overline{\alpha_1}, \ldots, \overline{\alpha_n})$.

Теорема. (Формула включений - исключений).

$$N_0 = N - \sum_{1 \le i \le n} N(\alpha_i) + \sum_{1 \le i < j \le n} N(\alpha_i, \alpha_j) -$$

$$- \sum_{1 \le i < j < k \le n} N(\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k) + \cdots + (-1)^n N(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n).$$

Доказательство. Доказательство проводится индукцией по n - числу свойств. При одном свойстве α_1 формула очевидна. Каждый объект либо обладает этим свойством, либо не обладает им. Поэтому $N_0 = N - N(\alpha_1)$.
Предположим теперь, что для случая, когда число свойств равно $n-1$, формула доказана:

$$N_0 = N - \sum_{1 \le i \le n-1} N(\alpha_i) + \sum_{1 \le i < j \le n-1} N(\alpha_i, \alpha_j) -$$

$$- \sum_{1 \le i < j < k \le n-1} N(\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k) + \cdots + (-1)^{n-1} N(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}).$$

Очевидно:

$$N(\overline{\alpha_1}, \ldots, \overline{\alpha_n}) = N(\overline{\alpha_1}, \ldots, \overline{\alpha_{n-1}}) - N(\overline{\alpha_1}, \ldots, \overline{\alpha_{n-1}}, \alpha_n)$$

Индуктивное предположение справедливо для любого подмножества не больше $n-1$. В частности она верна для совокупности $N(\alpha_n)$ элементов, обладающих свойством α_n. Применим индуктивное предположение к совокупности $N(\alpha_n)$ для вычисления $N(\overline{\alpha_1}, \ldots, \overline{\alpha_{n-1}}, \alpha_n)$:

$$N(\overline{\alpha_1}, \dots, \overline{\alpha_{n-1}}, \alpha_n) = N(\alpha_n) -$$

$$-\sum_{1 \le i \le n-1} N(\alpha_i, \alpha_n) +$$

$$+\sum_{1 \le i < j \le n-1} N(\alpha_i, \alpha_j, \alpha_n) +$$

$$\dots$$

$$+(-1)^{n-1} N(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

Вычтем это равенство из

$$N_0 = N - \sum_{1 \le i \le n-1} N(\alpha_i) + \sum_{1 \le i < j \le n-1} N(\alpha_i, \alpha_j) -$$

$$-\sum_{1 \le i < j < k \le n-1} N(\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k) + \dots + (-1)^{n-1} N(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}).$$

Можно записать:

$$N(\overline{\alpha_1}, \ldots, \overline{\alpha_n}) = N((1-\alpha_1), \ldots, (1-\alpha_n))$$

Так как

$$N(\alpha+\beta) = N(\alpha) + N(\beta) \quad N(-\alpha) = -N(\alpha) \quad N(1) = N,$$

то для $n = 2$ получим

$$N((1-\alpha)(1-\beta)) = N(1-\alpha-\beta+\alpha\beta) = N - N(\alpha) - N(\beta) + N(\alpha, \beta)$$

Аналогично можно выписать принцип включения-исключения и для большего числа переменных.

Задача о числе беспорядков (Задача о встречах)

Необходимо найти число таких перестановок $\pi \in \sigma_n$, которые не имеют неподвижных точек, то есть ни один элемент не стоит на своем месте: $\pi(i) \neq i$ для всех $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Такие перестановки будем называть беспорядками.

$$N_0 = C_n^0 n! - C_n^1 (n-1)! + C_n^2 (n-2)! \cdots + (-1)^n C_n^n 0!$$

$$N_0 = n!(1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!})$$

Из курса математического анализа известно, что

$$e^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!}$$

поэтому

$$N_0 \approx \frac{n!}{e}$$

Количество сюръективных отображений

Отображение $f : X \to Y$ сюръективно, если для каждого элемента $y \in Y$ существует хотя бы один элемент $x \in X$, такой что $f(x) = y$.

Теорема. Число сюръективных отображений конечного множества $X, |X| = n$, на конечное множество $Y, |Y| = m$, то есть число функций $f : X \to Y$, таких, что $f(X) = Y$, равно

$$f(n, m) = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k C_m^k (m-k)!$$

Доказательство. Пусть $Y = \{y_1, ..., y_m\}$. Обозначим через α_i следующее свойство функции $f : X \to Y$: $y_i \notin f(X)$. Пусть F_{α_i} — множество функций, обладающих свойством α_i. Тогда очевидно, что

$$f(X) \neq Y \Leftrightarrow f \in \cup_{i=1}^{m} F_{\alpha_i}$$

Число всех функций $f : X \to Y$ равно m^n. Если выполняется несколько свойств α_i, для определённости $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, тогда количество таких функций

$$N(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = (m-k)^n$$

Согласно принципу включения-исключения:

$$f(n,m) = m^n + \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^k C_m^k (m-k)^n = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k C_m^k (m-k)^n$$

Следствие

$$S(n,m) = \frac{f(n,m)}{m!} = \frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k C_m^k (m-k)^n.$$

Лемма 18. Число способов, которыми можно выбрать k точек из m точек на окружности так, чтобы среди них не было двух последовательных (соседних) точек, равно

$$f(m,k) = \frac{m}{m-k} C_{m-k}^{k}$$

Задача о супружеских парах (о гостях). Сколькими способами можно рассадить за круглым столом n супружеских пар так, чтобы никакая пара не сидела рядом и женщины чередовались с мужчинами.

Доказательство. Пометим точки числами $1, 2, \ldots, m$ в возрастающем по часовой стрелке порядке. Мы хотим покрасить k из них в красный цвет, так чтобы не было двух последовательных красных точек. Сначала подсчитаем число возможностей, при которых точка 1 не окрашена в красный цвет. Расположим $m-k$ неокрашенных точек по кругу, пометив одну из них единицей и вставим k красных точек в $m-k$ промежутков между неокрашенными точками C_{m-k}^{k} способами. С другой стороны, если точка 1 будет покрашена в красный цвет, то расположим $m-k+1$ точек по кругу, покрасим одну из этих точек в красный цвет и пометим ее 1, а затем вставим C_{m-k-1}^{k-1} способами $k-1$ красную точку на $m-k-1$ разрешенных мест. Следовательно,

$$f(m,k) = C_{m-k}^{k} + C_{m-k-1}^{k-1} = \frac{m}{m-k} C_{m-k}^{k}.$$

Системы различных представителей

Пусть S - конечное множество из m элементов, $|S| = m$. $P(S)$ — множество всех его подмножеств.

Определение. Пусть $M(S) = (S_1, S_2, ..., S_n)$ некоторая совокупность подмножеств из $P(S)$, необязательно различных, $a = (a_1, ..., a_n)$ — последовательность элементов из S, такая, что все элементы $a_i, i = 1, 2, ..., n$, различны. Если при этом $a_i \in S_i$, то говорят, что элемент a_i представляет множество S_i, а вся совокупность $\{a_1, ..., a_n\}$ называется системой различных представителей (с.р.п.) для $M(S)$.

Теорема. Теорема о различных представителях.
Подмножества $S_1, S_2, ..., S_n$ имеют с.р.п. тогда и только тогда, когда удовлетворяется следующее условие С:
Среди элементов любого конечного числа k множеств S_i имеется по меньшей мере k различных элементов; иными словами множество $S_{i_1} \cup S_{i_2} \cup \cdots \cup S_{i_k}$ состоит не менее чем из k элементов для всех $k = 1, 2, ..., n$.

Очевидно, что условие C есть необходимое условие, потому что если различные представители существуют, то для любых k множеств представителями будут k различных элементов, содержащихся в этих множествах.
В качестве доказательства достаточности приведем алгоритм, который позволяет построить с.р.п. или показать, что такой системы для данного набора множеств не существует.
Пусть задано n множеств и выполнено условие C. Требуется найти для них с.р.п. или показать, что этой системы не существует, если условие C не выполняется.

Пронумеруем множества $S_1, ..., S_n$ и зафиксируем порядок, в котором они занумерованы. Выберем произвольный элемент a_1 из S_1 в качестве его представителя. Поочередно будем выбирать представителей других множеств: $a_i \in S_i, i = 1, 2, ..., n$, заботясь лишь о том, чтобы каждый из них был отличен от любого другого, выбранного в качестве представителя, элемента. Если этот процесс удастся довести до S_n , то мы получим с.р.п.

Мы можем, однако, достичь множества S_r , все элементы которого $S_r = \{b_1, b_2, ..., b_t\}$ были уже использованы как представители множеств $S_1, S_2, ..., S_{r-1}$. Это, однако, еще не означает, что с.р.п. не существует.
Тогда построим последовательность вспомогательных множеств $T_0, T_1, ...$
Зафиксируем порядок нумерации элементов множества

$$S_r = \{b_1, b_2, ..., b_t\} \subset \{a_1, a_2, ..., a_{r-1}\}.$$

Определим множество T_0 состоящим из элементов множества S_r с фиксированным выше порядком нумерации элементов:

$$T_0 = \{b_1, b_2, ..., b_t\}.$$

Будем двигаться по списку элементов множества T_0 и последовательно строить вспомогательные множества $T_1, T_2, ...$, до тех пор, пока не обнаружим элемент, не использованный в качестве представителя или не исчерпаем все множества. Обозначим символом $S(b_i)$ множество, представителем которого является элемент b_i.

Пусть теперь множество $_1$ состоит из элементов множества, представителем которого является b_1, за исключением самого элемента b_1 и всех остальных использованных в качестве представителей элементов:

$$T_1 = S(b_1) \setminus T_0.$$

Множество T_1 может быть и пустым, но если оно не пусто, то модифицируем множество T_0, приписав к списку его элементов непосредственно за $b_1, ..., b_t$ элементы множества T_1, обозначенные как $b_{t+1}, ..., b_s$:

$$T_0 = T_0 * T_1 = \{\underbrace{b_1, \ldots, b_t}_{T_0}, \underbrace{b_{t+1}, \ldots, b_s}_{T_1}\}.$$

Далее, если i-ый элемент b_i есть представитель множества $S_j = S(b_i)$, то мы построим множество T_i, состоящее из тех элементов S_j, которые еще не использованы, и запишем эти элементы после элементов, уже использованных:

$$T_i = S(b_i) \setminus T_0; T_0 = T_0 * T_i.$$

Так мы сможем поступать до тех пор, пока либо:
1) мы достигли некоторого элемента $b_i \in S_j (i > t, j < r)$, либо
2) последовательность T_0 исчерпывается элементами $b_1, ..., b_s$ как представителями множеств.

Во втором случае мы должны быть убеждены, что с.р.п. не существует. В самом деле, получена некоторая последовательность элементов $b_1, ..., b_v$, исчерпывающая множество всех различных представителей. Эти элементы являются представителями v множеств ($v < n$). По построению каждый элемент этих v множеств содержится в последовательности. Но тогда эти множества (v штук), а также множество S_r образуют $v + 1$ множество, которые содержат только v различных элементов, таким образом мы нашли множества, нарушающие условие С.

Если же имеет место случай 1) ($b_i \in S_j (i > t, j < r)$), мы на некотором этапе находим элемент $b_i = b_{i_1} (i_1 > t)$, который входит во множество S_{j_1}, представителем которого является выбранный ранее другой элемент b_{i_2}, причем $i_2 < i_1$. Если $i_2 > t$, то значит $b_{i_2} \in S_{j_2}$, а представителем множества S_{j_2} является $b_{i_3} \in S_{j_3} (i_3 < i_2)$ и так далее.

Таким образом, возникает последовательность $b_{i_1}, \ldots, b_{i_m}$, индексы которой убывают ($i_m \leq t$), причем в этой последовательности каждый ее член входит во множество, представителем которого является следующий член.

Но теперь мы можем заменить представителей: возьмем b_{i_1} в качестве представителя S_{j_1}; b_{i_2} — в качестве представителя S_{j_2} и т.д. Элемент b_{i_m} в результате такой замены освобождается для выбора в качестве представителя S_r. Итак , мы, действуя тем же путем, найдем представителя S_{r+1} и так далее. Наши построения закончатся либо выбором системы различных представителей, либо мы обнаружим систему множеств, для которой нарушается условие С.