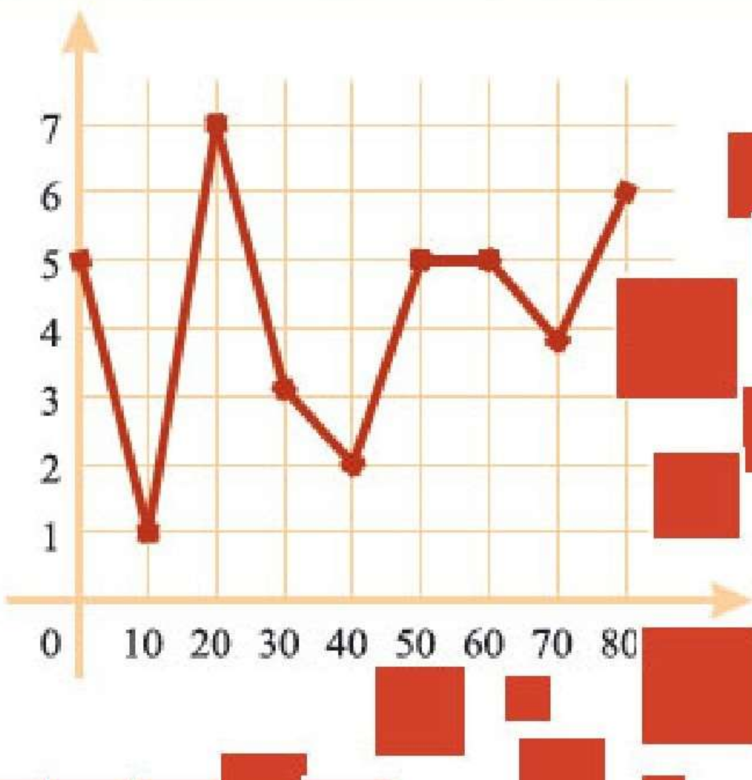
Գ.Գ. Գևորգյան
Ա.Ա. Սահակյան

ՀԱՆՐԱՀԱՇԻՎ

և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր

12

Բնագիտամաթեմատիկական հոսքի համար



$$A_m^k = \frac{m!}{(m-k)!}$$

$$A_m^k = m(m-1)\ldots(m-k+1)$$

$$P_m = m!$$

$$C_m^k = \frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot k}$$

Գ. Գ. ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ
Ա. Ա. ՍԱՀԱԿՅԱՆ

ՀԱՆՐԱՀԱՇԻՎ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր

(բնագիտամաթեմատիկական հոսք)

ԵՐԱՇԽԱՎՈՐՎԱԾ Է ՀՀ ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԳԻՏՈՒԹՅԱՆ
ՆԱԽԱՐԱՐՈՒԹՅԱՆ ԿՈՂՄԻՑ

ՎԵՐԱՀՐԱՏԱՐԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Երևան
Տիգրան Մեծ
2017

ՀՏԴ 373.167.1 : 512(075.3)
ԳՄԴ 22.14 ց 72
Գ 479

Գևորգյան Գ.Գ, Սահակյան Ա.Ա.
Գ 479 Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր: Ավագ դպրոցի 12-րդ դասարանի դասագիրք: Բնագիտամաթեմատիկական հոսքի համար/ Գ.Գ. Գևորգյան, Ա.Ա. Սահակյան; Խմբ.՝ Ա. Ոսկանյան, - Եր.: Տիգրան Մեծ, 2017. - 208էջ:

Մասնագիտական խմբագիր՝ Է. Այվազյան
Խմբագիր՝ Ա. Ոսկանյան
Համակարգչային աշխատանքները՝ Ն. Գևորգյանի
Կազմի ձևավորումը՝ Ա. Օհանջանյանի

ՀՏԴ 373.167.1:512(075.3)
ԳՄԴ 22.14 ց72

ISBN 978-99941-0-427-7

1-ին ԳԼՈՒԽ

Ինտեգրալ

§1. Ֆունկցիայի նախնական

Գիտենք, որ $s(t)$ օրենքով ուղղագիծ շարժվող մարմնի $V(t)$ արագությունը ժամանակի t պահին հավասար է $s(t)$ ֆունկցիայի ածանցյալին՝ $V(t)=s'(t)$: Այսինքն, եթե հայտնի է, որ թվային ուղղով շարժվող մարմնի կոորդինատը ժամանակի կամայական t պահին $s(t)$ է, ապա այդ մարմնի արագությունը t պահին որոշելու համար պետք է գտնել $s(t)$-ի ածանցյալը՝ $s'(t)$-ն: Սակայն հաճախ պետք է լինում լուծել հակառակ խնդիրը. իմանալով մարմնի արագությունը՝ $V(t)$-ն, գտնել շարժման օրենքը՝ այն $s(t)$ ֆունկցիան, որի ածանցյալը $V(t)$-ն է:

Այդպիսի խնդիրներ լուծելու համար ներմուծում ենք ածանցմանը հակադարձ գործողություն, որն անվանում են ինտեգրում:

Սահմանում: ***F* ֆունկցիան կոչվում է *f* ֆունկցիայի նախնական տրված միջակայքում, եթե այդ միջակայքի բոլոր *x*-երի համար**

$$F'(x)=f(x):$$

Եթե $F'(x)=f(x)$ հավասարությունը տեղի ունի f ֆունկցիայի որոշման տիրույթում, որը միջակայք է (վերջավոր կամ անվերջ), ապա կասենք, որ F ֆունկցիան f-ի նախնական է, առանց նշելու միջակայքը:

Օրինակ 1: $F(x)=ax$ ֆունկցիան $f(x)=a$ հաստատուն ֆունկցիայի նախնական է, քանի որ

$$F'(x)=(ax)'=a\cdot x'=a=f(x),\ x\in R:$$

Նկատենք, որ կամայական $C\in R$ հաստատունի դեպքում $F(x)=ax+C$ ֆունկցիան նույնպես նախնական է $f(x)=a$ ֆունկցիայի համար, քանի որ հաստատուն ֆունկցիայի ածանցյալը զրո է:

Եթե $F(x)$ ֆունկցիան $f(x)$ ֆունկցիայի նախնական է տրված միջակայքում, ապա կամայական C իրական թվի համար $F(x)+C$ ֆունկցիան նույնպես $f(x)$ ֆունկցիայի նախնական է:

Օրինակ 2: Հեշտ է տեսնել, որ կամայական $\alpha \neq -1$ թվի համար $\left(\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)' = x^{a}$ ($a<0$ դեպքում՝ $x \neq 0$): Հետևաբար՝

1) $\dfrac{x^2}{2}$ -ը x-ի նախնական է,

2) $\dfrac{x^3}{3}$ -ը x^2 -ու նախնական է,

3) $-\dfrac{1}{x^2}$ -ն $\dfrac{1}{x}$ -ի նախնական է $(-\infty;0)$ և $(0;\infty)$ միջակայքերում,

4) $-\dfrac{1}{2x^3}$ -ը $\dfrac{1}{x^2}$ -ու նախնական է $(-\infty;0)$ և $(0;\infty)$ միջակայքերում:

Նկատենք, որ $F(x)=\dfrac{1}{x}$ ֆունկցիան $f(x)=-\dfrac{1}{x^2}$ ֆունկցիայի նախնական չէ f -ի որոշման տիրույթում, քանի որ նախնականը սահմանվում է միջակայքում, իսկ F -ի (ինչպես նաև f -ի) որոշման տիրույթը $(-\infty;0)\cup(0;\infty)$ -ն է: $F(x)=\dfrac{1}{x}$ ֆունկցիան $f(x)=-\dfrac{1}{x^2}$ ֆունկցիայի նախնական է $(-\infty;0)$ և $(0;\infty)$ միջակայքերից յուրաքանչյուրում, բայց ոչ $(-\infty;0)\cup(0;\infty)$ -ում:

Օրինակ 3: Քանի որ $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$, $x\in(0,\infty)$, ուրեմն $\ln x$ ֆունկցիան $\dfrac{1}{x}$ ֆունկցիայի նախնական է $(0;\infty)$ -ում:

Օրինակ 4: $y=a^x$ ֆունկցիայի ($a>0$, $a\neq 1$) նախնական է $y=a^x\cdot\log_a e$ ֆունկցիան, քանի որ

$$(a^x \log_a e)' = \log_a e\cdot(a^x)' = \log_a e\cdot a^x\cdot\ln a = a^x:$$

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ինչպե՞ս է սահմանվում ֆունկցիայի նախնականը:
2. Գրեք $f(x)=a$ հաստատուն ֆունկցիայի որևէ երկու նախնական:
3. Ո՞ր ֆունկցիայի նախնական է $F(x)+C$ ֆունկցիան, եթե F -ը f -ի նախնական է ($C\in R$):

4. Ինչո՞ւ $F(x)=\frac{1}{x}$ ֆունկցիան $f(x)=-\frac{1}{x^2}$ ֆունկցիայի նախնական չէ f -ի որոշման տիրույթում:

5. Գրեք $f(x)=x^n$ ֆունկցիայի որևէ նախնական ($n\in \mathrm{N}$):

6. Գրեք $y=a^x$ ֆունկցիայի որևէ նախնական:

7. $F(x)=\ln x$ ֆունկցիան ո՞ր ֆունկցիայի համար է նախնական և ո՞ր միջակայքում:

Առաջադրանքներ

Ապացուցեք, որ F ֆունկցիան f ֆունկցիայի նախնական է (նշված միջակայքում) (1-3).

1. ա) $F(x)=x^4$, $f(x)=4x^3$, բ) $F(x)=2x^5$, $f(x)=10x^4$,

գ) $F(x)=\frac{1}{x^3}$, $f(x)=-\frac{3}{x^4}$, $x\in(0;\infty)$,

դ) $F(x)=-\frac{1}{6}x^{-6}$, $f(x)=x^{-7}$, $x\in(0;\infty)$,

ե) $F(x)=2\sqrt{x}$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$, $x\in(0;\infty)$,

զ) $F(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, $f(x)=-\frac{1}{3x^{4/3}}$, $x\in(0;\infty)$:

2. ա) $F(x)=-\cos x$, $f(x)=\sin x$, բ) $F(x)=\sin x$, $f(x)=\cos x$,

գ) $F(x)=\operatorname{tg} x$, $f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$, $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$,

դ) $F(x)=\operatorname{ctg} x$, $f(x)=-\frac{1}{\sin^2 x}$, $x\in(0;\pi)$,

ե) $F(x)=\sin 2x$, $f(x)=2\cos 2x$,

զ) $F(x)=\cos 3x$, $f(x)=-3\sin 3x$:

3. ա) $F(x)=\ln x$, $f(x)=\frac{1}{x}$, $x\in(0;\infty)$,

բ) $F(x)=\log_3 x$, $f(x)=\frac{\log_3 e}{x}$,

գ) $F(x)=e^x$, $f(x)=e^x$, դ) $F(x)=-e^{-x}$, $f(x)=e^{-x}$:

4. Արդյո՞ք F -ը f -ի նախնական է (նշված միջակայքում).

ա) $F(x)=3-\sin x$, $f(x)=\cos x$, բ) $F(x)=7-x^4$, $f(x)=-4x^3$,

գ) $F(x)=\cos x-5$, $f(x)=-\sin x$, դ) $F(x)=x^{-2}+3$, $f(x)=-2x^{-3}+3$, ե) $F(x)=-\operatorname{tg} x$, $\quad f(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$, $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$,

զ) $F(x)=-\operatorname{ctg} x$, $\quad f(x)=\dfrac{1}{\sin^2 x}$, $x\in(0;\pi)$:

Տրված f ֆունկցիայի համար գտեք որևէ նախնական (5-6).

5. ա) $f(x)=3$, բ) $f(x)=2x$, գ) $f(x)=3x^2$, դ) $f(x)=x^3$,

ե) $f(x)=\cos x$, զ) $f(x)=\sin x$, է) $f(x)=x^{-2}$, ը) $f(x)=\dfrac{1}{x}$:

6. ա) $f(x)=-x^{-3}$, բ) $f(x)=-\sin x$, գ) $f(x)=x+2$, դ) $f(x)=\cos x+1$,

ե) $f(x)=e^x$, զ) $f(x)=2e^{2x}$, է) $f(x)=e^{-2x}$, ը) $f(x)=2^x$:

*** 7.** Գտնել $y=\dfrac{1}{x}$ ֆունկցիայի նախնական $(-\infty;0)$ միջակայքում:

➢8. Ապացուցել, որ երկու ֆունկցիաների նախնականների գումարն այդ ֆունկցիաների գումարի նախնական է:

➢9. Դիցուք, F ֆունկցիան f -ի նախնական է: Գտնել հետևյալ ֆունկցիայի որևէ նախնական.

ա) $y=f(x+5)$, բ) $y=f(2x)$, գ) $y=0{,}3f(x)$, դ) $y=3f(4x-10)$:

10. Տրված են f, g և h ֆունկցիաները: Գտեք այն ֆունկցիան, որը մյուս երկուսից մեկի ածանցյալն է, իսկ մյուսի՝ նախնական.

ա) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$, $\quad g(x)=-\dfrac{1}{x}$, $\quad h(x)=-\dfrac{2}{x^3}$,

բ) $f(x)=\dfrac{x^2}{2}-\cos x$, $\quad g(x)=1+\cos x$, $\quad h(x)=x+\sin x$,

գ) $f(x)=1$, $\quad g(x)=x+2$, $\quad h(x)=\dfrac{x^2}{2}+2x$,

դ) $f(x)=x^2+\ln x+5$, $\quad g(x)=2-\dfrac{1}{x^2}$, $\quad h(x)=2x+\dfrac{1}{x}$:

11. Արդյո՞ք F -ը f -ի նախնական է (նշված միջակայքում).

ա) $F(x)=2x+\cos\dfrac{x}{2}$, $\quad f(x)=2-\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{x}{2}$,

բ) $F(x)=\sqrt{4-x^2}$, $\quad f(x)=-\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$, $x\in(-2;2)$,

գ) $F(x)=\dfrac{1}{x^2}$, $\quad f(x)=14-\dfrac{1}{x^2}$, $x\in(0;\infty)$,

դ) $F(x)=4x\sqrt{x}$, $\quad f(x)=6\sqrt{x}$, $x\in(0;\infty)$,

ե) $F(x)=\ln(2x)+e$, $\quad f(x)=\dfrac{1}{x}$, $x\in(0;\infty)$,

զ) $F(x)=2^x\cdot\log_2 e$, $\quad f(x)=2^x+e$:

12. Լուծեք $f'(x)=0$ հավասարումը, եթե

ա) $f(x)=x^4-2x^2+1$, բ) $f(x)=1{,}5\sin 2x-5\sin x-x$,

գ) $f(x)=-\frac{x^5}{5}+\frac{10x^3}{3}-9x$, դ) $f(x)=x+\cos 2x$:

§2. Անորոշ ինտեգրալ

Նախորդ պարագրաֆում տեսանք, որ եթե F-ը տրված X միջակայքում f-ի նախնական է, ապա f-ի նախնական է նաև $F(x)+C$ ֆունկցիան, որտեղ C-ն կամայական իրական թիվ է: Մյուս կողմից, եթե F_1-ը և F_2-ը f-ի նախնականներ են, ապա նրանց տարբերության՝ $F=F_1-F_2$ ֆունկցիայի ածանցյալը նույնաբար զրո է՝

$$F'(x)=F_1'(x)-F_2'(x)=f(x)-f(x)=0,\ x\in X:$$

Որևէ միջակայքում ֆունկցիայի ածանցյալի զրո լինելուց հետևում է, որ ֆունկցիան այդ միջակայքում հաստատուն է (այս փաստը կընդունենք առանց ապացույցի): Հետևաբար՝ F-ը հաստատուն է՝ $F(x)=C$, և $F_1(x)-F_2(x)=C$, $x\in X$: Այսպիսով.

Տրված միջակայքում ֆունկցիայի բոլոր նախնականներն իրարից տարբերվում են հաստատուններով:

Սա նշանակում է, որ տրված ֆունկցիայի բոլոր նախնականները գտնելու համար բավական է գտնել դրանցից մեկը և դրան գումարել հաստատուններ:

Սահմանում. ***Տրված միջակայքում $f(x)$ ֆունկցիայի նախնականների համախմբությունն անվանում են $f(x)$ ֆունկցիայի անորոշ ինտեգրալ և նշանակում $\int f(x)dx$*** (կարդացվում է՝ ինտեգրալ էֆ իքս դե իքս), ***այսինքն՝***

$$\int f(x)dx=F(x)+C,\ C\in \mathbf{R},$$

որտեղ F-ը f-ի որևէ նախնական է:

Անորոշ ինտեգրալի հետևյալ հատկություններն անմիջապես հետևում են ածանցման կանոններից.

ա) $\int k\cdot f(x)dx = k\cdot\int f(x)dx$, ***որտեղ*** k ***-ն որևէ հաստատուն է:***

բ) $\int (f_1(x)+f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$ **:**

գ) ***Եթե*** $\int f(x)dx = F(x)+C$ ***–*** $a,b\in\mathbf{R}$, $a\neq 0$, ***ապա***

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C:$$

Մասնավորապես, վերջին հավասարությունը հետևում է բարդ ֆունկցիայի ածանցման կանոնից.

$$\left(\frac{1}{a}F(ax+b)\right)' = \frac{1}{a}F'(ax+b)\cdot a = f(ax+b):$$

Մինչ այս հատկությունների կիրառմամբ անորոշ ինտեգրալներ գտնելը, գրենք որոշ ֆունկցիաների անորոշ ինտեգրալները՝ օգտվելով նախորդ պարագրաֆում գտած նախնականներից (ստորև C -ն կամայական հաստատուն է).

1) $\int kdx = kx+C$, որտեղ k -ն որևէ հաստատուն է,

2) $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$, որտեղ α -ն որևէ դրական հաստատուն է,

3) $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$, $x\in(0,\infty)$, որտեղ α -ն -1 -ից տարբեր բացասական հաստատուն է,

3′) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}+C$, $x\in(0,\infty)$,

4) $\int \frac{1}{x}dx = \ln x + C$, $x\in(0,\infty)$,

5) $\int \cos xdx = \sin x + C$,

6) $\int \sin xdx = -\cos x + C$,

7) $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \mathrm{tg}\, x + C$, $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$,

8) $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\mathrm{ctg} x + C$, $x\in(0;\pi)$,

9) $\int a^x dx = a^x\cdot\log_a e + C$,

9′) $\int e^{x}dx = e^{x} + C$:

Օրինակ 1: Կիրառելով ա), բ) հատկությունները և օգտվելով 2), 5) բանաձևերից՝ ստանում ենք՝

$$\int\left(x^{3}+2\cos x\right)dx = \int x^{3}dx + 2\int \cos x dx = \frac{x^{4}}{4} + 2\sin x + C :$$

Նկատենք, որ 2), 5) բանաձևերից յուրաքանչյուրում առկա C հաստատունների գումարի փոխարեն գրում ենք C, քանի որ կամայական հաստատունների գումարը դարձյալ կամայական հաստատուն է:

Օրինակ 2: Համաձայն 2), 5), 9′) բանաձևերի և գ) հատկության՝

ա) $\int (2x+7)^{5}dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}(2x+7)^{6} + C = \frac{1}{12}(2x+7)^{6} + C$,

բ) $\int \cos(5x-1)dx = \frac{1}{5}\sin(5x-1) + C$,

գ) $\int e^{-x}dx = \frac{1}{-1}e^{-x} + C = -e^{-x} + C$:

Օրինակ 3: Գտնենք $\int \cos^{2}3xdx$ անորոշ ինտեգրալը:

Քանի որ $\cos^{2}3x = \frac{1+\cos 6x}{2}$, ապա կստանանք

$$\int \cos^{2}3xdx = \int \frac{1}{2}dx + \frac{1}{2}\cdot\int \cos 6xdx = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\cdot\sin 6x + C = \frac{x}{2} + \frac{\sin 6x}{12} + C :$$

Օրինակ 4: Գտնենք $(0;\infty)$ միջակայքում $f(x) = \frac{1}{x^{2}}$ ֆունկցիայի այն նախնականը, որի գրաֆիկն անցնում է $(2;3)$ կետով: Համաձայն 2)-ի՝

$$\int \frac{1}{x^{2}}dx = -\frac{1}{x} + C,\ x \in (0;\infty) :$$

Այժմ C հաստատունն ընտրենք այնպես, որ $y = -\frac{1}{x} + C$ ֆունկցիայի գրաֆիկն անցնի $(2;3)$ կետով՝ $-\frac{1}{2} + C = 3$, որտեղից՝ $C = 3{,}5$:

Պատասխան՝ $F(x) = 3{,}5 - \frac{1}{x}$:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Սահմանեք ֆունկցիայի անորոշ ինտեգրալը:
2. Ձևակերպեք և ապացուցեք անորոշ ինտեգրալների երեք հատկությունները:
3. Ինքնուրույն գրեք 1)-9) անորոշ ինտեգրալները:

Առաջադրանքներ

Գտնել անորոշ ինտեգրալը (13-18).

13. ա) $\int dx$, բ) $\int 9dx$, գ) $\int x^{12}dx$, դ) $\int \sqrt{x}dx$,

ե) $\int \frac{2}{x}dx,\ x>0$, զ) $\int 5^{x+1}dx$, է) $\int 2\cos x dx$, ը) $\int 3\sin x dx$:

14. ա) $\int (2-x^3)dx$, բ) $\int (-3+2x)dx$, գ) $\int (4x^5-9x^3)dx$,

դ) $\int \left(\frac{3}{x^2}-2\right)dx,\ x>0$, ե) $\int (\sqrt{x}-\sin x)dx$, զ) $\int (x^{4/5}+\cos x)dx$:

15. ա) $\int \left(2-2x^{1/3}+\frac{6}{x^3}\right)dx$, բ) $\int \left(\frac{2}{x^{2/5}}+\cos x\right)dx$, գ) $\int \left(\frac{1}{x^2}-\sin x\right)dx$,

դ) $\int (5^{x+1}-\sin x)dx$, ե) $\int \left(\frac{1}{x}+e^x\right)dx,\ x>0$, զ) $\int \left(\frac{2}{x}-3^x\right)dx,\ x>0$:

➢16. ա) $\int (4-5x)^7 dx$, բ) $\int \frac{2}{(3x-1)^2}dx,\ x>\frac{1}{3}$, գ) $\int \frac{3}{(4-15x)^4}dx,\ x>\frac{4}{15}$,

դ) $\int \sin(7x-9)dx$, ե) $\int \cos\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{6}\right)dx$, զ) $\int \frac{2}{\cos^2(2x-3)}dx$:

➢17. ա) $\int e^{3-2x}dx$, բ) $\int 2^{-10x+9}dx$, գ) $\int (e^{3x}+2{,}3^{1+x})dx$,

դ) $\int \frac{1}{x+2}dx,\ x>-2$, ե) $\int \frac{2}{5x-8}dx,\ x>1{,}6$, զ) $\int \left(\frac{1}{x}-\frac{2}{x+5}\right)dx,\ x>0$:

➢18. ա) $\int (\cos 3x+2^x)dx$, բ) $\int (e^{-2x+1}-\sin x)dx$, գ) $\int \sin 2x\sin 4x dx$,

դ) $\int \cos x\cos 3x dx$, ե) $\int (3^{0,5x}-9^{0,2x})dx$, զ) $\int \left(e^{0,25x}+\frac{1}{\cos^2 3x}\right)dx$:

➢19. Ապացուցել, որ եթե f ֆունկցիան X միջակայքում ունի նախնական և $x_0\in X$, ապա կամայական $y_0\in R$ թվի համար գոյություն ունի f-ի նախնական, որի գրաֆիկն անցնում է $(x_0;y_0)$ կետով:

20. Գտնել տրված f ֆունկցիայի այն նախնականը, որի գրաֆիկն անցնում է M կետով.

ա) $f(x)=4x+\frac{1}{x^2}$, $M(-1;4)$,

բ) $f(x)=x^3+2$, $M(2;15)$,

գ) $f(x)=1-2x$, $M(3;2)$,

դ) $f(x)=\frac{1}{x^3}-10x^4+3$, $M(1;5)$,

ե) $f(x)=(2x+1)$, $M(0;0)$,

զ) $f(x)=3x^2-2x$, $M(1;4)$,

է) $f(x)=x+2$, $M(1;3)$,

ը) $f(x)=-x^2+3x$, $M(2;-1)$:

21. Տրված f ֆունկցիայի F_1 նախնականն անցնում է M կետով, իսկ F_2 նախնականը՝ N կետով: Գտնել (F_1-F_2)-ը.

ա) $f(x)=3x^2-2x+4$, $M(-1;1)$, $N(0;3)$,

բ) $f(x)=4x-6x^2+1$, $M(0;2)$, $N(1;3)$,

գ) $f(x)=4x-x^3$, $M(2;1)$, $(-2;3)$,

դ) $f(x)=(2x+1)^2$, $M(-3;-1)$, $N\left(1;6\frac{1}{3}\right)$:

22. Ստուգեք, որ F-ը f-ի նախնական է և գրեք f-ի անորոշ ինտեգրալը.

ա) $F(x)=\sin x-x\cos x$, $f(x)=x\sin x$,

բ) $F(x)=\cos x+x\sin x$, $f(x)=x\cos x$,

➢գ) $F(x)=\sqrt{x^2+1}$, $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$,

➢դ) $F(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $f(x)=-\frac{x}{\left(1+x^2\right)^{1,5}}$,

ե) $F(x)=xe^x$, $f(x)=e^x(1+x)$,

զ) $F(x)=e^x(x-1)$, $f(x)=xe^x$:

23. Գտեք տրված f ֆունկցիայի այն նախնականը, որի գրաֆիկն անցնում է M կետով (անհրաժեշտության դեպքում օգտվեք նախորդ առաջադրանքից).

ա) $f(x)=2\cos x$, $M\left(-\frac{\pi}{2};1\right)$,

բ) $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$, $M\left(\frac{2\pi}{3};-1\right)$,

գ) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $M(1;1)$,

դ) $f(x)=xe^x$, $M(0;0)$:

*** 24.** Դիցուք, $f(x)$, $x\in \mathrm{R}$, ֆունկցիան ունի նախնական: Ապացուցեք, որ՝

ա) եթե f-ը կենտ է, ապա նրա բոլոր նախնականները զույգ են,

բ) եթե f-ը զույգ է, ապա այն ունի մեկ կենտ նախնական:

25. Գտնել ուղղագիծ շարժվող մարմնի $s(t)$ կոորդինատը ժամանակի $t=2$ պահին, եթե հայտնի են ժամանակի կամայական t պահին նրա $V(t)$ արագությունը և $t=0$ պահին նրա s_0 կոորդինատը.

ա) $V(t)=5,\quad s_0=3$, բ) $V(t)=\sqrt{t},\quad s_0=0$, գ) $V(t)=\cos \pi t,\quad s_0=4$ ։

Կրկնության համար

***26.** Օգտվելով ածանցյալի սահմանումից՝ ապացուցեք, որ ֆունկցիան ածանցելի է 0 կետում և գտեք $f'(0)$ -ն։

ա) $f(x)=x\cdot|x|$, բ) $f(x)=\begin{cases}x^2, \text{ եթե } x\ge 0\\ 0, \text{ եթե } x<0\end{cases}$, գ) $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, \text{ եթե } x\ne 0\\ 0, \text{ եթե } x=0\end{cases}$ ։

*§3. Մասերով ինտեգրման և փոփոխականի փոխարինման բանաձևերը

Այս պարագրաֆում կծանոթանանք անորոշ ինտեգրալ գտնելու երկու հնարքի հետ։

Մասերով ինտեգրում։ Համաձայն արտադրյալի ածանցման կանոնի, եթե u և v ֆունկցիաները X միջակայքում ածանցելի են, ապա $u\cdot v$ ֆունկցիան այդ միջակայքում նույնպես ածանցելի է, և

$$(u(x)\cdot v(x))' = u(x)'\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)\text{ ։}$$

Այս բանաձևի երկու կողմերն ինտեգրելով՝ ստանում ենք

$$\int (u(x)\cdot v(x))'\,dx = \int u'(x)\cdot v(x)dx + \int u(x)\cdot v'(x)dx$$

բանաձևը։ Հաշվի առնելով, որ $u\cdot v$ ֆունկցիան $(u\cdot v)'$ -ի նախնական է, այստեղից ստանում ենք ***մասերով ինտեգրման բանաձևը.***

$$\int u(x)\cdot v'(x)dx = u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)\cdot v(x)dx\text{ ։}$$

Այս բանաձևը կիրառում են այն դեպքում, երբ $u'(x)\cdot v(x)$ ֆունկցայի նախնական գտնելն ավելի հեշտ է, քան $u(x)\cdot v'(x)$ -ի նախնական գտնելը։

Օրինակ 1։ Հաշվենք անորոշ ինտեգրալները՝ օգտվելով մասերով ինտեգրման բանաձևից.

ա) $\int xe^x dx = \int x(e^x)' dx = xe^x - \int x' e^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C$,

բ) $\int \ln x dx = \int \ln x \cdot x' dx = x\ln x - \int (\ln x)' \cdot x dx = x\ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x dx = x\ln x - x + C$,

գ) $\int x\cos x dx = \int x(\sin x)' dx = x\sin x - \int x' \cdot \sin x dx = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C$:

Փոփոխականի փոխարինում: Բարդ ֆունկցիայի ածանցման կանոնից հետևում է, որ եթե F-ը f-ի նախնական է, և g-ն ածանցելի է, ապա

$$(F \circ g)'(x) = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x))g'(x),$$

այսինքն՝ $F(g(x))$ համադրույթը $f(g(x))g'(x)$ ֆունկցիայի նախնական է: Հետևաբար,

Եթե $\boldsymbol{\int f(x)dx = F(x) + C}$, ***ապա*** $\boldsymbol{\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C}$ **:**

Այս բանաձևը, որտեղ $g(x)$ ֆունկցիան հանդես է գալիս որպես f ֆունկցիայի նոր փոփոխական, անվանում են ***փոփոխականի փոխարինման բանաձև***:

Օրինակ 2: Հաշվենք անորոշ ինտեգրալները, օգտվելով փոփոխականի փոխարինման բանաձևից.

ա) $\int \frac{dx}{x\ln^2 x} = \int \frac{1}{\ln^2 x}(\ln x)' dx = -\frac{1}{\ln x} + C$,

բ) $\int \sin^3 x \cos x dx = \int (\sin x)^3 (\sin x)' dx = \frac{1}{4}\sin^4 x + C$,

գ) $\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x} dx = -\ln(\cos x) + C$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$,

դ) $\int \frac{x}{(x^2+1)^4} dx = \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+1)'}{(x^2+1)^4} dx = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \frac{1}{(x^2+1)^3} + C$:

Անորոշ ինտեգրալ գտնելու համար կարելի է կիրառել նաև այլ հնարքներ:

Օրինակ 3: Գտնենք $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$ անորոշ ինտեգրալը $(-1;\infty)$ միջակայքում: $\frac{1}{(x+1)(x+2)}$ կոտորակը վերլուծենք պարզ կոտորակների, այսինքն՝ $x+1$ և $x+2$ հայտարարով կոտորակների գումարի: Դժվար չէ ստուգել, որ

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}:$$

Հետևաբար՝

$$\int\frac{dx}{(x+1)(x+2)}=\int\frac{dx}{x+1}-\int\frac{dx}{x+2}=\ln(x+1)-\ln(x+2)+C=\ln\frac{x+1}{x+2}+C:$$

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ինտեգրալատակ ֆունկցիան ի՞նչ տեսքով պետք է ներկայացնել մասերով ինտեգրման բանաձևը կիրառելու համար:
2. Գրեք մասերով ինտեգրման բանաձևը:
3. Ինտեգրալատակ ֆունկցիան ի՞նչ տեսքով պետք է ներկայացնել փոփոխականի փոխարինման բանաձևը կիրառելու համար:
4. Գրեք փոփոխականի փոխարինման բանաձևը:

Առաջադրանքներ

27. Հաջորդաբար գտնել տրված անորոշ ինտեգրալները.

ա) $\int xe^x dx$, բ) $\int x^2e^x dx$, գ) $\int x^3e^x dx$, դ) $\int x^4e^x dx$:

*** 28.** Մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով ապացուցեք, որ կամայական բնական n-ի դեպքում

$$\int x^n e^x dx=e^x\left(x^n-n\cdot x^{n-1}+\cdots+(-1)^k\cdot\frac{n!}{k!}\cdot x^k+\cdots+(-1)^n\cdot n!\right)+C:$$

29. Հաջորդաբար գտնել տրված անորոշ ինտեգրալները.

ա) $\int \ln x dx$, բ) $\int \ln^2 x dx$, գ) $\int \ln^3 x dx$, դ) $\int \ln^4 x dx$:

*** 30.** Մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով ապացուցեք, որ կամայական բնական n-ի դեպքում

$$\int \ln^n x dx=x\cdot\left(\ln^n x-n\cdot\ln^{n-1}x+\cdots+(-1)^k\cdot\frac{n!}{k!}\cdot\ln^k x+\cdots+(-1)^n\cdot n!\right)+C:$$

31. Կիրառելով մասերով ինտեգրման բանաձևը՝ գտնել անորոշ ինտեգրալը.

ա) $\int x\ln x dx$, բ) $\int x^2\ln x dx$, գ) $\int \sqrt{x}\ln x dx$, դ) $\int x^{\frac{5}{2}}\ln x dx$,

ե) $\int x^2\cos x dx$, զ) $\int xe^{-x}dx$, է) $\int x\sin x dx$, ը) $\int x^2\sin x dx$:

32. Կիրառելով փոփոխականի փոխարինման բանաձևը՝ գտնել անորոշ ինտեգրալը.

ա) $\int\frac{dx}{x\ln x}$, բ) $\int\frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$, գ) $\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$, դ) $\int e^x\sin e^x dx$, ե) $\int xe^{x^2}dx$, գ) $\int x^2e^{x^3}dx$, է) $\int \frac{e^{2x}dx}{e^{2x}+1}$, ը) $\int \sin x\cdot e^{\cos x}dx$:

33. Գտեք անորոշ ինտեգրալը.

ա) $\int \frac{dx}{x^2+5x+6}$, $x>-2$, բ) $\int \frac{dx}{(x-2)(x-1)}$, $x>2$,

գ) $\int \frac{dx}{x^2-4}$, $x>2$, դ) $\int \frac{dx}{x^2+7x+12}$, $x>-3$:

Կրկնության համար

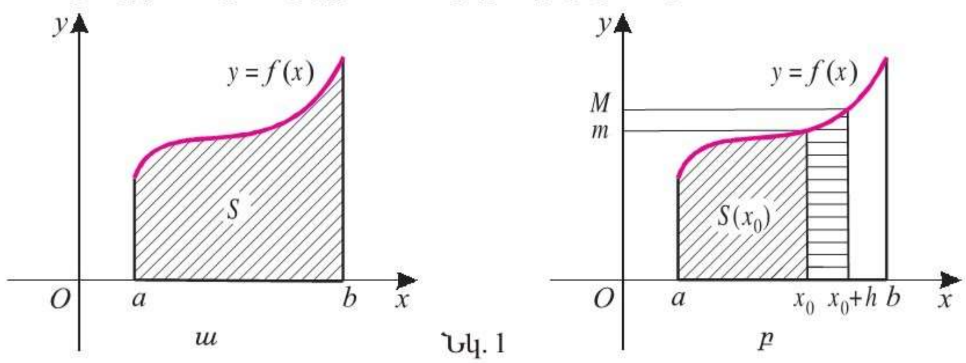
34. Գտեք ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները տրված միջակայքում.

ա) $f(x)=18x^2+8x^3-3x^4$, $[1;3]$, բ) $f(x)=\frac{2}{x}+x^2$, $[0,5;1]$,

գ) $f(x)=2\cos x-\cos 2x$, $[0;\pi]$, դ) $f(x)=\sin x-x$, $[-\pi;\pi]$:

§4. Ինտեգրալ, Նյուտոն-Լայբնիցի բանաձև

Դիտարկենք հետևյալ խնդիրը. տրված է $y=f(x)$ անընդհատ, դրական ֆունկցիան: Պետք է գտնել նրա գրաֆիկով և $x=a$, $x=b$, $y=0$ ուղիղներով սահմանափակված պատկերի S մակերեսը (նկ. 1ա):



Նկ. 1

Նման պատկերն անվանում են ***կորագիծ սեղան***: S-ը գտնելու համար ներմուծենք $S(x)$, $x\in[a;b]$, ֆունկցիան, որի արժեքը x_0 կետում հավասար է աբսցիսների առանցքով, $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկով և $x=a$, $x=x_0$ ուղիղներով սահմանափակված պատկերի մակերեսին (1բ նկարում թեք նշագծված պատկերի մակերեսին):

Ակնհայտ է, որ

$$S(a)=0,\ S(b)=S: \qquad (1)$$

Պարզ է, որ $S(x_0+h)-S(x_0)$ տարբերությունը հորիզոնական նշագծված պատկերի մակերեսն է: Դժվար չէ համոզվել, որ եթե $f(x)$-ի փոքրագույն և մեծագույն արժեքները $[x_0;x_0+h]$ հատվածում նշանակենք համապատասխանաբար m-ով և M-ով, ապա հորիզոնական նշագծված պատկերի մակերեսը փոքր չի լինի mh-ից և չի գերազանցի Mh-ը: Հետևաբար`

$$m \le \frac{S(x_0+h)-S(x_0)}{h} \le M:$$

Այստեղից, հաշվի առնելով f-ի անընդհատությունը, կարող ենք եզրակացնել, որ h-ն անվերջ փոքրացնելիս m-ն ու M-ը, և հետևաբար նրանց միջև գտնվող

$$\frac{S(x_0+h)-S(x_0)}{h}$$

հարաբերությունը, ձգտում են $f(x_0)$-ին`

$$\lim_{h\to 0}\frac{S(x_0+h)-S(x_0)}{h} = f(x_0):$$

Այսինքն, $S(x)$ ֆունկցիան $f(x)$-ի նախնական է`

$$S'(x)=f(x),\ x\in[a;b]: \qquad (2)$$

Ենթադրենք, գտել ենք $f(x)$-ի որևէ $F(x)$ նախնական: Քանի որ $f(x)$-ի նախնականներն իրարից տարբերվում են հաստատուններով, ապա կունենանք`

$$F(x)-S(x)=C,\ x\in[a;b],$$

որտեղ $C\in R$: Վերջին հավասարության մեջ տեղադրելով $x=a$, $x=b$ և հաշվի առնելով (1)-ը, ստանում ենք`

$$F(a)=C,\quad F(b)-S=C,$$

որտեղից`

$$S=F(b)-F(a): \qquad (3)$$

Կորագիծ սեղանի մակերեսը գտնելու համար բավական է գտնել $f(x)$-ի որևէ $F(x)$ նախնական և (3) բանաձևով հաշվել մակերեսը:

Նկատենք, որ (2) բանաձևից հետևում է, որ $f(x)$ դրական անընդհատ ֆունկցիան ունի նախնական: Իրականում ճիշտ է հետևյալ պնդումը.

Տրված միջակայքում կամայական անընդհատ ֆունկցիա ունի նախնական այդ միջակայքում:

Սահմանում: ***Եթե $F(x)$ ֆունկցիան $f(x)$ անընդհատ ֆունկցիայի նախնական է, ապա $F(b)-F(a)$ տարբերությունն անվանում են $f(x)$ ֆունկցիայի (որոշյալ) ինտեգրալ $[a;b]$ հատվածով և նշանակում*** $\int_a^b f(x)dx$ (կարդացվում է` ինտեգրալ a-ից b էֆ իքս դե իքս):

Այսպիսով,

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),\ \textit{որտեղ}\ F'(x) = f(x):}$$

Այս բանաձևն անվանում են ***Նյուտոն-Լայբնիցի բանաձև***: $F(b)-F(a)$ տարբերությունն ընդունված է նշանակել $F(x)\big|_a^b$: Այս նշանակումով Նյուտոն-Լայբնիցի բանաձևը ստանում է հետևյալ տեսքը.

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\big|_a^b,\ \text{որտեղ}\ F'(x) = f(x):$$

Նկատենք, որ ինտեգրալի արժեքը կախված չէ նախնականի ընտրությունից: Իրոք, եթե $F(x)$ նախնականի փոխարեն վերցնեինք մեկ ուրիշ՝ $F_1(x)$ նախնական, ապա ինչ-որ մի C հաստատունի համար $F_1(x) = F(x) + C$: Հետևաբար՝

$$F_1(x)\big|_a^b = (F(b)+C) - (F(a)+C) = F(b) - F(a) = F(x)\big|_a^b:$$

Նկատենք նաև, որ $f(x)$ ֆունկցիայի անորոշ ինտեգրալը միմյանցից հաստատունով տարբերվող ֆունկցիաների համախմբություն է, ընդ որում՝ այդ ֆունկցիաներից յուրաքանչյուրի ածանցյալը $f(x)$-ն է: Իսկ $f(x)$ ֆունկցիայի ինտեգրալն $[a;b]$ հատվածով թիվ է, ընդ որում՝ ոչ բացասական f-ի դեպքում այդ թիվը $y = f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկով և $x = a$, $x = b$, $y = 0$ ուղիղներով սահմանափակված կորագիծ սեղանի մակերեսն է.

$$\boxed{S = \int_a^b f(x)dx\ :}$$

Օրինակ: Գտնենք աբսցիսների առանցքով, $y = x^2$ պարաբոլով և $x = 1$ ուղղով սահմանափակված պատկերի մակերեսը:

Դժվար չէ նկատել, որ $\frac{x^3}{3}$-ը x^2 ֆունկցիայի նախնական է: Հետևաբար՝

$$S = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\bigg|_{x=0}^{1} = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}:$$

Պատասխան՝ $\frac{1}{3}$:

Ինքնուրույն ապացուցեք ինտեգրալի հետևյալ հատկությունները.

ա) $\int_a^b k\cdot f(x)dx = k\cdot\int_a^b f(x)dx$, $k\in\mathbf{R}$,

բ) $\int_a^b (f_1(x)+f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx$ ։

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ո՞ր պատկերն է կոչվում կորագիծ սեղան։
2. Ապացուցեք (3) հավասարությունը։
3. Ինչպե՞ս են գտնում $f(x)$ ֆունկցիայով որոշվող կորագիծ սեղանի մակերեսը։
4. Սահմանեք $\int_a^b f(x)dx$-ը։
5. Ո՞րն է Նյուտոն-Լայբնիցի բանաձևը։
6. Ի՞նչ է անորոշ ինտեգրալը և ի՞նչ է $[a;b]$ հատվածով ինտեգրալը։

Առաջադրանքներ

35. Ապացուցեք ա) և բ) հատկությունները։

36. Հաշվել ինտեգրալը.

ա) $\int_{-1}^{2} x^4 dx$, բ) $\int_0^{\pi/2} \cos x dx$, գ) $\int_1^3 x^3 dx$, դ) $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x}$,

ե) $\int_1^2 \frac{dx}{(2x+1)^2}$, զ) $\int_0^{\pi} 3\cos\frac{x}{2}dx$, է) $\int_1^{10} \frac{dx}{x^2}$, ը) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin 2x dx$ ։

37. Ապացուցել հավասարությունը.

ա) $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x} = \int_0^1 dx$, բ) $\int_0^{\pi/3} \sin x dx = \int_{1/16}^{1/4} \frac{dx}{\sqrt{x}}$,

գ) $\int_0^{\pi/2} \cos x dx = \int_0^{\sqrt[3]{3}} x^2 dx$, դ) $\int_0^1 (2x+1)dx = \int_0^2 (x^3-1)dx$ ։

Գտեք տրված գծերով սահմանափակված պատկերի մակերեսը (38-41).

38. ա) $y=x^2$, $y=0$, $x=3$, բ) $y=\cos x$, $y=0$, $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$,

գ) $y=\sin x$, $y=0$, $x=0$, $x=\pi$, դ) $y=\frac{1}{x^2}$, $y=0$, $x=1$, $x=2$, ե) $y = x^3 + 1$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$, զ) $y = 1 + 2\sin x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$,

է) $y = 4 - x^2$, $y = 0$, ը) $y = 1 + \frac{\cos x}{2}$, $y = 0$, $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$:

39. ա) $y = (x+2)^2$, $y = 0$, $x = 0$, բ) $y = \frac{1}{(x+1)^2} + 1$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$,

գ) $y = 2x - x^2$, $y = 0$, դ) $y = -(x-1)^3$, $y = 0$, $x = 0$:

40. ա) $y = 3\sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$, $y = 0$, $x = -\frac{3\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{4}$,

բ) $y = 2\cos 2x$, $y = 0$, $x = -\frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{4}$,

գ) $y = \sin x - \frac{1}{2}$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{5\pi}{6}$,

դ) $y = 1 - \cos x$, $y = 0$, $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$:

41. ա) $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$, բ) $y = 2^x$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 2$,

գ) $y = \frac{1}{2x}$, $y = 0$, $x = \frac{1}{4}$, $x = 2$, դ) $y = \frac{4}{x} + 2$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 6$:

➢**42.** Դիցուք, f ֆունկցիան անընդհատ է $[a,c]$ միջակայքում, և $a < b < c$: Ապացուցել, որ

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx:$$

➢**43.** Օգտվելով նախորդ առաջադրանքից` հաշվել ինտեգրալը.

ա) $\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| dx$, բ) $\int_0^{\pi} |\cos x| dx$, գ) $\int_0^2 |x^2 - 1| dx$, դ) $\int_1^3 |x^2 - 2x| dx$:

➢**44.** Ապացուցեք, որ $\sin nx$, $\cos nx$, $n \in \mathbf{N}$ ֆունկցիաներից յուրաքանչյուրի քառակուսու ինտեգրալը $[-\pi;\pi]$ հատվածով հավասար է π, իսկ կամայական երկուսի արտադրյալի ինտեգրալը զրո է:

* **45.** Ապացուցեք, որ եթե $f(x)$, $x \in [-a;a]$ զույգ ֆունկցիան անընդհատ է, ապա

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx:$$

* **46.** Ապացուցեք, որ եթե $f(x)$, $x \in [-a;a]$ կենտ ֆունկցիան անընդհատ է, ապա

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0:$$

*** 47.** Ապացուցեք, որ եթե $f(x)$, $x\in[a;b]$, ֆունկցիան անընդհատ է, ապա կամայական $c\neq 0$ իրական թվի համար.

ա) $\int_a^b f(x)dx=\int_{a-c}^{b-c} f(x+c)dx$, բ) $\int_a^b f(x)dx=c\int_{a/c}^{b/c} f(cx)dx$:

*** 48.** Ապացուցել, որ եթե $f(x)$, $x\in \mathrm{R}$, ֆունկցիան T - պարբերական է և անընդհատ է, ապա կամայական a իրական թվի համար

$$\int_a^{a+T} f(x)dx=\int_0^T f(x)dx:$$

Կրկնության համար

49. Ավանդատուն յուրաքանչյուր տարվա սկզբին բանկ է ներդնում մեկ միլիոն դրամ: Որքա՞ն գումար կլինի նրա հաշվին 5-րդ տարվա վերջին, եթե բանկի տարեկան տոկոսադրույքը 10% է (յուրաքանչյուր տարվա վերջին ավանդատուի հաշվին ավելանում է տարեսկզբին եղած գումարի 10 տոկոսը):

§5. Նախնականի և ինտեգրալի կիրառություններ

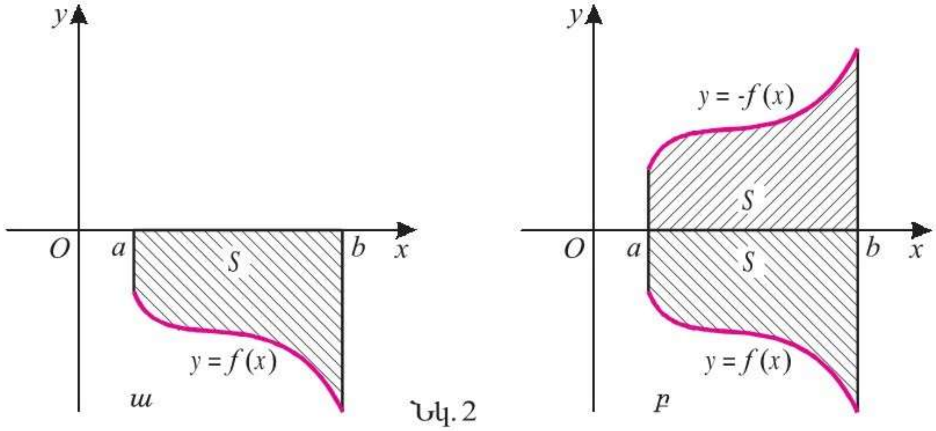
1. Մակերեսների հաշվում:

Նախորդ պարագրաֆում տեսանք, որ $f(x)$, $x\in[a;b]$, դրական ֆունկցիայով որոշվող կորագիծ սեղանի մակերեսը կարող ենք հաշվել

$$S=\int_a^b f(x)dx$$

բանաձևով:

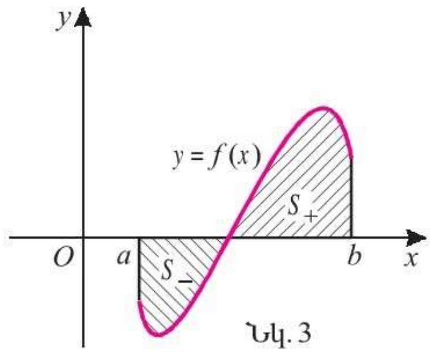
Հաշվենք $y=f(x)$ անընդհատ, բացասական ֆունկցիայի գրաֆիկով, աբսցիսների առանցքով և $x=a$, $x=b$, ուղիղներով սահմանափակված պատկերի S մակերեսը (նկ. 2ա): Նման պատկերը նույնպես անվանում են կորագիծ սեղան: Պարզ է, որ այդ պատկերի մակերեսը հավասար է աբսցիսների առանցքով, $y=-f(x)$ գրաֆիկով և $x=a$, $x=b$ ուղիղներով սահմանափակված պատկերի մակերեսին, քանի որ այդ պատկերները համաչափ են աբսցիսների առանցքի նկատմամբ (նկ. 2բ): Հետևաբար՝



Նկ. 2

$$S=\int_a^b(-f(x))dx=-\int_a^b f(x)dx\ ։ \qquad (1)$$

Եթե $y=f(x)$ անընդհատ ֆունկցիան $[a;b]$ միջակայքում ընդունում է և՛ դրական, և՛ բացասական արժեքներ, ապա նրա ինտեգրալն այդ միջակայքով կլինի աբսցիսների առանցքից վեր ընկած կորագիծ սեղանի S_+ մակերեսի և աբսցիսների առանցքից վար ընկած կորագիծ սեղանի S_- մակերեսի տարբերությունը (նկ. 3).



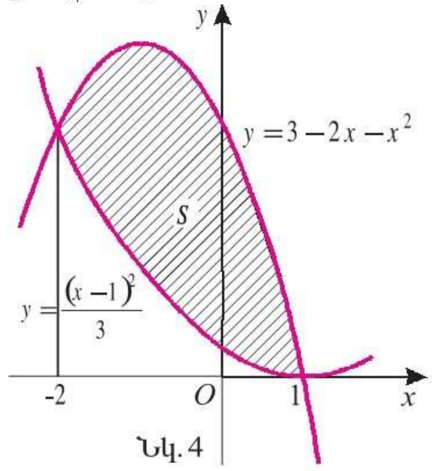
Նկ. 3

$$\int_a^b f(x)dx=S_+-S_-\ ։ \qquad (2)$$

Օրինակ 1: $\int_{-\pi}^{\pi}\sin x dx=0$, քանի որ սինուսի գրաֆիկը համաչափ է կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ, և հետևաբար՝ $S_+=S_-$ ։

Օրինակ 2: Գտնենք $f_1(x)=\frac{(x-1)^2}{3}$ և $f_2(x)=3-2x-x^2$ ֆունկցիաների գրաֆիկներով սահմանափակված պատկերի մակերեսը (նկ. 4)։

Կոորդինատային հարթության վրա պատկերենք այդ գրաֆիկները և գտնենք նրանց հատման կետերը։ Լուծելով $\frac{(x-1)^2}{3}=3-2x-x^2$



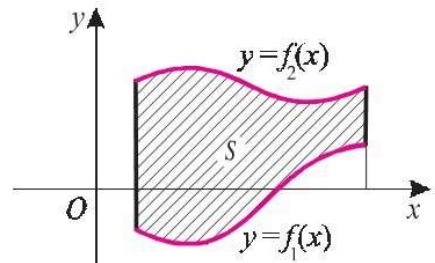
Նկ. 4

հավասարումը՝ ստանում ենք $x=-2$ կամ $x=1$ և գտնում երկու ֆունկցիաների գրաֆիկների հատման կետերի կոորդինատները՝ $(-2;3)$ և $(1;0)$: Ընդ որում, $(-2;1)$ տեղամասում f_1 ֆունկցիայի գրաֆիկն ընկած է f_2 ֆունկցիայի գրաֆիկից ցած (նկ. 4): Պարզ է, որ որոնելի S մակերեսը կլինի f_2 և f_1 ֆունկցիաներով որոշվող կորագիծ սեղանների մակերեսների տարբերությունը: Հետևաբար՝

$$S=\int_{-2}^{1}\left(3-2x-x^2\right)dx-\int_{-2}^{1}\frac{(x-1)^2}{3}dx=\left(3x-x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{1}-\frac{(x-1)^3}{9}\Bigg|_{-2}^{1}=6:$$

Պատասխան՝ 6:

Վերջին օրինակի նմանությամբ կարելի է ստանալ. եթե պատկերը սահմանափակված է $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$ անընդհատ ֆունկցիաների գրաֆիկներով և $x=a$, $x=b$ ուղիղներով (նկ. 5), ընդ որում՝ $f_1(x)\le f_2(x)$, $x\in[a;b]$, ապա այդ պատկերի մակերեսն է՝

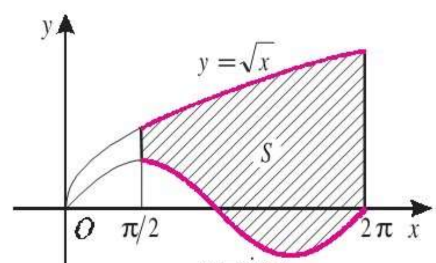


Նկ. 5

$$S=\int_{a}^{b}(f_2(x)-f_1(x))dx\ : \qquad (3)$$

Նկատենք, որ (1) բանաձևը (3)-ի մասնավոր դեպքն է: Բավական է (3)-ում վերցնել $f_2(x)=0$ և $f_1(x)=f(x)$, որպեսզի ստացվի (1) բանաձևը:

Օրինակ 3: Գտնենք $y=\sin x$, $y=\sqrt{x}$ ֆունկցիաների գրաֆիկներով և $x=\pi/2$, $x=2\pi$ ուղիղներով սահմանափակված պատկերի մակերեսը (նկ. 6):



Նկ. 6

Համաձայն (3) բանաձևի, որոնելի մակերեսը կլինի.

$$S=\int_{\pi/2}^{2\pi}\left(\sqrt{x}-\sin x\right)dx=\left(\frac{2x\sqrt{x}}{3}+\cos x\right)\Bigg|_{\pi/2}^{2\pi}=\frac{7\pi\sqrt{2\pi}}{6}+1:$$

Պատասխան՝ $\dfrac{7\sqrt{2\pi}}{6}+1$:

2. Պտտման մարմնի ծավալը:

Հաշվենք $y=f(x)$ անընդհատ, դրական ֆունկցիայի գրաֆիկով, $x=a$, $x=b$

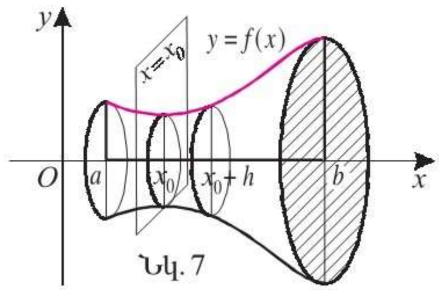
ուղիղներով և աբսցիսների առանցքով սահմանափակված կորագիծ սեղանը աբսցիսների առանցքի շուրջ պտտելուց առաջացած մարմնի V ծավալը (նկ. 7):

$[a;b]$ հատվածի կամայական x կետով տանենք աբսցիսների առանցքին ուղղահայաց հարթություն: Պարզ է, որ այդ հարթությամբ մարմնի հատույթը կլինի շրջան, որի շառավիղն է՝ $f(x)$, և այդ հատույթի մակերեսն է՝

$$S(x) = \pi f^2(x), \qquad (4)$$

ընդ որում՝ $S(x)$ ֆունկցիան նույնպես կլինի անընդհատ $[a;b]$ միջակայքում:

Դիտարկենք $V(x)$, $x \in [a;b]$, ֆունկցիան, որի արժեքը x_0 կետում հավասար է մարմնի՝ $x = a$ և $x = x_0$ հարթությունների միջև ընկած մասի ծավալին ($x = x_0$ հարթությունն անցնում է աբսցիսների առանցքի x_0 կետով և ուղղահայաց է այդ առանցքին, նկ. 7):



Նկ. 7

Եթե s-ով և S-ով նշանակենք $[x_0; x_0 + h]$ միջակայքում $S(x)$ ֆունկցիայի համապատասխանաբար փոքրագույն և մեծագույն արժեքները (մեծագույն և փոքրագույն հատույթների մակերեսները), ապա $V(x_0 + h) - V(x_0)$ տարբերությունը, որը մարմնի՝ $x = x_0$ և $x = x_0 + h$ հարթությունների միջև ընկած մասի ծավալն է, ընկած կլինի sh և Sh մեծությունների միջև, այսինքն՝

$$s \le \frac{V(x_0 + h) - V(x_0)}{h} \le S:$$

Այստեղից, հաշվի առնելով $S(x)$ ֆունկցիայի անընդհատությունը, կարող ենք եզրակացնել, որ h-ն անվերջ փոքրացնելիս s-ը և S-ը, և հետևաբար նրանց միջև գտնվող

$$\frac{V(x_0 + h) - V(x_0)}{h}$$

հարաբերությունը, ձգտում են $S(x_0)$-ին՝

$$\lim_{h \to 0} \frac{V(x_0 + h) - V(x_0)}{h} = S(x_0):$$

Այսինքն՝ $V(x)$-ը $S(x)$-ի նախնական է՝

$$V'(x) = S(x), \ x \in [a;b]:$$

Քանի որ $V(b) = V$ և $V(a) = 0$, ապա Նյուտոն-Լայբնիցի բանաձևից կստանանք՝

$$V=V(b)-V(a)=\int_a^b S(x)dx\ :$$

Տեղադրելով այստեղ $S(x)$ ֆունկցիայի արժեքը (4) բանաձևից՝ կստանանք

պտտման մարմնի ծավալը՝

$$\boldsymbol{V=\pi\int_a^b f^2(x)dx}\ : \qquad (5)$$

Օրինակ 5: Հաշվենք R շառավղով գնդի V ծավալը:

Եթե գնդի կենտրոնը տեղադրենք կոորդինատների սկզբնակետում, ապա հեշտ է տեսնել, որ գունդը կստացվի $f(x)=\sqrt{R^2-x^2}$, $x\in[-R,R]$ ֆունկցիայի գրաֆիկով և աբսցիսների առանցքով սահմանափակված պատկերը (R շառավղով կիսաշրջանը) աբսցիսների առանցքի շուրջը պտտելով: Համաձայն (5) բանաձևի, գնդի ծավալը կլինի՝

$$V=\pi\int_{-R}^{R}\left(R^2-x^2\right)dx=\pi\int_{-R}^{R}R^2dx-\pi\int_{-R}^{R}x^2dx=2\pi R^3-\left.\frac{\pi x^3}{3}\right|_{-R}^{R}=2\pi R^3-\frac{2\pi R^3}{3}=\frac{4}{3}\pi R^3\ :$$

3. Ուղղագիծ շարժում:

Այժմ դիտարկենք այն խնդիրը, որի մասին խոսեցինք այս գլխի սկզբում: Դիցուք, նյութական կետը շարժվում է ուղղագիծ (թվային ուղղով), և հայտնի են ժամանակի կամայական t պահին նրա ակնթարթային արագությունը՝ $V(t)$ և $t=t_0$ պահին կետի կոորդինատը՝ s_0: Գտնենք շարժման օրենքը՝ կետի $s(t)$ կոորդինատը ժամանակի t պահին:

Ինչպես գիտենք, $s'(t)=V(t)$, այսինքն՝ $s(t)$ ֆունկցիան $V(t)$-ի նախնական է: Համաձայն Նյուտոն-Լայբնիցի բանաձևի,

$$s(t)-s(t_0)=\int_{t_0}^{t}V(x)dx,$$

հետևաբար՝ շարժման օրենքը կլինի.

$$\boldsymbol{s(t)=s_0+\int_{t_0}^{t}V(x)dx}\ \ : \qquad (6)$$

Եթե $V(t)$ ֆունկցիան ոչ բացասական է (կետը շարժվում է դրական ուղղությամբ), ապա կամայական $[t_1;t_2]$ ժամանակահատվածում կետի անցած s

ճանապարհը կլինի $s(t_2)-s(t_1)$, և համաձայն Նյուտոն-Լայբնիցի բանաձևի,

$$s=\int_{t_1}^{t_2}V(t)dt:$$

Մասնավորապես, եթե կետը շարժվում է հաստատուն արագությամբ՝ $V(t)=V$, և ժամանակը՝ $t=t_2-t_1$, ապա կստացվի մեզ քաջ ծանոթ $s=Vt$ բանաձևը:

Եթե $V(t)$ ֆունկցիան բացասական է (կետը շարժվում է բացասական ուղղությամբ), ապա $[t_1;t_2]$ ժամանակահատվածում կետի անցած s ճանապարհը կլինի՝

$$s=s(t_1)-s(t_2)=-\int_{t_1}^{t_2}V(t)dt:$$

Ընդհանուր դեպքում, երբ $V(t)$ ֆունկցիան ընդունում է և՛ դրական, և՛ բացասական արժեքներ, ապա $[t_1;t_2]$ ժամանակահատվածում կետի անցած s ճանապարհը որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$\boldsymbol{s=\int_{t_1}^{t_2}|V(t)|dt} \qquad (7)$$

Օրինակ 6: Դիցուք, կետը, ելնելով սկզբնակետից ($t_0=0,\ s_0=0$), շարժվում է ուղղագիծ՝ $V(t)=3\pi\sin\pi t$ մ/վրկ արագությամբ: Գտնենք կետի կոորդինատը և անցած ճանապարհը շարժումն սկսելուց 3 վայրկյան անց:

Համաձայն (6) բանաձևի, կետի կոորդինատը կլինի՝

$$s(3)=\int_0^3 3\pi\sin\pi t dt=-3\cos\pi t\Big|_0^3=-3(-1-1)=6 \text{ (մ)}$$

(այսինքն՝ կետը կգտնվի շարժման դրական ուղղությամբ սկզբնակետից 6 մ հեռավորության վրա):

Իսկ 3 վայրկյանում կետի անցած ճանապարհը կհաշվենք (7) բանաձևով.

$$s=\int_0^3|3\pi\sin\pi t|dt=3\pi\left(\int_0^1\sin\pi t dt-\int_1^2\sin\pi t dt+\int_2^3\sin\pi t dt\right)=18 \text{ (մ)}:$$

Պատասխան՝ 6 մ և 18 մ:

Այժմ փորձենք գտնել շարժման $x(t)$ օրենքը, եթե հայտնի են ուղղագիծ շարժվող կետի՝ ժամանակի կամայական t պահին $a(t)$ արագացումը, $t=t_0$ պահին կետի s_0 կոորդինատը և V_0 արագությունը:

Քանի որ արագության ածանցյալն արագացումն է՝ $V'(t) = a(t)$, ուրեմն արագությունն արագացման նախնական է, և համաձայն Նյուտոն-Լայբնիցի բանաձևի՝

$$V(t) = V_0 + \int_{t_0}^{t} a(x)dx : \qquad (8)$$

Այստեղից $V(t)$-ն տեղադրելով (6) բանաձևում՝ կստանանք շարժման օրենքը:

Մասնավորապես, եթե կետը շարժվում է a հաստատուն արագացումով, $t_0 = 0$ պահին նրա արագությունը V_0 է, իսկ կոորդինատը՝ $s_0 = 0$, ապա (8) բանաձևից՝

$$V(t) = V_0 + at,$$

ինչը տեղադրելով (6) բանաձևում, կստանանք ֆիզիկայից մեզ ծանոթ բանաձևը.

$$s(t) = \int_0^t (V_0 + ax)dx = V_0 t + \frac{at^2}{2} :$$

Օրինակ 7: Մարմինը շարժվում է ուղղագիծ՝ $a(t) = \sin t$ փոփոխական արագացումով: Գտնենք մարմնի շարժման օրենքը, եթե ժամանակի $t_0 = 0$ պահին նրա կոորդինատը՝ $x_0 = 0$, արագությունը՝ $V_0 = 0$:

Համաձայն (8) բանաձևի՝

$$V(t) = \int_0^t \sin x dx = -\cos x \Big|_0^t = 1 - \cos t,$$

ինչը տեղադրելով (6) բանաձևում, կստանանք՝

$$s(t) = \int_0^t (1 - \cos x)dx = t - \sin t :$$

4. Փոփոխական ուժի կատարած աշխատանքը:

Դիցուք, մարմինը շարժվում է ուղղագիծ (թվային ուղղով) մի ուժի ազդեցությամբ, որի մեծությունն x կետում հավասար է $F(x)$-ի, ընդ որում՝ F-ն անընդհատ ֆունկցիա է: Գտնենք այդ ուժի կատարած A աշխատանքը՝ մարմինն a կետից b կետը տեղափոխելու ընթացքում:

Դիտարկենք $A(x)$, $x \in [a;b]$ ֆունկցիան, որի արժեքն x կետում հավասար է $[a;x]$ տեղամասում ուժի կատարած աշխատանքին: Այդ դեպքում $[x; x+h]$

տեղամասում ուժի կատարած աշխատանքը կլինի $A(x+h)-A(x)$, և այն ընկած կլինի mh և Mh մեծությունների միջև, որտեղ m-ը և M-ը $F(x)$ ֆունկցիայի համապատասխանաբար փոքրագույն և մեծագույն արժեքներն են $[x;x+h]$ միջակայքում, այսինքն՝

$$m<\frac{A(x+h)-A(x)}{h}<M:$$

Այստեղից, հաշվի առնելով $F(x)$ ֆունկցիայի անընդհատությունը, կարող ենք եզրակացնել, որ h-ն անվերջ փոքրացնելիս, m-ը և M-ը, և հետևաբար նրանց միջև գտնվող

$$\frac{A(x+h)-A(x)}{h}$$

հարաբերությունը, ձգտում են $F(x)$-ին՝

$$\lim_{h\to 0}\frac{A(x+h)-A(x)}{h}=F(x):$$

Այսինքն՝ $A(x)$-ը $F(x)$-ի նախնական է՝

$$A'(x)=F(x),\ x\in[a;b]:$$

Քանի որ $A(b)=A$ և $A(a)=0$, ապա Նյուտոն-Լայբնիցի բանաձևից կստանանք, որ $F(x)$ ուժի կատարած A աշխատանքը մարմինն a կետից b կետը տեղափոխելու ընթացքում հավասար է՝

$$\boldsymbol{A=\int_a^b F(x)dx} \tag{9}$$

Օրինակ 8: Գտնենք զսպանակը 0,07 մետրով ձգելու (սեղմելու) համար ուժի կատարած A աշխատանքը, եթե զսպանակի առաձգականության գործակիցը՝ $k=800$ Ն/մ:

Հուկի օրենքի համաձայն՝ ուժը տրվում է

$$F(x)=kx$$

բանաձևով, որտեղ x-ը զսպանակի ձգվածության (սեղմվածության) չափն է (մետրերով): Ըստ (9) բանաձևի՝

$$A=\int_0^{0,07}800x\,dx=800\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^{0,07}=1,96\ (\text{Ջ}):$$

Պատասխան՝ 1,96 Ջ:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ինչպե՞ս են հաշվում $x=a$, $x=b$ ուղիղներով և $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$ ֆունկցիաների գրաֆիկներով սահմանափակված պատկերի մակերեսը:
2. Ապացուցել (2) հավասարությունը:
3. Ի՞նչ բանաձևով են հաշվում պտտման մարմնի ծավալը:
4. Ի՞նչ բանաձևով է տրվում ուղղագիծ շարժվող կետի շարժման օրենքը, եթե տրված է նրա արագության կախվածությունը ժամանակից:
5. Ի՞նչ բանաձևով է տրվում ուղղագիծ շարժվող կետի շարժման օրենքը, եթե տրված է նրա արագացման կախվածությունը ժամանակից:
6. Գրել փոփոխական ուժի կատարած աշխատանքի բանաձևը:

Առաջադրանքներ

Կոորդինատային հարթության վրա պատկերեք տրված գծերով սահմանափակված պատկերը և հաշվեք նրա մակերեսը (50-54).

50. ա) $y=2-x^3$, $y=0$, $x=2$, $x=3$, բ) $y=1-6\sqrt{x}$, $y=0$, $x=1$, $x=4$,

գ) $y=8-x^3$, $y=0$, $x=6$, դ) $y=(1-x^2)(x^2+5)$, $y=0$:

51. ա) $y=\cos x$, $y=1$, $x=-\dfrac{\pi}{3}$, $x=\dfrac{\pi}{3}$,

բ) $y=\sin x$, $y=\dfrac{1}{3}$, $x=\dfrac{\pi}{6}$, $x=\dfrac{5\pi}{6}$,

➤գ) $y=\dfrac{1}{x}$, $y=2x+1$, $y=0$, $x=0$, $x=3$,

դ) $y=\sqrt{2x}$, $y=x^3+1$, $x=2$, $x=4$:

52. ա) $y=x^3$, $y=8$, $x=1$, բ) $y=x^2-2x+4$, $y=3$, $x=-1$,

գ) $y=\dfrac{16}{x^2}$, $y=2x$, $x=4$, դ) $y=4x-x^2$, $y=4-x$, $x=3$:

53. ա) $y=3^x$, $y=9^x$, $x=1$, բ) $y=e^x$, $y=e^{2x}$, $x=1$,

գ) $y=3^{-x}$, $y=3$, $x=1$, դ) $y=2^{-x}$, $y=1$, $x=-2$:

➤**54.** ա) $y=x^2-5$, $y=4x$, բ) $y=6-2x$, $y=6+x-x^2$,

գ) $y=x^2-4x+4$, $y=4-x^2$, դ) $y=x^2-2x+2$, $y=2+6x-x^2$:

➤**55.** Հաշվել այն պատկերի մակերեսը, որը սահմանափակված է $y=8x-2x^2$ պարաբոլով, այդ պարաբոլի գագաթով տարված շոշափողով և $x=0$ ուղղով:

56. Հաշվել այն պատկերի մակերեսը, որը սահմանափակված է $y=8-0,5x^2$ պարաբոլով, նրա գրաֆիկին պատկանող $x_0=-2$ աբսցիս ունեցող կետով նրան տարած շոշափողով և $x=1$ ուղղով:

*** 57.** Հաշվել այն պատկերի մակերեսը, որը սահմանափակված է $y=x^2-2x+2$ պարաբոլով, դրա և y-ների առանցքի հատման կետով պարաբոլին տարված շոշափողով և $x=1$ ուղղով:

*** 58.** Հաշվել այն պատկերի մակերեսը, որը սահմանափակված է $y=4/x$ հիպերբոլով, հիպերբոլի գրաֆիկին դրա $x=2$ աբսցիսն ունեցող կետով տարված շոշափողով և $y=0$, $x=6$ ուղիղներով:

*** 59.** Գտնել k պարամետրի այն արժեքը, որի դեպքում $y=x^2-x+1$ պարաբոլով և $y=kx+2$ ուղղով սահմանափակված պատկերի մակերեսը կլինի փոքրագույնը:

➢60. Օգտվելով պտտման մարմնի ծավալի (5) բանաձևից, ստանալ`

ա) գլանի ծավալի բանաձևը, բ) կոնի ծավալի բանաձևը,

գ) հատած կոնի ծավալի բանաձևը:

➢61. Գտեք տրված գծերով սահմանափակված պատկերի` աբսցիսների առանցքի շուրջը պտտելուց ստացված մարմնի ծավալը.

ա) $y=x^2+1$, $x=0$, $x=1$, $y=0$, բ) $y=\sqrt{x}$, $x=1$, $x=4$, $y=0$,

գ) $y=\sqrt{x}$, $x=1$, $y=0$, դ) $y=1-x^2$, $y=0$,

ե) $y=x^2$, $y=x$, զ) $y=2x$, $y=x+3$, $x=0$, $x=1$,

է) $y=x+2$, $y=1$, $x=0$, $x=2$, ը) $y=\sqrt{x}$, $y=x$:

*** 62.** Կետը $V(t)$ մ/վրկ փոփոխական արագությամբ ուղղագիծ շարժվում է s_0 կետից: Գտնել կետի կոորդինատը շարժումն սկսելուց 4 վրկ անց և նրա անցած ճանապարհը, եթե

ա) $V(t)=3t^2-4t$, $s_0=3$, բ) $V(t)=\sqrt{t}-1$, $s_0=5$,

գ) $V(t)=\pi\cos(\pi t/2)$, $s_0=3$, դ) $V(t)=5\pi\sin\pi t$, $s_0=-2$:

63. Կետը շարժվում է ուղղագիծ, $a(t)$ մ/վրկ^2 արագացումով: Ժամանակի t_0 պահին նրա կոորդինատը x_0 է, իսկ արագությունը` $v_0$ մ/վրկ: Գտնել կետի շարժման օրենքը, եթե`

ա) $a(t)=-2t$, $t_0=1$, $s_0=4$, $V_0=2$,

բ) $a(t)=\sin t$, $t_0=\dfrac{\pi}{2}$, $s_0=2$, $V_0=1$,

գ) $a(t)=6t$, $t_0=0$, $s_0=3$, $V_0=1$,

դ) $a(t)=\cos t$, $t_0=\pi$, $s_0=1$, $V_0=0$:

64. Գտնել զսպանակը 8 սմ սեղմելու համար անհրաժեշտ աշխատանքը, եթե այն`

ա) 1 սմ սեղմելու համար անհրաժեշտ է 2Ն ուժ,

բ) 5 սմ սեղմելու համար անհրաժեշտ է 4Ն ուժ:

65. Գտնել զսպանակի առաձգականության գործակիցը, եթե այն` ա) 6 սմ սեղմելու համար կատարվել է 3,6 Ջ աշխատանք,

բ) 8 սմ սեղմելու համար անհրաժեշտ է 3,2 Ջ աշխատանք:

Կրկնության համար

66. Մեկ միլիոն դրամ ավանդ ներդնելով բանկում՝ ավանդատուն յուրաքանչյուր տարվա վերջին իր հաշվից հանում է այդ տարվա շահույթի կեսը: Որքա՞ն գումար կլինի նրա հաշվին 4-րդ տարվա վերջին, եթե բանկի տարեկան տոկոսադրույքը 10% է (յուրաքանչյուր տարվա վերջին ավանդատուի հաշվին ավելանում է տարեսկզբին եղած գումարի 10 տոկոսը):

2րդ ԳԼՈՒԽ

Հավասարումներ և անհավասարումներ

§1. Անհավասարումների լուծման միջակայքերի եղանակը

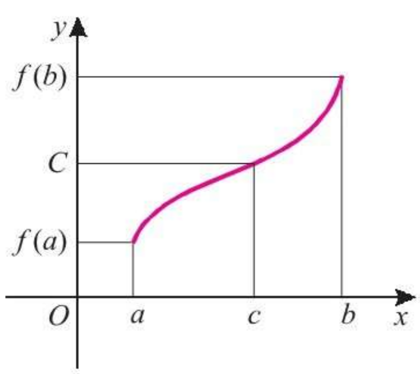
Դպրոցական դասընթացում հանդիպող անհավասարումները հիմնականում ունեն հետևյալ տեսքերը.

$$f(x) > g(x),\ f(x) \geq g(x),\ f(x) < g(x),\ f(x) \leq g(x),$$

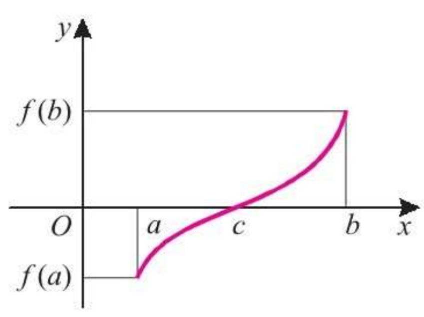
որտեղ f-ը և g-ն տարրական (և հետևաբար՝ իրենց որոշման տիրույթում անընդհատ) ֆունկցիաներ են: Այս պարագրաֆում կծանոթանանք այդպիսի անհավասարումների լուծման մի եղանակի հետ, որի հիմքում ընկած է հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ 1 (միջանկյալ արժեքի վերաբերյալ): ***Դիցուք, f ֆունկցիան անընդհատ է $[a,b]$ միջակայքում: Այդ դեպքում կամայական C թվի համար, որն ընկած է $f(a)$ և $f(b)$ թվերի միջև, գոյություն ունի այնպիսի $c \in (a,b)$, որ $f(c) = C$:***

Այս թեորեմը, որը մենք կընդունենք առանց ապացույցի, ունի պարզ երկրաչափական մեկնաբանություն (նկ. 8ա). եթե անընդհատ կորի մի ծայրակետը գտնվում է $y = C$ ուղղից վար, իսկ մյուս ծայրակետը՝ այդ ուղղից վեր, ապա կորն անպայման կհատի $y = C$ ուղիղը:



ա



բ

Նկ. 8

Մասնավորապես, եթե ֆունկցիայի արժեքը հատվածի ծայրակետերից մեկում լինի բացասական, իսկ մյուսում` դրական, ապա հատվածի որևէ կետում այն կդառնա զրո: Այս փաստը ձևակերպված է հաջորդ թեորեմում, որն ունի բազմաթիվ կիրառություններ:

Թեորեմ 2: ***Եթե $[a,b]$ հատվածում անընդհատ f ֆունկցիան a և b կետերում ընդունում է տարբեր նշանի արժեքներ, ապա գոյություն ունի այնպիսի $c \in (a,b)$, որ $f(c)=0$:***

Երկրաչափորեն 2-րդ թեորեմը կարելի է մեկնաբանել հետևյալ կերպ.

եթե $[a;b]$ հատվածում անընդհատ ֆունկցիայի գրաֆիկն այդ հատվածի ծայրակետերում գտնվում է աբսցիսների առանցքի տարբեր կողմերում, ապա այն հատում է աբսցիսների առանցքը (a,b) միջակայքում (նկ. 8բ):

Օրինակ 1: Ցույց տանք, որ $2^{x+2}=5x^2+2x+3$ հավասարումը $(0;1)$ միջակայքում ունի գոնե մեկ արմատ:

Դիտարկենք $f(x)=2^{x+2}-5x^2-2x-3$ ֆունկցիան: Այն անընդհատ է $[0;1]$ միջակայքում, և $f(0)=1>0$, $f(1)=-2<0$: Համաձայն 2-րդ թեորեմի` $(0;1)$ միջակայքում գոյություն ունի այնպիսի $c$ թիվ, որ $f(c)=0$, այսինքն` c-ն տրված հավասարման արմատ է:

Հետևանք: ***Դիցուք, f ֆունկցիան անընդհատ է $(c;d)$ միջակայքում և այդ միջակայքում չի ընդունում 0 արժեքը:***
Այդ դեպքում f ֆունկցիան $(c;d)$ միջակայքում պահպանում է իր նշանը, այսինքն` կա՛մ այդ միջակայքի բոլոր կետերում ֆունկցիայի արժեքները դրական են, կա՛մ` բոլոր կետերում բացասական:

Իրոք, եթե ֆունկցիան (c,d) միջակայքի մի կետում ընդունի դրական արժեք, իսկ մեկ այլ կետում` բացասական, ապա, համաձայն 2-րդ թեորեմի` այդ կետերի միջև ընկած որևէ կետում պետք է ընդունի 0 արժեքը: Դա հնարավոր չէ, քանի որ $f(x)\neq 0$, երբ $x\in(c;d)$:

Այս հետևանքը հնարավորություն է տալիս որոշ անհավասարումների լուծումը հանգեցնել հավասարումների լուծմանը:

Դիցուք, անհրաժեշտ է լուծել

$$f(x)>g(x) \qquad (1)$$

անհավասարումը, որտեղ f-ը և g-ն անընդհատ ֆունկցիաներ են: Նշանակենք $F(x)=f(x)-g(x)$: Այդ դեպքում (1) անհավասարումը համարժեք է

$$F(x)>0 \qquad (2)$$

անհավասարմանը, որը լուծելու համար պետք է կատարել հետևյալ քայլերը:

1. *Գտնել $D(F)$-ը, կամ, որ նույնն է, (1) անհավասարման ԹԱԲ-ը:*
2. *Լուծել $F(x)=0$ հավասարումը:*
3. *Այդ հավասարման արմատներով F ֆունկցիայի որոշման տիրույթը տրոհել միջակայքերի, որոնցից յուրաքանչյուրում, համաձայն հետևվանքի, F ֆունկցիան պահպանում է նշանը:*
4. *Որոշել յուրաքանչյուր միջակայքում F ֆունկցիայի նշանը՝ հաշվելով ֆունկցիայի արժեքը միջակայքին պատկանող որևէ կետում:*
5. *Ընտրել այն միջակայքերը և ծայրակետերը, որոնք բավարարում են անհավասարմանը:*

Այս քայլերը կատարելուց հետո, անհավասարման լուծումը կլինի ընտրված միջակայքերի և ծայրակետերի միավորումը (եթե այդպիսիք կան):

Իհարկե, այս հաշվեկանոնն «աշխատում է» այն դեպքում, երբ ֆունկցիայի զրոներով նրա որոշման տիրույթը տրոհվում է վերջավոր թվով միջակայքերի (տես 3-րդ քայլը):

Հանգունորեն լուծվում են $f(x)\geq g(x)$ և $f(x)<g(x)$, $f(x)\leq g(x)$ տեսքի անհավասարումները:

Ավելի մանրամասն քննարկենք բերված հաշվեկանոնի 5-րդ կետը: Դիցուք, a_0-ն 3-րդ կետում ստացված միջակայքերից որևէ մեկի ծայրակետ է: Հնարավոր է երեք դեպք.

ա) $a_0\notin D(F)$: Այս դեպքում, բնականաբար, a_0-ն չի պատկանում լուծումների բազմությանը (օրինակ՝ $a_0=2$ ծայրակետը 3-րդ օրինակում, 10-րդ նկարում այն նշված է սպիտակ շրջանակով):

բ) $F(a_0)=0$: Այս դեպքում a_0-ն կբավարարի միայն ոչ խիստ անհավասարմանը (օրինակ՝ $a_0=3$ և $a_0=5$ ծայրակետերը 3-րդ օրինակում, 10-րդ նկարում նրանք նշված են սև շրջանակներով):

գ) $F(a_0)\neq 0$: Այս դեպքը հնարավոր է միայն, երբ a_0 կետը անհավասարման ԹԱԲ-ի եզրային կետ է: Այն կարող է բավարարել ինչպես ոչ խիստ, այնպես էլ խիստ անհավասարմանը (օրինակ՝ $a_0=-4$ ծայրակետը 2-րդ օրինակում, նկ. 9):

Անհավասարումների լուծման այս եղանակը կոչվում է ***միջակայքերի եղանակ*** կամ ***միջակայքերի մեթոդ***:

Օրինակ 2: Լուծենք $x>3\sqrt{x+4}-6$ անհավասարումը:
Նշանակենք՝

$$F(x)=x-3\sqrt{x+4}+6:$$

Այս ֆունկցիայի որոշման տիրույթն է $[-4;+\infty)$: Լուծենք $F(x)=0$ հավասարումը.

$$x-3\sqrt{x+4}+6=0 \Rightarrow (x+6)^2=9(x+4) \Rightarrow x_1=-3,\ x_2=0:$$

Հեշտ է ստուգել, որ ստացված թվերը բավարարում են $F(x)=0$ հավասարմանը: Այսպիսով՝ F ֆունկցիայի որոշման տիրույթը տրոհվում է $(-4;-3)$, $(-3;0)$ և $(0;+\infty)$ միջակայքերի (նկ. 9):

Նկ. 9

Հաշվելով F ֆունկցիայի արժեքները, օրինակ՝ $-3{,}5\in(-4;-3)$, $-2\in(-3;0)$ և $1\in(0;+\infty)$ կետերում, համոզվում ենք, որ (նկ. 9)

$$F(x)>0, \text{ երբ } x\in(-4;-3)\cup(0;+\infty) \text{ և } F(x)<0, \text{ երբ } x\in(-3;0):$$

Բացի այդ, $F(-4)=2>0$, այսինքն՝ -4 ծայրակետը բավարարում է անհավասարմանը (-3 և 0 կետերում F ֆունկցիայի արժեքը զրո է, և նրանք չեն բավարարում անհավասարմանը):

Պատասխան՝ $x\in[-4;-3)\cup(0;+\infty)$:

Օրինակ 3: Լուծենք $\sqrt{5-x}\cdot\log_3(x-2)\le 0$ անհավասարումը:

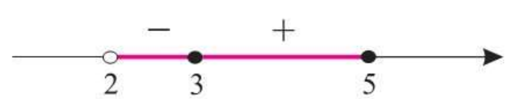
Նշանակենք՝

$$F(x)=\sqrt{5-x}\cdot\log_3(x-2):$$

Այս ֆունկցիայի որոշման տիրույթն է՝ $D(F)=(2;5]$: Լուծելով

$$\sqrt{5-x}\cdot\log_3(x-2)=0$$

հավասարումը, ստանում ենք՝ $x_1=3$ և $x_2=5$: Հետևաբար՝ F ֆունկցիայի որոշման տիրույթը տրոհվում է $(2;3)$ և $(3;5)$ միջակայքերի (նկ. 10): Քանի որ



Նկ. 10

$$F(2{,}5)=\sqrt{2{,}5}\cdot\log_3\frac{1}{2}<0 \text{ և } F(4)=\log_3 2>0,$$

ուրեմն՝ $F(x)<0$, երբ $x\in(2;3)$: Հաշվի առնելով, որ $2\notin D(F)$, իսկ $x=3$ և $x=5$

կետերում $F(x)=0$, ստանում ենք՝ $F(x)\le 0$, երբ $x\in(2;\,3]\cup\{5\}$:

Պատասխան՝ $(2;\,3]\cup\{5\}$:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Միջակայքերի մեթոդով ինչպե՞ս են լուծում $f(x)>g(x)$ անհավասարումը:
2. Միջակայքերի մեթոդով ինչպե՞ս են լուծում $f(x)\le g(x)$ անհավասարումը:

Առաջադրանքներ

Ցույց տալ, որ հավասարումը նշված միջակայքում ունի գոնե մեկ արմատ (67-68).

67. ա) $x^3+5x^2-7=0,\quad [1;2]$, բ) $x^4+6x^3-1=0,\quad [0;1]$,

գ) $2\cos x-x=0,\quad [0;\pi/2]$, դ) $\ln(x+5)-5x=0,\quad [-4;4]$:

*** 68.** ա) $16x^2-2\,\mathrm{tg}\,x-7=0,\quad \left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)$, բ) $x^3+\ln x-20=0,\quad (0;e)$:

➢69. Ապացուցել, որ նշված միջակայքում հավասարումն ունի առնվազն երկու արմատ.

ա) $2x^2-3\cos x+1=0,\quad \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$, բ) $\lg(100x^2+1)-x-1=0,\quad [0;\,2]$:

➢70. Ապացուցել, որ հավասարումն ունի առնվազն երկու արմատ.

ա) $2x^2+3\sin x-1=0$, բ) $2^x-x-2=0$:

Միջակայքի մեթոդով լուծել անհավասարումը (71-76).

71. ա) $\dfrac{(x-1)^2(x+1)}{x}>0$, բ) $\dfrac{(x-2)(x-3)^2}{x+5}\le 0$,

գ) $\dfrac{x+1}{(x-5)^2(x+4)}\ge 0$, դ) $\dfrac{7+x}{(x-4)^2(x-8)}<0$:

72. ա) $\dfrac{5x+1}{2x-4}<2$, բ) $\dfrac{3-x}{2x+12}>4$, գ) $\dfrac{4}{7-x}\le\dfrac{5}{x-2}$, դ) $\dfrac{1}{3-x}\ge\dfrac{2}{6+x}$:

73. ա) $2+\dfrac{1}{x}\ge\dfrac{1}{x+2}$, բ) $1+\dfrac{1}{x-2}\ge\dfrac{1}{x+2}$,

գ) $x+\dfrac{1}{x-2}>4$, դ) $x\ge\dfrac{4}{4-x}$:

➢74. ա) $\sqrt{x+6}<x$, բ) $\sqrt{5x+4}-2\le x$,

գ) $\sqrt{4x-3}\ge 2x-3$, դ) $\sqrt{11-2x}+x>4$:

➢75. ա) $\sqrt{6-2x}\log_{0,5}(x-1)\ge 0$, բ) $\sqrt{2+x}\log_2(3-x)\le 0$,

գ) $\sqrt{7-x}\ln(x-5)\le 0$, դ) $\sqrt{1-x}\ln(3x-1)\le 0$:

76. ա) $\log_x \frac{7-6x}{2} \le 1$, բ) $\log_x \frac{5}{7-4x} \ge -1$,

գ) $\log_x \frac{7x-6}{2} \ge 2$, դ) $\log_x \frac{7x-3}{2} < 2$:

Կրկնության համար

77. Երեք բանվոր միասին աշխատելով՝ երեք օրում պատրաստում են 129 դետալ: Ընդ որում՝ առաջինը երկու օրում պատրաստում է այնքան դետալ, որքան երրորդը՝ երեք օրում, իսկ երկրորդը հինգ օրում պատրաստում է այնքան, որքան առաջինը՝ վեց օրում: Քանի՞ դետալ է պատրաստում երկրորդ բանվորը մեկ օրում:

78. Երեք տրակտոր աշխատելով միասին՝ չորս օրում վարում են 248 հա: Երկրորդ տրակտորը երկու օրում վարում է 2 հա պակաս, քան առաջինը և երրորդը վարում են միասին՝ մեկ օրում: Երրորդ տրակտորը 5 օրում վարում է այնքան, որքան երկրորդը՝ 6 օրում: Օրական քանի՞ հեկտար է վարում յուրաքանչյուր տրակտորը:

§2. Իռացիոնալ հավասարումներ

Արմատանշանի տակ կամ կոտորակային աստիճանով փոփոխական պարունակող հավասարումը կոչվում է ***իռացիոնալ հավասարում***: Պարզագույն իռացիոնալ հավասարում է

$$\sqrt[n]{x} = a$$

հավասարումը, որտեղ n-ը՝ բնական, իսկ a-ն կամայական թվեր են, ընդ որում՝ $n>1$:

Գիտենք, որ կամայական n-ի դեպքում $y=\sqrt[n]{x}$ ֆունկցիան աճող է: Հետևաբար՝ իր արժեքների տիրույթին պատկանող յուրաքանչյուր a արժեք այդ ֆունկցիան ընդունում է միակ՝ $x=a^n$ կետում: Կենտ n-ի դեպքում $y=\sqrt[n]{x}$ ֆունկցիայի արժեքների տիրույթն ամբողջ թվային առանցքն է, իսկ զույգ n-ի դեպքում՝ $[0,\infty)$ միջակայքը: Նշանակում է՝

եթե n-ը կենտ է, ապա կամայական a-ի դեպքում

$$\sqrt[n]{f(x)} = a \Leftrightarrow f(x) = a^n :$$

Եթե n-ը զույգ է, ապա՝

ա) $a \ge 0$ դեպքում

$$\sqrt[n]{f(x)} = a \Leftrightarrow f(x) = a^n ,$$

բ) $a<0$ դեպքում $\sqrt[n]{f(x)} = a$ հավասարումն արմատ չունի:

Այստեղ $f(x)$-ը x փոփոխականից կախված որևէ արտահայտություն է:

Օրինակ 1: Լուծենք $\sqrt[3]{|2x-1|}=3$ հավասարումը:

Այն համարժեք է $|2x-1|=27$ հավասարմանը, որտեղից $2x-1=\pm 27$, և $x_1=14$, $x_2=-13$:

Պատասխան՝ $-13; 14$:

Օրինակ 2: $\sqrt[4]{5x+9}=-7$ հավասարումն արմատ չունի, քանի որ արմատի ցուցիչը զույգ է, իսկ աջ մասը՝ բացասական:

Դիտարկենք

$$\sqrt{f(x)}=g(x)$$

հավասարումը, որտեղ $f(x)$-ը և $g(x)$-ը x փոփոխականից կախված արտահայտություններ են: Այն արմատ չունի, եթե նրա աջ մասը բացասական է, իսկ $g(x)\geq 0$ դեպքում համարժեք է $f(x)=g^2(x)$ հավասարմանը, այսինքն՝

$$\sqrt{f(x)}=g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=g^2(x)\\ g(x)\geq 0\end{cases}:$$

Օրինակ 3: Լուծենք

$$\sqrt{3+x}=3-x \tag{1}$$

հավասարումը: Այն համարժեք է հետևյալ համակարգին.

$$\begin{cases}(3+x)=(3-x)^2\\ 3-x\geq 0\end{cases}:$$

Լուծելով համակարգի քառակուսային հավասարումը՝ ստանում ենք $x_1=1$ և $x_2=6$ արմատները, որոնցից առաջինը բավարարում է $3-x\geq 0$ անհավասարմանը, իսկ երկրորդը՝ ոչ:

Պատասխան՝ 1:

Այժմ դիտարկենք

$$\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}$$

տեսքի հավասարումը, որտեղ $f(x)$-ը և $g(x)$-ը x փոփոխականից կախված արտահայտություններ են: Հավասարման ԹԱԲ-ը բաղկացած է այն x կետերից, որոնց համար $f(x)\geq 0$, $g(x)\geq 0$: Քանի որ այդպիսի x-երի համար հավասարման աջ և ձախ մասերը ոչ բացասական են, այն համարժեք է հետևյալ համակարգին.

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}:$$

Նկատենք, որ $f(x) = g(x)$ պայմանի դեպքում համակարգի երկրորդ և երրորդ անհավասարումները դառնում են համարժեք, ուստի՝ կարող ենք վերցնել նրանցից միայն մեկը (ավելի պարզը):

Օրինակ 4: Լուծենք

$$\sqrt{x^2 - 3x - 7} = \sqrt{x-1} \qquad (2)$$

հավասարումը: Այն համարժեք է հետևյալ համակարգին.

$$\begin{cases} x^2 - 3x - 7 = x - 1 \\ x - 1 \geq 0 \end{cases}:$$

Լուծելով համակարգի քառակուսային հավասարումը՝ ստանում ենք $x_1 = 2 - \sqrt{10}$ և $x_2 = 2 + \sqrt{10}$ արմատները, որոնցից $x - 1 \geq 0$ պայմանը բավարարում է միայն երկրորդը:

Պատասխան՝ $2 + \sqrt{10}$:

Ինչպես տեսանք վերջին երկու օրինակներում, քառակուսի բարձրացնելուց ստացված հավասարումները կարող են ունենալ արմատներ, որոնք չեն բավարարում սկզբնական հավասարմանը տարբեր պատճառներով:

4-րդ օրինակում ստացված $x_1 = 2 - \sqrt{10}$ արմատը չի պատկանում (2) հավասարման թույլատրելի արժեքների բազմությանը (ԹԱԲ), քանի որ այդ կետում որոշված չէ $\sqrt{x-1}$ արտահայտությունը: Քառակուսի բարձրացնելիս օգտվել ենք $\left(\sqrt{x-1}\right)^2 = x - 1$ բանաձևից, որը ճշմարիտ է միայն $x \geq 1$ դեպքում:

3-րդ օրինակում ստացված $x_2 = 6$ արմատը, չնայած պատկանում է (1) հավասարման ԹԱԲ-ին, սակայն չի բավարարում նրան: Այս արժեքի դեպքում (1) հավասարման ձախ մասը 3 է, իսկ աջը՝ -3, իսկ քառակուսի բարձրացնելու հետևանքով ստացվում է $3^2 = (-3)^2$ ճիշտ հավասարությունը:

Տրված հավասարման երկու մասերը քառակուսի (զույգ աստիճան) բարձրացնելուց ստացված հավասարումը հանդիսանում է տրվածի հետևանքը: Այն կարող է համարժեք չլինել տրված հավասարմանը և ունենալ կողմնակի արմատներ:

Այդ հավասարումները համարժեք են այն x-երի բազմությունում, որոնք պատկանում են տրված հավասարման Թ-ԱԲ-ին և որոնց դեպքում տրված հավասարման երկու մասերն ունեն նույն նշանը:

Օրինակ, $x=7$ հավասարման երկու մասերը քառակուսի բարձրացնելով՝ ստանում ենք $x^2=49$ հավասարումը, որի լուծումն է՝ $x=\pm7$ ։

Այսպիսով, եթե հավասարումը լուծել ենք նրա երկու մասերը քառակուսի (զույգ աստիճան) բարձրացնելով, ապա հնարավոր կողմնակի արմատներից ազատվելու համար անհրաժեշտ է ***կատարել ստուգում***։ Ընդ որում, ոչ միայն պետք է ստուգել, որ ստացված արմատը պատկանի հավասարման ԹԱԲ-ին, այլև, որ հավասարման աջ և ձախ մասերն ունենան նույն նշանը։

Հաճախ ավելի հեշտ է լինում պարզապես տեղադրել և ստուգել, թե ստացված արմատներից որոնք են բավարարում սկզբնական հավասարմանը։

Օրինակ 5։ Լուծենք

$$\sqrt{3-x}=\sqrt{2+x}-1$$

հավասարումը։ Հավասարման աջ և ձախ մասերը քառակուսի բարձրացնելով՝ ստանում ենք

$$3-x=2+x-2\sqrt{2+x}+1$$

հավասարումը, որտեղից $\sqrt{2+x}=x$ ։ Եվս մեկ անգամ քառակուսի բարձրացնելով՝ կստանանք $2+x=x^2$ քառակուսային հավասարումը, որի արմատներն են՝ $x_1=-1$ և $x_2=2$ ։ Ստուգելով համոզվում ենք, որ $x_1=-1$ արմատը չի բավարարում սկզբնական հավասարմանը, իսկ $x_2=2$ արմատը բավարարում է։

Պատասխան՝ 2 ։

Օրինակ 6։ Լուծենք

$$(x-3)\sqrt{x^2-5x+4}=2x-6$$

հավասարումը։ Հավասարման ԹԱԲ-ը $x^2-5x+4\ge0$ անհավասարման լուծումն է։ Հավասարման աջ մասի արտահայտությունը տեղափոխելով ձախ մաս և ընդհանուր հանելով $(x-3)$ արտադրիչը, ստանում ենք

$$(x-3)\left(\sqrt{x^2-5x+4}-2\right)=0$$

հավասարումը, որտեղից՝

$$\left[\begin{array}{l} x-3=0 \\ \sqrt{x^2-5x+4}=2 \end{array}\right. ։$$

Համախմբի առաջին հավասարման արմատն է՝ $x_1=3$ ։ Երկրորդ հավասարումը քառակուսի բարձրացնելով՝ ստանում ենք՝ $x^2-5x+4=4$, որտեղից՝ $x_2=0$ և $x_3=5$ ։ Ստուգելով համոզվում ենք, որ $x_1=3$ արմատը չի բավարարում $x^2-5x+4\ge0$ պայմանը (նկատենք, որ մյուս երկու արմատների ստուգման կարիքը չկա, քանի որ նրանք $x^2-5x+4=4$ հավասարման արմատներն են)։

Պատասխան՝ 0; 5 ։

Երբեմն իռացիոնալ հավասարումը լուծելիս անհրաժեշտ է լինում նրա երկու մասերը բարձրացնել կենտ աստիճան: Քանի որ կենտ n-ի և կամայական x-ի դեպքում $\sqrt[n]{x^n}=x$, ուրեմն՝ կամայական a և b թվերի համար $a=b$ հավասարությունը համարժեք է $a^n=b^n$ հավասարությանը: Հետևաբար՝

հավասարման երկու մասերը կենտ աստիճան բարձրացնելուց ստացված հավասարումը համարժեք է այդ հավասարմանը:

Օրինակ 7: Լուծենք

$$\sqrt[3]{x^3-5x-4}=x-1$$

հավասարումը: Հավասարման աջ և ձախ մասերը խորանարդ բարձրացնելով՝ ստանում ենք նրան համարժեք

$$x^3-5x-4=x^3-3x^2+3x-1$$

հավասարումը, որտեղից $3x^2-8x-3=0$, և $x_1=-1/3$, $x_2=3$:

Պատասխան՝ $-1/3;\ 3$:

Իռացիոնալ հավասարումները բազմազան են և միշտ չէ, որ աստիճան բարձրացնելը բերում է հավասարման պարզեցմանը: Ստորև կդիտարկենք իռացիոնալ հավասարումների լուծման մի քանի հնարք ևս:

Օրինակ 8: Լուծենք

$$\sqrt{3x^2-4x+5}+\sqrt{5-3x^2+4x}=4$$

հավասարումը: Նշանակելով $3x^2-4x=t$, ստանում ենք՝

$$\sqrt{t+5}+\sqrt{5-t}=4: \qquad (3)$$

Բարձրացնելով քառակուսի և խմբավորելով՝ կստանանք՝

$$\sqrt{25-t^2}=3,$$

որտեղից՝ $25-t^2=9$, և $t=\pm4$: Ստուգելով համոզվում ենք, որ ստացված երկու արմատներն էլ բավարարում են (3) հավասարմանը: Վերադառնալով նշանակմանը և լուծելով $3x^2-4x=4$ հավասարումը՝ ստանում ենք՝ $x_1=-2/3$, $x_2=2$, իսկ $3x^2-4x=-4$ հավասարումն արմատ չունի:

Պատասխան՝ $-2/3;\ 2$:

Օրինակ 9: Լուծենք

$$(x-7)\sqrt{5-4x-x^2}=0$$

հավասարումը: Հավասարման ձախ մասը երկու արտահայտությունների արտադրյալ է: Այն կարող է x կետում 0 լինել միայն այն դեպքում, երբ արտադրիչներից մեկն այդ կետում 0 է, իսկ մյուսը որոշված է: Հետևաբար՝ տրված հավասարումը համարժեք է հետևյալ համախմբին.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-7=0\\ 5-4x-x^2\ge 0:\end{cases}\\ 5-4x-x^2=0\end{array}\right.$$

Քանի որ առաջին հավասարման $x=7$ արմատը չի բավարարում $5-4x-x^2\ge 0$ անհավասարմանը, ուրեմն՝ համակարգը լուծում չունի, և $5-4x-x^2=0$ հավասարման $x_1=-5$ և $x_2=1$ արմատները կլինեն համախմբի լուծումները:

Պատասխան՝ $-5; 1:$

Օրինակ 10: Լուծենք

$$\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}=1$$

հավասարումը: Հավասարման աջ և ձախ մասերը խորանարդ բարձրացնելով և օգտվելով $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$ նույնությունից՝ ստանում ենք՝

$$3x-2+3\sqrt[3]{(2x-1)(x-1)}\cdot\left(\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}\right)=1:$$

Փակագծերում բերված արտահայտությունը սկզբնական հավասարման ձախ մասն է: Հետևաբար, եթե x-ը սկզբնական հավասարման արմատ է, ապա այն պետք է բավարարի նաև հետևյալ հավասարմանը.

$$3x-2+3\sqrt[3]{(2x-1)(x-1)}=1:$$

Արմատանշան չպարունակող արտահայտությունները տեղափոխելով աջ մաս և խորանարդ բարձրացնելով՝ ստանում ենք

$$(2x-1)(x-1)=(1-x)^3$$

հավասարումը, որտեղից $(x-1)x^2=0$, հետևաբար՝ $x=0$ կամ $x=1$: Այսպիսով, ենթադրելով, որ x-ը սկզբնական հավասարման արմատ է, ստացանք, որ այն պետք է լինի 0 կամ 1: Ստուգելով պարզում ենք, որ 0-ն չի բավարարում սկզբնական հավասարմանը, իսկ 1-ը բավարարում է:

Պատասխան՝ 1:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ո՞ր հավասարումն է կոչվում իռացիոնալ:
2. Ո՞րն է $\sqrt[n]{x}=a$ հավասարման լուծումը, եթե n-ը՝ ա) կենտ է, բ) զույգ է:
3. Ինչպե՞ս են լուծում $\sqrt[n]{f(x)}=a$ հավասարումը, եթե n-ը՝ ա) կենտ է, բ) զույգ է:
4. Ինչպե՞ս են լուծում $\sqrt{f(x)}=g(x)$ տեսքի հավասարումը:
5. Ինչպե՞ս են լուծում $\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}$ տեսքի հավասարումը:

6. Կարո՞ղ են առաջանալ կողմնակի արմատներ, եթե հավասարման երկու մասերը բարձրացնենք զույգ աստիճան:

7. Կարո՞ղ են առաջանալ կողմնակի արմատներ, եթե հավասարման երկու մասերը բարձրացնենք կենտ աստիճան:

Առաջադրանքներ

Լուծել հավասարումը (79-89).

79. ա) $\sqrt{2x-9}=5$, բ) $\sqrt{x^2-3x}=2$, գ) $\sqrt{4x-1}=-3$,

դ) $\sqrt[3]{7x+1}=4$, ե) $\sqrt[5]{x^2+x+2}=2$, զ) $\sqrt[3]{5x-31}=-1$:

80. ա) $\sqrt{2x+2}=x-3$, բ) $\sqrt{x^2+8}-2x=1$,

գ) $\sqrt{6-4x-x^2}-4=x$, դ) $\sqrt[4]{6-x^2}=x$,

ե) $\sqrt{3x+4}-3x+8=0$, զ) $\sqrt[4]{8x^2+9}-x=0$,

է) $\sqrt[3]{x^3+7}=x+1$, ը) $\sqrt[3]{x^3-7}=x-1$:

81. ա) $\sqrt{3x+5}=\sqrt{x+17}$, բ) $\sqrt{x^2-7x}=\sqrt{2x-8}$,

գ) $\sqrt[4]{2x^2+7}=\sqrt[4]{5x^2-4x-8}$, դ) $\sqrt[3]{x^2-1}=\sqrt[3]{2x^4+x^2-9}$,

ե) $\sqrt[3]{11-x}=\sqrt[3]{2x^2+4x-7}$, զ) $\sqrt[5]{2x^2+x}=\sqrt[5]{3x^2-x-3}$:

82. ա) $\sqrt{x-4}+\sqrt{5-x}=1$, բ) $\sqrt{3-x}-\sqrt{2+x}=-1$,

գ) $\sqrt{5x-1}-2\sqrt{x+1}=\sqrt{x-5}$, դ) $\sqrt{7x+7}-2\sqrt{x+2}=\sqrt{3x-1}$:

➤**83.** ա) $x\sqrt{2x+1}=x^2+x$, բ) $x\sqrt{x-3}=2x^2-7x$,

գ) $(x-1)\sqrt{x^2-x-6}=6x-6$, դ) $(x+2)\sqrt{2x+3}=x^2-4x-12$:

➤**84.** ա) $\sqrt{x^3-2x^2}-\sqrt{4x-8}=8$, բ) $\sqrt{x^3-3x^2}-\sqrt{9x-27}=27$:

85. ա) $\sqrt{x^2-3x+5}+x^2-3x=7$, բ) $x^2+\sqrt{x^2+2x+8}=12-2x$,

գ) $\sqrt{3x^2-2x+15}+\sqrt{3x^2-2x+8}=7$:

86. ա) $\dfrac{4}{2+\sqrt[3]{x-1}}+\dfrac{2+\sqrt[3]{x-1}}{5}=1{,}8$, բ) $\sqrt{x^2-7}-\dfrac{6}{\sqrt{x^2-7}}=1$, գ) $\sqrt{\frac{2x-5}{x-3}}+6\sqrt{\frac{x-3}{2x-5}}=\frac{11}{2}$, դ) $3\sqrt{x-4}-5\sqrt[4]{x-4}=2$:

➢87. ա) $(x^2+2x-8)\sqrt{6+x-x^2}=0$, բ) $(2x^2+x-1)\sqrt{x-x^2}=0$:

➢88. ա) $\sqrt[3]{x+6}+\sqrt[3]{10-x}=4$, բ) $\sqrt[3]{x+7}-\sqrt[3]{x+26}=-1$:

*** 89.** ա) $\frac{x-1}{x-\sqrt{x}}-\frac{x-4}{x+\sqrt{4x}}=\frac{3}{2}\sqrt{x-2}$,

բ) $\frac{2x-54}{\sqrt[3]{x}-3}+\frac{3x+24}{\sqrt[3]{x}+2}=x\sqrt[3]{x}+34$,

գ) $\frac{x\sqrt{x}-1}{x+\sqrt{x}+1}+\frac{x\sqrt{x}+1}{x-\sqrt{x}+1}=2\sqrt{x^2-12}$:

➢90. Լուծել համակարգը.

ա) $\begin{cases}\sqrt{x}-\sqrt{y}=0{,}5\sqrt{xy}\\ x+y=5\end{cases}$, բ) $\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt[3]{x-y}=6\\ \sqrt[6]{(x+y)^3(x-y)^2}=8\end{cases}$,

գ) $\begin{cases}\sqrt{\frac{6x}{x+y}}+\sqrt{\frac{x+y}{6x}}=\frac{5}{2},\\ xy-x-y=9\end{cases}$ դ) $\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=4\\ xy=27\end{cases}$:

Լուծել հավասարումը (91-99).

➢91. ա) $\sqrt{3+x}+\sqrt{7-x}=\sqrt{28+4x-x^2}$,

բ) $\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+2}=\sqrt{3x^2+8x-12}$:

➢92. ա) $\sqrt{x^2+4x+4}+\sqrt{x^2-12x+36}=16$,

բ) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2$:

*** 93.** ա) $x+\sqrt{x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}}=4$, բ) $x-\sqrt{x-\frac{1}{2}-\sqrt{x-\frac{3}{4}}}=2$:

*** 94.** ա) $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-4}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-4}}=\frac{10}{3}\sqrt{\frac{x}{x-4}}$, բ) $\frac{x+2+\sqrt{x^2-4}}{x-2+\sqrt{x^2-4}}=2\cdot\frac{\sqrt[4]{x+2}}{\sqrt[4]{x-2}}+3$:

*** 95.** ա) $x^2-x+2=2\left(x-\sqrt{x-2}\right)^2$, բ) $x^2-x-2=2\left(x+\sqrt{x+2}\right)^2$:

*** 96.** ա) $4\left(x-\sqrt{50-x^2}\right)=x^2-25$, բ) $\frac{x-5}{\sqrt{3x-1}}=\sqrt{2x-3}-\sqrt{x+2}$:

*** 97.** ա) $\sqrt{x+24}-\sqrt[3]{x-12}=6$, բ) $\sqrt[3]{50+x}+\sqrt{50-x}=10$:

➢98. ա) $5-\sqrt{25-x^2}=\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x}$, բ) $\sqrt{100-x^2}+10=3\left(\sqrt{10+x}+\sqrt{10-x}\right)$:

➢99. ա) $\sqrt{x^2+11x+6}-\sqrt{x^2-x+6}=2\sqrt{x}$, բ) $\sqrt{x^2+2x+8}+\sqrt{x^2-3x+8}=5\sqrt{-x}$:

*** 100.** Ապացուցել, որ հավասարումն արմատ չունի.

ա) $\sqrt{x}+\sqrt{x+9}=3-3^x$, բ) $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+15}=4-x^2$,

գ) $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}=2\sqrt[4]{x^2-4}$, դ) $\sqrt[6]{1-x}=\sqrt[3]{x-2}$:

*** 101.** Ապացուցել, որ հավասարման արմատները նշված թվերն են.

ա) $\sqrt{x-2}+\sqrt[4]{3-x}=1$, $x_1=2$, $x_2=3$,

բ) $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}=\sqrt[4]{16+|x|}$, $x=0$,

գ) $\sqrt{x^2-4x+5}+\sqrt{x-2}=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$, $x=2$:

Կրկնության համար

102. Լուծել համախումբը.

ա) $\left[\begin{array}{l}x^2+2x-8>0\\ 6x-12<0\end{array}\right.$, բ) $\left[\begin{array}{l}5x^2+4x-1\le 0\\ x+1<0\end{array}\right.$:

103. Լուծել համակարգը.

ա) $\begin{cases}3x^2-x-10\ge 0\\ 2x+14>0\end{cases}$, բ) $\begin{cases}x^2-x-6\le 0\\ 4x-12\ge 0\end{cases}$:

§3. Իռացիոնալ անհավասարումներ

Արմատանշանի տակ կամ կոտորակային աստիճանով փոփոխական պարունակող անհավասարումը կոչվում է ***իռացիոնալ անհավասարում***: Պարզագույն իռացիոնալ անհավասարումներ են

$$\sqrt[n]{x}>a \quad \text{և} \quad \sqrt[n]{x}<a$$

անհավասարումները, որտեղ n-ը բնական, իսկ a-ն՝ կամայական թվեր են, ընդ որում՝ $n>1$:

Նախ քննարկենք այն դեպքը, երբ n-ը կենտ է: Գիտենք, որ այս դեպքում $\varphi(x)=x^n$ ֆունկցիան աճող է ամբողջ թվային առանցքի վրա: Այսինքն՝ կամայական u և v թվերի համար $u<v$ անհավասարությունից հետևում է, որ

$u^n < v^n$, իսկ եթե $u > v$, ապա $u^n > v^n$: Նշանակում է՝

անհավասարության երկու մասերը կարելի է բարձրացնել կենտ աստիճան՝ պահպանելով անհավասարության նշանը.

$$\boldsymbol{u < v \Leftrightarrow u^n < v^n \qquad (n = 2k+1, \quad k \in \mathbf{N})}:$$

Այստեղից ստացվում են պարզագույն իռացիոնալ անհավասարումների լուծումները կենտ n-ի դեպքում:

Եթե n-ը կենտ է, ապա կամայական a-ի համար

$$\boldsymbol{\sqrt[n]{x} > a \Leftrightarrow x > a^n, \qquad \sqrt[n]{x} < a \Leftrightarrow x < a^n}:$$

Նման ձևով են լուծվում նաև ոչ խիստ անհավասարումները:

Օրինակ 1: Լուծենք $\sqrt[5]{3x-10} \le -1$ անհավասարումը:

Անհավասարման երկու մասերը բարձրացնելով 5 աստիճան՝ ստանում ենք նրան համարժեք $3x-10 \le -1$ անհավասարումը, որի լուծումն է՝ $x \le 3$:

Պատասխան՝ $(-\infty;3]$:

Այժմ քննարկենք այն դեպքը, երբ n-ը զույգ է: Այս դեպքում $\varphi(x) = x^n$ ֆունկցիան նվազող է $(-\infty;0]$ միջակայքում և աճող՝ $[0;\infty)$ միջակայքում: Այսինքն՝ կամայական u և v ոչ բացասական թվերի համար $u < v$ անհավասարությունից հետևում է, որ $u^n < v^n$, և հակառակը: Այսպիսով՝

եթե անհավասարության երկու մասերը ոչ բացասական են, ապա այն կարելի է բարձրացնել զույգ աստիճան՝ պահպանելով անհավասարության նշանը.

$$\boldsymbol{u < v \Leftrightarrow u^n < v^n \qquad (u \ge 0,\ v \ge 0, \quad n = 2k,\ k \in \mathbf{N})}:$$

Ստորև հիմնականում կքննարկենք այն դեպքը, երբ $n = 2$: Եթե $f(x)$-ը x փոփոխականից կախված որևէ արտահայտություն է, ապա $\sqrt{f(x)}$ արտահայտությունը որոշված է, երբ $f(x) \ge 0$ և կարող է ընդունել միայն ոչ բացասական արժեքներ: Հետևաբար՝

1) ***եթե $a < 0$, ապա՝***

ա) $\boldsymbol{\sqrt{f(x)} < a}$ ***անհավասարումը լուծում չունի,***

բ) $\boldsymbol{\sqrt{f(x)} > a \Leftrightarrow f(x) \ge 0}$:

2) ***Եթե $a \ge 0$, ապա՝***

ա) $\boldsymbol{\sqrt{f(x)} > a \Leftrightarrow f(x) > a^2}$, **բ)** $\boldsymbol{\sqrt{f(x)} < a \Leftrightarrow 0 \le f(x) < a^2}$:

Նման ձևով են լուծվում նաև ոչ խիստ անհավասարումները: Մասնավորապես, $a=0$ դեպքում կունենանք՝

$$\sqrt{f(x)} \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq 0, \quad \sqrt{f(x)} \leq 0 \Leftrightarrow f(x)=0:$$

Օրինակ 2: Լուծենք հետևյալ անհավասարումները.

$$\text{ա) } \sqrt{3x^2-9x-3}<-7, \quad \text{բ) } \sqrt{x^2-6x+5} \geq -3, \quad \text{գ) } \sqrt{x^2-4} \leq 0:$$

Քանի որ ա) և բ) անհավասարումների ձախ մասերը չեն կարող զրոյից փոքր լինել, ուրեմն՝ ա) անհավասարումը լուծում չունի, իսկ բ) անհավասարմանը բավարարում են նրա ԹԱԲ-ի բոլոր կետերը, այսինքն՝ այն x-երը, որոնց համար $x^2-6x+5 \geq 0$: Լուծելով այս քառակուսային անհավասարումը՝ ստանում ենք՝ $x \leq 1$ կամ $x \geq 5$: Նույն պատճառով երրորդ անհավասարությունը ճիշտ է միայն այն դեպքում, երբ $x^2-4=0$, այսինքն՝ $x=\pm 2$:

Պատասխան՝ ա) լուծում չունի, բ) $(-\infty;1] \cup [5;\infty)$, գ) ± 2:

Օրինակ 3: Լուծենք

$$\sqrt{\frac{x+1}{x}} \geq 3$$

անհավասարումը: Համաձայն 2, ա համարժեքության՝

$$\sqrt{\frac{x+1}{x}} \geq 3 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x} \geq 9 \Leftrightarrow \frac{x+1-9x}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{8x-1}{x} \leq 0 \Leftrightarrow 0<x \leq \frac{1}{8}:$$

Պատասխան՝ $(0;1/8]$:

Օրինակ 4: Լուծենք

$$\sqrt{2x-3}<5$$

անհավասարումը: Համաձայն 2, բ համարժեքության,

$$\sqrt{2x-3}<5 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3<25 \\ 2x-3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<14 \\ x \geq 1{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow 1{,}5<x<14:$$

Պատասխան՝ $(1{,}5;14)$:

Օրինակ 5: Լուծենք

$$\sqrt{2x-5}>x-4 \qquad (1)$$

անհավասարումը: Դիտարկենք երկու դեպք.

ա) $x-4<0$: Այս պայմանը բավարարող յուրաքանչյուր x-ի համար (1) անհավասարման աջ մասը բացասական է, իսկ ձախը (եթե այն որոշված է)՝ ոչ բացասական, ուստի՝ x-ը կբավարարի (1) անհավասարմանը, եթե այն պատկանում է անհավասարման ԹԱԲ-ին, այսինքն՝ եթե $2x-5\ge 0$:

բ) $x-4\ge 0$: Այս պայմանը բավարարող x-երի համար (1) անհավասարման աջ մասը ոչ բացասական է, ուստի այն համարժեք է $2x-5>(x-4)^2$ անհավասարմանը: Այսպիսով՝

$$\sqrt{2x-5}>x-4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-4<0\\2x-5\ge 0\end{cases}\\\begin{cases}x-4\ge 0\\2x-5>(x-4)^2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<4\\x\ge 2{,}5\end{cases}\\\begin{cases}x\ge 4\\x^2-10x+21<0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\in[2{,}5;\,4)\\\begin{cases}x\ge 4\\3<x<7\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\in[2{,}5;\,4)\\x\in[4;\,7)\end{array}\right. \Leftrightarrow x\in[2{,}5;\,7):$$

Պատասխան՝ $[2{,}5;7)$:

Ընդհանրապես $\sqrt{f(x)}>g(x)$ տեսքի անհավասարումները, որտեղ $f(x)$-ը և $g(x)$-ը x փոփոխականից կախված արտահայտություններ են, կարելի է լուծել հետևյալ սխեմայով.

$$\sqrt{f(x)}>g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}g(x)<0\\f(x)\ge 0\end{cases}\\\begin{cases}g(x)\ge 0\\f(x)>g^2(x)\end{cases}\end{array}\right. :$$

Այժմ դիտարկենք $\sqrt{f(x)}<g(x)$ տեսքի անհավասարումը: Պարզ է, որ նրա լուծումները պետք է բավարարեն $f(x)\ge 0$ պայմանին, ինչպես նաև $g(x)\ge 0$ պայմանին, քանի որ անհավասարման ձախ մասը չի կարող լինել բացասական: Նշված պայմանների դեպքում անհավասարման երկու մասերը ոչ բացասական են, և այն համարժեք է $f(x)<g^2(x)$ անհավասարմանը: Այսպիսով,

$$\sqrt{f(x)}<g(x) \Leftrightarrow \begin{cases}f(x)\ge 0\\g(x)\ge 0\\f(x)<g^2(x)\end{cases} : \qquad (2)$$

Օրինակ 6: Լուծենք

$$\sqrt{9x+4}\le 3x+2$$

անհավասարումը: Համաձայն (2) համարժեքության,

$$\sqrt{9x+4} \le 3x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} 9x+4 \ge 0 \\ 3x+2 \ge 0 \\ 9x+4 \le 9x^2+12x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-4/9;\infty) \\ x \in [-2/3;\infty) \\ x \in (-\infty;-1/3] \cup [0;\infty) \end{cases} :$$

Մնում է հատել ստացված բազմությունները:

Պատասխան՝ $[-4/9;-1/3] \cup [0;\infty)$:

Օրինակ 7: Լուծենք հետևյալ անհավասարումները.

$$\text{ա) } (x-1)\sqrt{4-x^2} < 0, \qquad \text{բ) } (x-1)\sqrt{4-x^2} \le 0:$$

ա) Անհավասարման ձախ մասը երկու արտահայտությունների արտադրյալ է, որը բացասական կլինի այն և միայն այն դեպքում, երբ արտադրիչներն ունենան տարբեր նշաններ: Քանի որ $\sqrt{4-x^2}$ արտադրիչը բացասական լինել չի կարող, ուրեմն

$$(x-1)\sqrt{4-x^2} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4-x^2 > 0 \\ x-1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < 2 \\ x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < x < 1:$$

բ) Անհավասարմանը, բացի ա) անհավասարման լուծումներից, կբավարարեն նաև x-ի այն արժեքները, որոնց դեպքում անհավասարման ձախ մասը զրո է՝ $x_1 = 1,\ x_2 = -2,\ x_3 = 2$:

Պատասխան՝ ա) $(-2;1)$, բ) $[-2;1] \cup \{2\}$:

Նկատենք, որ բ) անհավասարումը կարելի է լուծել նաև հետևյալ կերպ: Անհավասարման ԹԱԲ–ին պատկանող x-երի համար հնարավոր է երկու դեպք. $4-x^2=0$ կամ $4-x^2>0$: Առաջին դեպքում ստացված $x=\pm 2$ արմատները բավարարում են բ) անհավասարմանը, իսկ երկրորդ դեպքում այն համարժեք է $x-1 \le 0$ անհավասարմանը: Այսպիսով,

$$(x-1)\sqrt{4-x^2} \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4-x^2 = 0 \\ \begin{cases} 4-x^2 > 0 \\ x-1 \le 0 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 2 \\ -2 < x \le 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow x \in [-2;1] \cup \{2\}:$$

Օրինակ 8: Լուծենք

$$\sqrt{2x-1} \le \sqrt{2+3x-10x^2}$$

անհավասարումը: Քանի որ x-ի թույլատրելի արժեքների տիրույթում անհավասարման աջ և ձախ մասերը ոչ բացասական են, ուրեմն այն համարժեք է հետևյալ համակարգին.

$$\begin{cases} 2x-1\ge 0 \\ 2+3x-10x^2\ge 0 \\ 2x-1\le 2+3x-10x^2 \end{cases} :$$

Հեշտ է տեսնել, որ համակարգի երկրորդ անհավասարությունը հետևում է առաջինից և երրորդից, ուստի այն կարող ենք անտեսել.

$$\begin{cases} 2x-1\ge 0 \\ 2x-1\le 2+3x-10x^2 \end{cases} :$$

Համակարգի առաջին անհավասարման լուծումն է՝ $x\ge 0{,}5$, իսկ երկրորդինը՝ $-0{,}5\le x\le 0{,}6$: Համակարգի լուծումը կլինի՝ $0{,}5\le x\le 0{,}6$:

Պատասխան՝ $[0{,}5;0{,}6]$:

Օրինակ 9: Լուծենք

$$\sqrt{9+x}<5-\sqrt{8-x}$$

անհավասարումը: Նրա երկու մասերը որոշված են, երբ $9+x\ge 0$ և $8-x\ge 0$, ուստի անհավասարման ԹԱԲ-ը $[-9;8]$ միջակայքն է: Եթե $\sqrt{8-x}$ արտահայտությունը տեղափոխենք անհավասարման ձախ մաս, ստացված անհավասարման աջ և ձախ մասերը $[-9;8]$ միջակայքում կլինեն ոչ բացասական, և մենք կարող ենք երկու մասերը բարձրացնել քառակուսի՝ պահպանելով անհավասարման նշանը՝

$$\left(\sqrt{9+x}+\sqrt{8-x}\right)^2<25 :$$

Պարզեցնելով՝ կստանանք

$$\sqrt{72-x-x^2}<4$$

անհավասարումը, որի ձախ մասը որոշված է և ոչ բացասական $[-9;8]$ միջակայքում: Եվս մեկ անգամ քառակուսի բարձրացնելով՝ ստանում ենք

$$x^2+x-56>0$$

քառակուսային անհավասարումը, որի լուծումն է՝ $x\in(-\infty;-8)\cup(7;\infty)$: Հատելով ստացված բազմությունը ԹԱԲ-ի հետ, ստանում ենք տրված անհավասարման լուծումը՝ $x\in[-9;-8)\cup(7;8]$:

Պատասխան՝ $[-9;-8)\cup(7;8]$:

Օրինակ 10: Լուծենք

$$(3-x)\sqrt{x+4}+2x>6$$

անհավասարումը: Ձևափոխելով՝ ստանում ենք

$$(3-x)\left(\sqrt{x+4}-2\right)>0$$

անհավասարումը, որի ձախ մասը երկու արտահայտությունների արտադրյալ է: Այն դրական կլինի այն և միայն այն դեպքում, երբ արտադրիչներն ունենան նույն նշանը: Հետևաբար՝ անհավասարումը համարժեք է հետևյալ համախմբին.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}3-x>0\\ \sqrt{x+4}-2>0\end{cases}\\ \begin{cases}3-x<0\\ \sqrt{x+4}-2<0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<3\\ x+4>4\end{cases}\\ \begin{cases}x>3\\ 0\le x+4<4\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<3\\ x>0\end{cases}\\ \begin{cases}x>3\\ -4\le x<0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow x\in(0;3):$$

Պատասխան՝ $(0;3)$:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ո՞ր անհավասարումն է կոչվում իռացիոնալ:
2. Կարելի՞ է արդյոք անհավասարության երկու մասերը բարձրացնել կենտ աստիճան՝ պահպանելով անհավասարության նշանը:
3. Ե՞րբ է կարելի անհավասարության երկու մասերը բարձրացնել զույգ աստիճան՝ պահպանելով անհավասարության նշանը:
4. Ո՞րն է $\sqrt[n]{x}<a$ անհավասարման լուծումը, եթե՝ ա) n-ը կենտ է, բ) n-ը զույգ է և $a<0$, գ) n-ը զույգ է և $a\ge 0$:
5. Ո՞րն է $\sqrt[n]{x}>a$ անհավասարման լուծումը, եթե՝ ա) n-ը կենտ է, բ) n-ը զույգ է և $a<0$, գ) n-ը զույգ է և $a\ge 0$:
6. Ինչպե՞ս են լուծում $\sqrt{f(x)}<a$ տեսքի անհավասարումը, եթե՝ ա) $a<0$, բ) $a\ge 0$:
7. Ինչպե՞ս են լուծում $\sqrt{f(x)}<g(x)$ տեսքի անհավասարումը:
8. Ինչպե՞ս են լուծում $\sqrt{f(x)}>g(x)$ տեսքի անհավասարումը:
9. Ինչպե՞ս են լուծում $\sqrt{f(x)}<\sqrt{g(x)}$ տեսքի անհավասարումը:

Առաջադրանքներ

Լուծել անհավասարումը (104-118).

104. ա) $\sqrt{3x-2}>5$, բ) $\sqrt{4x-12}>0$, գ) $\sqrt{3x-6}\le 9$,

դ) $\sqrt{2x-9}+3\le 0$, ե) $\sqrt{7x-21}+5\ge 0$, զ) $\sqrt{5x-10}\le 0$:

105. ա) $\sqrt[4]{3-5x^2}<-2$, բ) $\sqrt[3]{5-2x^2}\le -3$, գ) $\sqrt[6]{x-x^2}>-4$,

դ) $\sqrt[3]{x-1}<x-1$, ե) $\sqrt[8]{\dfrac{x-2}{3x+6}}<1$, զ) $\sqrt[5]{\dfrac{2x-2}{3x+6}}<1$:

106. ա) $\sqrt{x^2+9x+14} \ge 6$, բ) $\sqrt{5x^2-4x-1} < \sqrt{11}$,

գ) $\sqrt{\dfrac{23x-10}{2x+5}} < 3$, դ) $\sqrt{\dfrac{3x+1}{7x-8}} \ge \dfrac{1}{2}$:

107. ա) $\sqrt{10-3x} \ge x-2$, բ) $\sqrt{9-10x} < 3-2x$,

գ) $\sqrt{2x-5}+4 > x$, դ) $\sqrt{7-2x}+x \le 2$:

➤**108.** ա) $\sqrt{8x^2+22x+15} \ge 4x+3$, բ) $\sqrt{8x^2-2x}+2 > 4x$,

գ) $4x-\sqrt{6x^2-18x+12} < 10$, դ) $2x-\sqrt{6x^2-9x-6} \le 1$:

* **109.** ա) $\sqrt{5+4x-x^2} \ge 5x-x^2-8$, բ) $\sqrt{15+2x-x^2} > 10x-x^2-25$:

110. ա) $\sqrt{5x-14} > \sqrt{18-3x}$, բ) $\sqrt{0{,}3x+2{,}7} \ge \sqrt{5{,}3-1{,}8x}$,

գ) $\sqrt{2x-1} < \sqrt{2+3x-10x^2}$, դ) $\sqrt{7x^2+15x+2} \le \sqrt{2-x}$:

111. ա) $(x-5)\sqrt{2x-6} > 0$, բ) $(x-7)\sqrt{3x-12} \ge 0$,

գ) $(2x-9)\sqrt{x-3} < 0$, դ) $(3x-5)\sqrt{x-7} \le 0$:

➤**112.** ա) $(2x^2-5x-12)\sqrt{11x-5-2x^2} \ge 0$, բ) $(x^2+3x-10)\sqrt{9x-4-2x^2} \le 0$:

113. ա) $\dfrac{2x^2-9x-11}{\sqrt{x+2}} \ge 0$, բ) $\dfrac{x^2+9x+14}{\sqrt{x+5}} < 0$:

* **114.** ա) $\left(x-\sqrt{x^2}\right)\sqrt{9-x^2} \ge 0$, բ) $\dfrac{x+\sqrt{x}-2}{x-\sqrt{x}-2} \le 0$:

* **115.** ա) $x\sqrt{x^2}-5x-6 \ge 0$, բ) $3x+10\cdot\sqrt[4]{x^2}-8 > 0$:

➤**116.** ա) $\sqrt{9-x}+\sqrt{x-1} < 4$, բ) $7-\sqrt{26-x} \ge \sqrt{x+3}$,

գ) $\sqrt{5+x}+\sqrt{2+x} < \sqrt{8-x}$, դ) $\sqrt{x+8}-\sqrt{x+3} \ge \sqrt{2x-1}$:

➤**117.** ա) $(x+2)\left(\sqrt{4x+19}-3\right) > 0$, բ) $x\left(\sqrt{5x+6}-1\right) \ge 0$,

գ) $\dfrac{3-x}{\sqrt{x+4}-2} \le 0$, դ) $x\sqrt{2x+3} < 7x$:

➤**118.** ա) $\dfrac{x-12}{\sqrt{x-4}-3} > 4$, բ) $\dfrac{18-x}{3-\sqrt{x-9}} \le 6$,

գ) $\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}+\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x}-5}+\dfrac{1}{\sqrt{x}+5} \le 0$:

119. Հաշվել՝

ա) $4\sqrt{15}\cos\alpha$-ն, եթե $\operatorname{ctg}\alpha = -\sqrt{15}$ և $\sin\alpha < 0$,

բ) $\sqrt{5}\sin\alpha$-ն, եթե $\operatorname{tg}\alpha = -2$ և $\cos\alpha < 0$,

գ) $6\cos\alpha$-ն, եթե $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{35}$ և $\sin\alpha < 0$,

դ) $3\sqrt{2}\cos\alpha$-ն, եթե $\sin\alpha = \dfrac{1}{3}$ և $\operatorname{tg}\alpha < 0$:

§4. Մոդուլ պարունակող հավասարումներ և անհավասարումներ

Այս պարագրաֆում կդիտարկենք հավասարումներ և անհավասարումներ, որոնցում կան $|f(x)|$ տեսքի, այսինքն՝ մոդուլի նշանի մեջ անհայտ պարունակող արտահայտություններ: Հիշենք, որ ըստ մոդուլի սահմանման՝

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ եթե } a \geq 0 \\ -a, \text{ եթե } a < 0 \end{cases}: \qquad (1)$$

Հետևաբար, մոդուլ պարունակող կամայական հավասարում (անհավասարում) լուծելիս կարող ենք «ազատվել» մոդուլից, եթե իմանանք մոդուլի նշանի մեջ գտնվող արտահայտության նշանը: Այսինքն՝ պետք է դիտարկել երկու դեպք.

ա) $f(x) \geq 0$, բ) $f(x) < 0$:

Այնուհետև, հաշվի առնելով (1)-ը, ա) դեպքում $|f(x)|$-ը փոխարինել $f(x)$-ով, իսկ բ) դեպքում՝ $-f(x)$-ով: Սա մոդուլից ազատվելու հիմնական եղանակն է:

Օրինակ 1: Լուծենք $|x-1| \leq 8-2x$ անհավասարումը:
Համաձայն վերը ասվածի, անհավասարումը համարժեք է հետևյալ համախմբին.

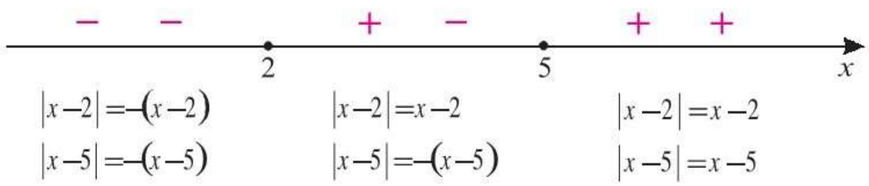
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-1 \leq 8-2x \end{cases} \\ \begin{cases} x-1 < 0 \\ -(x-1) \leq 8-2x \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 1 \\ x \leq 7 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in [1;3] \\ x \in (-\infty;1) \end{array}\right. \Leftrightarrow (-\infty;3]:$$

Պատասխան՝ $(-\infty;3]$:

Եթե մոդուլով արտահայտությունների քանակը մեկից ավելի է, անհրաժեշտ է ամբողջ թվային առանցքը տրոհել միջակայքերի, որոնցից յուրաքանչյուրում մոդուլի նշանի մեջ գտնվող արտահայտությունները պահպանում են իրենց նշանը, այնուհետև օգտվել (1) բանաձևից:

Օրինակ 2: Լուծենք $|x-2|+|x-5|=3$ հավասարումը:

Մոդուլի նշանի մեջ գտնվող $x-2$ և $x-5$ արտահայտությունները զրո են դառնում համապատասխանաբար $x=2$ և $x=5$ կետերում: Այդ կետերն ամբողջ թվային առանցքը տրոհում են երեք միջակայքերի՝ $(-\infty;2)$, $[2;5]$ և $(5;\infty)$ (նկ. 11):



Նկ. 11

Առաջին միջակայքում $x-2$ և $x-5$ արտահայտությունները բացասական են, ուստի՝

$$|x-2|=-(x-2),\quad |x-5|=-(x-5):$$

Երկրորդ միջակայքում $x-2\ge 0$, $x-5\le 0$, ուստի՝

$$|x-2|=x-2,\quad |x-5|=-(x-5),$$

Երրորդ միջակայքում երկու արտահայտություններն էլ դրական են, և

$$|x-2|=x-2,\quad |x-5|=x-5:$$

Այսպիսով՝ ստանում ենք հետևյալ համախումբը.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<2\\-(x-2)-(x-5)=3\end{cases}\\ \begin{cases}2\le x\le 5\\x-2-(x-5)=3\end{cases}\\ \begin{cases}x>5\\x-2+x-5=3\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<2\\x=2\end{cases}\\ \begin{cases}2\le x\le 5\\3=3\end{cases}\\ \begin{cases}x>5\\x=5\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\varnothing\\x\in[2;5]\\\varnothing\end{array}\right. \Leftrightarrow x\in[2;5]:$$

Պատասխան՝ $[2;5]$:

Հաճախ հավասարման կամ անհավասարման լուծումն ավելի հեշտանում է, եթե վերը նշված հիմնական եղանակի փոխարեն օգտվում ենք մոդուլի հետևյալ հատկություններից:

Կամայական x և y թվերի համար՝

1) $|x| \geq 0$,
2) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
3) $|x| > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$,
4) $|x| \leq 0 \Leftrightarrow x = 0$,
5) $|x| = |y| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ x = -y \end{array}\right.$,
6) $|x| = y \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = y \\ x = -y \end{array}\right. \end{cases}$,
7) $|x| < y \Leftrightarrow \begin{cases} x < y \\ x > -y \end{cases}$,
8) $|x| > y \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > y \\ x < -y \end{array}\right.$:

1–6-րդ հատկությունները, ինչպես նաև 7-րդը և 8-րդը $y \geq 0$ դեպքում, մեզ լավ ծանոթ են. դրանք անմիջապես բխում են մոդուլի սահմանումից: Իսկ $y < 0$ դեպքում 7-րդ համարժեքության թե՛ ձախ անհավասարությանը և թե՛ աջ համակարգին ոչ մի x չի բավարարում, իսկ 8-րդի և՛ ձախ անհավասարությանը, և՛ աջ համախմբին բավարարում են բոլոր x-երը:

Օրինակ 3: Լուծենք $|x-2| = |x-5|$ հավասարումը:
Հիմնական եղանակով լուծելու դեպքում պետք է ամբողջ թվային առանցքը տրոհենք երեք միջակայքերի, ինչպես դա արեցինք 2-րդ օրինակում: Մինչդեռ, համաձայն 5-րդ հատկության,

$$\left[\begin{array}{l} x-2 = x-5 \\ x-2 = -x+5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \varnothing \\ x = 3{,}5 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 3{,}5:$$

Պատասխան՝ 3,5:

Օրինակ 4: Լուծենք $|x^2 - 15| = 2x$ հավասարումը:
Համաձայն 6-րդ հատկության,

$$\begin{cases} 2x \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2 - 15 = 2x \\ x^2 - 15 = -2x \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = -3 \text{ կամ } x = 5 \\ x = -5 \text{ կամ } x = 3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5 \\ x = 3 \end{array}\right.:$$

Պատասխան՝ 3; 5:

Օրինակ 5: Լուծենք $|x^2 - 7| < 2$ անհավասարումը:
Համաձայն 7-րդ հատկության,

$$\begin{cases} x^2 - 7 < 2 \\ x^2 - 7 > -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-3;3) \\ x \in (-\infty;-\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5};\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-3;-\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5};3):$$

Պատասխան՝ $(-3;-\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5};3)$:

Օրինակ 6: Լուծենք $\left|2x^2-13x+17\right|+x\le 7$ անհավասարումը:
Անհավասարումը գրելով $\left|2x^2-13x+17\right|\le 7-x$ տեսքով և օգտվելով մոդուլի 7-րդ հատկությունից՝ ստանում ենք.

$$\begin{cases}2x^2-13x+17\le 7-x\\ 2x^2-13x+17\ge x-7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in[1;5]\\ x\in[-\infty;3]\cup[4;\infty]\end{cases}\Leftrightarrow x\in[1;3]\cup[4;5]:$$

Պատասխան՝ $[1;3]\cup[4;5]$:

(Համեմատեք այս լուծումը 1-ին օրինակում բերված լուծման հետ):

Օրինակ 7: Լուծենք $|3x-1|>4-2x$ անհավասարումը:
Համաձայն մոդուլի 8-րդ հատկության,

$$\left[\begin{array}{l}3x-1>4-2x\\ 3x-1<2x-4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>1\\ x<-3\end{array}\right.\Leftrightarrow x\in(-\infty;-3)\cup(1;\infty):$$

Պատասխան՝ $(-\infty;-3)\cup(1;\infty)$:

Օրինակ 8: Լուծենք $x^2-7|x|+12\le 0$ անհավասարումը:
Հաշվի առնելով, որ $x^2=|x|^2$, ստանում ենք $|x|^2-7|x|+12\le 0$ քառակուսային անհավասարումը ($|x|$-ի նկատմամբ): Հետևաբար՝

$$\begin{cases}|x|\le 4\\ |x|\ge 3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in[-4;4]\\ x\in(-\infty;-3]\cup[3;\infty)\end{cases}\Leftrightarrow x\in[-4;-3]\cup[3;4]:$$

Պատասխան՝ $[-4;-3]\cup[3;4]$:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Նկարագրեք մոդուլ պարունակող հավասարման կամ անհավասարման մեջ մոդուլից ազատվելու հիմնական եղանակը:
2. Որո՞նք են մոդուլի հատկությունները:
3. Ինչպե՞ս են լուծում $|f(x)|=|g(x)|$ տեսքի հավասարումը:
4. Ինչպե՞ս են լուծում $|f(x)|=g(x)$ տեսքի հավասարումը:
5. Ինչպե՞ս են լուծում $|f(x)|<g(x)$ տեսքի անհավասարումը:
6. Ինչպե՞ս են լուծում $|f(x)|>g(x)$ տեսքի անհավասարումը:

Առաջադրանքներ

Լուծել հավասարումը (120-125).

120. ա) $|5x-2|=3$, բ) $|4x-1|=0$, գ) $|7x-3|=-2$

դ) $|4-9x|+3=0$, ե) $4-|7-3x|=0$, զ) $|8-5x|=0$:

:

121. ա) $\left|x^2-6x+8\right|=1$, բ) $\left|8-2x-x^2\right|=9$, գ) $\left|x^3-4\right|=4$:

122. ա) $\left|\sin x-0{,}5\right|=0{,}5$, բ) $\left|\operatorname{tg} x-1\right|=2$, գ) $\left|2\lg x-3\right|=1$:

123. ա) $\left|2x-1\right|=3x+6$, բ) $\left|7x+1\right|+1=9x$, գ) $6x+\left|4x-1\right|=3$:

124. ա) $\left|x^2+6x+5\right|=5-2x$, բ) $\left|2x^2-9x-5\right|+5=3x$:

125. ա) $\left|2x^2-3x+1\right|=2x^2-3x+1$, բ) $\left|10x^2-3x-1\right|=1+3x-10x^2$:

Լուծել անհավասարումը (126-130).

126. ա) $\left|2x-5\right|\ge 7$, բ) $\left|4x-7\right|<9$, գ) $\left|5x-4\right|>6$,

դ) $3-\left|11-4x\right|\ge 0$, ե) $\left|15-6x\right|+1\ge 4$, զ) $\left|3-10x\right|-7\le 0$:

127. ա) $\left|6x-5\right|\ge 0$, բ) $\left|4x-1\right|>0$, գ) $\left|7x-3\right|<0$,

դ) $\left|2x-7\right|\le 0$, ե) $\left|5x-9\right|<-5$, զ) $\left|9x-5\right|>-4$:

➢**128.** ա) $\left|\dfrac{2x+1}{1-x}\right|\le 3$, բ) $\left|\dfrac{2-x}{x+3}\right|>4$, գ) $\left|\dfrac{5x-2}{4-x}\right|-\dfrac{1}{3}<0$:

129. ա) $\left|3x+1\right|<x+3$, բ) $\left|3-5x\right|+2x>5$, գ) $\left|4x+3\right|+3x\le 1$:

➢**130.** ա) $\left|x^2+3x-10\right|+4+2x\ge 0$, բ) $\left|2x^2-4x+3\right|\le 3-4x$:

Լուծել հավասարումը (131-134).

131. ա) $\left|7x-1\right|=\left|2x+4\right|$, բ) $\left|4x-5\right|=\left|7-2x\right|$,

գ) $\left|x^2-6x+7\right|=\left|3x-11\right|$, դ) $\left|x^2-3x+2\right|=\left|x^2-2x-5\right|$:

132. ա) $x^2-3\left|x\right|-10=0$, բ) $2x^2-9\left|x\right|+7=0$,

գ) $x^2+7=2x+5\left|x-1\right|$, դ) $x^2+4x+\left|x+2\right|=8$:

➢**133.** ա) $\left|3x-1\right|+\left|5x-2\right|=5$, բ) $\left|x+1\right|+\left|x-3\right|=6$:

➢**134.** ա) $\left|5x+1\right|+\left|5x+9\right|=8$, բ) $\left|x+5\right|+\left|3+x\right|=2$:

Լուծել անհավասարումը (135-137).

135. ա) $\left|13-2x\right|\ge\left|4x-9\right|$, բ) $\left|8-x\right|<\left|7+2x\right|$,

➢գ) $\left|x^2-x-12\right|\le\left|2x-4\right|$, ➢դ) $\left|2x^2-6x+7\right|>\left|7-6x\right|$:

➢**136.** ա) $\left|4-5x\right|+\left|x-3\right|<5$, բ) $\left|9-x\right|+\left|9+x\right|>18$,

գ) $\left|3-2x\right|+\left|x+1\right|\le 7+2x$, դ) $\left|4x+2\right|-\left|3x-1\right|\ge x+3$:

137. ա) $x^2-7\left|x\right|+10>0$, բ) $3x^2-7\left|x\right|-20\le 0$,

գ) $x^2+2x\le 5+\left|x+1\right|$, դ) $x^2+11\ge 6x+3\left|x-3\right|$:

Լուծել հավասարումը (138-141).

➤**138.** ա) $\left|x^2-1\right|=x|x-2|$, բ) $(x+2)|3x-7|=10$, գ) $x|x|-5x+6=0$:

➤**139.** ա) $\left|2-|3-2x|\right|=4$, բ) $\left|2|1+x|-5\right|=7$, գ) $\left|3x-|x-2|\right|=10$:

➤**140.** ա) $\left|\dfrac{x}{x-5}\right|=\dfrac{x}{x-5}$, բ) $\left|\dfrac{2x-1}{x-4}\right|=\dfrac{2x-1}{4-x}$, գ) $\left|\dfrac{x-x^2}{x-7}\right|=\dfrac{x^2-x}{x-7}$:

➤**141.** ա) $\left|x^2-5x-14\right|+\left|x^2-9x+14\right|=0$, բ) $\left|3x^2-4x-55\right|+\left|2x^2-7x-15\right|=0$:

Լուծել անհավասարումը (142-145).

➤**142.** ա) $(x+10)|x-7|>60$, բ) $3x|x|-13x+10\le 0$:

***143.** ա) $\left|\,|2-3x|-1\right|\ge 2$, բ) $\left|\,|x-1|-6\right|>6$, գ) $\left|2x+|3-x|\right|<15$:

➤**144.** ա) $\dfrac{|5x-4|}{x+9}\le 0$, բ) $\dfrac{\left|3x^2-x-2\right|}{2x-5}\ge 0$, գ) $\dfrac{\left|10x^2-3x-1\right|}{x}\le 0$:

* **145.** ա) $\left|6-x-x^2\right|+\left|x^2-2x-15\right|>0$, բ) $\left|4x^2-8x+3\right|+\left|24x^2-2x-5\right|>0$:

Կրկնության համար

➤**146.** Գտնել ֆունկցիայի փոքրագույն արժեքը.

ա) $f(x)=\lg\left(x^2-2x+11\right)+|x-1|$, բ) $f(x)=2^{x^2-6x+11}+|x-3|$:

➤**147.** Գտնել ֆունկցիայի մեծագույն արժեքը.

ա) $f(x)=\log_3\sqrt{81-x^2}+\dfrac{1}{1+|x|}$, բ) $f(x)=2^{10x-x^2-21}+\dfrac{1}{2+3|x-5|}$:

* **148.** Գտնել ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները.

ա) $f(x)=\sqrt{12-x^2-4x}-|x+2|$, բ) $f(x)=\sqrt{8x-x^2-7}-|x-4|$:

§5. Համակցված հավասարումներ և անհավասարումներ

Մինչև այժմ հիմնականում ուսումնասիրել ենք որևէ կոնկրետ թեմայի վերաբերող հավասարումներ և անհավասարումներ՝ գծային, քառակուսային, իռացիոնալ, եռանկյունաչափական, լոգարիթմական, ցուցչային և այլն: Այս պարագրաֆում կդիտարկենք հավասարումներ և անհավասարումներ, որտեղ համակցվում են տարբեր թեմաներ:

Օրինակ 1: Լուծենք $\sqrt{x-1}\cdot\log_2\left(x^2-x-1\right)=0$ հավասարումը:
x-ի թույլատրելի արժեքների համար ունենք.

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{x-1}=0\\ \log_2\left(x^2-x-1\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x^2-x-1=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-1 \text{ կամ } x=2\end{array}\right.:$$

Ստուգելով համոզվում ենք, որ ստացված արմատներից հավասարման ԹԱԲ-ին պատկանում է միայն 2-ը:

Պատասխան՝ 2:

Օրինակ 2: Լուծենք $\sqrt{5-x}\cdot\log_{0,3}(x-2)\geq 0$ անհավասարումը:
Անհավասարման ԹԱԲ-ը $(2;5]$ միջակայքն է: Հեշտ է համոզվել, որ $x=5$ արժեքը բավարարում է անհավասարմանը:

Եթե $5-x>0$, ապա ստանում ենք $\log_{0,3}(x-2)\geq 0$ անհավասարումը, որտեղից $x-2\leq 1$, և $x\leq 3$: Հատելով ԹԱԲ-ի հետ՝ կստանանք՝ $x\in(2;3]$:

Պատասխան՝ $(2;3]\cup\{5\}$:

Օրինակ 3: Լուծենք

$$\sqrt{16-x^2}\cdot\left|x^2-6x+5\right|=6x-x^2-5$$

հավասարումը: Հավասարման ԹԱԲ-ը $16-x^2\geq 0$ անհավասարման լուծումն է՝ $[-4;4]$: Քանի որ հավասարման ձախ մասը չի կարող լինել բացասական, նրա լուծումը պետք է բավարարի նաև $6x-x^2-5\geq 0$ պայմանին, որտեղից՝ $x\in[1;5]$: Այսպիսով, հավասարման արմատները ընկած են $[1;4]$ միջակայքում: Այդ միջակայքի x-երի համար $x^2-6x+5\leq 0$, ուստի՝ $\left|x^2-6x+5\right|=-\left(x^2-6x+5\right)$, և հավասարումը ստանում է հետևյալ տեսքը.

$$\left(x^2-6x+5\right)\left(1-\sqrt{16-x^2}\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-6x+5=0\\ \sqrt{16-x^2}=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1 \text{ կամ } x=5\\ x=\pm\sqrt{15}\end{array}\right.:$$

Դեն նետելով $[1;4]$ միջակայքին չպատկանող արմատները՝ ստանում ենք՝ $x=1$ կամ $x=\sqrt{15}$:

Պատասխան՝ $1;\sqrt{15}$:

Օրինակ 4: Լուծենք

$$2^{6x-7-x^2}<4+|x-3|$$

անհավասարումը: Պարզ է, որ անհավասարման աջ մասի փոքրագույն արժեքը 4 է, որն այն ընդունում է $x=3$ կետում:

Ձախ մասը հավասար է

$$2^{2-\left(x^2-6x+9\right)}=2^{2-(x-3)^2}:$$

Հետևաբար, ձախ մասի մեծագույն արժեքը դարձյալ 4 է, որն այն ընդունում է միևնույն՝ $x=3$ կետում: Այսպիսով՝ $x=3$ կետում անհավասարման ձախ և աջ մասերը հավասար են, իսկ x-ի մնացած արժեքները բավարարում են անհավասարմանը:

Պատասխան՝ $x\in(-\infty,3)\cup(3,\infty)$:

Օրինակ 5: Լուծենք

$$\begin{cases}\sin^3 2x-\sin 2x=0\\ |x-3|<0{,}5\end{cases}$$

համակարգը: Նախ լուծենք եռանկյունաչափական հավասարումը՝

$$\sin 2x\cdot\left(\sin^2 2x-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin 2x=0\\ \sin 2x=\pm 1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x=\pi k\\ 2x=\pi/2+\pi k\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}k,\quad k\in\mathbf{Z}:$$

Լուծելով մոդուլով անհավասարումը՝ ստանում ենք $(2{,}5;3{,}5)$ միջակայքը:

Համակարգի լուծումը գտնելու համար պետք է պարզենք, թե հավասարման արմատներից որո՞նք են բավարարում անհավասարմանը, այսինքն՝ ընտրենք k-ի այն ամբողջ արժեքները, որոնց համար $2{,}5<\frac{\pi}{4}k<3{,}5$: Համարելով $\pi\approx 3{,}14$, համոզվում ենք, որ $k=4$, հետևաբար՝ $x=\frac{\pi}{4}\cdot 4=\pi$:

Պատասխան՝ π:

Օրինակ 6: Լուծենք

$$\sqrt{\sin 2x}=\sqrt{2}\sin x$$

հավասարումը: Քանի որ հավասարման ձախ մասը չի կարող փոքր լինել զրոյից, ուրեմն՝ $\sin x\geq 0$: Այս պայմանը բավարարող x-երի համար հավասարումը համարժեք է՝

$$\sin 2x=2\sin^2 x\Leftrightarrow\sin x(\cos x-\sin x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \operatorname{tg}x=1\end{array}\right.:$$

Այսպիսով, տրված հավասարմանը բավարարում են $\sin x=0$ հավասարման արմատները $(x=\pi n,\ n\in\mathbf{Z})$, իսկ $\operatorname{tg}x=1$ հավասարման $x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$, արմատներից պետք է ընտրել նրանք, որոնց դեպքում $\sin x\geq 0$, այսինքն՝ առաջին քառորդում ընկածները՝ $x=\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$:

Պատասխան՝ $\pi n,\ \frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$:

Առաջադրանքներ

Լուծել հավասարումը (149-159).

149. ա) $\sqrt{x^2-1}\cdot\lg(x+1)=0$, բ) $\sqrt{x-2}\cdot\ln\left(x^2-3x+1\right)=0$, գ) $\dfrac{x\left(x^2-9\right)}{\log_{0,7}(x-1)}=0$, դ) $\dfrac{\sqrt{x^2-x-6}}{\log_2(3-x)}=0$:

150. ա) $\left|2^x-1\right|=2^{x+1}-5$, բ) $\left|6^{x-3}-1\right|=5\cdot6^{x-4}+5$:

➢**151.** ա) $\sqrt{x+3}\cdot|x|=x$, բ) $\sqrt{x}\cdot|x-3|=3-x$,

գ) $\sqrt{x^2(2x-5)}=x$, դ) $\sqrt{(x-1)^2x^3}=1-x$:

➢**152.** ա) $\sqrt{x^2-25}\cdot\left|x^2-8x+12\right|=8x-x^2-12$,

բ) $\sqrt{x^2-4x-44}\cdot\left|x^2-49\right|=49-x^2$:

* **153.** ա) $\left|x^2-2x-8\right|\cdot\ln\left(x^2+3x+5\right)=8+2x-x^2$,

բ) $\left|x^2-9\right|=\left(9-x^2\right)\cdot\log_6\left(x^2+4x+5\right)$:

* **154.** ա) $\left(x^2-2\right)\cdot|\sin x|=\sin x$, բ) $\sqrt{10-x^2}\,|\sin x|=\sin x$:

➢**155.** ա) $|x-3|^{3x^2-10x+3}=1$, բ) $|x-2|^{10x^2-3x-1}=1$:

156. ա) $\left|5^{x+2}-3\right|=2\cdot5^{2+x}$, բ) $\left|2^{-x}-5\right|+1=2^{1-x}$:

157. ա) $|\log_3x-1|+|\log_3x+2|=5$, բ) $|\lg x+5|-|\lg x+2|=3$:

➢**158.** ա) $|\log_5x+1|+|\log_{0,2}x+2|=3$, բ) $|\log_2x+2|+|\log_{0,5}x+4|=6$:

➢**159.** ա) $\sqrt{\log_4^2x+\log_{0,5}\dfrac{x}{2}}+\sqrt{\log_4^2x-\log_{\sqrt2}\dfrac{x}{4}}=1$,

բ) $\sqrt{\log_3^2x+\log_3(3x^2)}+\sqrt{\log_3^2x+2\log_{\sqrt3}\dfrac{3}{x}}=\log_3(9x)$:

Լուծել համակարգը (160-161).

160. ա) $\begin{cases}y=1+\log_5x\\x^y=25\end{cases}$, բ) $\begin{cases}4^{x+y}=2^{y-x}\\4^{\log_{\sqrt2}x}=y^4-5\end{cases}$, գ) $\begin{cases}xy=40\\x^{\lg y}=4\end{cases}$:

➢**161.** ա) $\begin{cases}\sin x=2\sin y\\x-y=\dfrac{5\pi}{3}\end{cases}$, բ) $\begin{cases}6\,\mathrm{tg}\,x\cdot\mathrm{tg}\,y=1\\x+y=\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$, գ) $\begin{cases}\sin x\cdot\sin y=0{,}25\\x+y=\dfrac{\pi}{3}\end{cases}$:

Լուծել հավասարումը (162-168).

162. ա) $|\sin x|=|\cos x|$, բ) $|\sin x|=|\sin2x|$, գ) $|\cos x|=|\sin2x|$:

➢**163.** ա) $|\cos x|-|\sin x|=1$, բ) $|\sin x|-|\cos x|=1$, գ) $|\sin x|+|\cos x|=1$:

➢**164.** ա) $\sin2x=|\sin x|$, բ) $\sin2x=|\cos x|$, գ) $|\sin x|=\sin x+2\,\mathrm{tg}\,x$:

➢**165.** ա) $\sqrt{\sin2x}=\cos x$, բ) $\sqrt{\cos2x}=\sin x$, գ) $\sqrt{\sin x}=\sqrt{\cos x}$:

*** 166.** ա) $\sqrt{\sin x - \sqrt{\sin x + \cos x}} = \cos x$, բ) $\sqrt{\cos x - \sqrt{\sin x + \cos x}} = \sin x$:

➢167. ա) $\cos\frac{x}{2}\cdot\sqrt{18x - x^2 - 77} = 0$, բ) $(\sin 2x - 1)\sqrt{14x - x^2 - 48} = 0$:

➢168. ա) $2^{\sin^2 x} + 4\cdot 2^{\cos^2 x} = 6$, բ) $100^{\sin^2 x} + 100^{\cos^2 x} = 20$,

գ) $25^{1+\sin(\pi - x)} + 25^{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)} = 130$, դ) $36^{1+\cos(\pi + x)} + 36^{1+\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)} = 222$:

*** 169.** Հաշվել`

ա) $\sqrt{2}(2\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)$-ն, եթե $\sqrt{3}\cos\alpha - 2\sqrt{2\sin\alpha} = 0$,

բ) $\left(\sqrt{5}\sin\alpha + 2\cos\alpha\right)$-ն, եթե $\sqrt{6}\sin\alpha + \sqrt{-5\cos\alpha} = 0$:

Լուծել հավասարումը` նախօրոք գտնելով նրա ձախ և աջ մասերի մեծագույն կամ փոքրագույն արժեքները (170-171).

➢170. ա) $\sqrt{1 - x^2} = 1 + \sin^2 x$, բ) $3 - |x| = \sqrt{x^4 + 9}$:

*** 171.** ա) $\lg\left(x^2 - 4x + 14\right) = 1 - |x - 2|$, բ) $2^{x^2 - 8x + 17} = \dfrac{6}{3 + |x - 4|}$:

Լուծել անհավասարումը (172-178).

172. ա) $\left(\sqrt{2}\right)^{|2x-1|} \ge \sqrt[4]{8}$, բ) $4^{|3-x|} < 0{,}125$, գ) $3\cdot(0{,}3)^{2-|x+4|} \ge 10$:

173. ա) $\sqrt{2^{|x+3|} - 1} \le 3\sqrt{7}$, բ) $\sqrt[3]{3^{|2x-5|} - 9} > 2\sqrt[3]{9}$, գ) $\sqrt{4^{|x-2|} - 14} \le 5\sqrt{2}$:

➢174. ա) $\sqrt{x-3}\cdot\lg(8 - x) > 0$, բ) $\sqrt{7 - x}\cdot\log_{0,4}(2x - 5) < 0$,

գ) $\sqrt{5x - 1}\cdot\ln(4 - x) \le 0$, դ) $\sqrt{x - 0{,}1}\cdot\log_{0,1}(3 - 10x) \ge 0$:

*** 175.** ա) $\log_4\dfrac{x+4}{x^2} > \cos\dfrac{4\pi}{3} + \sqrt{\log_{\pi-1}|\cos 3x|}$,

բ) $\log_{\frac{1}{9}}\dfrac{x+7}{(x+1)^2} < \sin^2\dfrac{5\pi}{4} - \sqrt[6]{\log_{\sqrt{5}-1}\sin^2\dfrac{7x}{4}}$:

176. ա) $\sqrt{x^2 + 10x + 25} - \sqrt{x^2 - 8x + 16} < 3 + 2\sqrt{x+1}$,

բ) $\sqrt{x^2 + 2x + 1} - \sqrt{x^2 - 12x + 36} > 1 + 2\sqrt{x - 1}$:

177. ա) $\log_2|x + 7| + 1 < 0$, բ) $\log_{0,5}|2x + 3| + 2 \ge 0$,

գ) $\log_5(2 - |x - 1|) \le 1$, դ) $\log_3(5 - |x + 2|) \le 2$:

178. ա) $|2^x - 1| + |2^x - 4| > 11$, բ) $|3^x - 1| + |3^x - 27| < 134$,

գ) $|\log_5 x - 2| + |\log_{0,2} x + 1| > 5$, դ) $|\lg x - 1| + |\log_{0,1} x + 2| \le 3$:

Լուծել համակարգը (179-181).

➢**179.** ա) $\begin{cases}\sin x = \cos x \\ |x-7|<1\end{cases}$, բ) $\begin{cases}\text{tg}\, 2x = \sqrt{3} \\ x^2+15<8x\end{cases}$, գ) $\begin{cases}\sin x = \sin 2x \\ \log_2(x-3)<0\end{cases}$:

* **180.** ա) $\begin{cases}\log_x 1{,}2 > \log_x 2{,}1 \\ \log_3\left(\cos^2 15x\right)\geq 0\end{cases}$, բ) $\begin{cases}\log_{\sqrt{2}} \dfrac{x}{2} < \log_{\sqrt{3}} \dfrac{x}{2} \\ \log_{0,4} |\sin 6x| \leq 0\end{cases}$:

* **181.** $\begin{cases}\log_x \text{tg}\dfrac{9\pi}{7} > \log_x \text{tg}\dfrac{10\pi}{7} \\ \log_{0,5}|\sin 8x+\cos 8x| \leq \log_3 \text{ctg}\dfrac{4\pi}{3}\end{cases}$:

Լուծել անհավասարումը՝ նախօրոք գտնելով նրա ձախ և աջ մասերի մեծագույն կամ փոքրագույն արժեքները (182-183).

182. ա) $\sqrt{x^6+4} > 2-|x|$, բ) $\sqrt{1+x^2} \leq \cos 2x$:

➢**183.** ա) $\lg\left(6x-x^2-8\right) \geq |x-3|$, բ) $(0{,}2)^{2x-x^2-3} \leq 25-7|x-1|$:

* **184.** Լուծել անհավասարումը.

ա) $x+x^2+\cdots+x^{10} \geq 0$, բ) $x+x^2+\cdots+x^{11} \geq 0$:

Կրկնության համար

➢**185.** Գտնել ուղղանկյուն եռանկյան ներքնաձիգի երկարությունը, եթե հայտնի է, որ նրա էջերի երկարությունները $5x^2-9x+3=0$ հավասարման արմատներն են:

➢**186.** Կազմել քառակուսային հավասարում, որի արմատները $2x^2-7x-3=0$ հավասարման արմատների՝ ա) քառակուսիներն են, բ) խորանարդներն են, գ) հակադարձներն են:

§6. Պարամետր պարունակող հավասարումներ

Ինչպես գիտենք, հավասարումը որևէ անհայտ պարունակող հավասարություն է: Այդ անհայտը հավասարման մեջ նշանակվում է որևէ տառով (սովորաբար՝ x-ով): Լուծել հավասարումը՝ նշանակում է գտնել անհայտի բոլոր արժեքները, որոնք բավարարում են հավասարմանը, կամ ցույց տալ, որ այդպիսի արժեքներ չկան:

Երբեմն հավասարումը, բացի անհայտից, պարունակում է նաև այլ տառեր, որոնք կոչվում են ***պարամետրեր***: Այս դեպքում գործ ունենք անվերջ թվով հավասարումների հետ, քանի որ պարամետրի յուրաքանչյուր թույլատրելի արժեքի դեպքում ստանում ենք մեկ (սովորական) հավասարում: Պարամետրի որոշ արժեքների դեպքում այն կարող է ունենալ մեկ կամ մի քանի արմատ, իսկ որոշ արժեքների դեպքում կարող է ընդհանրապես արմատ չունենալ:

Լուծել պարամետր պարունակող հավասարումը (անհավասարումը)՝ նշանակում է լուծել այն պարամետրի բոլոր թույլատրելի արժեքների դեպքում:

Այսինքն՝ նախ պետք է գտնել պարամետրի թույլատրելի արժեքները, այնուհետև պարզել, թե այդ արժեքներից որո՞նց դեպքում հավասարումն ունի արմատ և գտնել այդ արմատները:

Այսպիսի հավասարումներ մենք ուսումնասիրել ենք: Օրինակ՝

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{1}$$

հավասարումը, որն ունի երեք պարամետր՝ a, b, c: Երբ $a \neq 0$, այն քառակուսային հավասարում է, որը հետազոտելով, պարզել ենք, որ.

ա) եթե $D = b^2 - 4ac < 0$, ապա (1) հավասարումն ***արմատ չունի***,

բ) եթե $D = 0$, ապա (1) հավասարումն ունի ***մեկ արմատ***՝ $x = -\dfrac{b}{2a}$,

գ) եթե $D > 0$, ապա (1) հավասարումն ունի ***երկու արմատ***՝

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}:$$

Երբ $a = 0$, ստանում ենք

$$bx + c = 0 \tag{2}$$

գծային հավասարումը: Ինչպես գիտենք՝

դ) եթե $b \neq 0$, ապա (2) հավասարումն ունի ***մեկ արմատ***՝ $x = -c/b$,

ե) եթե $b = 0,\ c \neq 0$, ապա (2) հավասարումն ***արմատ չունի***,

զ) եթե $b = c = 0$, ապա (2) հավասարումն ունի ***անվերջ թվով արմատներ***՝ $x \in (-\infty; \infty)$:

Այսպիսով՝ փաստորեն լուծել ենք $ax^2 + bx + c = 0$ հավասարումը a, b, c պարամետրերի բոլոր արժեքների դեպքում:

Օրինակ 1: Լուծենք $a^2 x - 1 = x + a$ հավասարումը:
Այստեղ a-ն պարամետր է, որի բոլոր արժեքները թույլատրելի են: Հավասարումը բերելով

$$(a^2 - 1)x = a + 1$$

տեսքի՝ տեսնում ենք, որ երբ $a^2 - 1 \neq 0$, այն ունի մեկ արմատ՝ $x = \dfrac{a+1}{a^2 - 1} = \dfrac{1}{a-1}$:
Եթե $a = 1$, ապա ստանում ենք $0 \cdot x = 2$ հավասարումը, որն արմատ չունի, իսկ $a = -1$ դեպքում ստացվում է $0 \cdot x = 0$ հավասարումը, որին բավարարում են

x-ի բոլոր արժեքները:

Պատասխան՝

եթե $a \neq \pm 1$, ապա $x = \dfrac{1}{a-1}$,

եթե $a = -1$, ապա $x \in (-\infty; \infty)$,

եթե $a = 1$, ապա հավասարումն արմատ չունի:

Օրինակ 2: Գտնենք $f(x) = 2x + \dfrac{3}{x}$ ֆունկցիայի արժեքների տիրույթը:

Ֆունկցիայի արժեքների տիրույթն այն b թվերի բազմությունն է, որոնց համար գոյություն ունի $f(x) = b$ հավասարմանը բավարարող որևէ x թիվ: Հետևաբար՝ պետք է գտնենք b պարամետրի այն արժեքները, որոնց դեպքում

$$2x + \frac{3}{x} = b$$

հավասարումն ունի արմատ: Այստեղից ստանում ենք $2x^2 - bx + 3 = 0$ քառակուսային հավասարումը, որը կունենա արմատ, եթե տարբերիչը մեծ լինի զրոյից կամ հավասար՝ $b^2 - 24 \geq 0$, այսինքն՝ $b \in \left(-\infty; -2\sqrt{6}\right] \cup \left[2\sqrt{6}; \infty\right)$:

Պատասխան՝ $E(f) = \left(-\infty; -2\sqrt{6}\right] \cup \left[2\sqrt{6}; \infty\right)$:

Օրինակ 3: Գտնենք $\left(a^2 - 1\right)x^2 - (a-1)x + 1 = 0$ հավասարման արմատների քանակը՝ կախված a պարամետրից:

Նախ քննարկենք այն դեպքը, երբ $a^2 - 1 = 0$: Այս դեպքում ունենք հետևյալ հավասարումները.

1) $2x + 1 = 0$, երբ $a = -1$, 2) $0 \cdot x + 1 = 0$, երբ $a = 1$:

Առաջին հավասարումն ունի մեկ արմատ՝ $x = -1/2$, իսկ երկրորդ հավասարումն արմատ չունի:

Այն դեպքում, երբ $a \neq \pm 1$, ունենք քառակուսային հավասարում, որի տարբերիչն է՝ $D = (a-1)^2 - 4\left(a^2 - 1\right) = -3a^2 - 2a + 5$: Նշանակում է՝

ա) հավասարումն արմատ չունի, երբ նրա տարբերիչը փոքր է զրոյից՝ $-3a^2 - 2a + 5 < 0$, այսինքն՝ $a \in (-\infty; -5/3) \cup (1; \infty)$,

բ) հավասարումն ունի մեկ արմատ, երբ $-3a^2 - 2a + 5 = 0$, որտեղից, հաշվի առնելով, որ $a \neq \pm 1$, ստանում ենք՝ $a = -5/3$,

գ) հավասարումն ունի երկու արմատ, երբ $-3a^2 - 2a + 5 > 0$, այսինքն՝ $a \in (-5/3; -1) \cup (-1; 1)$:

Ամփոփելով երկու դեպքերի քննարկումները, հանգում ենք վերջնական պատասխանին՝

երբ $a \in (-\infty; -5/3) \cup [1; \infty)$, հավասարումն արմատ չունի,

երբ $a = -5/3$ կամ $a = -1$, հավասարումն ունի մեկ արմատ,

երբ $a \in (-5/3; -1) \cup (-1; 1)$, հավասարումն ունի երկու արմատ:

Պարամետր պարունակող քառակուսային հավասարումներ ուսումնասիրելիս հաճախ օգտակար է լինում Վիետի թեորեմը:

Օրինակ 4: Գտնենք a պարամետրի այն արժեքները, որոնց դեպքում $x^2 + ax + 4 = 0$ հավասարման x_1 և x_2 արմատները բավարարում են $x_1 - x_2 = 3$ պայմանը:

Հավասարումն ունի երկու արմատ, եթե $D = a^2 - 16 > 0$, այսինքն՝ $a \in (-\infty; -4) \cup \cup (4; \infty)$: Հաշվի առնելով խնդրի պայմանը և կիրառելով Վիետի թեորեմը՝ ստանում ենք հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 3 \\ x_1 x_2 = 4 \\ x_1 + x_2 = -a \end{cases} :$$

Երկրորդ հավասարման մեջ տեղադրելով $x_1 = x_2 + 3$ և լուծելով ստացված քառակուսային հավասարումը՝ ստանում ենք՝ $x_1 = 4,\ x_2 = 1$ կամ $x_1 = -1,\ x_2 = -4$: Տեղադրելով ստացված թվազույգերը երրորդ հավասարման մեջ՝ ստանում ենք՝

$$a = -5 \text{ կամ } a = 5:$$

Պատասխան՝ ± 5:

Օրինակ 5: Գտնենք a պարամետրի այն արժեքները, որոնց դեպքում $x^2 - 2ax + 6 - a = 0$ հավասարումն ունի միևնույն նշանի երկու արմատ:

Պարամետրի կամայական արժեքի դեպքում ստացվում է քառակուսային հավասարում: Այն կունենա երկու արմատ, եթե տարբերիչը մեծ լինի զրոյից՝

$$\frac{D}{4} = a^2 - (6 - a) = (a^2 + a - 6) > 0,$$

որտեղից՝ $a \in (-\infty, -3) \cup (2, \infty)$: Այսպիսի a-երի դեպքում հավասարման x_1 և x_2 արմատները կունենան նույն նշանը, եթե նրանց արտադրյալը լինի դրական՝ $x_1 x_2 > 0$: Համաձայն Վիետի թեորեմի՝ $x_1 x_2 = 6 - a$, ուստի ստանում ենք հետևյալ համակարգը.

$$\begin{cases} D > 0 \\ 6 - a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in (-\infty; -3) \cup (2; \infty) \\ a \in (-\infty; 6) \end{cases} \Leftrightarrow a \in (-\infty; -3) \cup (2; 6):$$

Պատասխան՝ $(-\infty; -3) \cup (2; 6)$:

Օրինակ 6: Լուծենք համակարգը.

$$\begin{cases} mx+ny=8 \\ 5x+3y=4 \end{cases}:$$

Այստեղ գործ ունենք երկու՝ m և n պարամետրերի հետ: Երկրորդ հավասարումից գտնելով y-ը և տեղադրելով առաջինի մեջ՝ ստանում ենք.

$$\begin{cases} mx+ny=8 \\ y=(4-5x)/3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3mx+n(4-5x)=24 \\ y=(4-5x)/3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3m-5n)x=24-4n \\ y=(4-5x)/3 \end{cases}:$$

Քանի որ x-ի կամայական արժեքի դեպքում երկրորդ հավասարումն ունի միակ արմատ (ըստ y-ի), ուրեմն՝ համակարգի լուծումների գոյությունը և նրանց քանակը որոշվում են առաջին հավասարումով: Հետևաբար՝

եթե $3m-5n\neq 0$, ապա համակարգն ունի միակ լուծում,

եթե $3m-5n=24-4n=0$, ապա համակարգն ունի անվերջ թվով լուծումներ,

եթե $3m-5n=0,\ 24-4n\neq 0$, ապա համակարգը լուծում չունի:

Փոքր-ինչ ձևափոխելով այս պայմանները, վերջնական պատասխանը կարող ենք ձևակերպել հետևյալ կերպ.

եթե $\frac{m}{5}\neq\frac{n}{3}$, ապա համակարգն ունի միակ լուծում՝

$$x=\frac{24-4n}{3m-5n},\qquad y=\frac{4m-40}{3m-5n},$$

եթե $\frac{m}{5}=\frac{n}{3}=\frac{8}{4}$, այսինքն՝ $m=10,\ n=6$, ապա համակարգն ունի անվերջ թվով լուծումներ՝ $(x,\ (4-5x)/3),\ x\in\mathbf{R}$,

եթե $\frac{m}{5}=\frac{n}{3}\neq\frac{8}{4}$, ապա համակարգը լուծում չունի:

Նման ձևով կարող ենք համոզվել, որ գծային հավասարումների կամայական

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

համակարգի համար, որի a_2, b_2, c_2 գործակիցները տարբեր են զրոյից, ճիշտ է հետևյալը.

եթե $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$, ապա համակարգն ունի միակ լուծում,

եթե $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$, ապա համակարգն ունի անվերջ թվով լուծումներ,

եթե $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$, ապա համակարգը լուծում չունի:

Օրինակ 7: Գտնենք, թե a պարամետրի ո՞ր արժեքների դեպքում

$$(0{,}6)^x = \frac{4-3a}{a}$$

հավասարումն ունի 1-ից մեծ արմատ:

Պարամետրի կամայական արժեքի դեպքում ստանում ենք պարզագույն ցուցչային հավասարում, որն ունի արմատ միայն այն դեպքում, երբ աջ մասը դրական է, և այդ արմատն է՝ $x = \log_{0,6} \frac{4-3a}{a}$: Մնում է պահանջել, որ այն մեծ լինի 1-ից.

$$\log_{0,6} \frac{4-3a}{a} > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4-3a}{a} > 0 \\ \frac{4-3a}{a} < 0{,}6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in \left(0; \frac{4}{3}\right) \\ a \in (-\infty; 0) \cup \left(\frac{10}{9}; \infty\right) \end{cases} \Leftrightarrow a \in \left(\frac{10}{9}; \frac{4}{3}\right):$$

Պատասխան՝ $\left(\frac{10}{9}; \frac{4}{3}\right)$:

Առաջադրանքներ

Լուծել հավասարումը, որտեղ a-ն պարամետր է (187-189).

187. ա) $2ax = 7 + x$, բ) $(a^2-4)x = a-2$, գ) $\frac{1}{x} = a+2$:

188. ա) $\sqrt{5x-4} = a+1$, բ) $\sqrt[3]{9x+1} = a^4 - 16$, գ) $7x^2 = 2a^2 - 50$:

189. ա) $\sin x = 5a - 1$, բ) $|2x+7| = 4a+3$, գ) $2^{x-4} = 6 - 3a$:

a պարամետրի ի՞նչ արժեքների դեպքում հավասարումն արմատ չունի (190-192).

190. ա) $a^2x = 25x + a - 5$, բ) $a^2x = ax + a - 1$, գ) $|x-a| = a^2 - 6a$:

191. ա) $x^2 - (3a+1)x + a + 2 = 0$, բ) $5x^2 - 2ax - 9a = 0$,

գ) $x^2 - (a-3)x + a^2 = 0$, դ) $x^2 + (3a-1)x + a^2 + 7 = 0$:

* **192.** ա) $(a^2-9)x^2 - 2(a+3)x + 1 = 0$, բ) $9ax^2 - 3ax + 2 = 0$:

a պարամետրի ի՞նչ արժեքների դեպքում հավասարումն ունի արմատ (193-194).

193. ա) $2^{x-1} = \frac{a-1}{a^2-4}$, բ) $\sin(x+1) = \frac{a-2}{a+5}$, գ) $\sqrt{x-7} = \frac{a+3}{2a-5}$:

* **194.** ա) $\lg(10 - x^2) = \frac{a-4}{a-8}$, բ) $\sqrt{9-x^2} = \frac{2a-7}{a-2}$, գ) $6^{1-x^2} = a^2 + a$:

a պարամետրի ի՞նչ արժեքների դեպքում հավասարումն ունի միակ արմատ (195-198).

195. ա) $a^4x - x = a^2 - 1$, բ) $(a-2)x = \sqrt{9-a^2}$:

➢**196.** ա) $|9x+1| = a^2 - 1$, բ) $|5x-17| = 4a^2 - 10a$:

➢**197.** ա) $5x^2 + 4a = a^2 - 12$, բ) $2x^2 - (a^3-1)x = 0$, գ) $x^2-(3a+1)x+a+2=0$,   դ) $5x^2-2ax-9a=0$:

*** 198.** ա) $(a^2-9)x^2-2(a+3)x+1=0$,   բ) $9ax^2-3ax+2=0$:

*** 199.** a պարամետրի ի՞նչ արժեքների դեպքում $x|2x-1|+2=a$ հավասարումն ունի՝

ա) մեկ արմատ,   բ) երկու արմատ,   գ) երեք արմատ:

*** 200.** a պարամետրի ի՞նչ արժեքների դեպքում $x|x-2a|+1=a$ հավասարումն ունի՝

ա) մեկ արմատ,   բ) երկու արմատ,   գ) երեք արմատ:

➢201. Գտնել ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը.

ա) $y=\dfrac{3x+5}{x+1}$,   բ) $y=\dfrac{x}{x^2+4}$,   գ) $y=\dfrac{4x^2+1}{x}$,

դ) $y=\dfrac{1}{x^2-9}$,   ե) $y=\dfrac{2x-1}{|x|+1}$,   զ) $y=\dfrac{2^x-1}{2^{2x}+2^x}$:

➢202. p պարամետրի ի՞նչ արժեքների դեպքում $y=3x^2+px+4$ և $y=-x^2+7x+p$ ֆունկցիաների գրաֆիկները՝

ա) չեն հատվի,   բ) կհատվեն մեկ կետում,   գ) կհատվեն երկու կետում:

a պարամետրի ի՞նչ արժեքների դեպքում հավասարումն ունի ճիշտ երկու տարբեր արմատներ (203-205).

203. ա) $4x^2-ax+1=0$,   բ) $x^2-2(a-1)x-a+1=0$

գ) $9x^2-3ax+a^2-3=0$,   դ) $x^2+(3a-1)x+a^2+7=0$:

➢204. ա) $(a-1)x^2+ax+1=0$,   բ) $ax^2-2x+2a+1=0$:

➢205. ա) $|5x-3a|=3a^2-4a+1$,   բ) $|x^2-1|=a$,

գ) $||x-2|-4|=a^2+3a$,   դ) $||x-5a|-3|=2a^2-5a$:

206. Գտնել a պարամետրի այն արժեքները, որոնց դեպքում հավասարման x_1 և x_2 արմատները բավարարում են նշված պայմանը.

ա) $5x^2-ax+1=0,\quad x_1-x_2=1$,   բ) $x^2-2x+a=0,\quad x_1^2-x_2^2=16$,

գ) $x^2-ax+4=0,\quad x_2/x_1=4$,   դ) $x^2-4x+a=0,\quad x_1^2+x_2^2=10$:

207. Գտնել a պարամետրի այն արժեքները, որոնց դեպքում հավասարման արմատների քառակուսիների գումարը փոքրագույնն է.

ա) $x^2-(a+5)x+a-7=0$,   բ) $x^2-(2a-3)x+a=0$:

➢208. Գտնել a-ն, իմանալով, որ 17 սմ ներքնաձիգ ունեցող եռանկյան էջերի երկարությունները տրված հավասարման արմատներն են.

ա) $x^2-ax+76=0$,   բ) $x^2-19x+a=0$:

➢**209.** m պարամետրի ի՞նչ արժեքների դեպքում $mx^2-8x+1=0$ հավասարման արմատների՝

ա) գումարը հավասար է նրանց քառակուսիների գումարին,

բ) արտադրյալը հավասար է նրանց քառակուսիների գումարի 14% -ին:

➢**210.** Գտնել k պարամետրի այն արժեքները, որոնց դեպքում $x^2-(3k+1)x+k+2=0$ հավասարումն ունի երկու արմատ, որոնք՝

ա) ունեն նույն նշանը, բ) տարբեր նշանի են, գ) դրական են,

դ) բացասական են, ե) փոքր են -2 -ից, զ) մեծ են 1-ից:

211. Գտնել a պարամետրի այն արժեքները, որոնց դեպքում հավասարումն ունի լուծում.

ա) $3\sin x+4\cos x=2a-3$, բ) $(a-1)\sin x+(a+1)\cos x=2a$:

գ) $\sin^3 x\cos 3x+\cos^3 x\sin 3x+1=a$,

դ) $\cos^3 x\cos 3x+\sin^3 x\sin 3x=a-5$:

* **212.** Լուծել հավասարումը.

ա) $\sqrt{5x-3a+11}+\sqrt{3x+5a-41}=0$,

բ) $\sqrt{x^2-3x+2a-4}+\sqrt{2x^2-8x+3a-1}=0$:

213. Գտնել a պարամետրի այն արժեքները, որոնց դեպքում

$$\begin{cases}(a-2)x+y=(a-2)^2\\ x+(a-2)y=1\end{cases}$$

համակարգը՝ ա) ունի անվերջ թվով լուծումներ, բ) լուծում չունի, գ) ունի միակ լուծում:

214. Գտնել a պարամետրի այն արժեքները, որոնց դեպքում համակարգն ունի միակ լուծում.

ա) $\begin{cases}7x+21y=11\\ ax+36y=24\end{cases}$, բ) $\begin{cases}12x+ay=4\\ ax+3y=81\end{cases}$, գ) $\begin{cases}ax+(a-2)y=1\\ 9x+ay=4a-7\end{cases}$:

215. Գտնել a պարամետրի այն արժեքները, որոնց դեպքում համակարգը լուծում չունի.

ա) $\begin{cases}8x+20y=35\\ ax+15y=29\end{cases}$, բ) $\begin{cases}a^2x-y=a\\ 25x-y=5\end{cases}$, գ) $\begin{cases}ax+(a-2)y=2\\ 9x+ay=4a-6\end{cases}$:

216. Գտնել a պարամետրի այն արժեքները, որոնց դեպքում համակարգն ունի անվերջ թվով լուծումներ.

ա) $\begin{cases}8x+20y=4\\ ax+15y=3\end{cases}$, բ) $\begin{cases}a^2x-y=a\\ 25x-y=5\end{cases}$, գ) $\begin{cases}ax+(a-2)y=2\\ 9x+ay=4a-6\end{cases}$:

համակարգը՝ ա) ունի անվերջ թվով լուծումներ, բ) լուծում չունի, գ) ունի միակ լուծում:

217. a պարամետրի ի՞նչ արժեքների դեպքում է հավասարման արմատը դրական.

ա) $9^{x+1}=\dfrac{5a-4}{2-a}$, բ) $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{x}=\dfrac{2a-3}{7-a}$,

գ) $\log_2(x+1)=\dfrac{a^2-3a}{a-3}$, դ) $\log_{0,8}(1-x)=\dfrac{a^4-16}{5-a}$:

Կրկնության համար

218. Սայլի առջևի անիվի շրջանագծի երկարությունը 3 մ է, իսկ հետևի անիվինը՝ 3,1 մ: Որքա՞ն ճանապարհի անցնելուց հետո սայլի առջևի անիվը հետևի անիվից մեկ պտույտ ավելի կկատարի:

219. Ճանապարհով 45 մ գլորվելիս անիվներից մեկը մյուսից 6 պտույտ ավելի է կատարում: Գտնել անիվների շրջանագծերի երկարությունները, եթե նրանց տրամագծերը հարաբերում են ինչպես $3:2$:

§7. Պարամետր պարունակող անհավասարումներ

Օրինակ 1: Լուծենք $\left(4-a^2\right)x\le a-1$ անհավասարումը:

Եթե $4-a^2<0$, ապա անհավասարման երկու մասերը բաժանելով $\left(4-a^2\right)$ արտահայտությանը, կստանանք՝ $x\ge\dfrac{a-1}{4-a^2}$:

Երբ $4-a^2>0$, անհավասարման լուծումն է՝ $x\le\dfrac{a-1}{4-a^2}$:

Երբ $a=-2$, ստանում ենք $0\cdot x\le-3$ անհավասարումը, որը լուծում չունի:

Երբ $a=2$, ստանում ենք $0\cdot x\le1$ անհավասարումը, որին բավարարում են x-ի բոլոր արժեքները:

Պատասխան՝

եթե $a\in(-\infty;-2)\cup(2;\infty)$, ապա $x\in\left[\dfrac{a-1}{4-a^2};\infty\right)$,

եթե $a\in(-2;2)$, ապա $x\in\left(-\infty;\dfrac{a-1}{4-a^2}\right]$,

եթե $a=-2$, ապա անհավասարումը լուծում չունի,

եթե $a=2$, ապա $x\in(-\infty;\infty)$:

Օրինակ 2: Գտնենք a պարամետրի այն արժեքները, որոնց դեպքում $|2x-3|\le a^2-a$ անհավասարման լուծումը 2 երկարությամբ միջակայք է:

Անհավասարումն ունի լուծում, երբ $a^2-a\ge0$, և այդ դեպքում այն համարժեք է հետևյալ համակարգին.

$$\begin{cases}2x-3\le a^2-a\\ 2x-3\ge a-a^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le\dfrac{a^2-a+3}{2}\\ x\ge\dfrac{a-a^2+3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left[\frac{a-a^2+3}{2};\frac{a^2-a+3}{2}\right]:$$

Համաձայն խնդրի պայմանի՝

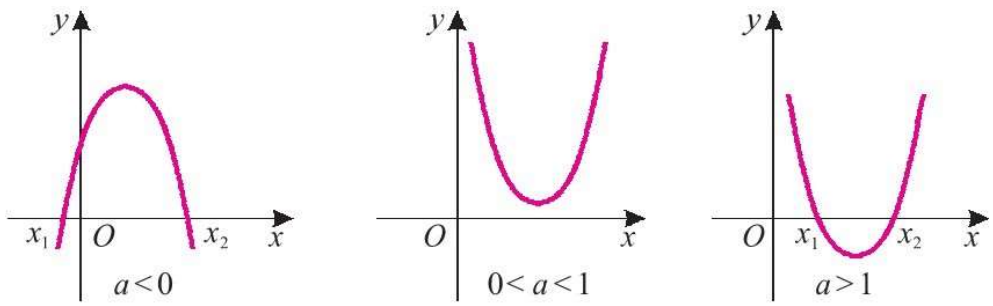
$$\frac{a^2-a+3}{2}-\frac{a-a^2+3}{2}=2\Leftrightarrow a^2-a-2=0\Leftrightarrow a_1=-1,\ a_2=2:$$

Պատասխան՝ $-1;\ 2$:

Օրինակ 3: Լուծենք $ax^2-2ax+1>0$ անհավասարումը:
Հեշտ է տեսնել, որ $a=0$ դեպքում անհավասարմանը բավարարում են x-ի բոլոր արժեքները՝ $0\cdot x^2-0\cdot x+1>0$:

$a\neq 0$ դեպքում անհավասարման ձախ մասը քառակուսային եռանդամ է, որի տարբերիչն է՝ $D=4a^2-4a=4a(a-1)$: Դիտարկենք երեք դեպք:

ա) եթե $a<0$, ապա $D>0$, իսկ եռանդամի գրաֆիկը պարաբոլ է (նկ. 12 ա), որի ճյուղերն ուղղված են ներքև և որը հատում է աբսցիսների առանցքը նրա $x_1=\dfrac{a+\sqrt{a^2-a}}{a}$, $x_2=\dfrac{a-\sqrt{a^2-a}}{a}$ կետերում ($x_1<x_2$): Անհավասարման լուծումն է՝ $x\in(x_1;x_2)$:



ա　　　　բ　　　　գ

Նկ. 12

բ) Եթե $0<a<1$, ապա $D<0$, իսկ եռանդամի գրաֆիկը պարաբոլ է, որի ճյուղերն ուղղված են վեր և որը չի հատում աբսցիսների առանցքը (նկ. 12 բ): Անհավասարման լուծումն է՝ $x\in\mathbf{R}$:

գ) Եթե $a\ge 1$, ապա $D\ge 0$, իսկ եռանդամի գրաֆիկը պարաբոլ է (նկ. 12 գ), որի ճյուղերն ուղղված են վեր, և որը հատում է աբսցիսների առանցքը նրա $x_1=\dfrac{a-\sqrt{a^2-a}}{a}$, $x_2=\dfrac{a+\sqrt{a^2-a}}{a}$ կետերում ($x_1\le x_2$): Անհավասարման լուծումն է՝ $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; \infty)$:

Պատասխան՝

եթե $a < 0$, ապա $x \in \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - a}}{a}; \frac{a - \sqrt{a^2 - a}}{a} \right)$,

եթե $0 \le a < 1$, ապա $x \in \mathbf{R}$,

եթե $a \ge 1$, ապա $x \in \left(-\infty; \frac{a - \sqrt{a^2 - a}}{a} \right) \cup \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - a}}{a}; \infty \right)$:

Օրինակ 4: Գտնենք a և b պարամետրերի այն արժեքները, որոնց դեպքում $y = \sqrt{ax^2 - (2a - 3b)x + a^2 - 9b^2 + 14}$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթը $[-1;1]$ հատվածն է:

Տրված ֆունկցիայի որոշման տիրույթը համընկնում է

$$ax^2 - (2a - 3b)x + a^2 - 9b^2 + 14 \ge 0$$

անհավասարման լուծման հետ: Երբ $a = 0$, անհավասարման ձախ մասը գծային ֆունկցիա է, ուստի նրա լուծումը չի կարող լինել վերջավոր հատված:

Երբ $a \ne 0$, անհավասարման ձախ մասը քառակուսի եռանդամ է և որպեսզի նրա լուծումը համընկնի $[-1;1]$ հատվածի հետ, եռանդամի գրաֆիկը պետք է ունենա 15-րդ նկարում պատկերված տեսքը, այսինքն՝ $a < 0$, և եռանդամի արմատներն են՝ $x_1 = -1,\ x_2 = 1$: Քանի որ $x_1 + x_2 = 0$, $x_1 x_2 = -1$, կիրառելով Վիետի թեորեմը՝ ստանում ենք.

$$\begin{cases} \frac{2a - 3b}{a} = 0 \\ \frac{a^2 - 9b^2 + 14}{a} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 3b \\ a^2 - 9b^2 + a + 14 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 3b \\ 3a^2 - a - 14 = 0 \end{cases}:$$

Լուծելով համակարգի քառակուսային հավասարումը և հաշվի առնելով, որ $a < 0$, կստանանք պատասխանը՝ $a = -2$, $b = -4/3$:

Օրինակ 5: Գտնենք a պարամետրի այն արժեքները, որոնց դեպքում հետևյալ համակարգն ունի միակ լուծում.

$$\begin{cases} 15 - x^2 + 2x \ge 0 \\ 12x - a^2 \ge 11 \end{cases}:$$

Համակարգի առաջին անհավասարման լուծումն է՝ $x \in [-3;5]$, իսկ երկրորդինը՝ $x \in \left[\frac{a^2 + 11}{12}; \infty \right)$: Համակարգի լուծումը ստացված երկու բազմությունների հատումն է: Այն կպարունակի ընդամենը մեկ կետ, եթե $\frac{a^2 + 11}{12} = 5$, որտեղից՝ $a = \pm 7$:

Պատասխան՝ ± 7:

Առաջադրանքներ

Լուծել անհավասարումը, որտեղ a -ն պարամետր է (220-222).

220. ա) $ax < x+3$, բ) $(a^2-9)x \geq a+1$, գ) $a^2x \leq ax+2$ ։

221. ա) $\sqrt{x-1} < 4a$, բ) $\sqrt{2x+16} \geq a-4$, գ) $\sqrt[3]{x-8} \leq a-2$ ։

222. ա) $2^{x-2} > a-1$, բ) $2^{x+5} \leq 4a-12$, գ) $(0,2)^x < 1-a^2$ ։

223. Լուծել անհավասարումը, որտեղ a -ն ոչ բացասական պարամետր է.

ա) $a^{4x} \leq a^{x-3}$, բ) $a^{2x-1} \geq a^{x+4}$, գ) $a^{x+5} < a^{2x}$ ։

Գտնել p պարամետրի այն արժեքները, որոնց դեպքում անհավասարման լուծումը 2 երկարությամբ միջակայք է (224-226).

➢**224.** ա) $x^2-6x+2p<0$, բ) $x^2-px+15<0$ ։

➢**225.** ա) $|3x-1| \leq 2p^2-5p$, բ) $|5x-3p| \leq 2p^2+3p$ ։

➢**226.** ա) $\sqrt{x-6} < 13-p$, բ) $\sqrt{3x-7} < p^2-10$ ։

Գտնել p և q պարամետրերի այն արժեքները, որոնց դեպքում անհավասարման լուծումը համընկնում է նշված բազմությանը (227-229).

➢**227.** ա) $2x^2-(p+q+2)x-5p-q<0$, $(-1;3)$,

բ) $x^2+(2p-q)x+p+2q \geq 0$, $(-\infty;-1] \cup [2;\infty)$ ։

➢**228.** ա) $\sqrt{x-p} > \sqrt{2x-q}$, $[1;5)$, բ) $\sqrt{3x-p-q} \leq \sqrt{x+q}$, $[0;7]$ ։

➢**229.** ա) $|4+x-2p| < 3-5q$, $(-1;1)$, բ) $|x-3p| \geq 5-3q$, $(-\infty;-1] \cup [0;\infty)$ ։

Գտնել a պարամետրի այն արժեքները, որոնց դեպքում անհավասարման լուծումն ամբողջ թվային առանցքն է (230-233).

230. ա) $x^2-(a+4)x+4a+1>0$, բ) $(a+2)x-x^2+a-1 \leq 0$,

➢գ) $(a-1)x^2+2(a-1)x+1 \geq 0$, ➢դ) $ax^2+2(a-1)x+4a<0$ ։

* **231.** ա) $a\sin^2 x+2a\sin x+1>0$, բ) $(a^2-1)\cos^2 x-2a\cos x-2 \leq 0$ ։

* **232.** ա) $4^x-(a+2)2^x+a+3>0$, բ) $a \cdot 9^{|x|}-2(a-1)3^{|x|}+3a-1 \geq 0$ ։

➢**233.** ա) $\dfrac{x^2-ax-2}{x^2-3x+4} > -1$, բ) $\dfrac{x^2-ax-1}{2x^2-2x+3} < 1$ ։

➢**234.** a պարամետրի ի՞նչ արժեքների դեպքում է արտահայտության ԹԱԲ-ը բաղկացած մեկ կետից.

ա) $\sqrt{-2ax^2+(2-4a)x-4a+2}$, բ) $\sqrt{(a-3)x^2+2ax+a}$ ։

➢**235.** Գտնել a և b պարամետրերի այն արժեքները, որոնց դեպքում ֆունկցիայի որոշման տիրույթը համընկնում է նշված միջակայքին.

ա) $y=\sqrt{-2x^2+(a+2b)x-a-b}$, $[3;4]$,

բ) $y=\lg\left(-x^2-(3a-4b)x+2b-a-1\right)$, $(-2;2)$:

*** 236.** Գտնել a պարամետրի այն արժեքները, որոնց դեպքում ֆունկցիան որոշված է 10 -ից մեծ երկարությամբ միջակայքում.

ա) $y=\sqrt{2x+1}+\sqrt[4]{-5a-3x-1}$, բ) $y=\sqrt{10x-1-a}+\sqrt[4]{7-10x}$:

➢237. a -ի ի՞նչ արժեքների դեպքում է ֆունկցիան որոշված ամբողջ թվային առանցքի վրա.

$$y=\sqrt{x^2+6x+(a+2)^2}+\sqrt[4]{x^2-(a+1)x+9}:$$

238. a -ի ի՞նչ արժեքների դեպքում համակարգը լուծում չունի.

ա) $\begin{cases} x^2+3x+2=0 \\ 2x+1\geq a \end{cases}$, բ) $\begin{cases} x^2-4x+3\leq 0 \\ a-x\geq 0 \end{cases}$, գ) $\begin{cases} 4+3x-x^2>0 \\ 2x-a\leq 3 \end{cases}$:

Կրկնության համար

239. Տարեսկզբին «Ա» բանկում ներդրված 600000 դրամ ավանդի և «Բ» բանկում ներդրված 800000 դրամ ավանդի ընդհանուր տոկոսները տարեվերջին կազմեցին 128000 դրամ: Եթե «Ա» բանկում ներդրվեր 800000 դրամ, իսկ «Բ» բանկում՝ 600000 դրամ, ապա երկու բանկերի տոկոսները միասին կկազմեին 124000 դրամ: Որքա՞ն է յուրաքանչյուր բանկի տարեկան տոկոսադրույքը:

240. Գործարարն իր գումարը ներդրեց երկու տարբեր բանկերում 12% և 10% տարեկան տոկոսադրույքներով: Մեկ տարի անց նրա ավանդն աճեց 1020000 դրամով: Եթե գործարարն իր գումարը ներդներ հակառակ ձևով, շահույթը կլիներ 960000 դրամ: Ընդամենը որքա՞ն գումար էր ներդրել գործարարը երկու բանկերում:

3րդ ԳԼՈՒԽ

Վիճակագրության, միացությունների տեսության և հավանականություն-ների տեսության տարրերը

§1. Տվյալների հավաքումը և դասակարգումը: Հաճախություն և հարաբերական հաճախություն

Վիճակագրությունը գիտության բնագավառ է, որն զբաղվում է որևէ առար-կայի, երևույթի կամ գործընթացի հետ առնչվող տվյալների հավաքումով, մշա-կումով և վերլուծությամբ: Դիտարկենք օրինակներ:

Դասարանում, որտեղ սովորում էր 25 աշակերտ, մաթեմատիկայի ուսուց-ման մակարդակը պարզելու նպատակով դպրոցի տնօրենն առաջադրեց 8 խնդրից կազմված ստուգողական աշխատանք: Ըստ յուրաքանչյուր աշակերտի լուծած խնդիրների քանակի՝ տվյալներն այսպիսին էին (***վիճակագրական տվյալներ***)՝

5, 3, 6, 2, 5, 4, 1, 4, 6, 3, 3, 2, 7, 8, 6, 5, 2, 4, 3, 7, 3, 4, 5, 4, 8 : (1)

Եթե ուզում ենք գաղափար կազմել դասարանի ընդհանուր մակարդակի մասին, կարևոր է ոչ թե այն, թե քանի խնդիր է լուծել այս կամ այն աշակերտը, այլ թե քանի՞ աշակերտ է լուծել 8 խնդիր, քանի՞սը՝ 7 խնդիր, և այլն: Այսինքն՝ իմանալ յուրաքանչյուր տվյալի ***հաճախությունը***՝ թե քանի անգամ է այդ տվյալը հանդիպում (1) համախմբում: Դրա համար կազմում ենք հետևյալ աղյուսակը, որն անվանում են (1) համախմբի ***հաճախությունների աղյուսակ***.

Լուծած խնդիր-ների քանակը	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Հաճախությունը	0	1	3	5	5	4	3	2	2

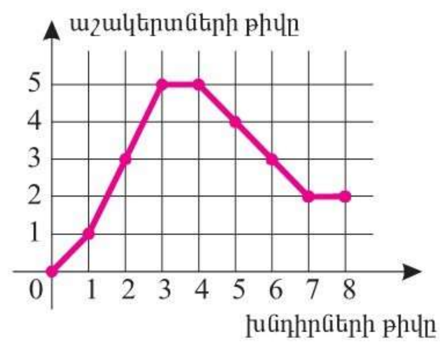
Օգտակար կլինի նաև դիտարկել տվյալների ***հարաբերական հաճախու-թյունները***, այսինքն՝ աշակերտների ո՞ր մասն է լուծել 8 խնդիր, ո՞ր մասը՝ 7 խնդիր, և այլն: Դրա համար կազմում ենք ***հարաբերական հաճախությունների աղյուսակը:***

Լուծած խնդիր-ների քանակը	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Հարաբերական հաճախությունը	0	0,04	0,12	0,2	0,2	0,16	0,12	0,08	0,08

Հաճախ հարաբերական հաճախությունները ներկայացնում են տոկոսներով: Հետևյալ աղյուսակը ցույց է տալիս, թե աշակերտների քանի՞ տոկոսն է լուծել 8 խնդիր, քանի՞ տոկոսը՝ 7 խնդիր, և այլն:

Լուծած խնդիր-ների քանակը	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Հարաբերական հաճախությունը (տոկոսներով)	0	4	12	20	20	16	12	8	8

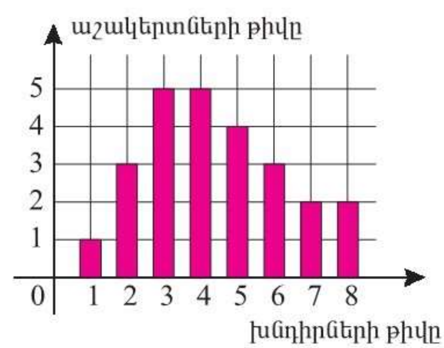
Վիճակագրական տվյալներն ավելի ցայտուն ներկայացնելու համար օգտվում են տարբեր գծապատկերներից (դիագրամներից):



Նկ. 13

13-րդ նկարում ստուգողական աշխատանքի արդյունքները ներկայացված են ***գրաֆիկորեն***: Կոորդինատային հարթության վրա նշված են համապատասխան կետերը (օրինակ՝ (6;3) կետը ցույց է տալիս, որ 6 խնդիր լուծել է 3 աշակերտ), և դրանք միացված են հատվածներով:

14-րդ նկարում այդ նույն տվյալները ներկայացված են ***սյունապատկերի*** (սյունակային դիագրամի) միջոցով: Հորիզոնական առանցքի համապատասխան կետում կանգնեցրած սյան բարձրությունը ցույց է տալիս տվյալ քանակությամբ խնդիրներ լուծած աշակերտների թիվը (օրինակ՝ 5 խնդիր լուծել է 4 աշակերտ):

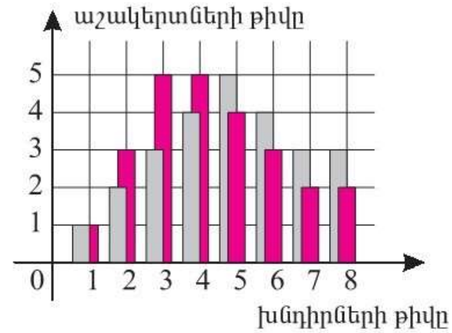


Նկ. 14

Երբեմն գրաֆիկորեն կամ սյունապատկերով միաժամանակ ներկայացնում են վիճակագրական տվյալների երկու և ավելի համախմբեր: Օրինակ՝ 15-րդ նկարում

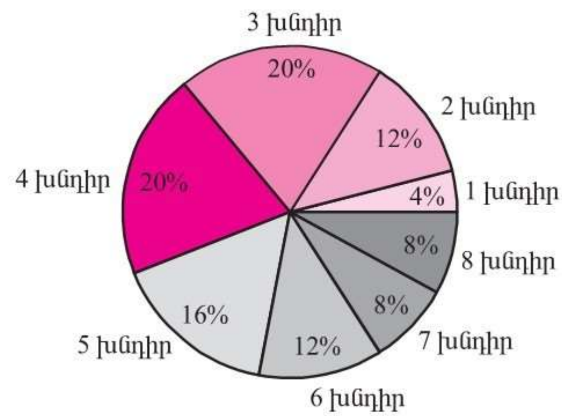
(1) համախմբից բացի, մոխրագույն ուղղանկյուններով պատկերված են նաև նախորդ ստուգողական աշխատանքի արդյունքները: Նման սյունապատկերներն օգնում են վիճակագրական տվյալների տարբեր համախմբեր համեմատելիս:

Այսպես, 15-րդ նկարից երևում է, որ առաջին ստուգողականի դեպքում դասարանն ավելի բարձր արդյունք է ցույց տվել, քան երկրորդում, քանի որ փոքր թվով (1-ից մինչև 4) խնդիրներ լուծողներն առաջին դեպքում ավելի քիչ են, իսկ մեծ թվով (5-ից մինչև 8) խնդիրներ լուծողները՝ ավելի շատ:



Նկ. 15

16-րդ նկարում ստուգողական աշխատանքի արդյունքները ներկայացված են ***շրջանաձև գծապատկերով***: Շրջանը բաժանված է սեկտորների, որոնցից յուրաքանչյուրը համապատասխանում է խնդիրների որոշակի քանակի, իսկ սեկտորի ներսում գրված է, թե աշակերտների որ տոկոսն է լուծել տվյալ քանակի խնդիր: Ընդ որում՝ սեկտորների անկյունների բացվածքները (մակերեսները) ուղիղ համեմատական են դրանցում գրված տոկոսներին:



Նկ. 16

Օրինակ՝ օգտվելով աղյուսակներից և գծապատկերներից՝ կարող ենք պարզել, որ՝

ա) 3-ից քիչ խնդիր լուծել է 4 աշակերտ (2 խնդիր լուծել է 3 աշակերտ, 1 խնդիր՝ 1 աշակերտ, ոչ մի խնդիր չլուծած աշակերտ չկա),

բ) 7 կամ 8 խնդիր լուծել է նույնպես 4 աշակերտ,

գ) 3 – 5 խնդիր լուծել է աշակերտների 56 տոկոսը (ըստ 16-րդ նկարի շրջանաձև գծապատկերի՝ $20+20+16=56$):

Նկատենք, որ գրաֆիկորեն կամ սյունապատկերով ներկայացնում ենք տվյալների հաճախությունները, իսկ շրջանաձև գծապատկերով՝ հարաբերական հաճախությունները:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ո՞րն է վիճակագրական տվյալի հաճախությունը:
2. Ո՞րն է վիճակագրական տվյալի հարաբերական հաճախությունը:
3. Ի՞նչ գծապատկերներով են ներկայացնում վիճակագրական տվյալները:

Առաջադրանքներ

241. Ստորև գրված են հունիսին Երևանում գրանցված միջին ջերմաստիճանները՝ ըստ օրերի.

33, 34, 35, 32, 32, 31, 31, 32, 34, 35, 36, 36, 37, 37, 38, 37, 35, 33, 32, 32, 31, 32, 33, 34, 35, 35, 36, 36, 37, 38

ա) Կազմեք հաճախությունների և հարաբերական հաճախությունների աղյուսակները:

բ) Տվյալները ներկայացրեք սյունապատկերով և շրջանաձև գծապատկերով:

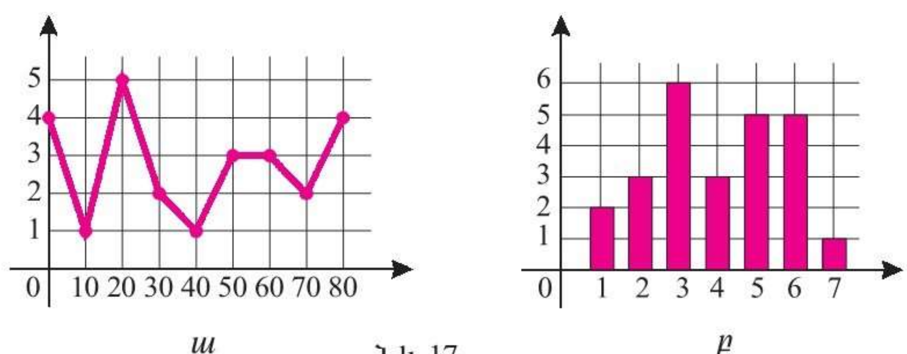
գ) Քանի՞ օր է միջին ջերմաստիճանը բարձր եղել 35 աստիճանից:

դ) Քանի՞ օր է միջին ջերմաստիճանը ցածր եղել 33 աստիճանից:

ե) Քանի՞ տոկոս են կազմում օրերը, երբ միջին ջերմաստիճանը եղել է 34 – 36 աստիճան:

զ) Ամսվա օրերի ո՞ր մասում է միջին ջերմաստիճանը գերազանցել 36 աստիճանը:

242. Կազմեք գծապատկերով ներկայացված վիճակագրական տվյալների հաճախությունների և հարաբերական հաճախությունների աղյուսակները:



Նկ. 17

243. Պատկերեք 17-րդ նկարում ներկայացված վիճակագրական տվյալների շրջանաձև գծապատկերը:

244. Ելնելով 17 ա գծապատկերից՝ պարզեք, թե՝

ա) քանի՞ տվյալ է 40-ից մեծ,

բ) քանի՞ տվյալ է 30-ից փոքր,

գ) տվյալների ո՞ր մասն է $[30;40]$ միջակայքում, դ) տվյալների քանի՞ տոկոսն է 60-ից մեծ:

245. Ելնելով 17բ գծապատկերից՝ պարզեք, թե՝

ա) քանի՞ տվյալ է 4-ից մեծ,

բ) քանի՞ տվյալ է 3-ից փոքր,

գ) տվյալների ո՞ր մասն է գտնվում $[2;3]$ միջակայքում,

դ) տվյալների քանի՞ տոկոսն է 4-ից մեծ:

Կրկնության համար

246. Գտնել k-ն այնպես, որ f ֆունկցիայի գրաֆիկին նրա x_0 աբսցիսն ունեցող կետում տարված շոշափողն աբսցիսների առանցքի հետ կազմի α անկյուն.

ա) $f(x) = kx^3 - 6x^2 + x + 5, \quad x_0 = 2, \quad \alpha = \pi/4$,

բ) $f(x) = 4\sin^2 x - kx - 125, \quad x_0 = \pi/6, \quad \alpha = \pi/3$:

247. Գտնել x_0-ն այնպես, որ $y = x^2 + 2x + 15$ ֆունկցիայի գրաֆիկին նրա x_0 աբսցիսն ունեցող կետում տարված շոշափողն օրդինատների առանցքը հատի $(0;6)$ կետում:

§2. Վիճակագրական փվյալների թվային բնութագրիչները

Դիտարկենք վիճակագրական տվյալների հետևյալ համախումբը՝

$$3, \quad 4, \quad 10, \quad 12, \quad 4, \quad 4, \quad 7, \quad 16, \quad 12: \qquad (1)$$

Այս թվերի գումարը բաժանելով նրանց քանակին՝ ստանում ենք համախմբի առաջին թվային բնութագրիչը՝ ***վիճակագրական տվյալների միջինը:*** Հեշտ է տեսնել, որ տվյալ դեպքում այն հավասար է՝ $72:9=8$:

$\{a_1, a_2, \ldots a_n\}$ թվային վիճակագրական տվյալների միջին կոչվում է այդ տվյալների գումարի և դրանց քանակի հարաբերությունը՝

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}:$$

Իհարկե, սա մեզ քաջ ծանոթ՝ $a_1, a_2, \ldots a_n$ թվերի թվաբանական միջինն է:

Վերադառնանք (1) համախմբին և նկատենք, որ այնտեղ որոշ տվյալներ կրկնվում են. 4 թիվը հանդիպում է 3 անգամ, 12-ը՝ 2 անգամ: Առավել շատ հանդիպող թիվը 4-ն է, այն անվանում են (1) համախմբի ***մոդ***:

Վիճակագրական տվյալների մեջ առավել հաճախ կրկնվող տվյալը (տվյալները) կոչվում է մոդ:

Տվյալների համախումբը կարող է ունենալ երկու և ավելի մոդեր, կարող է նաև մոդ չունենալ: Օրինակ՝ $\{8, 13, 21, 13, 5, 8, 31, 45, 23, 45\}$ համախումբն ունի երեք մոդ՝ 8-ը, 13-ը և 45-ը, որոնցից յուրաքանչյուրը կրկնվում է 2 անգամ, իսկ $\{7, 1, 12, 13, 5, 8, 31, 55\}$ համախումբը մոդ չունի, քանի որ այստեղ ոչ մի տվյալ չի կրկնվում:

Նորից վերադառնանք (1) համախմբին և տվյալները վերադասավորենք չնվազման կարգով՝

$$3, \quad 4, \quad 4, \quad 4, \quad 7, \quad 10, \quad 12, \quad 12, \quad 16:$$

Նկատենք, որ 7 թիվը համախմբի կենտրոնում է, նրանից ձախ և աջ կան հավասար թվով տվյալներ (4-ական): Նման դեպքում ասում են, որ 7-ը համախմբի ***կիսորդն է (մեդիան)***: Եթե տվյալների քանակը զույգ է, ապա կիսորդը կենտրոնի երկու թվերի միջինն է: Օրինակ՝ $\{8, 13, 15, 19, 19, 20\}$ համախմբի կիսորդը 17 է, քանի որ կենտրոնի երկու թվերն են 15-ը և 19-ը, որոնց միջինն է՝

$$\frac{15+19}{2} = 17:$$

Չնվազման կարգով գրված վիճակագրական տվյալների կիսորդ կոչվում է համախմբի կենտրոնի անդամը, եթե տվյալների քանակը կենտ է, և կենտրոնի երկու անդամների միջինը, եթե տվյալների քանակը զույգ է:

Օրինակ 1: Գտնենք $\{9, 0, 2, 10, 0, 10, 20, 0, 18, 1\}$ համախմբի միջինը, մոդը և կիսորդը:

Միջինը գտնելու համար պետք է տվյալների գումարը բաժանենք նրանց քանակին՝ $\frac{9+2+10+10+20+18+1}{10} = 7:$

Տվյալներից առավել հաճախ՝ 3 անգամ հանդիպում է 0-ն: Ուրեմն՝ մոդը 0 է:

Կիսորդը գտնելու համար տվյալները վերադասավորենք չնվազման կարգով՝

$$0, \quad 0, \quad 0, \quad 1, \quad 2, \quad 9, \quad 10, \quad 10, \quad 18, \quad 20:$$

Քանի որ տվյալների քանակը՝ 10-ը, զույգ է, կիսորդը կլինի 5-րդ և 6-րդ անդամների կիսագումարը՝ $\frac{2+9}{2} = 5{,}5:$

Օրինակ 2: Հայտնի է, որ $\{x,\ 2x-1,\ 19-9x,\ x^2+5,\ 2x-3\}$ համախմբի միջինը 3,2 է: Գտնենք մոդը և կիսորդը:

Քանի որ միջինը 3,2 է, ուրեմն՝

$$\frac{x+2x-1+19-9x+x^2+5+2x-3}{5}=3{,}2\,,$$

որտեղից ստանում ենք՝ $x^2-4x+4=0$, ուստի՝ $x=2$: Տեղադրելով x-ի արժեքը՝ ստանում ենք $\{2,\ 3,\ 1,\ 9,\ 1\}$ համախումբը, որի մոդը 1 է:

Վերադասավորելով՝ ստանում ենք $\{1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 9\}$ համախումբը, ուստի կիսորդը 2 է:

Այժմ ներկայացնենք վիճակագրական տվյալների ևս երկու բնութագրիչ, որոնք ցույց են տալիս, թե որքանով են ցրված տվյալները:

Թվային վիճակագրական տվյալներից մեծագույնի և փոքրագույնի տարբերությունն անվանում են լայնք (դիապազոն):

Օրինակ՝ (1) համախմբի լայնքն է՝ $16-3=13$, իսկ 1-ին օրինակում դիտարկված համախմբի լայնքը կլինի՝ $20-0=20$:

$\{a_1, a_2, \ldots a_n\}$ թվային վիճակագրական տվյալների միջին քառակուսային շեղում կոչվում է հետևյալ մեծությունը.

$$\sqrt{\frac{(a_1-a)^2+(a_2-a)^2+\cdots+(a_n-a)^2}{n}}\,,$$

որտեղ a-ն տվյալների միջինն է:

Միջին քառակուսային շեղումը բնութագրում է տվյալների շեղվածությունը միջինից: Այն ընդունում է իր փոքրագույն՝ զրո արժեքը, միայն եթե բոլոր տվյալները իրար հավասար են: Իսկ, օրինակ՝ (1) համախմբի դեպքում, որի միջինը 8 է, միջին քառակուսային շեղումը կլինի՝

$$\sqrt{\frac{(3-8)^2+3\cdot(4-8)^2+(10-8)^2+2\cdot(12-8)^2+(7-8)^2+(16-8)^2}{9}}=\sqrt{\frac{174}{9}}\approx 4{,}4:$$

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ո՞րն է վիճակագրական տվյալների միջինը:
2. Ո՞րն է վիճակագրական տվյալների մոդը:
3. Ո՞րն է վիճակագրական տվյալների կիսորդը:

4. Ո՞րն է վիճակագրական տվյալների լայնքը:

5. Ո՞րն է վիճակագրական տվյալների միջին քառակուսային շեղումը:

Առաջադրանքներ

248. Գտեք համախմբի միջինը, մոդը և մեդիանը.

ա) $\{12, 23, 17, 41, 12\}$, բ) $\{25, 13, 7, 3, 7, 30\}$, գ) $\{4, 24, 12, 16, 20, 28\}$:

249. Գտեք 14-րդ նկարում տրված համախմբի միջինը, մոդը և մեդիանը:

250. Գտեք 17րդ նկարում տրված համախմբի միջինը, մոդը և մեդիանը:

251. Գտեք 17-րդ նկարում տրված համախմբի լայնքը և միջին քառակուսային շեղումը:

252. Տրված է մի ձեռնարկության աշխատակիցների աշխատավարձերի (դրամներով) հաճախությունների աղյուսակը:

Աշխատավարձը	40000	55000	65000	70000	75000	90000	100000
Հաճախությունը	3	6	4	3	2	1	1

ա) Գտեք աշխատակիցների միջին աշխատավարձը:

բ) Գտեք տվյալների մոդը և մեդիանը:

գ) Գտեք տվյալների լայնքը և միջին քառակուսային շեղումը:

253. Տրված է տասներորդ դասարանի 20 աշակերտների ստուգողական աշխատանքների գնահատականների հարաբերական հաճախությունների աղյուսակը.

Գնահատականը	3	4	5	6	7	8	9	10
Հարաբերական հաճախությունը (տոկոսներով)	5	10	15	30	20	10	5	5

ա) Գտեք աշակերտների միջին գնահատականը:

բ) Գտեք տվյալների մոդը և մեդիանը:

գ) Գտեք տվյալների լայնքը և միջին քառակուսային շեղումը:

254. Գտեք x-ը, եթե հայտնի է, որ՝

ա) $\{2x+1, x-2, 5-x, x+4, 3-2x\}$ համախմբի միջինը 3 է:

բ) $\{12, 27, 2x+3, 19, 6\}$ համախմբի մոդը 12 է:

գ) $\{5, 15, 14, 3x-2, 7\}$ համախմբի մեդիանը 10 է:

➤**255**. Գտեք x-ը, եթե հայտնի է, որ՝

ա) $\{x-5, x+3, 12, 3x^2+1, 3-x\}$ համախմբի միջինը 7,6 է:

բ) $\{12, 39, 2x+3, 21, x^2\}$ համախմբի մոդը 9 է:

գ) $\{9, x^2-9x+40, 14, 5x-1, 24\}$ համախմբի մեդիանը 20 է:

դ) $\{6, 2, x, x^2\}$ համախմբի միջինը 5 է, իսկ լայնքը` 20:

256. Ապացուցեք, որ թվաբանական պրոգրեսիա կազմող վիճակագրական տվյալների միջինը և մեդիանը համընկնում են:

Կրկնության համար

257. Գտնել ֆունկցիայի մոնոտոնության միջակայքերը.

ա) $f(x)=\dfrac{x^2+2}{2x+1}$, բ) $y=\dfrac{3x-1}{x^2+7}$:

258. Գտնել ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները.

ա) $f(x)=\dfrac{2-x}{x^2+6x}$, $x\in[1;3]$, բ) $y=\dfrac{x-2}{x^2-2x+9}$, $x\in[-1;3]$:

§3. Բազմություններ

Տարբեր կիրառական խնդիրներ լուծելիս հաճախ հարկ է լինում ինչ-որ բազմությունից ընտրել այս կամ այն հատկությամբ օժտված տարրերը, դասավորել դրանք որոշակի հերթականությամբ, հաշվել այդ տարրերից որոշակի ձևով ընտրված ***միացությունների*** (կոմբինացիաների) քանակը: Մաթեմատիկայի բնագավառը, որն զբաղվում է նման հարցերի ուսումնասիրմամբ, կոչվում է ***միացությունների տեսություն*** (կոմբինատորիկա): Այս և հաջորդ երեք պարագրաֆներում կծանոթանանք միացությունների տեսության տարրերին, կուսումնասիրենք միացությունների` ***կարգավորությունների, տեղափոխությունների և զուգորդությունների*** հատկությունները:

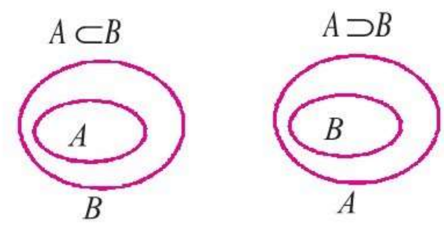
Դեռևս վեցերորդ դասարանից ծանոթ եք բազմության գաղափարին և բազմությունների միջև եղած առնչություններին, գիտեք, թե որոնք են բազմությունների միավորումն ու հատումը: Հիշենք. դիտարկելով որևէ բազմություն, օրինակ` $A=\{a,b,c\}$, հասկանում ենք, որ $A$ բազմությունը բաղկացած է երեք տարրերից` a, b, c: Ընդ որում, այդ տարրերը զույգ առ զույգ տարբեր են և նրանց մեջ չկա առաջինը, չկա երկրորդը, չկա երրորդը: Այսինքն`

$$\{a,b,c\},\quad \{a,c,b\},\quad \{b,a,c\},\quad \{b,c,a\},\quad \{c,a,b\},\quad \{c,b,a\}$$

բազմությունները նույն բազմությունն են, քանի որ նրանք բաղկացած են միևնույն տարրերից:

Բազմությունը, որը ոչ մի տարր չի պարունակում, կոչվում է ***դատարկ բազ-***

մություն և նշանակվում է՝ $\varnothing$: Օրինակ՝ 5 մետր հասակ ունեցող մարդկանց բազմությունը դատարկ բազմություն է:



ա Նկ. 18 բ

Առնչություններ բազմությունների միջև:

ա) A և B բազմությունները կոչվում են ***հավասար***՝ $A = B$, եթե նրանք բաղկացած են միևնույն տարրերից:

բ) Ասում են, որ ***A բազմությունն ընկած է (պարունակվում է) B-ում*** և գրում՝ $A \subset B$, եթե A-ին պատկանող յուրաքանչյուր տարր պատկանում է նաև B-ին (նկ. 18ա):

Այս դեպքում ասում են նաև, որ A բազմությունը B-ի ***ենթաբազմություն է***: Կարևոր է հիշել, որ

> ***կամայական A բազմության ենթաբազմություն են դատարկ բազմությունը և A բազմությունն ինքը՝***
>
> $$\varnothing \subset A, \; A \subset A:$$

գ) Ասում են, որ ***A բազմությունը պարունակում է B -ն*** և գրում են $A \supset B$, եթե B-ին պատկանող յուրաքանչյուր տարր պատկանում է նաև A-ին (նկ. 18բ): Պարզ է, որ

> ***կամայական A և B բազմությունների համար.***
>
> ***ա)*** $B \subset A \Leftrightarrow A \supset B,$
>
> ***բ)*** $B \subset A$ և $A \subset B \Leftrightarrow A = B:$

Օրինակ՝

բնական թվերի բազմությունն ընկած է ամբողջ թվերի բազմության մեջ,

ռացիոնալ թվերի բազմությունը պարունակում է ամբողջ թվերի բազմությունը,

հավասարակողմ եռանկյունների բազմությունը հավասարասրուն եռանկյունների բազմության ենթաբազմություն է,

հավասարակողմ եռանկյունների բազմությունը հավասար է այն եռանկյունների բազմությանը, որոնց երկու անկյունները 60° են:

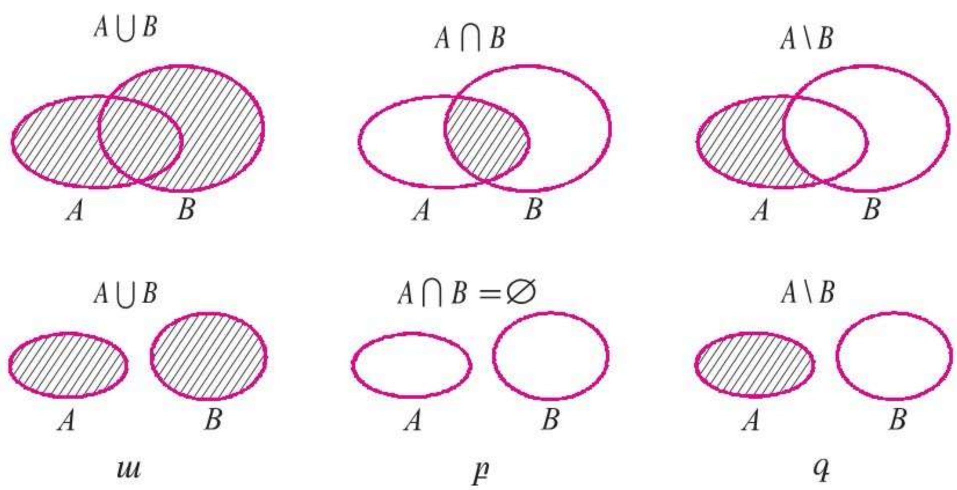
Գործողություններ բազմությունների հետ

ա) *A և B բազմությունների միավորումը*՝ $A \cup B$ -ն, այն տարրերի բազմությունն է, որոնք պատկանում են A և B բազմություններից գոնե մեկին (նկ. 19 ա):

բ) A և B բազմությունների հատումը՝ $A\cap B$-ն այն տարրերի բազմությունն է, որոնք պատկանում են և՛ A-ին, և՛ B-ին (նկ. 19բ):

Եթե A և B բազմությունները չունեն ընդհանուր տարր, ապա ասում են, որ A և B բազմությունները չեն հատվում, կամ՝ նրանց հատումը դատարկ բազմություն է՝ $A\cap B=\varnothing$:

գ) A և B բազմությունների տարբերությունը՝ $A\setminus B$-ն, այն տարրերի բազմությունն է, որոնք պատկանում են A-ին և չեն պատկանում B-ին (նկ. 19գ):



Նկ. 19

Կամայական A բազմության համար.

$$A\cup\varnothing=A,\quad A\cap\varnothing=\varnothing,\quad A\setminus\varnothing=A,\quad \varnothing\setminus A=\varnothing:$$

Բազմությունը կոչվում է վերջավոր, եթե այն բաղկացած է վերջավոր թվով տարրերից: Հակառակ դեպքում բազմությունն անվանում են անվերջ: Վերջավոր A բազմության տարրերի քանակը կնշանակենք $n(A)$:

Օրինակ՝ թվանշանների $M=\{0;1;2;\ldots;9\}$ բազմությունը վերջավոր է և $n(M)=10$, իսկ բնական թվերի բազմությունն անվերջ է: Վերջավոր է նաև դատարկ բազմությունը, քանի որ այն ոչ մի տարր չունի, այսինքն՝ տարրերի քանակը 0 է՝ $n(\varnothing)=0$:

Չհատվող A և B վերջավոր բազմությունների միավորման տարրերի քանակը հավասար է նրանց տարրերի քանակների գումարին՝ եթե $A\cap B=\varnothing$, ապա $n(A\cup B)=n(A)+n(B)$:

Արտադրյալի կանոնը: Կամայական A և B բազմությունների համար դիտարկենք բոլոր (a,b) զույգերի բազմությունը, որտեղ $a \in A$, $b \in B$: Փորձենք պարզել, թե քանի զույգ կարելի է կազմել:

Օրինակ 1: Եթե $A = \{a, b\}$, $B = \{x, y, z\}$, ապա հնարավոր է կազմել 6 զույգ՝

$$(a,x),\ (a,y),\ (a,z),\ (b,x),\ (b,y),\ (b,z):$$

Օրինակ 2: Պարի խմբակում կան երկու տղա՝ Բագրատն ու Դավիթը, և երեք աղջիկ՝ Արմինեն, Մարիամն ու Նունեն: Գտնենք, թե քանի՞ եղանակով է հնարավոր նրանցից կազմել պարազույգ (մեկ տղա և մեկ աղջիկ):

Քանի որ խմբակում կա երեք աղջիկ, ուրեմն՝ պարազույգերը, որտեղ ընդգրկված է Բագրատը, երեքն են (նշված են անունների սկզբնատառերը)՝

(Բ, Ա), (Բ, Մ), (Բ, Ն):

Դավիթի մասնակցությամբ պարազույգերը նույնպես երեքն են՝

(Դ, Ա), (Դ, Մ), (Դ, Ն):

Հետևաբար՝ հնարավոր պարազույգերի քանակը կլինի 6:

Այստեղ պարազույգը (տղա, աղջիկ) զույգն է, ընդ որում՝ ունենք տղա ընտրելու 2 հնարավորություն, իսկ աղջիկ ընտրելու՝ 3 հնարավորություն: Հնարավոր պարազույգերի քանակը կլինի՝ $2 \times 3 = 6$:

Հանգունորեն կարող ենք համոզվել, որ ճշմարիտ է հետևյալ հաշվեկանոնը, որն անվանում են ***արտադրյալի կանոն:***

Եթե (a,b) զույգ կազմելիս կա a-ն ընտրելու n հնարավորություն, իսկ b-ն ընտրելու m հնարավորություն, ապա հնարավոր (a,b) զույգերի քանակն է՝ $m \cdot n$:

Արտադրյալի կանոնը գործում է նաև այն դեպքում, երբ կազմում ենք կամայական երկարությամբ հավաքածուներ:

Եթե $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ հավաքածու կազմելիս կա a_1-ն ընտրելու n_1 հնարավորություն, a_2-ն ընտրելու n_2 հնարավորություն, ..., a_k-ն ընտրելու n_k հնարավորություն, ապա հնարավոր $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ հավաքածուների քանակն է $n_1 \cdot n_2 \cdots n_k$:

Օրինակ 3: Գտնենք այն եռանիշ թվերի քանակը, որոնք չեն պարունակում կենտ թվանշաններ:

Նշանակենք $A=\{2;4;6;8\}$, $B=\{0;2;4;6;8\}$: Քանի որ որևէ թվի առաջին թվանշանը չի կարող լինել 0, ուստի նշված թվերն ունեն հետևյալ տեսքը՝

$$\overline{a_1a_2a_3},\ \text{որտեղ}\ \ a_1\in A,\ a_2\in B,\ a_3\in B,$$

ընդ որում՝ թվանշանները կարող են և կրկնվել: Այսինքն՝ եռանիշ թիվը կազմելիս կա a_1-ն ընտրելու 4 հնարավորություն, իսկ a_2-ն ու a_3-ն ընտրելու՝ 5-ական հնարավորություն: Հետևաբար՝ որոնելի քանակը կլինի՝

$$4\cdot5\cdot5=100:$$

Պատասխան՝ 100:

Օրինակ 4: Գտնենք, թե քանի 4 տառանոց «բառ» կարելի է կազմել A = {Ա, Բ, Գ, Դ, Ե, Զ} 6 տառանոց «այբուբենով»:

Այստեղ և այսուհետև «բառ» ասելով, հասկանում ենք տառերի կամայական հավաքածու, անկախ նրանից, իմաստ ունի՞ այն հայերենում, թե՞ ոչ:

Նշված տառերով կազմված յուրաքանչյուր 4 տառանոց «բառով» որոշվում է միակ (a_1,a_2,a_3,a_4) քառյակ, որտեղ $a_1\in A$, $a_2\in A$, $a_3\in A$, $a_4\in A$: Այսինքն՝ a_1,a_2,a_3,a_4 տառերից յուրաքանչյուրն ընտրելու համար ունենք 6 հնարավորություն: Հետևաբար՝ որոնելի քանակը կլինի՝

$$6\cdot6\cdot6\cdot6=6^4=1296:$$

Պատասխան՝ 1296:

Հանգունորեն կարելի է ապացուցել, որ

n տառանոց «այբուբենով» կազմված k տառանոց «բառերի» քանակը n^k է:

Օրինակ 5: Գտնենք, թե քանի եղանակով կարելի է 7 տարբեր գնդակները բաժանել 2 երեխաների միջև («բաժանման եղանակ» է նաև, երբ բոլոր գնդակները տրվում են երեխաներից մեկին):

Ենթադրենք, երեխաներն են Ա-ն և Բ-ն, իսկ գնդակները համարակալված են 1-ից մինչև 7:

Գնդակների յուրաքանչյուր բաժանման եղանակով որոշվում է Ա և Բ տառերից կազմված 7 տառանոց մի «բառ», որի յուրաքանչյուր տառը ցույց է տալիս, թե ով է ստացել համապատասխան համարի գնդակը: Օրինակ, այդ «բառի» 4-րդ տառը կլինի Բ, եթե 4-րդ գնդակը ստացել է Բ-ն, և կլինի Ա, եթե ստացել է Ա-ն:

Եվ հակառակը, Ա և Բ տառերից կազմված 7 տառանոց յուրաքանչյուր «բառով» կորոշվի գնդակների բաժանման մի եղանակ:

Հետևաբար՝ գնդակների բաժանման եղանակներն այնքան են, որքան 7 տառանոց «բառ» կարելի է կազմել 2 տառանոց «այբուբենով», իսկ այդ «բառերի» քանակը, ինչպես տեսանք, հավասար է՝ $2^7 = 128$:

Պատասխան՝ 128:

Նման ձևով կարող ենք համոզվել, որ

n տարբեր գնդակները 2 երեխաների միջև բաժանման եղանակների քանակը 2^n է:

Օրինակ 6: Դիցուք, A բազմությունն ունի n տարր: Գտնենք A-ի ենթաբազմությունների քանակը:

Պատկերացնենք, որ A բազմությունը բաղկացած է n տարբեր գնդակներից: Համարենք, որ այդ գնդակների որևէ ենթաբազմություն տալիս ենք առաջին երեխային, իսկ մնացած գնդակները՝ երկրորդին: Ստացվում է, որ A-ն ունի այնքան ենթաբազմություն, քանի ձևով որ կարելի է n գնդակը բաժանել 2 երեխաների միջև: Իսկ այդ թիվը, ինչպես տեսանք նախորդ օրինակում, 2^n է: Այսպիսով,

n տարրից բաղկացած բազմության ենթաբազմությունների քանակը 2^n է:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ե՞րբ են ասում, որ A և B բազմությունները հավասար են:
2. Ե՞րբ են ասում, որ A բազմությունն ընկած է B-ի մեջ:
3. Ե՞րբ են ասում, որ A բազմությունը պարունակում է B-ն:
4. Ե՞րբ են ասում, որ A բազմությունը B-ի ենթաբազմություն է:
5. Ո՞րն է երկու բազմությունների՝ ա) միավորումը, բ) հատումը, գ) տարբերությունը:
6. Ո՞ր բազմությունն է կոչվում դատարկ:
7. Ձևակերպեք արտադրյալի կանոնը:
8. Քանի՞ ենթաբազմություն ունի n տարրից բաղկացած բազմությունը:

Առաջադրանքներ

259. Դիցուք, $A = \{x; y; z; 7; 2\}$, $B = \{a; 2; x\}$: Գտնել հետևյալ բազմությունները.

ա) $A \cup B$, բ) $A \cap B$, գ) $A \setminus B$, դ) $B \setminus A$:

Պարզել, թե տրված բազմությունների համար $A \subset B$, $A \supset B$, $A = B$ առնչություններից ո՞րն է ճշմարիտ (260-261).

260. ա) $A=\{a,b,c\}$, $B=\{b,a,c\}$, բ) $A=\{a,b\}$, $B=\{b,d,c,a\}$,

գ) $A=\{x,v,t,k\}$, $B=\{k,t,v\}$, դ) $A=\{a,b\}$, $B=\{b,d,a\}$:

261. ա) $A=\mathbf{Z}$, $B=\mathbf{R}$, բ) $A=\mathbf{Z}$, $B=\mathbf{N}$,

գ) $A=\{4;7\}$, $B=[2;10]$, դ) $A=\varnothing$, $B=\{5;9\}$:

262. 19-րդ նկարում պատկերված են բազմությունների և նրանց միջև գործողությունների սխեմատիկ պատկերներ: Այդպիսի պատկերները կոչվում են ***Էյլեր-Վեննի գծապատկերներ***:

Էյլեր-Վեննի գծապատկերի միջոցով պատկերել A, B, C բազմություններն այնպես, որ՝

ա) $A\subset B$, $B\subset C$, բ) $A\subset B\cup C$, գ) $A\cup B=C$,

դ) $C\subset A\setminus B$, ե) $B\subset A\cap C$, զ) $A\cap B=C$:

➢263. Էյլեր-Վեննի գծապատկերի միջոցով համոզվեք, որ՝

ա) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$,

բ) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$,

գ) $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$,

դ) $A\cup B=A\cup(B\setminus(A\cap B))$,

ե) եթե $A\subset B$, ապա $B=A\cup(B\setminus A)$):

➢264. Օգտվելով նախորդ առաջադրանքի դ) և ե) կետերից՝ ապացուցեք, որ կամայական A և B վերջավոր բազմությունների համար՝

ա) եթե $A\subset B$, ապա $n(B\setminus A)=n(B)-n(A)$,

բ) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$:

265. Գտնել 0; 2; 4; 6; 8 թվանշաններով գրվող հնգանիշ թվերի քանակը:

266. Քառանիշ թվերի ո՞ր մասն է գրվում միայն կենտ թվանշաններով:

267. Նամակ ուղարկելու համար Գևորգը պետք է 5 տեսակ ծրարներից և 8 տեսակ բացիկներից ընտրի մեկական ծրար և բացիկ: Ընտրության քանի՞ հնարավորություն ունի նա:

268. Գտնել Ա, Կ, Ս, Տ, Ե տառերից կազմված այն «բառերի» քանակը, որոնք՝

ա) բաղկացած են 3 տառից,

բ) բաղկացած են 4 տառից:

*** 269.** Գտնել Ա, Բ, Գ, Դ, Ե տառերից կազմված այն «բառերի» քանակը, որոնք՝

ա) բաղկացած են 5 տառից, որոնցից երկրորդը Ա է կամ Բ:

բ) բաղկացած են 5 տառից և չեն պարունակում ԲԱԴ- բառը:

➢**270.** Ուսանողական ճաշարանն իր այցելուներին առաջարկում է ճաշերի տեսականի՝ բաղկացած ապուրից, երկրորդ ճաշատեսակից և հյութից: Ընդամենը քանի՞ ճաշ կարող է առաջարկել ճաշարանը, եթե խոհանոցում կան 3 տեսակի ապուր, 5 անուն երկրորդ ճաշատեսակ և 4 տեսակի հյութ:

271. Գտնել կոորդինատային հարթության վրա $1 \le x \le 50$, $1 \le y \le 30$ պայմաններով որոշվող ուղղանկյան այն կետերի քանակը, որոնց՝

ա) կոորդինատներն ամբողջ թվեր են,

բ) կոորդինատները զույգ թվեր են,

գ) կոորդինատներից մեկը զույգ է, մյուսը՝ կենտ,

դ) կոորդինատներն ամբողջ թվեր են, որոնցից գոնե մեկը կենտ է,

ե) աբսցիսը բաժանվում է 3-ի, իսկ օրդինատը՝ 5-ի:

272. Գտնել այն եռանիշ թվերի քանակը՝

ա) որոնց գրառումներում չկան 0 և 8 թվանշաններ,

բ) որոնք գրվում են միայն 2, 3, 5, 9 թվանշաններով:

* **273.** Գտնել 5-ի բաժանվող այն վեցանիշ թվերի քանակը, որոնք չեն պարունակում 1, 2, 3 թվանշանները:

➢**274.** Երևանյան հեռախոսահամարները վեցանիշ թվեր են, որոնց առաջին թվանշանը չի կարող լինել 0, 1, 8, 9: Ընդամենը քանի՞ հեռախոսահամար կարող է լինել Երևանում:

➢**275.** Հայաստանում մասնավոր ավտոմեքենաների համարանիշերն ունեն հետևյալ տեսքը՝ «երկու թվանշան + երկու տառ + երեք թվանշան», ընդ որում՝ տառերը կարող են լինել միայն D, L, N, O, P, S, T, U, V: Ընդամենը քանի՞ այդպիսի ավտոհամարանիշ կարող է լինել:

* **276.** Գանձապահը կորցրել է չհրկիզվող պահարանի կողպեքի ծածկագիրը և աշխատում է բացել պահարանը՝ փորձելով ծածկագրերի բոլոր հնարավոր տարբերակները: Ծածկագիրն ունի 6 նիշ, որոնցից առաջին երկուսը տառեր են լատինական այբուբենից (ընդամենը՝ 23 տառ), մնացածը՝ թվանշաններ: Ամենաշատը որքա՞ն ժամանակ է անհրաժեշտ գանձապահին պահարանը բացելու համար, եթե մեկ ծածկագիրը նա փորձում է 5 վայրկյանում:

* **277.** Հայտնի է, որ մարդու մազերի քանակը չի կարող գերազանցել մեկ միլիոնը: Ապացուցել, որ կարելի է գտնել երկու մարդ, որոնք ունեն նույն սեռը, ապրում են նույն աշխարհամասում, ծնվել են նույն թվականին և ունեն նույն քանակով մազեր:

➢**278.** Քանի՞ ձևով է հնարավոր 8 տարբեր գործիքները դասավորել՝

ա) 2 արկղում, բ) 3 արկղում:

279. Գրել {Տ, Ե, Հ, Կ} բազմության բոլոր ենթաբազմությունները և հաշվել նրանց քանակը:

280. Կարո՞ղ է արդյոք բազմության ենթաբազմությունների քանակը լինել՝ ա) 6, բ) 25, գ) 32, դ) 64: Եթե այո, ապա քանի՞ տարր ունի այդ բազմությունը:

281. Քանի՞ տարր ունի A և B չհատվող բազմություններից յուրաքանչյուրը, եթե նրանց միավորումն ունի 30 տարր, և A-ի ենթաբազմությունները 64 անգամ շատ են B-ի ենթաբազմություններից:

Կրկնության համար

282. Միմյանցից 108 մ հեռավորությամբ երկու կետերից միաժամանակ իրար հանդեպ շարժվում են երկու մարմիններ, որոնցից առաջինը՝ 5 մ/վրկ հաստատուն արագությամբ: Երկրորդ մարմինն առաջին վայրկյանում անցնում է 3 մ, իսկ յուրաքանչյուր հաջորդ վայրկյանում՝ 1 մ ավել, քան նախորդում: Քանի՞ վայրկյան անց մարմինները կհանդիպեն:

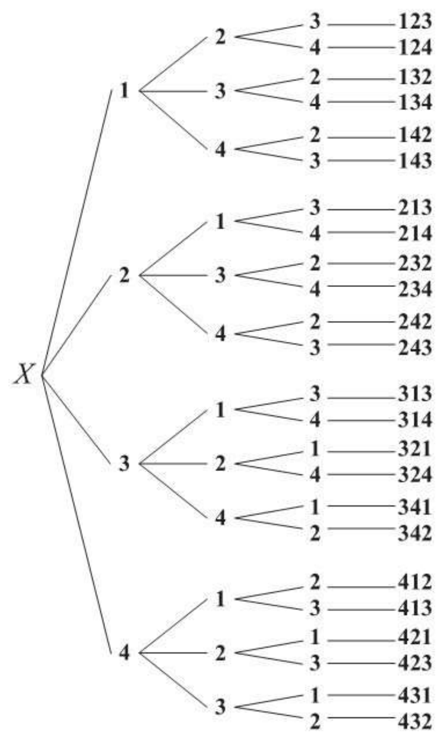
283. A կետից նույն ուղղությամբ միաժամանակ դուրս են գալիս երկու մարմիններ, որոնցից առաջինը՝ 15 մ/վրկ հաստատուն արագությամբ: Երկրորդ մարմինն առաջին վայրկյանում անցնում է 5 մ, իսկ յուրաքանչյուր հաջորդ վայրկյանում՝ 2 մ ավել, քան նախորդում: Քանի՞ վայրկյան անց մարմինները կհանդիպեն:

§4. Կարգավորություններ

Այս պարագրաֆում կպարզենք, թե քանի ձևով է հնարավոր տրված բազմության տարբեր տարրերից կազմել տրված երկարությամբ հավաքածուներ, որոնք տարբերվում են ընտրված տարրերով կամ նրանց հերթականությամբ:

Օրինակ 1: Գտնենք, թե 1, 2, 3, 4 թվանշաններով քանի՞ եռանիշ թիվ կարելի է կազմել, որոնք չունեն կրկնվող թվանշաններ:

I եղանակ: Այդ եռանիշ թվերի X բազմությունը տրոհենք 4 խմբի՝ ըստ առաջին թվանշանի (նկ. 20): Քանի որ թվանշանները չեն կրկնվում, այդ չորս խմբերը կտրոհվեն երեքական նոր խմբերի, որոնցից յուրաքանչյուրի թվերում համընկնում են առաջին երկու թվանշանները (նկ. 20): Արդյունքում կունենանք $4 \cdot 3 = 12$ նոր խումբ, յուրաքանչյուրում՝ երկու թիվ, իսկ թվերի որոնելի քանակը կլինի՝



Նկ. 20

$$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24:$$

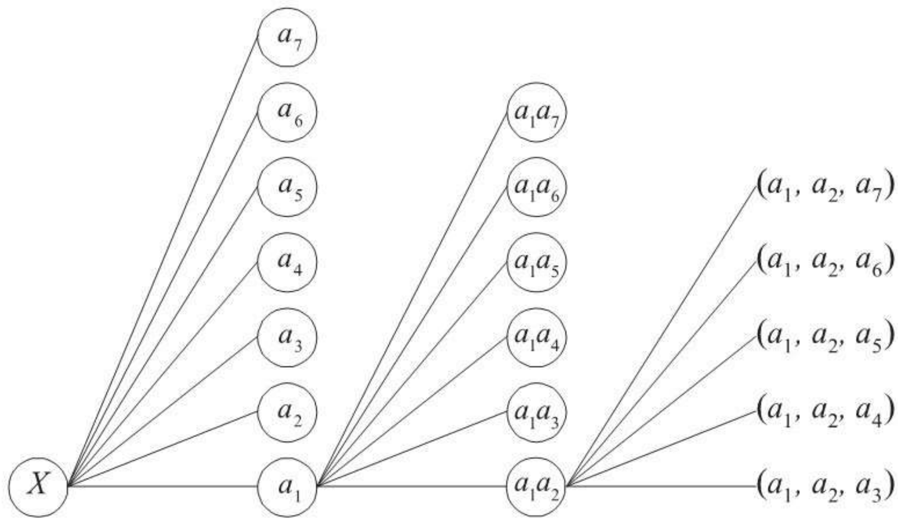
II եղանակ: Եռանիշ թիվն ունի $\overline{abc}$ տեսքը, որտեղ a-ն կարող է ընդունել 4 արժեք՝ $1, 2, 3, 4$: Քանի որ թվանշանները չեն կրկնվում, a-ն ընտրելուց հետո կունենանք b-ն ընտրելու 3 հնարավորություն (օրինակ՝ եթե $a = 2$, ապա b-ն կարող է լինել 1, 3 կամ 4), իսկ a-ն և b-ն ընտրելուց հետո կունենանք c-ն ընտրելու 2 հնարավորություն (օրինակ՝ եթե $a = 2$, $b = 3$, ապա c-ն կարող է լինել 1 կամ 4): Ըստ արտադրյալի կանոնի՝ $\overline{abc}$ թիվը կարող ենք կազմել $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ եղանակով:

Պատասխան՝ 24:

Օրինակ 2: Գտնենք, թե քանի՞ եռագույն դրոշ կարելի է կարել 7 տարբեր գույնի կտորներից:

I եղանակ: Դրոշները կարվում են տարբեր գույնի երեք հորիզոնական շերտերից: Երկու դրոշ կարող են տարբերվել իրենց գույների եռյակներով, կամ կարված լինել նույն երեք գույնի կտորներից, բայց տարբեր հերթականությամբ:

Դիցուք, կտորների գույների բազմությունն է՝ $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_7\}$: Հնարավոր դրոշների X բազմությունը տրոհենք 7 խմբի՝ ըստ դրոշի առաջին գույնի, սկսած վերևից (նկ. 21): Առաջին խումբը կազմված է այն դրոշներից, որոնց առաջին գույնը a_1 է, երկրորդը՝ այն դրոշներից, որոնց առաջին գույնը a_2 է, և այլն:



Նկ. 21

Ստացված 7 խմբերից յուրաքանչյուրում բոլոր դրոշների առաջին գույները նույնն են, իսկ երկրորդ գույնը կարող է լինել մնացած վեց գույներից որևէ մեկը: Հետևաբար՝ 7 խմբերից յուրաքանչյուրը կտրոհվի 6 նոր խմբի՝ ըստ դրոշի երկրորդ գույնի (նկ. 21):

Կստանանք $7 \cdot 6$ նոր խումբ, որոնցից յուրաքանչյուրի դրոշներն ունեն միևնույն առաջին երկու գույները: Քանի որ երրորդ գույնը կարող է լինել մնացած 5 գույներից որևէ մեկը, այդ խմբերը կպարունակեն 5-ական դրոշ, իսկ բոլոր դրոշների քանակը կլինի՝

$$7 \cdot 6 \cdot 5 = 210:$$

II եղանակ: Յուրաքանչյուր դրոշի համապատասխանում է abc եռյակ, որտեղ a-ն առաջին շերտի գույնն է, b-ն՝ երկրորդը, c-ն՝ երրորդը: Քանի որ կա 7 գույնի կտոր, ունենք a-ն ընտրելու յոթ հնարավորություն: Քանի որ շերտերի գույները տարբեր են, a-ն ընտրելուց հետո կունենանք b-ն ընտրելու 6 հնարավորություն, իսկ a-ն և b-ն ընտրելուց հետո կունենանք c-ն ընտրելու 5 հնարավորություն: Այսպիսով՝ abc եռյակ կարող ենք կազմել $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ եղանակով:

Պատասխան՝ 210:

Այս օրինակում տեսանք, որ 7 գույներից հնարավոր է ընտրել $7 \cdot 6 \cdot 5$ կարգավորված եռյակ (առանց կրկնության): Պարզ է, որ նույն արդյունքը կստանանք, եթե ընտրենք կարգավորված եռյակներ որևէ այլ բազմությունից, որն ունի 7 տարր: Նման դեպքում ասում են, որ ընտրում ենք ***կարգավորություններ 7 տարրից՝ 3-ական***: Նախորդ օրինակում, փաստորեն, ընտրում էինք կարգավորություններ 4 տարրից 3-ական և, ինչպես տեսանք, նրանց թիվը հաշվում էր նման ձևով՝ $4 \cdot 3 \cdot 2$:

m տարր պարունակող բազմության k տարբեր տարրերից կազմված հավաքածուները կոչվում են կարգավորություններ m տարրից k-ական:
m տարրից k-ական կարգավորությունների քանակը նշանակում են՝ A_m^k:

Այստեղ $0 \le k \le m$, ընդ որում՝ 0 տարրից կազմված կարգավորություն ընդունված է համարել դատարկ բազմությունը, ուստի՝ $A_m^0 = 1$:

Նշենք, որ երկու տարբեր կարգավորություններ կարող են բաղկացած լինել նույն տարրերից՝ վերցված տարբեր հերթականությամբ: Կարևոր է հիշել, որ կարգավորությունը չի կարող պարունակել իրար հավասար տարրեր, ճիշտ այնպես, ինչպես զինվորական շարասյան մեջ որևէ զինվոր չի կարող միաժամանակ գտնվել երկու տեղում:

Կրկնելով վերը բերված օրինակներում արված դատողությունները՝ կարելի է ապացուցել, որ

$$A_m^k = m(m-1)\dots(m-k+1) \text{:} \tag{4}$$

Օրինակ 3: Գրենական պիտույքների {գրիչ, մատիտ, ռետին} բազմության 3 տարրից 2-ական կարգավորություններն են՝

(մատիտ, գրիչ), (գրիչ, մատիտ), (ռետին, մատիտ),
(մատիտ, ռետին), (գրիչ, ռետին), (ռետին, գրիչ),

որոնց քանակն է՝ $A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6$:

Հիշենք, որ 1-ից մինչև n բնական թվերի արտադրյալը նշանակվում է $n!$ (կարդացվում է ***էն ֆակտորիալ***)՝

$$1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = n! \text{:}$$

Նաև ընդունված է համարել, որ $0! = 1$: Ձևափոխենք (4) բանաձևը՝ օգտագործելով այս նշանակումները.

$$A_m^k = \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)\cdot(m-k)(m-k-1)\cdot\ldots\cdot 1}{(m-k)(m-k-1)\cdot\ldots\cdot 1} = \frac{m!}{(m-k)!} \text{:}$$

Այսինքն՝

$$A_m^k = \frac{m!}{(m-k)!} \text{:} \tag{5}$$

Օրինակ 4: Գտնենք քառանիշ թվերի քանակը, որոնք գրվում են միայն 1, 2, 3, 4, 5, 6 թվանշաններով և որտեղ՝ ա) չկան կրկնվող թվանշաններ, բ) կան կրկնվող թվանշաններ:

ա) Որոնելի քառանիշ թվերը տրված վեց թվանշաններից չորսական կարգավորություններն են: Հետևաբար՝ նրանց քանակը կարող ենք հաշվել (4) բանաձևով.

$$A_6^4 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360 \text{:}$$

բ) Տրված թվանշաններով գրվող բոլոր քառանիշ թվերի քանակը նույնն է, ինչ 6 տառանոց «այբուբենով» գրվող 4 տառանոց «բառերի» քանակը, որը հավասար է 1296 (տե՛ս նախորդ պարագրաֆի 4-րդ օրինակը): Այդ թվերից 360-ում թվանշանները չեն կրկնվում: Հետևաբար՝ կրկնվող թվանշաններ պարունակողների քանակը կլինի՝ $1296 - 360 = 936$:

Պատասխան՝ ա) 360, բ) 936:

Օրինակ 5: Գտնենք, թե ընդամենը քանի՞ պարտիա շախմատ են խաղում առաջնության 14 մասնակիցները, եթե նրանցից ամեն մեկը յուրաքանչյուրի հետ խաղում է երկու անգամ՝ սպիտակ և սև խաղաքարերով:

Շախմատի յուրաքանչյուր պարտիային համապատասխանում է մեկ կարգավորված զույգ՝ (x, y), որտեղ x-ը և y-ը այդ պարտիան խաղացողներն են, ընդ որում՝ x-ը՝ սպիտակ խաղաքարերով:

Հետևաբար՝ խաղում են այնքան պարտիա, որքան կարգավորված զույգ կարելի է կազմել 14 շախմատիստներից (կարգավորություն 14 տարրից՝ 2-ական): Համաձայն (4) բանաձևի, պարտիաների քանակը կլինի՝

$$A_{14}^{2} = 14 \cdot 13 = 182:$$

Պատասխան՝ 182:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ի՞նչ է նշանակում կարգավորություն m տարրից k-ական:
2. Ինչի՞ է հավասար m տարրից k-ական կարգավորությունների քանակը:

Առաջադրանքներ

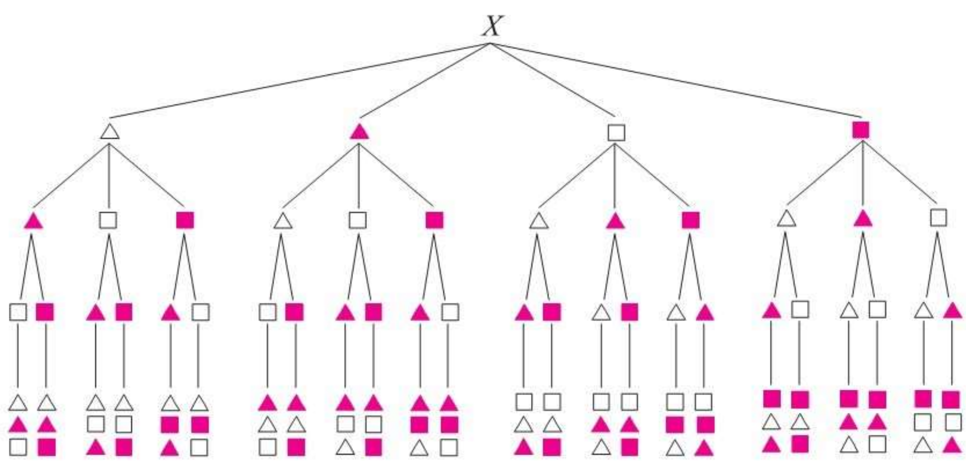
284. Գրել $A = \{3, 5, 8, 0\}$ թվային բազմության k-ական կարգավորությունները և հաշվել նրանց քանակը, եթե՝

ա) $k = 0$, բ) $k = 1$, գ) $k = 2$, դ) $k = 3$, ե) $k = 4$:

285. Գտնել այն քառանիշ թվերի քանակը, որոնք բաղկացած են զույգ առ զույգ տարբեր կենտ թվանշաններից:

286. Գտնել 7 տառանոց «այբուբենի» 4 տարբեր տառերից բաղկացած «բառերի» քանակը:

287. Օգտվելով 22-րդ նկարից՝ համոզվեք, որ 4 տարրից 3-ական կարգավորությունների քանակն է՝ $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$:



Նկ. 22

288. Շախմատի խմբակն ունի 10 անդամ: Քանի՞ եղանակով է հնարավոր կազմել շախմատի թիմ՝ բաղկացած երեք հոգուց, որոնցից մեկը պետք է խաղա առաջին տախտակի մոտ, մեկը՝ երկրորդ, մեկը՝ երրորդ:

289. Քանի՞ եղանակով կարող են բաշխվել ֆուտբոլի առաջնության ամփոփիչ աղյուսակում առաջին երեք տեղերը, եթե մասնակից թիմերի քանակն է՝ ա) 9, բ) 12, գ) 15:

290. Քանի՞ բառարան է անհրաժեշտ, որպեսզի հնարավոր լինի տրված յուրաքանչյուր լեզվից թարգմանել այլ լեզվի, եթե լեզուների քանակն է՝ ա) 3, բ) 6, գ) 8:

291. Քանի՞ ձևով է հնարավոր 10 ուսումնական առարկաներից կազմել մեկ օրվա դասացուցակ՝ բաղկացած 6 տարբեր առարկաներից:

➢**292.** Գտնել կրկնվող թվանշաններ չպարունակող հնգանիշ թվերի քանակը:

➢**293.** Գտնել, թե 0, 3, 7 թվանշանները չպարունակող քառանիշ թվերի քանի՞ տոկոսն է պարունակում կրկնվող թվանշաններ:

➢**294.** Գտնել, թե 6 տառանոց «այբուբենով» գրվող 3 տառանոց «բառերի» ո՞ր մասն է պարունակում կրկնվող տառեր:

➢**295.** Խանութում կա 7 տեսակի պաստառ, որոնցից տանտերը մտադիր է գնել իր բնակարանի ճաշասենյակի, հյուրասենյակի և ննջասենյակի վերանորոգման համար: Ընտրության քանի՞ հնարավորություն ունի տանտերը, եթե տարբեր սենյակների պաստառները նույնը լինել՝ ա) չեն կարող, բ) կարող են:

➢**296.** Գտնել {Ա, Բ, Գ, Դ, Ե, Զ, Է, Ը} «այբուբենով» գրվող այն 5 տառանոց «բառերի» քանակը՝

ա) որոնցում կան կրկնվող տառեր,

բ) որոնց երրորդ տառը Ա է,

գ) որոնց երկրորդ տառը Ա է, իսկ չորրորդը՝ Ե,

դ) որոնց չորրորդ տառը Բ է, կամ Գ:

➢**297.** Շախմատի խաղատախտակի վրա տարբեր գույնի երկու նավակների տեղադրման քանի՞ դիրք գոյություն ունի այնպես, որ նրանք՝

ա) չհարվածեն միմյանց,

բ) հարվածեն միմյանց (նավակները հարվածում են միմյանց, եթե գտնվում են շախմատի տախտակի նույն հորիզոնականի կամ նույն ուղղաձիգի վրա):

➢**298.** Քանի՞ տարր ունի բազմությունը, եթե նրա 4-ական կարգավորությունները 56 անգամ շատ են 2-ական կարգավորություններից:

* **299.** Մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով ապացուցեք (4) բանաձևը՝ նախօրոք ցույց տալով, որ

$$A_m^k = m \cdot A_{m-1}^{k-1} :$$

300. 60 մ երկարությամբ շրջանագծով միևնույն ուղղությամբ հավասարաչափ շարժվող երկու կետերը հանդիպում են յուրաքանչյուր րոպեն մեկ: Գտնել կետերի արագությունները, եթե նրանցից մեկը լրիվ պտույտը կատարում է երկրորդից 5 վրկ շուտ:

301. Երկու մարմիններ հավասարաչափ շարժվում են 120 մ երկարությամբ շրջանագծով: Եթե նրանք շարժվեն հակառակ ուղղություններով, ապա կհանդիպեն յուրաքանչյուր 15 վայրկյանը մեկ, իսկ եթե շարժվեն միևնույն ուղղությամբ, ապա կհանդիպեն յուրաքանչյուր 60 վայրկյանը մեկ: Գտնել մարմինների արագությունները:

302. Երկու անիվ փոկով միացած են իրար: Մեկ րոպեում նրանցից փոքրը 300 պտույտ ավելի է կատարում մյուսից: Քանի՞ պտույտ է կատարում անիվներից յուրաքանչյուրը մեկ րոպեում, եթե մեծ անիվի 10 պտույտ կատարելը տևում է 1 վայրկյանով ավելի, քան փոքր անիվի 10 պտույտ կատարելը:

§5. Տեղափոխություններ

Դիցուք A-ն որևէ բազմություն է, որն ունի m տարր: Եթե դիտարկենք այդ բազմության m-ական կարգավորությունները, ապա կստանանք համախմբեր, որոնք բաղկացած են A-ի բոլոր տարրերից և տարբերվում են միայն այդ տարրերի հերթականությամբ: Այս դեպքում կարգավորությունները մեկը մյուսից ստացվում են տարրերի տեղափոխությամբ և կոչվում են ***տեղափոխություններ:***

Օրինակ 1: Կարմիր, կապույտ և նարնջագույն կտորներից կարված եռագույն դրոշները մեկը մյուսից տարբերվում են միայն գույների հերթականությամբ: Այդպիսի բոլոր դրոշների քանակը հավասար է 3 տարրից 3-ական կարգավորությունների քանակին՝ $A_3^3 = 3 \cdot 2 \cdot 1$ (նկ. 23):

կար.	*կար.*	*կապ.*	*կապ.*	*նար.*	*նար.*
կապ.	*նար.*	*կար.*	*նար.*	*կար.*	*կապ.*
նար.	*կապ.*	*նար.*	*կար.*	*կապ.*	*կար.*

Նկ. 23

m տարր պարունակող բազմության տեղափոխությունների քանակը նշանակում են P_m:

Քանի որ $P_m = A_m^m$, ուստի (4) բանաձևում տեղադրելով $k = m$, տեղափոխությունների քանակի համար ստանում ենք հետևյալ բանաձևը՝

$$P_m = m!:\qquad (1)$$

Օրինակ 2: Գտնենք, թե քանի՞ 6 տառանոց «բառ» կարելի է կազմել Ա, Բ, Գ, Դ, Ե, Զ տառերով՝ առանց կրկնելու «բառի» տառերը:

Քանի որ տրված տառերի քանակը հավասար է «բառի» երկարությանը, ուրեմն՝ նշված «բառերը» տրված տառերի բազմության տեղափոխություններն են, որոնց քանակն է՝

$$P_6 = 6! = 720:$$

Պատասխան՝ 720:

Օրինակ 3: Գտնենք, թե նախորդ օրինակի 720 «բառերից» քանիսո՞ւմ է Ա տառը գրված նախքան Բ-ն:

Բոլոր 720 «բառերը» տրոհենք երկու խմբի՝ առաջին խմբի «բառերում» Ա տառը գրված է նախքան Բ-ն, իսկ երկրորդ խմբում՝ Բ-ից հետո: Համարենք, որ առաջին խմբի «բառերը» գրել ենք մեկ տողում, իսկ նրանցից յուրաքանչյուրի տակ գրել ենք նույն «բառը», փոխելով Ա-ի և Բ-ի տեղերը: Հեշտ է տեսնել, որ.

ա) երկրորդ տողում կա նույնքան «բառ», որքան առաջին տողում,

բ) երկրորդ տողի «բառերը» II խմբից են,

գ) երկրորդ տողում II խմբի բոլոր «բառերն» են գրված (օրինակ, II խմբի ԲԳԱԵԴ «բառը» գրված է առաջին տողի ԱԳԲԵԴ «բառի» տակ):

Այսպիսով, I և II խմբերում կան հավասար քանակությամբ «բառեր», յուրաքանչյուրում՝ 360 «բառ»:

Պատասխան՝ 360:

Օրինակ 4: Գտնենք 1, 2, 3, 4 թվանշանները պարունակող քառանիշ թվերի քանակը:

Որոնելի թվերը տրված չորս թվանշանների բազմության տեղափոխություններն են, որոնց քանակն է՝

$$P_4 = 4! = 24:$$

Պատասխան՝ 24:

Օրինակ 5: Գտնենք 0, 1, 2, 3, 4 թվանշանները պարունակող հնգանիշ թվերի քանակը:

Տրված հինգ թվանշանների բազմության տեղափոխությունների քանակն է՝ $P_5 = 5! = 120$: Սակայն հիշենք, որ թվի առաջին թվանշանը 0 լինել չի կարող, իսկ այս տեղափոխությունների մեջ կան այնպիսիք, որոնց առաջին թվանշանը 0 է:

Ընդ որում՝ համաձայն նախորդ օրինակի, այդպիսի տեղափոխությունների քանակը 24 է: Հետևաբար՝ որոնելի թվերի քանակը կլինի՝ $120-24=96$:

Պատասխան՝ 96:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ի՞նչ է նշանակում տեղափոխություն:
2. Ինչպե՞ս են հաշվում m տարր պարունակող բազմության տեղափոխությունների քանակը:

Առաջադրանքներ

303. Գրել հետևյալ երեք բառերով կազմված բոլոր նախադասությունները.

ա) անձրև, վաղը, կգա,

բ) անտառ, գայլը, փախավ:

304. Գրել $A=\{3, 5, 8, 0\}$ թվային բազմության տեղափոխությունները և հաշվել նրանց քանակը:

305. Քանի՞ եղանակով կարող են նստել տաքսի ավտոմեքենայում նրա 4 ուղևորները:

306. Առանց տառերի կրկնության քանի՞ 6 տառանոց «բառ» կարելի է կազմել 6 տառանոց «այբուբենով»:

307. Քանի՞ եղանակով կարող են շարք կանգնել դասակի 10 զինվորները:

308. Քանի՞ հնարավոր ամփոփիչ աղյուսակ կունենա ֆուտբոլային առաջնությունը, որին մասնակցում է 12 թիմ:

309. Քանի՞ քառանիշ թիվ կարելի է կազմել հետևյալ թվանշաններով.

ա) 2, 4, 6, 8, բ) 1, 3, 5, 7, ➢գ) 0, 1, 2, 5, ➢դ) 0, 3, 4, 7:

➢**310**. Մանկապարտեզի խմբում կան 8 աղջիկ և 7 տղա: Ձմեռ պապը բերել է 8 տարբեր տիկնիկներ աղջիկների համար և 7 տարբեր գնդակներ տղաների համար: Քանի՞ եղանակով է հնարավոր բաժանել այդ խաղալիքները:

➢**311**. Ս, Կ, Ֆ, Ա տառերը պարունակող 4 տառանոց «բառերի» քանի՞ տոկոսում է՝

ա) Կ տառը Ֆ-ից հետ,

բ) Կ տառը Ֆ-ի հարևանությամբ,

գ) Կ տառը երրորդ տեղում:

➢**312**. Քանի՞ եղանակով է հնարավոր բառարանի 6 հատորները դասավորել գրադարակում այնպես, որ՝

ա) 2-րդ հատորը լինի 1-ինի հաջորդը,

բ) 1-ին և 2-րդ հատորները լինեն կողք կողքի, գ) 1-ին և 2-րդ հատորները կողք կողքի չլինեն:

* **313**. Մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով ապացուցեք (1) բանաձևը, նախօրոք ապացուցելով, որ

$$P_{m+1} = (m+1)\cdot P_m :$$

➢**314**. Գտնել n-ը, եթե`

ա) $A_n^{n-3} = n\cdot P_{n-2}$, բ) $\dfrac{A_n^4\cdot P_{n-4}}{P_{n-2}} = 42$, գ) $\dfrac{A_{n+1}^8\cdot P_{n-7}}{P_{n-1}} = 90$:

Կրկնության համար

315. Թռչնաֆաբրիկայում արտադրված մեկ ձվի ինքնարժեքը 50 դրամ է, վաճառքի առավելագույն գինը` 59 դրամ: Շուկայի հետազոտությունները ցույց տվեցին, որ մեկ ձուն n դրամով վաճառելու դեպքում թռչնաֆաբրիկան կկարողանա ամսեկան իրացնել $(60-n)$ միլիոն ձու: Ի՞նչ գնով պետք է վաճառի մեկ ձուն թռչնաֆաբրիկան առավելագույն շահույթ ստանալու համար:

316. Նավի շարժման ժամանակ վառելիքի ծախսը կազմված է երկու մասից: Առաջին մասը կախված չէ նավի արագությունից և կազմում է ժամում 36000 դրամ: Երկրորդ մասն ուղիղ համեմատական է շարժման արագության քառակուսուն և 10 կմ/ժ արագության դեպքում կազմում է ժամում 16000 դրամ: Ի՞նչ արագության դեպքում 1 կիլոմետր ճանապարհին նավի վառելիքի ծախսը կլինի փոքրագույնը:

§6. Զուգորդություններ

Այս պարագրաֆում կդիտարկենք բազմության` տրված քանակով տարրերից կազմված ենթաբազմությունները:

m տարր պարունակող բազմության k տարրից կազմված ենթաբազմությունները կոչվում են զուգորդություններ m տարրից` k-ական:
m տարրից k-ական զուգորդությունների քանակը նշանակում են C_m^k :

Այստեղ $0\le k\le m$: Հեշտ է տեսնել, որ $C_m^0 = C_m^m = 1$, քանի որ m տարր պարունակող A բազմության 0 տարրից կազմված միակ ենթաբազմությունը դատարկն է, իսկ m տարրից կազմված միակ ենթաբազմությունը` A բազմությունն ինքը:

Նշենք, որ զուգորդությունը որոշվում է միայն իր տարրերով և կախված չէ դրանց հերթականությունից: Այն «սովորական» բազմություն է և չի կարող պարունակել երկու համընկնող տարր:

Օրինակ 1: $A=\{3;5;7;8\}$ թվային բազմության 4 տարրից 3-ական զուգորդությունները են՝

$$\{3;5;7\},\quad \{3;5;8\},\quad \{3;7;8\},\quad \{5;7;8\}:$$

Այս ենթաբազմությունների քանակը 4 է, ուրեմն՝ $C_4^3=4$: Նրանցից յուրաքանչյուրի տարրերը կարելի է գրել P_3 տարբեր հերթականությամբ և յուրաքանչյուրից ստանալ $P_3=6$ հատ 3-ական կարգավորություն A բազմության 4 տարրից (նկ. 24):

$\{3;5;7\}$		$(3;5;7)$, $(3;7;5)$, $(5;3;7)$, $(5;7;3)$, $(7;3;5)$, $(7;5;3)$,
$\{3;5;8\}$		$(3;5;8)$, $(3;8;5)$, $(5;3;8)$, $(5;8;3)$, $(8;3;5)$, $(8;5;3)$,
$\{3;7;8\}$	$\Rightarrow$	$(3;7;8)$, $(3;8;7)$, $(7;3;8)$, $(7;8;3)$, $(8;3;7)$, $(8;7;3)$,
$\{5;7;8\}$		$(5;7;8)$, $(5;8;7)$, $(7;5;8)$, $(7;8;5)$, $(8;5;7)$, $(8;7;5)$:
$C_4^3=4$		$A_4^3=6\cdot 4=P_3\cdot C_4^3$

Նկ. 24

Պարզ է, որ այս ձևով կստացվեն A բազմության բոլոր 3-ական կարգավորությունները: Հետևաբար՝

$$A_4^3=P_3\cdot C_4^3$$

(իրոք, $A_4^3=4\cdot 3\cdot 2=24$, $P_3=3!=6$, $C_4^3=4$):

Նման ձևով կարելի է համոզվել, որ կամայական m և k բնական թվերի համար

$$\boldsymbol{A_m^k=P_k\cdot C_m^k}:$$

Այստեղից, օգտագործելով նախորդ երկու պարագրաֆներում A_m^k և P_k մեծությունների համար ստացված բանաձևերը, կստանանք՝

$$C_m^k=\frac{m!}{k!(m-k)!}\qquad(1)$$

կամ, որ նույնն է,

$$\boldsymbol{C_m^k=\frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}}:\qquad(2)$$

Օրինակ 2: Գտնենք, թե քանի՞ պարտիա են խաղում շախմատի շրջանաձև առաջնությանը մասնակցող 14 շախմատիստները:

Շրջանաձև առաջնության ժամանակ շախմատիստներից ամեն մեկը յուրաքանչյուրի հետ հանդիպում է մեկ անգամ: Ուրեմն՝ խաղում են այնքան պարտիա, որքան զույգ կարելի է կազմել 14 շախմատիստից (զուգորդություն 14-ից 2-ական): Պարտիաների քանակը կլինի՝

$$C_{14}^2 = \frac{14 \cdot 13}{1 \cdot 2} = 91:$$

Պատասխան՝ 91 (համեմատե՛ք §4-ի 5-րդ օրինակի հետ):

Դիցուք, A բազմությունն ունի m տարր: Եթե վերցնենք նրա որևէ B ենթաբազմություն, որը բաղկացած է k տարրից, ապա մնացած $A \setminus B$ ենթաբազմությունը կունենա $m-k$ տարր: Նշանակում է՝ k տարրից բաղկացած ենթաբազմություններն այնքան են, որքան $m-k$ տարրից բաղկացածները, այսինքն՝

$$C_m^k = C_m^{m-k}: \tag{3}$$

Ապացուցենք, որ

$$C_m^0 + C_m^1 + \ldots + C_m^m = 2^m: \tag{4}$$

Իրոք, m տարրից բաղկացած A բազմության որևէ ենթաբազմությունը կարող է ունենալ 0-ից մինչև m տարր, իսկ k տարր ունեցողների քանակը C_m^k է: Նշանակում է՝ (4) հավասարության ձախ մասը A բազմության բոլոր ենթաբազմությունների քանակն է, որը, ինչպես գիտենք, հավասար է 2^m (տե՛ս §3-ի 6-րդ օրինակը):

Օրինակ 3: Գտնենք այն 5 տառանոց «բառերի» քանակը, որոնք պարունակում են երեք a և երկու b տառեր:

Յուրաքանչյուր այդպիսի «բառ» միարժեքորեն որոշվում է իր երկու b տառերի տեղերով (մնացած երեք տեղերում a-եր են), այսինքն՝ որոշվում է 1, 2, 3, 4, 5 թվերի մի զույգով, որը ցույց է տալիս, թե «բառի» որերորդ տառերն են b: Օրինակ՝ $abaab$ «բառը» որոշվում է $\{2; 5\}$ զույգով, քանի որ նրա երկրորդ և հինգերորդ տառերը b են: Հետևաբար՝ նշված բառերն այնքան են, որքան $\{1; 2; 3; 4; 5\}$ բազմության երկու տարբեր տարրերից կազմված ենթաբազմությունները (5 տարրից 2-ական զուգորդությունները)՝

$$C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10:$$

Պատասխան՝ 10:

Հանգունորեն կարելի է համոզվել, որ

m հատ a և k հատ b տառերից բաղկացած «բառերի» քանակն է C_{m+k}^{k} :

Օրինակ 4: Դասարանը բաղկացած է 14 աշակերտից՝ 8 աղջիկ և 6 տղա: Գտնենք, թե քանի եղանակով է հնարավոր կազմել խմբեր, որոնցում լինեն 4 աղջիկ և 3 տղա:

Աղջիկներից կազմված քառյակների բազմությունը նշանակենք A-ով, իսկ տղաների եռյակների բազմությունը՝ B-ով: Քանի որ աղջիկների քառյակները զուգորդություններ են 8-ից 4-ական, իսկ տղաների եռյակները՝ զուգորդություններ 6-ից՝ 3-ական, ուրեմն՝

$$n(A)=C_8^4=\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3\cdot4}=70,\qquad n(B)=C_6^3=\frac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3}=20:$$

Խնդրում դիտակվող խմբերից յուրաքանչյուրը որոշակի (a,b) զույգ է, որտեղ $a\in A$ (աղջիկների քառյակ), $b\in B$ (տղաների եռյակ), իսկ այդպիսի (a,b) զույգերի քանակը հաշվվում է արտադրյալի կանոնով (տե՛ս §3)՝

$$n(A)\cdot n(B)=70\cdot20=1400:$$

Պատասխան՝ 1400:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ի՞նչ է նշանակում զուգորդություն m տարրից՝ k-ական:
2. Ինչպե՞ս են հաշվում m տարրից k-ական զուգորդությունների քանակը:
3. Ապացուցեք (3) հավասարությունը:
4. Ապացուցեք (4) հավասարությունը:

Առաջադրանքներ

317. Գրել $A=\{3;5;8;0\}$ թվային բազմության k-ական զուգորդությունները և հաշվել դրանց քանակը, եթե՝

ա) $k=0$, բ) $k=1$, գ) $k=2$, դ) $k=3$, ե) $k=4$:

318. Քանի՞ եղանակով է հնարավոր 3 հերթապահ ընտրել դասարանի 15 աշակերտից:

319. Քանի՞ եղանակով է հնարավոր 8 սև զինվորները դասավորել շախմատի խաղատախտակի սև դաշտերի վրա:

320. Ափսեում կա 7 հատ միրգ՝ տարբեր տեսակի: Քանի՞ եղանակով կկարողանա երեխան ընտրել դրանցից k հատ, եթե՝

ա) $k=2$, բ) $k=5$, գ) $k=4$, դ) $k=3$:

321. Հարթության վրա զույգ առ զույգ հատվող m ուղիղներից որևէ երեքը մեկ կետով չեն անցնում: Ընդամենը քանի՞ հատման կետ կա, եթե՝

ա) $m=8$, բ) $m=12$, գ) $m=20$, դ) $m=40$:

➢322. Տարածության մեջ տրված հարթություններից յուրաքանչյուր երեքն ունեն մեկ ընդհանուր (հատման) կետ, իսկ յուրաքանչյուր չորսի հատումը դատարկ է: Ընդամենը քանի՞ հատման կետ և քանի՞ հատման գիծ կան, եթե՝

ա) $m=4$, բ) $m=9$, գ) $m=12$, դ) $m=20$:

➢323. Հաշվել n -անկյան անկյունագծերի քանակը:

➢324. Ծաղկաթմբում կան 8 տեսակ կարմիր և 6 տեսակ սպիտակ ծաղիկներ: Քանի՞ եղանակով է հնարավոր պոկել 3 ծաղիկ, որոնք բոլորը՝

ա) լինեն կամայական գույնի,

բ) լինեն նույն գույնի,

գ) նույն գույնի չլինեն:

➢325. Ծաղկամանում կան 10 վարդ և 8 մեխակ: Քանի՞ եղանակով է հնարավոր կազմել ծաղկեփունջ, կազմված՝

ա) 2 վարդից և 3 մեխակից,

բ) 3 վարդից և 2 մեխակից,

գ) 1 վարդից և 4 մեխակից:

*** 326.** Քանի՞ տարբեր ակորդ կարելի է վերցնել դաշնամուրի 10 ստեղների վրա, եթե յուրաքանչյուր ակորդ կարող է պարունակել 3-ից 10 հնչյուն:

➢327. Ֆուտբոլային թիմն ունի 2 դարպասապահ, 6 պաշտպան, 4 կիսապաշտպան և 5 հարձակվող: Քանի՞ եղանակով է հնարավոր ընտրել հերթական խաղի մասնակիցների կազմը (դարպասապահ, 4 պաշտպան, 3 կիսապաշտպան և 3 հարձակվող):

328. Ապացուցել (3) հավասարությունը՝ օգտվելով (2)-ից:

➢329. Համեմատել թվերը.

ա) C_{10}^4 և C_{10}^6, բ) C_{10}^4 և C_{10}^5, գ) C_{10}^7 և C_{10}^9, դ) C_{10}^6 և C_{11}^9:

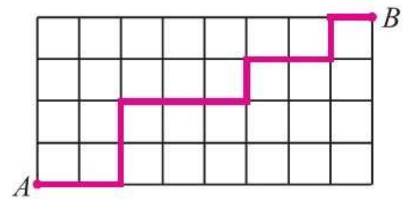
*** 330.** Ապացուցել, որ կամայական ամբողջ n-ի համար՝

ա) $C_n^k < C_n^{k+1}$, եթե $0 \le k < \dfrac{n}{2}$, բ) $C_n^k > C_n^{k+1}$, եթե $\dfrac{n}{2} < k < n$:

➢331. Իրարից տարբեր n գնդակներից պետք է ընտրել k հատ: Գտնել, թե k-ի ո՞ր արժեքի դեպքում ընտրության եղանակների թիվը կլինի ամենամեծը, եթե՝

ա) $n=9$, բ) $n=15$, գ) $n=10$, դ) $n=20$:

➢**332.** Գտնել այն «բառերի» քանակը, որոնք բաղկացած են 8 հատ Ա և 4 հատ Վ տառերից:



Նկ. 25

* **333.** Կետն ուղղանկյուն ցանցի վրայով կարող է շարժվել դեպի աջ կամ վեր (նկ. 25): Գտնել այն ճանապարհների թիվը, որոնցով կետը A-ից կհասնի B:

* **334.** Մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով ապացուցել (1) բանաձևը, նախօրոք ապացուցելով, որ

$$C_m^k = C_{m-1}^{k-1} + C_{m-1}^k:$$

* **335.** Գտնել n-ը, եթե`

ա) $A_n^2 \cdot C_n^{n-1} = 48$, բ) $A_n^3 + C_n^{n-2} = 14n$,

գ) $A_n^5 = 336 \cdot C_{n-2}^{n-5}$, դ) $C_{n+1}^{n-2} + 2C_{n-1}^3 = 7(n-1)$:

Կրկնության համար

➢**336.** Քանի՞ կգ ջուր պետք է գոլորշիացնել 85 % ջուր պարունակող սպիրտի 50 կգ լուծույթից, 75 %-անոց լուծույթ ստանալու համար:

➢**337.** Ծովի ջուրը պարունակում է 5 % աղ: Որքա՞ն մաքուր ջուր պետք է ավելացնել 30 կգ ծովի ջրին, որպեսզի աղի պարունակությունը լինի 1,5 %:

§7. Նյուտոնի երկանդամը

Նյուտոնի երկանդամ կոչվում է

$$(a+b)^n$$

արտահայտությունը, որտեղ a-ն և b-ն կամայական թվեր են, իսկ n-ը` բնական: Հանրահաշվի դասընթացից գիտենք, որ

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \qquad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3:$$

Այժմ տեսնենք, թե կամայական բնական n-ի դեպքում ինչպես կարելի է «բացել» Նյուտոնի երկանդամը, այսինքն` ներկայացնել միանդամների գումարի տեսքով:

Օրինակ 1: Ստանանք բանաձև $(a+b)^4$ երկանդամի համար:

Երկանդամը գրենք $(a+b)$ արտադրիչների արտադրյալի տեսքով`

$$(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b) \qquad (1)$$

Պարզ է, որ, բացելով փակագծերը և միացնելով նման անդամները, կստանանք մի գումար, որի գումարելիները

$$a^4, \quad a^3b, \quad a^2b^2, \quad ab^3, \quad b^4$$

միանդամներն են՝ ինչ-որ գործակիցներով, և մեր նպատակն այդ գործակիցները հաշվելն է: Իհարկե, այս օրինակում երկանդամի աստիճանը՝ 4-ը, մեծ թիվ չէ և այդ գործակիցները կարելի է գտնել ուղղակի հաշվումներ կատարելով: Սակայն մենք կգնանք այլ, այս օրինակի համար մի քիչ երկար ճանապարհով, որից կարելի է օգտվել կամայական աստիճանի դեպքում:

Եթե (1) արտադրյալում բացենք փակագծերը, չօգտագործելով աստիճանի նշանակումը, չփոխելով արտադրիչների հերթականությունը և չմիացնելով նման անդամները, ապա կստանանք հետևյալ գումարը՝

$$\begin{aligned} &aaaa+aaab+aaba+aabb+abaa+abab+abba+abbb+\\ &+baaa+baab+baba+babb+bbaa+bbab+bbba+bbbb: \end{aligned} \qquad (2)$$

Նկատենք, որ այստեղ գրված են a և b տառերից բաղկացած բոլոր 4 տառանոց «բառերը»: Այժմ միացնենք նման անդամները: Տեսնենք, օրինակ, թե (2) գումարի գումարելիներից որոնք են հավասար a^2b^2: Դրանք այն «բառերն» են, որոնք բաղկացած են երկու հատ a և երկու հատ b տառերից: Իսկ այդպիսի «բառերի» քանակը, ինչպես տեսանք նախորդ պարագրաֆի 3-րդ օրինակում, հավասար է՝

$$C_4^2=\frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}=6:$$

Հանգունորեն, a^3b-ին հավասար գումարելիները (2) գումարում այնքան են, որքան երեք a և մեկ b պարունակող «բառերը», այսինքն՝ $C_4^1=4$, իսկ ab^3-ին հավասարների քանակը կլինի՝ $C_4^3=4$ (մեկ a և երեք b): Վերջապես, ունենք մեկական գումարելի՝ հավասար a^4 և b^4 ($C_4^4=C_4^0=1$): Այսպիսով՝

$$(a+b)^4=C_4^0\cdot a^4+C_4^1\cdot a^3b+C_4^2\cdot a^2b^2+C_4^3\cdot ab^3+C_4^4\cdot b^4,$$

կամ, որ նույնն է՝

$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4:$$

Կամայական բնական n-ի դեպքում Նյուտոնի երկանդամը կարելի է «բացել» հետևյալ բանաձևով, որը կոչվում է ***Նյուտոնի երկանդամի բանաձև***.

$$(a+b)^n = C_n^0 \cdot a^n + C_n^1 \cdot a^{n-1}b + \ldots + C_n^k \cdot a^{n-k}b^k + \ldots + C_n^n \cdot b^n : \qquad (3)$$

Հաշվի առնելով $C_n^k = C_n^{n-k}$ հավասարությունը՝ այն կարելի է գրել նաև հետևյալ տեսքով.

$$(a+b)^n = C_n^n \cdot a^n + C_n^{n-1} \cdot a^{n-1}b + \ldots + C_n^{n-k} \cdot a^{n-k}b^k + \ldots + C_n^0 \cdot b^n :$$

Ապացուցում: Նյուտոնի երկանդամի բանաձևն ընդհանուր դեպքում կարելի է ապացուցել նույն կերպ, ինչպես այդ արեցինք $n=4$ դեպքում: Սակայն մենք կբերենք այլ ապացույց՝ կիրառելով մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդը:

Նախ ապացուցենք, որ եթե $0<k<n$, ապա

$$C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k : \qquad (4)$$

Իրոք, համաձայն նախորդ պարագրաֆի (1) բանաձևի՝

$$C_n^k + C_n^{k-1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1}\right)$$

$$= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \frac{n+1}{k(n-k+1)} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = C_{n+1}^k :$$

Այժմ վերադառնանք (3) բանաձևի ապացուցմանը: Պարզ է, որ $n=1$ դեպքում (3) հավասարությունը ճշմարիտ է: Ենթադրենք, այն ճշմարիտ է որևէ բնական n-ի համար և ապացուցենք $(n+1)$-ի համար: Ունենք.

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)\cdot(a+b)^n =$$
$$= (a+b)\left(C_n^0 \cdot a^n + C_n^1 \cdot a^{n-1}b + \ldots + C_n^k \cdot a^{n-k}b^k + \ldots + C_n^n \cdot b^n\right):$$

Հեշտ է տեսնել, որ փակագծերը բացելու դեպքում կամայական k-ի համար ($0<k<n+1$) ստացված գումարում $a^{n+1-k}b^k$ միանդամը կհանդիպի երկու անգամ՝

$$a\cdot\left(C_n^k \cdot a^{n-k}b^k\right) + b\cdot\left(C_n^{k-1} \cdot a^{n+1-k}b^{k-1}\right):$$

Ուստի $a^{n+1-k}b^k$ միանդամի գործակիցը կլինի՝ $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$: Մյուս կողմից, a^{n+1} և b^{n+1} միանդամների գործակիցները հավասար են համապատասխանաբար

$$C_n^0 = 1 = C_{n+1}^0 \text{ և } C_n^n = 1 = C_{n+1}^{n+1}:$$

Այսպիսով՝

$$(a+b)^{n+1} = C_{n+1}^0 \cdot a^{n+1} + C_{n+1}^1 \cdot a^n b + \ldots + C_{n+1}^k \cdot a^{n+1-k} b^k + \ldots + C_{n+1}^{n+1} \cdot b^n:$$

Ստացանք (3) բանաձևը $(n+1)$-ի համար: Նյուտոնի երկանդամի բանաձևը բոլոր բնական n-երի համար ապացուցված է:

Օրինակ 2: Ստանանք բանաձև $(a+b)^5$ երկանդամի համար:

Նյուտոնի երկանդամի բանաձևում վերցնելով $n=5$ և հաշվելով համապատասխան գործակիցները՝

$$C_5^0 = C_5^5 = 1, \quad C_5^1 = C_5^4 = 5, \quad C_5^2 = C_5^3 = 10,$$

կստանանք՝

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5:$$

Նյուտոնի երկանդամի բանաձևում ընդունելով $a = b = 1$, ստանում ենք՝

$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n:$$

Այս նույնությունը նախորդ պարագրաֆում (տե՛ս (4) բանաձևը) ստացանք այն փաստից, որ n տարրից բաղկացած բազմությունն ունի 2^n ենթաբազմություն:

Օրինակ 3: Գտնենք $\left(x^5 - \dfrac{2}{x^4}\right)^6$ երկանդամի վերլուծության մեջ x^3-ի գործակիցը:

Նախ գտնենք, թե այդ վերլուծության որ անդամն է պարունակում x^3 միանդամը: Վերլուծության k-րդ անդամն է՝

$$C_6^k \left(x^5\right)^{6-k} \cdot \left(\frac{2}{x^4}\right)^k = 2^k \cdot C_6^k \cdot x^{30-9k}:$$

Վերցնելով $30 - 9k = 3$, ստանում ենք՝ $k = 3$, իսկ x^3-ի գործակիցը կլինի՝

$$2^3 \cdot C_6^3 = 8 \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 160:$$

Պատասխան՝ 160:

Օրինակ 4: Ապացուցենք, որ կամայական բնական n-ի դեպքում

(7^n-1)-ը բաժանվում է 6-ի:

Համաձայն (1) բանաձևի՝

$$7^n=(6+1)^n=C_n^0\cdot 6^n+C_n^1\cdot 6^{n-1}+\ldots+C_n^k\cdot 6^{n-k}+\ldots+C_n^n\cdot 6+C_n^n:$$

Քանի որ $C_n^n=1$, հետևաբար՝ (7^n-1)-ը կբաժանվի 6-ի:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ո՞րն է Նյուտոնի երկանդամը:
2. Գրե՛ք Նյուտոնի երկանդամի բանաձևը:
3. Արտածե՛ք Նյուտոնի երկանդամի բանաձևը $n=5$ դեպքում:

Առաջադրանքներ

338. Բազմանդամը գրել կատարյալ տեսքով.

ա) $(x+1)^5$, բ) $(x-2)^4$, գ) $(x^2-x)^4$, դ) $(1+x^3)^5$:

339. Գտնել բազմանդամի կատարյալ տեսքում x^k-ի գործակիցը.

ա) $(2x-3)^7$, $k=4$, բ) $(1-3x)^6$, $k=3$,
գ) $(0{,}5x+4)^8$, $k=5$, դ) $(25x-0{,}2)^5$, $k=2$:

340. Երկանդամի վերլուծության մեջ գտնել x^k-ի գործակիցը.

ա) $(x^2-2x^3)^5$, $k=11$, բ) $(2x^5-x^4)^8$, $k=34$,

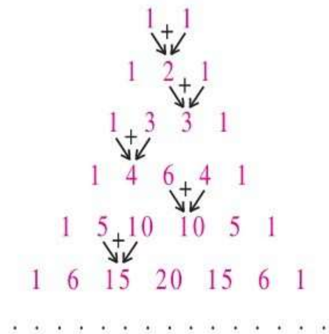
գ) $\left(2x^7+\dfrac{1}{x^2}\right)^{10}$, $k=7$, դ) $\left(3x^8-\dfrac{1}{x^3}\right)^9$, $k=6$:

➢341. Գտնել n-ը, եթե հայտնի է, որ $\left(\sqrt[3]{x}+\dfrac{1}{x}\right)^n$ երկանդամի վերլուծության հինգերորդ գումարելին կախված չէ x-ից:

➢342. Գտնել n-ը, եթե հայտնի է, որ $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+3\right)^n$ երկանդամի վերլուծության չորրորդ գումարելիի հարաբերությունը երրորդին հավասար է $3\sqrt{2}$:

➢343. 26-րդ նկարում պատկերված անվերջ թվային «եռանկյունը» կոչվում է ***Պասկալի եռանկյուն:*** Նրա առաջին տողը բաղկացած է երկու հատ 1-ից, իսկ յուրաքանչյուր հաջորդ տողը ստացվում է իր նախորդից հետևյալ կանոնով. տողի առաջին և վերջին թվերը 1 են, իսկ մնացած թվերից յուրաքանչյուրը նախորդ տողի՝ իր վերևում գրված երկու թվերի գումարն է: Օրինակ, 6-րդ տողի 3-րդ թիվը (15-ը) 5-րդ տողի 2-րդ (5) և 3-րդ (10) թվերի գումարն է՝ $15 = 5 + 10$:

Ապացուցեք, որ Պասկալի եռանկյան n-րդ տողում գրված են Նյուտոնի երկանդամի (3) բանաձևի գործակիցները ($n = 1, 2, \ldots$):


Նկ. 26

➢344. Ապացուցել, որ կամայական բնական n-ի համար՝

ա) $\left(8^n - 1\right)$-ը բաժանվում է 7-ի,

բ) $\left(15^n - 1\right)$-ը բաժանվում է 14-ի:

*** 345**. Ապացուցել, որ՝

ա) եթե n-ը կենտ է, ապա $\left(12^n + 1\right)$-ը բաժանվում է 13-ի,

բ) եթե n-ը զույգ է, ապա $\left(8^n - 1\right)$-ը բաժանվում է 63-ի:

*** 346**. Գտնել $(x+1)^n$ բազմանդամի կատարյալ տեսքում x^3-ի գործակիցը, եթե նրա գործակիցների և ազատ անդամի գումարը հավասար է՝ ա) 64, բ) 128:

➢347. Ապացուցել նույնությունը.

ա) $x^3 + 3x^2(1-x) + 3x(1-x)^2 + (1-x)^3 = 1$,

բ) $x^4 + 4x^3(1-x) + 6x^2(1-x)^2 + 4x(1-x)^3 + (1-x)^4 = 1$:

➢348. Ապացուցել նույնությունը.

$$\sin^4 x + 4\sin^3 x\cos x + 6\sin^2 x\cos^2 x + 4\sin x\cos^3 x + \cos^4 x = $$
$$= 4\sin^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right):$$

349. Օգտվելով նախորդ առաջադրանքից՝ ապացուցել, որ կամայական x-ի համար

$$\sin^4 x + 4\sin^3 x\cos x + 6\sin^2 x\cos^2 x + 4\sin x\cos^3 x + \cos^4 x \le 4:$$

*** 350**. Ապացուցել, որ եթե $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, ապա

$$\mathrm{tg}^4 x + 4\,\mathrm{tg}^3 x\,\mathrm{ctg}\, x + 6\,\mathrm{tg}^2 x\,\mathrm{ctg}^2 x + 4\,\mathrm{tg}\, x\,\mathrm{ctg}^3 x + \mathrm{ctg}^4 x \ge 16:$$

*** 351**. Գտնել $(x-1)^n$ բազմանդամի կատարյալ տեսքում x^4-ի գործակիցը, եթե նրա բոլոր գործակիցների և ազատ անդամի բացարձակ արժեքների գումարը հավասար է՝ ա) 32, բ) 256:

352. Աշխատանքային օրը 8 ժամից դարձավ 7 ժամ: Քանի՞ տոկոսով պետք է բարձրացնել աշխատանքի արտադրողականությունը, որպեսզի օրական արտադրանքն ավելանա 5 %-ով:

353. Հունվարին գործարանն արտադրանքի ամսական պլանը գերակատարեց 5 %-ով, իսկ փետրվարին 4 %-ով ավելի արտադրանք տվեց, քան հունվարին: Քանի՞ տոկոսով գործարանը գերակատարեց երկամսյա պլանը:

§8. Հավանականությունների տեսության տարրերը

Մեզ շրջապատող շատ երևույթներ ու իրադարձություններ ունեն պատահական բնույթ: Առօրյա կյանքում հաճախ ենք օգտագործում այնպիսի դարձվածքներ, ինչպիսիք են. «քիչ հավանական է, որ այսօր անձրև գա», «նրա հաղթելու հնարավորությունները շատ մեծ են», «երեկոյան հավանաբար կգնամ թատրոն»:

Այսպես խոսում ենք իրադարձությունների մասին, որոնց հանդես գալը (կամ չգալը) հաստատ պնդել չենք կարող, սակայն, ելնելով ինչ-որ նախադրյալներից, ինչ-որ կերպ գնահատում ենք նրանց հավանական (կամ անհավանական) լինելը:

Մեզանից յուրաքանչյուրը համոզված է, որ կշահի, եթե գրազ գա, որ մետաղադրամի հինգ նետումներից գոնե մեկի արդյունքը կլինի «թիվ», չբացառելով, սակայն, որ բոլոր նետումների արդյունքները կարող են լինել «զինանշան»: Գնելով վիճակախաղի տոմս և հույս ունենալով շահել, մեզանից յուրաքանչյուրը հասկանում է, որ իր շահելու հնարավորությունները փոքր են, շատ քիչ է հավանական, որ ինքը կշահի:

Կարո՞ղ ենք արդյոք ճշգրիտ գնահատել մեր հաղթելու հնարավորությունները: Ինչպե՞ս կարելի է թվապես նկարագրել, թե որքանով է հավանական այս կամ այն իրադարձությունը: Այս և նման հարցերի պատասխանը տալիս է ***հավանականությունների տեսությունը***՝ մաթեմատիկայի բնագավառ, որն ուսումնասիրում է պատահական իրադարձությունների օրինաչափությունները:

Պատահական փորձ, պատահույթ: Հավանականությունների տեսության հիմքում ***պատահական փորձի*** գաղափարն է: Այն բազմիցս կրկնելի գործողությունների համալիր է, որոնցից յուրաքանչյուրի արդյունքը հնարավոր ***ելքերից*** որևէ մեկն է:

Օրինակ 1: Նետում ենք մետաղադրամը և տեսնում, թե նրա որ կողմն է ուղղված դեպի վեր՝ զինանշա՞նը, թե՞ թիվը:

Այստեղ պատահական փորձը մետաղադրամի մեկ նետումն է: Այն կարող է ունենալ երկու ելք՝ «զինանշան» (Զ), կամ «թիվ» (Թ):

Օրինակ 2: Մետաղադրամը նետում ենք երկու անգամ:

Այստեղ մեկ փորձը մետաղադրամի երկու նետումն է: Հնարավոր ելքերն են՝

ԹԹ, ԹԶ, ԶԹ, ԶԶ,

որտեղ ԹԹ-ն նշանակում է, որ երկու նետումների արդյունքները «թիվ» են, ԹԶ-ն՝ որ առաջինը «թիվ» է, իսկ երկրորդը՝ «զինանշան», և այլն:

Հնարավո՞ր է արդյոք, որ երկու նետումների արդյունքում ստացվի նույն նշանը: Սա մի իրադարձություն է, որը որոշակի փորձի արդյունքում կարող է տեղի ունենալ (եթե փորձի ելքը ԹԹ է կամ ԶԶ), կարող է և տեղի չունենալ (եթե ելքը ԹԶ է կամ ԶԹ): Նման իրադարձություններն անվանում են ***պատահույթ***:

Դիտարկվող փորձում մեկ այլ պատահույթ է այն, որ երկու նետումների արդյունքները կլինեն տարբեր. մեկը՝ «թիվ», մյուսը՝ «զինանշան»: Պատահույթ է նաև այն, որ երկու նետումների արդյունքում կստացվի «թիվ»: Եթե դիտարկված նախորդ երկու պատահույթներից յուրաքանչյուրը կարող էր տեղի ունենալ փորձի երկու ելքի դեպքում, ապա վերջին պատահույթը համընկնում է փորձի ելքերից մեկի՝ ԹԹ-ի հետ: Նման պատահույթներն անվանում են ***տարրական պատահույթ***:

Պատահական փորձի հետ կապված որևէ իրադարձություն, որը փորձի արդյունքում կարող է տեղի ունենալ, կամ՝ տեղի չունենալ, կոչվում է պատահույթ:

Պատահական փորձի որևէ ելքի հետ համընկնող պատահույթը կոչվում է տարրական պատահույթ:

Օրինակ 3: Նետում ենք զառը և հաշվում նրա վերին նիստի կետերի քանակը:

Այստեղ պատահական փորձը զառի նետումն է, իսկ փորձի ելքը՝ ստացված կետերի քանակը: Հնարավոր ելքերն են (տարրական պատահույթները).

(1) «կետերի քանակը 1 է», (2) «կետերի քանակը 2 է»,

(3) «կետերի քանակը 3 է», (4) «կետերի քանակը 4 է»,

(5) «կետերի քանակը 5 է», (6) «կետերի քանակը 6 է»:

Պատահույթների օրինակներ են.

(A) «կետերի քանակը զույգ է»,

(B) «կետերի քանակը կենտ է»,

(C) «կետերի քանակը 2 է կամ 4»,

(D) «կետերի քանակը մեծ է 7-ից»,

(H) «կետերի քանակը փոքր է 7-ից»:

Փորձի արդյունքում այս պատահույթներից յուրաքանչյուրի հանդես գալը կախված է փորձի ելքից. որոշ ելքերի դեպքում պատահույթը տեղի կունենա, ուրիշ ելքերի դեպքում՝ ոչ: Օրինակ, A պատահույթը տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ փորձի ելքը 2, 4 կամ 6 է: Նման դեպքում ասում են, որ 2, 4, 6 ելքերը (տարրական պատահույթները) ***նպաստում են*** A պատահույթին: Փաստորեն, յուրաքանչյուր պատահույթ կարելի է նույնացնել նրան նպաստող ելքերի բազմության հետ՝

$$A=\{2,4,6\},\quad B=\{1,3,5\},\quad C=\{2,4\}:$$

Այս բազմությունները զառի նետման փորձի բոլոր հնարավոր ելքերի $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$ բազմության ենթաբազմություններ են: Յուրաքանչյուր պատահույթ նույնացնելով իրեն նպաստող հնարավոր ելքերի բազմության հետ՝ կարող ենք համարել, որ ***պատահույթը պատահական փորձի հնարավոր ելքերի բազմության որևէ ենթաբազմություն է:***

Յուրահատուկ են D և H պատահույթները: H պատահույթին նպաստում են փորձի բոլոր հնարավոր ելքերը՝ $H=\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$: Այն անպայման տեղի կունենա անկախ փորձի ելքից, քանի որ զառի յուրաքանչյուր նիստի կետերի քանակը փոքր է 7-ից: Նման դեպքում ասում են, որ H-ը ***հավաստի պատահույթ*** է:

D պատահույթին նպաստող ելք գոյություն չունի՝ $D=\varnothing$: Ինչ ելք էլ որ ունենա փորձը, պատահույթը չի կարող իրականանալ, քանի որ զառը չունի այնպիսի նիստ, որի կետերի քանակը մեծ լինի 7-ից: Նման դեպքում ասում են, որ D-ն ***անհնար պատահույթ*** է:

Պատահույթը, որին նպաստում են պատահական փորձի բոլոր հնարավոր ելքերը, կոչվում է հավաստի պատահույթ:
Պատահույթը, որին նպաստող ելք գոյություն չունի, կոչվում է անհնար պատահույթ:

Զառի նետման փորձում դիտարկենք հետևյալ պատահույթը.

(N) «կետերի քանակը 6-ից տարբեր զույգ թիվ է»:

Այս պատահույթին նպաստում են միայն 2 և 4 ելքերը՝ $N=\{2,4\}$: Հիշենք, որ նույն նպաստող ելքերն ուներ նաև վերը դիտարկված C պատահույթը: Նշանակում է, որ, չնայած արտաքուստ տարբերությանը, N և C պատահույթները ***հավասար են***. փորձի արդյունքում նրանցից մեկի տեղի ունենալուց հետևում է, որ տեղի ունի նաև մյուսը:

Երկու պատահույթներ հավասար են, եթե նույնն են նրանց նպաստող ելքերի բազմությունները:

Պարզ է, որ զառի յուրաքանչյուր նետման արդյունքում ստացված կետերի քանակը կամ զույգ է, կամ՝ կենտ, այսինքն՝ A և B պատահույթներից մեկը տեղի ունի, իսկ մյուսը՝ ոչ: Նման պատահույթները կոչվում են ***հակադիր*** պատահույթներ:

Երկու պատահույթներ կոչվում են հակադիր, եթե պատահական փորձի յուրաքանչյուր ելք նպաստում է նրանցից մեկին և միայն մեկին:

Եթե A և B պատահույթները հակադիր են, ապա ասում են նաև, որ A-ն B-ի հակադիրն է, կամ՝ որ B-ն A-ի հակադիրն է:

Օրինակ, մետաղադրամի երկու անգամ նետման փորձում (2-րդ օրինակ) հակադիր են «երկու նետումներում հանդես կգա նույն նշանը» և «երկու նետումներում հանդես կգան տարբեր նշաններ» պատահույթները:

Այժմ զառի նետման փորձում դիտարկենք հետևյալ պատահույթը.

(F) «կետերի քանակը 6 չէ»:

F պատահույթին նպաստող ելքերն են՝ $F=\{1, 2, 3, 4, 5\}$: Այն կիրականանա այն և միայն այն դեպքում, եթե տեղի ունենա B-ն (կետերի քանակը կենտ է) կամ C-ն (կետերի քանակը 2 է կամ 4): Նման դեպքում ասում են, որ F պատահույթը B և C պատահույթների ***միավորումն*** է:

B և C պատահույթների միավորում կոչվում է այն F պատահույթը, որը հանդես է գալիս, եթե դեպի ունի B և C պատահույթներից գոնե մեկը, այսինքն՝ F-ին նպաստում են այն և միայն այն ելքերը, որոնք նպաստում են B և C պատահույթներից գոնե մեկին:

Հեշտ է տեսնել, որ F-ին նպաստող ելքերի բազմությունը B-ին նպաստող ելքերի բազմության և C-ին նպաստող ելքերի բազմության միավորումն է՝

$$\{1, 2, 3, 4, 5\}=\{1, 3, 5\}\cup\{2, 4\}:$$

Ուստի B և C պատահույթների միավորման համար օգտագործում են նույն նշանակումը, ինչ որ բազմությունների միավորման համար՝ $B \cup C$: Մասնավորապես, վերը դիտարկված պատահույթների համար կունենանք հետևյալ հավասարությունները.

$$A \cup B = H, \quad A \cup C = A, \quad A \cup D = A, \quad B \cup H = H, \quad B \cup C = F :$$

Նկատենք, որ զառի նետման փորձի արդյունքում երբեք միաժամանակ չեն կարող տեղի ունենալ A և B պատահույթները, քանի որ կետերի քանակը չի կարող միաժամանակ լինել և՛ զույգ, և՛ կենտ: Նման պատահույթները կոչվում են ***անհամատեղելի***:

Երկու պատահույթներ կոչվում են անհամատեղելի, եթե նրանք չեն կարող տեղի ունենալ միաժամանակ, այսինքն՝ գոյություն չունի պատահական փորձի ելք, որը միաժամանակ նպաստում է այդ պատահույթներին:

Պարզ է, որ զառի նետման փորձում (1) - (6) տարրական պատահույթները զույգ առ զույգ անհամատեղելի են: Անհամատեղելի են նաև B և C պատահույթները: Իսկ A և C պատահույթներն անհամատեղելի չեն, եթե կետերի քանակը 2 է, ապա տեղի ունեն և՛ A, և՛ C պատահույթները, այսինքն՝ (2) ելքը միաժամանակ նպաստում է այդ պատահույթներին:

Հաճախություն և հավանականություն: Դիտարկենք մետաղադրամի նետման փորձը (օրինակ 1): Նրա ելքը պատահական է. նետելով մետաղադրամը, երբեք չենք կարող նախօրոք պնդել, թե ինչ կլինի ելքը՝ Զ (զինանշան), թե՝ Թ (թիվ): Սակայն, չնայած յուրաքանչյուր նետման ելքը պատահական է, կարող ենք նկատել մի ուշագրավ օրինաչափություն՝ եթե փորձը կրկնենք բազմիցս: Ենթադրենք, մետաղադրամը նետել ենք N անգամ և $N(Զ)$ անգամ եղել է զինանշան: Կազմենք

$$\frac{N(Զ)}{N}$$

հարաբերությունը: Այն ցույց է տալիս, թե ելքերի որ մասն է Զ, և կոչվում է փորձերի տվյալ շարքում ***Զ պատահույթի (հարաբերական) հաճախություն***: Եթե մետաղադրամը համասեռ է և ծռմռված չէ, այսինքն՝ Զ և Թ ելքերը ***հավասարահնարավոր*** են, ապա վերցնելով $N = 10,\ 100,\ 500, \ldots$ և կատարելով փորձեր՝ կնկատենք, որ ստացված հաճախությունները տատանվում են 0,5 թվի շուրջը:

Փորձերի շարքի համարը		1	2	3	4	5	6	7
Նետումների քանակը	N	10	100	500	1000	2000	5000	10000
Զինանշանի հանդես գալու թիվը	$N(Զ)$	6	48	241	506	988	2516	4981
Զինանշանի հաճախությունը	$\frac{N(Զ)}{N}$	0,6	0,48	0,482	0,505	0,496	0,503	0,498

Նկ. 27

27-րդ նկարում բերված են այդպիսի փորձերի արդյունքները: Ստացված հաճախությունները շատ քիչ են տարբերվում 0,5-ից: Ընդ որում` որքան մեծ է նետումների քանակը, այնքան հաճախությունն ավելի մոտ է 0,5 -ին: Նման դեպքում ասում են, որ ***Զ պատահույթի հավանականությունը*** 0,5 է և գրում հետևյալ կերպ`

$$P(Զ) = 0,5 :$$

Նշենք, որ ի տարբերություն հաճախության, որը փորձերի շարքի արդյունքում ստացվող պատահական մեծություն է և կարող է փոփոխվել, հավանականությունը որոշակի թիվ է, որը կապ չունի փորձի հետ: Առանց որևէ փորձի էլ կարող ենք ասել, որ մեծ թվով նետումներ կատարելու դեպքում ելքերի մոտ կեսը կլինի Զ:

Պատահույթի հավանականությունը թիվ է, որը ցույց է տալիս, թե մոտավորապես որքան կլինի պատահույթի հաճախությունը մեծ թվով փորձերի շարքում:

Զառի նետման փորձն ունի 6 հնարավոր ելք (տարրական պատահույթ): Եթե զառը համասեռ խորանարդ է, ապա այդ ելքերը հավասարահնարավոր են, և մեծ N թվով նետումներ կատարելու դեպքում յուրաքանչյուր ելք կկրկնվի մոտ $\frac{N}{6}$ անգամ, այսինքն` յուրաքանչյուր ելքի հաճախությունը կլինի մոտավորապես $1/6$:

Ուստի զառի նետման փորձում տարրական պատահույթներից յուրաքանչյուրի հավանականությունը $1/6$ է`

$$P(1) = P(2) = \ldots = P(6) = \frac{1}{6} :$$

Այժմ դիտարկենք 3-րդ օրինակի C պատահույթը (կետերի քանակը 2 է կամ 4): Այս պատահույթը տեղի է ունենում ամեն անգամ, երբ ելքը 2 է կամ 4, այսինքն` ընդամենը մոտ $2 \cdot \frac{N}{6}$ անգամ, իսկ նրա հաճախությունը մոտավորապես $\frac{2}{6}$ է:

Այսինքն՝ C պատահույթի հավանականությունը՝

$$P(C)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}:$$

3-րդ օրինակում դիտարկված մյուս պատահույթների հավանականություններն են՝

$$P(A)=P(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}, \quad P(D)=0, \quad P(H)=1:$$

Ինչպես ցույց են տալիս օրինակները, վերջավոր թվով հավասարահնարավոր ելքեր ունեցող պատահական փորձում որևէ պատահույթի հավանականությունը բնական է սահմանել հետևյալ կերպ (***հավանականության դասական սահմանում***).

n հավասարահնարավոր ելքով պատահական փորձում A պատահույթի հավանականությունը հավասար է այդ պատահույթին նպաստող ելքերի $n(A)$ քանակի հարաբերությանը ելքերի ընդհանուր քանակին.

$$\boldsymbol{p(A)=\frac{n(A)}{n}}:$$

Փաստորեն, պատահույթի հավանականությունն այն թիվն է, որը ցույց է տալիս, թե պատահական փորձի հնարավոր ելքերի որ մասն է նպաստում այդ պատահույթին:

Քանի որ հավաստի պատահույթին նպաստում են բոլոր հնարավոր ելքերը, իսկ անհնար պատահույթին նպաստող ելք գոյություն չունի, ուրեմն՝

n (հավաստի պատահույթ) = n, n (անհնար պատահույթ) = 0:

Հետևաբար՝ կամայական պատահական փորձում հավաստի պատահույթի հավանականությունը 1 է, իսկ անհնար պատահույթինը՝ 0.

P(հավաստի պատահույթ) = 1, P(անհնար պատահույթ) = 0:

Օրինակ 4: Նետում ենք երկու՝ սպիտակ ու կարմիր զառեր և հաշվում յուրաքանչյուր զառի վերին նիստի կետերի քանակը:

Փորձի ելքը կարող ենք գրել $(s;k)$ թվազույգի տեսքով, որտեղ s-ը՝ սպիտակ, իսկ k-ն կարմիր զառի արդյունքն է (վերին նիստի կետերի քանակը): Հնարավոր ելքերի (տարրական պատահույթների) ընդհանուր քանակը 36 է՝ $n=36$ (տե՛ս նկ. 31): Քանի որ այդ ելքերը հավասարահնարավոր են, ապա նրանցից յուրաքանչյուրի հավանականությունը կլինի $1/36$:

կարմիր զառի կետերի քանակը / սպիտակ զառի կետերի քանակը	1	2	3	4	5	6
1	(1;1)	(1;2)	(1;3)	(1;4)	(1;5)	(1;6)
2	(2;1)	(2;2)	(2;3)	(2;4)	(2;5)	(2;6)
3	(3;1)	(3;2)	(3;3)	(3;4)	(3;5)	(3;6)
4	(4;1)	(4;2)	(4;3)	(4;4)	(4;5)	(4;6)
5	(5;1)	(5;2)	(5;3)	(5;4)	(5;5)	(5;6)
6	(6;1)	(6;2)	(6;3)	(6;4)	(6;5)	(6;6)

Նկ. 28

Դիտարկենք հետևյալ պատահույթները.

(A) «զառերի արդյունքները նույնն են»,

(B) «զառերից գոնե մեկի արդյունքը 4 է»,

(C) «զառերի արդյունքների գումարը 7 է»,

(D) «զառերի արդյունքների գումարը 1 է»,

(E) «կարմիր զառի արդյունքը չի գերազանցում սպիտակինը»,

(F) «զառերից մեկի արդյունքը 1 է, մյուսինը՝ 6»,

(G) «զառերից յուրաքանչյուրի արդյունքը 5 է»,

(H) «զառերի արդյունքների գումարը փոքր է 15-ից»:

Օգտվելով 28-րդ նկարից՝ կարող ենք հաշվել յուրաքանչյուր պատահույթին նպաստող ելքերի քանակը՝

$$n(A)=6,\quad n(B)=11,\quad n(C)=6,\quad n(D)=0,$$
$$n(E)=21,\quad n(F)=2,\quad n(G)=1,\quad n(H)=36:$$

Ստացված թվերը բաժանելով 36-ի, կստանանք պատահույթների հավանականությունները՝

$$P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6},\quad P(B)=\frac{11}{36},\quad n(C)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6},\quad n(D)=\frac{0}{36}=0,$$
$$P(E)=\frac{21}{36}=\frac{7}{12},\quad P(F)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18},\quad P(G)=\frac{1}{36},\quad n(H)=\frac{36}{36}=1:$$

Նշենք, որ D պատահույթը փորձի արդյունքում հանդես գալ չի կարող: Այն անհնար պատահույթ է և նրա հավանականությունը 0 է: Իսկ H պատահույթը փորձի արդյունքում անպայման տեղի է ունենում, անկախ փորձի ելքից: Այն հավաստի պատահույթ է, և նրա հավանականությունը 1 է:

Նկատենք նաև, որ A և C պատահույթներն ունեն նույն հավանականությունները (չնայած այդ պատահույթները հավասար չեն): Այսպիսի պատահույթները կոչվում են ***հավասարահավանական***:

Հավանականությունների հատկությունները, օրինակներ

Օրինակ 5: Պատահականորեն ընտրում ենք մի երկնիշ թիվ: Գտնենք հետևյալ պատահույթների հավանականությունները:

(A) «ընտրված թիվը բաժանվում է 4-ի»,

(B) «ընտրված թիվը 4-ի բաժանելիս ստացվում է 2 մնացորդ»,

(C) «ընտրված թիվը զույգ է»:

Փորձի հնարավոր ելքերը երկնիշ թվերն են՝ $10, 11, 12, \ldots, 99$, ուստի հնարավոր ելքերի քանակը՝ $n=90$:

A պատահույթին նպաստում են 4-ի բաժանվող երկնիշ թվերը՝ $12, 16, 20, \ldots, 96$, B պատահույթին նպաստում են 4-ի բաժանելիս 2 մնացորդ տվող երկնիշ թվերը՝ $10, 14, 18, \ldots, 98$, իսկ C պատահույթին՝ զույգ երկնիշ թվերը՝ $10, 12, 14, \ldots, 98$: Հետևաբար՝

$$n(A)=\frac{96-12}{4}+1=22,\quad n(B)=\frac{98-10}{4}+1=23,\quad n(C)=\frac{98-10}{2}+1=45:$$

Հավանականությունները կլինեն՝

$$P(A)=\frac{22}{90}=\frac{11}{45},\quad P(B)=\frac{23}{90},\quad P(C)=\frac{45}{90}=\frac{1}{2}:$$

Նկատենք, որ այս օրինակում A-ն և B-ն անհամատեղելի պատահույթներ են, իսկ C-ն նրանց միավորումն է՝ $C=A\cup B$, քանի որ կամայական զույգ թիվ կամ բաժանվում է 4-ի, կամ 4-ի բաժանելիս ստացվում է 2 մնացորդ: Փաստորեն ստացվեց, որ $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$: Պարզվում է, որ այս հավասարությունը ճիշտ է կամայական անհամատեղելի պատահույթների համար:

Թեորեմ: ***Եթե A և B պատահույթները անհամատեղելի են, ապա այդ պատահույթների միավորման հավանականությունը հավասար է նրանց հավանականությունների գումարին՝***

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) :$$

Ապացույց: Դիցուք, պատահական փորձն ունի n հնարավոր ելք, որոնցից A պատահույթին նպաստում են $a_1, a_2, \ldots, a_m$ ելքերը, իսկ B պատահույթին՝ $b_1, b_2, \ldots, b_k$ ելքերը: Այդ դեպքում $A \cup B$ պատահույթին կնպաստեն $a_1, a_2, \ldots, a_m$, $b_1, b_2, \ldots, b_k$ ելքերը, որոնց մեջ չկան կրկնվողները, քանի որ A և B պատահույթները անհամատեղելի են: Նշանակում է՝ $A \cup B$ պատահույթին նպաստող ելքերի քանակն է՝

$$n(A \cup B) = m + k = n(A) + n(B),$$

որտեղից գտնում ենք դրա հավանականությունը՝

$$P(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n} = \frac{n(A)}{n} + \frac{n(B)}{n} = P(A) + P(B) :$$

Թեորեմն ապացուցված է:

Ինչպես ցույց են տալիս օրինակները, պատահական փորձում որևէ պատահույթի հավանականության գտնելը հանգում է փորձի հնարավոր ելքերի և այդ պատահույթին նպաստող ելքերի քանակների հաշվման խնդրին: Այս խնդիրը լուծելիս հաճախ օգտակար են լինում միացությունների տեսության բանաձևերը:

Օրինակ 6: Սափորում կա չորս գնդիկ՝ համարակալված 1, 2, 3, 4 թվանշաններով: Սափորից պատահականորեն, մեկը մյուսի ետևից հանում ենք երեք գնդիկ և դասավորելով ձախից աջ՝ ստանում եռանիշ թիվ: Գտնենք հետևյալ պատահույթների հավանականությունները.

(A) «ստացված թվի թվանշանները դասավորված են աճման կարգով»,

(B) «ստացված թվի առաջին թվանշանն ամենամեծն է»,

(C) «ստացված թվի թվանշանների գումարը 6 է»:

Այստեղ փորձի ելքը ստացված եռանիշ թիվն է: Հնարավոր ելքերը {1, 2, 3, 4} բազմության 4 տարրից 3-ական կարգավորություններն են (տե՛ս §2, օրինակ 1, նկ. 19), որոնց քանակն է՝

$$n = A_4^3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24 :$$

A պատահույթին նպաստող ելքերն են՝

$$123, \quad 124, \quad 134, \quad 234; \quad n(A)=4:$$

B պատահույթին նպաստող ելքերն են՝

$$321, \quad 312, \quad 421, \quad 412, \quad 431, \quad 413, \quad 432, \quad 423; \quad n(B)=8:$$

C պատահույթին նպաստում են 1, 2, 3 թվանշաններով գրվող եռանիշ թվերը (տեղափոխություններ երեք տարրից), որոնց քանակն է՝

$$n(C)=P_3=3!=6:$$

Այսպիսով՝

$$P(A)=\frac{4}{24}=\frac{1}{6}, \qquad P(B)=\frac{8}{24}=\frac{1}{3}, \qquad P(C)=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}:$$

Հիշենք, որ եթե A և B պատահույթները հակադիր են, ապա պատահական փորձի յուրաքանչյուր ելք նպաստող է այդ պատահույթներից մեկի և միայն մեկի համար: Նշանակում է՝ հակադիր պատահույթներն անհամատեղելի են, իսկ նրանց միավորումը հավաստի պատահույթ է: Քանի որ հավաստի պատահույթի հավանականությունը 1 է, ապա թեորեմից ստանում ենք.

Հետևանք: ***Եթե A և B պատահույթները հակադիր են, ապա***

$$\mathbf{P(A)+P(B)=1}:$$

Այս հավասարությունից հարմար է օգտվել այն դեպքերում, երբ տրված պատահույթի հավանականության գտնելը ավելի դժվար է, քան նրա հակադիրի հավանականության հաշվումը:

Օրինակ 7: Տուփից, որի մեջ կա 6 սև և 4 կապույտ գրիչ, պատահականորեն հանում ենք 3 գրիչ: Գտնենք հետևյալ պատահույթի հավանականությունը.

(A) «հանված գրիչներից գոնե մեկը կապույտ է»:

Այս պատահույթի հակադիրն է՝

(B) «հանված գրիչները սև են»:

Նախ գտնենք B պատահույթի հավանականությունը: Տուփի 10 գրիչներից 3-ը ընտրելու եղանակների քանակը 10-ից 3-ական զուգորդությունների թիվն է: Հետևաբար՝ պատահական փորձի հնարավոր ելքերի քանակն է՝

$$n=C_{10}^3=\frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3}=120:$$

B պատահույթը հանդես է գալիս, երբ հանված 3 գրիչներն ընտրված են տուփում եղած 6 սև գրիչներից: Այդպիսի ընտրությունների քանակը 6-ից 3-ական զուգորդությունների թիվն է: Հետևաբար՝ B պատահույթին նպաստող ելքերի քանակը կլինի՝

$$n(B)=C_6^3=\frac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3}=20,$$

իսկ նրա հավանականությունը՝

$$P(B)=\frac{n(B)}{n}=\frac{20}{120}=\frac{1}{6}:$$

Այժմ, հաշվի առնելով, որ A և B պատահույթները հակադիր են, կարող ենք կիրառել հետևանքը և գտնել A պատահույթի հավանականությունը՝

$$P(A)=1-P(B)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}:$$

Օրինակ 8: Գտնենք «49-ից 6» սպորտլոտոյի վիճակախաղի մեկ տոմսով գլխավոր մրցանակը շահելու հավանականությունը:

Այս վիճակախաղի մասնակիցը տոմսի վրա եղած $1,2,\ldots,49$ թվերից նշում է վեց թիվ: Խաղարկության ժամանակ թմբուկից, որի մեջ կա $1,2,\ldots,49$ թվերով համարակալված 49 գնդիկ, պատահականորեն հանվում է վեց գնդիկ: Գլխավոր մրցանակը շահելու համար անհրաժեշտ է, որ տոմսի վրա նշված վեց թվերը համընկնեն վեց գնդիկների համարների հետ:

Խաղարկության հնարավոր ելքերը զուգորդություններ են $1,2,\ldots,49$ թվերի բազմության 49 տարրից 6-ական, որոնց քանակն է՝

$$n=\frac{49\cdot48\cdot47\cdot46\cdot45\cdot44}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}=13\,983\,816:$$

Այս ելքերից գլխավոր մրցանակը շահելուն նպաստում է միայն մեկը: Հետևաբար՝ գլխավոր մրցանակը շահելու հավանականությունն է՝

$$P=\frac{1}{13\,983\,816}\approx0{,}7\cdot10^{-8}:$$

Համեմատության համար նշենք, որ հավանականությունը, որ մետաղադրամի բոլոր 20 նետումների արդյունքները կլինեն «թիվ», մոտավորապես հավասար է 10^{-6} (ապացուցեք ինքնուրույն): Այսինքն՝ սպորտլոտոյի գլխավոր մրցանակը շահելն ավելի քան 100 անգամ քիչ հավանական է, քան այն, որ 20 անգամ նետելով մետաղադրամը, դուք միշտ կստանաք «թիվ» արդյունքը:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ի՞նչ է պատահույթը:
2. Ո՞րն է տարրական պատահույթը:
3. Ե՞րբ են ասում, որ փորձի ելքը նպաստում է պատահույթին:
4. Ո՞րն է հավաստի պատահույթը:
5. Ո՞րն է անհնար պատահույթը:
6. Ո՞ր պատահույթներն են կոչվում՝ ա) հավասար, բ) հակադիր, գ) անհամատեղելի:
7. Ո՞րն է պատահույթների միավորումը:
8. Ո՞րն է պատահույթի հաճախությունը փորձերի շարքում:
9. Տվեք հավանականության դասական սահմանումը:
10. Ի՞նչ կապ կա պատահույթի հաճախության և հավանականության միջև:
11. Ինչի՞ է հավասար հավաստի պատահույթի հավանականությունը:
12. Ինչի՞ է հավասար անհնար պատահույթի հավանականությունը:
13. Ինչի՞ է հավասար անհամատեղելի պատահույթների միավորման հավանականությունը:
14. Ի՞նչ կապ կա հակադիր պատահույթների հավանականությունների միջև:

Առաջադրանքներ

354. Մետաղադրամը նետում են երեք անգամ:

ա) Գրել հնարավոր ելքերի բազմությունը:

բ) Բերել պատահույթների օրինակներ:

գ) Բերել հավաստի պատահույթի օրինակ:

դ) Բերել անհնար պատահույթի օրինակ:

355. Զառի նետման փորձում դիտարկվում են հետևյալ պատահույթները.

(A) «կետերի քանակը բաժանվում է 3-ի»,

(B) «կետերի քանակը պարզ թիվ է»,

(C) «կետերի քանակը կենտ թիվ է»,

(D) «կետերի քանակը փոքր է 3-ից»:

Գրել, թե որոնք են հետևյալ պատահույթները.

ա) $A\cup B$, բ) $A\cup C$, գ) $A\cup D$,

դ) $B\cup C$, ե) $B\cup D$, զ) $C\cup D$:

356. Պարզել, թե նախորդ առաջադրանքի ա) - զ) պատահույթներից որո՞նք են իրար հավասար:

357. Գրել 4-րդ օրինակում դիտարկված A, B, C, E, G պատահույթների հակադիր պատահույթները:

***358.** Ամենաշատը քանի՞ իրարից տարբեր պատահույթ կարող է դիտարկվել պատահական փորձում, որն ունի 10 հնարավոր ելք:

359. Գտնել A պատահույթի հավանականությունը, եթե հայտնի է, որ նրան նպաստող ելքերի քանակը կազմում է պատահական փորձի հնարավոր ելքերի՝

ա) $\frac{2}{3}$ մասը, բ) $0,13$ մասը, գ) 20% -ը, դ) 75% -ը:

360. Գտնել 355 առաջադրանքում դիտարկված պատահույթների հավանականությունները:

361. Մետաղադրամը նետում են երկու անգամ: Գտնել հետևյալ պատահույթների հավանականությունները.

ա) «նետումներից յուրաքանչյուրի արդյունքը **թիվ** է»,

բ) «նետումներից յուրաքանչյուրի արդյունքը **զինանշան** է»,

գ) «նետումներից մեկի արդյունքը թիվ է, մյուսինը՝ զինանշան»:

362. Պատահականորեն ընտրում են $1, 2, \ldots, 100$ թվերից մեկը: Գտնել հետևյալ պատահույթների հավանականությունները.

ա) «ընտրված թիվը փոքր է 21-ից»,

բ) «ընտրված թիվը մեծ է 75-ից»,

գ) «ընտրված թիվը պատկանում է $(15; 50]$ միջակայքին»,

դ) «ընտրված թիվը չի պատկանում $(34; 61)$ միջակայքին»:

363. Մետաղադրամը նետում են երեք անգամ: Գտնել հետևյալ պատահույթների հավանականությունները.

ա) «**թիվը** հանդես կգա ճիշտ երկու անգամ»,

բ) «**թիվը** հանդես կգա գոնե մեկ անգամ»,

գ) «**թիվը** հանդես կգա ոչ ավելի, քան երկու անգամ»,

դ) «երկրորդ նետման արդյունքը **զինանշան** է»:

364. Նետում են երկու՝ կարմիր և սպիտակ զառեր: Գտնել հետևյալ պատահույթների հավանականությունները.

ա) «կարմիր զառի արդյունքը մեկով մեծ է սպիտակինից»,

բ) «կարմիր զառի արդյունքը երեքով փոքր է սպիտակինից»,

գ) «զառերի արդյունքների գումարը 10 է»,

դ) «զառերի արդյունքների տարբերությունը 2 է»,

ե) «կարմիր զառի արդյունքը մեծ է սպիտակինից»,

զ) «երկու զառերի արդյունքները զույգ են»,

է) «զառերից գոնե մեկի արդյունքը կենտ է»:

➢**365.** Նետում են երկու զառ: Գտնել, թե m-ի ի՞նչ արժեքի դեպքում «զառերի արդյունքների գումարը m է» պատահույթի հավանականությունը կլինի՝

ա) ամենամեծը, բ) ամենափոքրը:

➢**366.** Պատահականորեն ընտրել են որևէ ընտանիք, որտեղ կա երկու երեխա: Արդյո՞ք հավասարահավանական են հետևյալ երեք պատահույթները՝

1) «երկու երեխաներն էլ տղա են»,

2) «երկու երեխաներն էլ աղջիկ են»,

3) «երեխաներից մեկը տղա է, մյուսը՝ աղջիկ»:

(Նորածնի՝ տղա կամ աղջիկ լինելը հավասարահնարավոր են):

367. Գտնել հավանականությունը, որ պատահականորեն ընտրված երկնիշ թիվը՝

ա) կբաժանվի 3-ի,

բ) կբաժանվի 5-ի,

գ) 10-ի բաժանելիս կստացվի 2 մնացորդ,

դ) 7-ի բաժանելիս կստացվի 4 մնացորդ:

➢368. Թվաբանական պրոգրեսիայի երրորդ անդամը 5 է, իսկ յոթերորդը՝ 25: Գտնել հավանականությունը, որ $[a,b]$ միջակայքից պատահականորեն ընտրված բնական թիվը կլինի այդ պրոգրեսիայի անդամ, եթե՝

ա) $[a,b]=[1,100]$, բ) $[a,b]=[51,100]$, գ) $[a,b]=[51,104]$:

369. Գտնել հավանականությունը, որ պատահականորեն ընտրված եռանիշ թվի՝

ա) բոլոր թվանշանները կլինեն կենտ,

բ) բոլոր թվանշանները կբաժանվեն երեքի 1 մնացորդով:

370. Ապացուցել, որ եթե պատահույթի հավանականությունը 1 է, ապա այն հավաստի պատահույթ է:

➢371. Ապացուցել, որ եթե երկու անհամատեղելի պատահույթների հավանականությունների գումարը 1 է, ապա դրանք հակադիր պատահույթներ են:

372. Հակադիր պատահույթներից մեկի հավանականությունը երկու անգամ մեծ է մյուսի հավանականությունից: Գտնել այդ հավանականությունները:

➢373. Ապացուցել, որ եթե A, B, C պատահույթները զույգ առ զույգ անհամատեղելի են, ապա

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C):$$

*** 374.** Պատահական փորձի A և B պատահույթների հատում՝ $A \cap B$ կոչվում է պատահույթը, որին նպաստում են այն ելքերը, որոնք միաժամանակ նպաստում են և՛ A պատահույթին և՛ B-ին:

ա) Ապացուցել, որ կամայական A և B պատահույթներ անհամատեղելի են այն և միայն այն դեպքում, երբ նրանց հատումն անհնար պատահույթ է:

բ) Ապացուցել, որ կամայական A և B պատահույթների համար՝

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B):$$

375. Չկրկնվող կենտ թվանշաններով հնգանիշ թվերի բազմությունից պատահականորեն ընտրել են մի թիվ: Գտնել հավանականությունը, որ այդ թիվը՝

ա) 13579 -ն է, բ) բաժանվում է 25 -ի,
գ) փոքր է 40000-ից, դ) մեծ է 40000-ից:

376. Գտնել «36-ից 5» սպորտլոտոյի վիճակախաղի մեկ տոմսով գլխավոր մրցանակը շահելու հավանականությունը:

377. Չորս թերթիկները, որոնց վրա գրված են գ, ի, ր, ք տառերը, պատահական հերթականությամբ շարում են կողք կողքի: Գտնել հավանականությունը, որ արդյունքում՝

ա) կստացվի «գիրք» բառը,

բ) գ տառը կլինի առաջին տեղում,

գ) ի տառը կլինի գ-ի և ր-ի միջև,

դ) ք տառը կլինի ր-ից հետո:

➢378. Քննության 30 հարցերից աշակերտը գիտի 25-ի պատասխանները: Բոլոր հարցերը գրված են 15 հարցաթերթիկներում՝ յուրաքանչյուրում 2 հարց: Աշակերտը պատահականորեն վերցնում է մի հարցաթերթիկ: Գտնել հետևյալ պատահույթների հավանականությունները.

ա) «աշակերտը գիտի երկու հարցերի պատասխանները»,

բ) «աշակերտը գիտի միայն մի հարցի պատասխանը»,

գ) «աշակերտը չգիտի ոչ մի հարցի պատասխանը»:

➢379. Դասարանի աշակերտներից 10-ը աղջիկ են, 8-ը՝ տղա: Համադպրոցական ժողովին մասնակցելու համար վիճակահանությամբ ընտրել են երեք աշակերտ: Գտնել հետևյալ պատահույթների հավանականությունները.

ա) «ընտրված աշակերտներն աղջիկներ են»,

բ) «ընտրված աշակերտները տղաներ են»,

գ) «ընտրված աշակերտներից երկուսը աղջիկ են, մեկը՝ տղա»,

դ) «ընտրված աշակերտներից գոնե մեկն աղջիկ է»:

➢380. Սափորից, որի մեջ կան 5 սպիտակ և 6 սև գնդիկներ, պատահականորեն հանում են 4 գնդիկ: Գտնել հետևյալ պատահույթների հավանականությունները.

ա) «բոլոր գնդիկները սև են»,

բ) «գնդիկներից գոնե մեկը սև է»,

գ) «սև գնդիկները երկուսից շատ են»,

դ) «գնդիկներից երկուսը սև են, երկուսը՝ սպիտակ»:

*** 381.** Որքա՞ն է հավանականությունը, որ Ա, Բ, Գ, Դ, Ե, Զ տառերով պատահականորեն գրված հինգ տառանոց «բառն» իր մեջ կպարունակի ԲԱԴ բառը:

382. Լուծել համակարգը.

ա) $\begin{cases} \log_4 x - \log_2 y = 0 \\ x^2 - 2y^2 = 8 \end{cases}$,

բ) $\begin{cases} \log_9 x - \log_3 y = 0 \\ x^2 - 5y^2 + 4 = 0 \end{cases}$,

➤գ) $\begin{cases} 3^{2\sqrt{x}-\sqrt{y}} = 81 \\ \lg\sqrt{xy} = 1 + \lg 3 \end{cases}$,

➤դ) $\begin{cases} 2\log_2 x - 3^y = 15 \\ 3^y \cdot \log_2 x = 2\log_2 x + 3^{y+1} \end{cases}$:

4-րդ ԳԼՈՒԽ

Առաջադրանքներ կրկնության համար

§1. Հանրահաշվի տարրերը*

• **383.** Քանի՞ բնական թիվ կա՝

ա) [7;39] միջակայքում:

1) 33, 2) 32, 3) 31, 4) 30:

բ) (1;49) միջակայքում:

1) 48, 2) 47, 3) 46, 4) 45:

գ) [30;48) միջակայքում:

1) 17, 2) 19, 3) 18, 4) 20:

• **384.** Քանի՞ բնական զույգ թիվ կա՝

ա) 1-ի և 45-ի միջև:

1) 22, 2) 21, 3) 23, 4) 20:

բ) 11-ի և 35-ի միջև:

1) 11, 2) 13, 3) 12, 4) 14:

գ) 27-ի և 93-ի միջև:

1) 32, 2) 33, 3) 34, 4) 30:

• **385.** Քանի՞ երկնիշ բնական թիվ կա:

1) 90, 2) 89, 3) 91, 4) 100:

• **386.** Քանի՞ եռանիշ բնական թիվ կա:

1) 899, 2) 900, 3) 898, 4) 901:

• **387.** Գտնել 75 և 60 թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը:

1) 5, 2) 3, 3) 25, 4) 15:

• **388.** Գտնել 75 և 60 թվերի ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը:

1) 600, 2) 150, 3) 300, 4) 180:

---

* • նշանով վարժություններում անհրաժեշտ է կատարել առաջադրանքը և, որպես պատասխան, գրել առաջարկվող տարբերակներից ճիշտ պատասխանի համարը:

• **389.** Տրված են 5, $\frac{10}{11}$, $\frac{3}{8}$ և $1\frac{1}{2}$ թվերը:

ա) Գտնել առաջին և երկրորդ թվերի քանորդը:

1) 5,5, 2) 5, 3) $4\frac{6}{11}$, 4) $5\frac{10}{11}$:

բ) Գտնել երրորդ և չորրորդ թվերի գումարը:

1) $1\frac{5}{8}$, 2) $1\frac{2}{5}$, 3) $1\frac{7}{8}$, 4) $\frac{15}{16}$:

գ) Գտնել չորրորդ և երրորդ թվերի տարբերությունը:

1) $1\frac{1}{8}$, 2) $1\frac{5}{6}$, 3) $1\frac{7}{8}$, 4) $\frac{1}{8}$:

դ) Գտնել երկրորդ և չորրորդ թվերի արտադրյալը:

1) $\frac{33}{20}$, 2) $1\frac{5}{11}$, 3) 5, 4) $1\frac{4}{11}$:

• **390.** Տրված են 3,25 և 18,5 թվերը:

ա) Առաջին թիվը մեծացնել 20 տոկոսով:

1) 6,5, 2) 0,65, 3) 3,9, 4) 9,75:

բ) Ստորև նշված թվերից ո՞րն է հավասար առաջին թվին:

1) $3\frac{1}{4}$, 2) $3\frac{1}{2}$, 3) $3\frac{2}{5}$, 4) $3\frac{3}{4}$:

գ) Ի՞նչ թիվ պետք է գումարել տրված թվերից առաջինին, որպեսզի ստացվի երկրորդ թիվը:

1) 15,2, 2) 15,25, 3) 14,75, 4) 14,8:

դ) Երկրորդ կոտորակը կլորացնել մինչև միավորները:

1) 19, 2) 18, 3) 20, 4) 18,6:

• **391.** Տրված են 2, 7, 18 թվերը:

ա) Ի՞նչ թիվ պետք է հանել երրորդ թվից, որպեսզի ստացվի առաջին և երկրորդ թվերի արտադրյալը:

1) 9, 2) 13, 3) 4, 4) 14,5:

բ) Ի՞նչ մնացորդ է ստացվում երրորդ թիվը երկրորդին բաժանելիս:

1) 5, 2) 4, 3) 3, 4) 6:

գ) Գտնել առաջին և երկրորդ թվերի գումարի խորանարդը:

1) 81, 2) 351, 3) 729, 4) 27:

դ) Քանի՞ անգամ կմեծանա տրված երկնիշ թիվը, եթե նրան կցագրենք նույն թիվը:

1) 18, 2) 11, 3) 100, 4) 101:

• **392.** 25 թիվը բաժանել 2:3 հարաբերությամբ:

1) $25 = 15 + 10$, 2) $25 = 10 + 15$, 3) $25 = 12 + 13$, 4) $25 = 20 + 5$:

• **393.** 100 թիվը բաժանել 3:2 հարաբերությամբ:

1) $100 = 70 + 30$, 2) $100 = 40 + 60$, 3) $100 = 60 + 40$, 4) $100 = 32 + 68$:

• **394.** Տրված է չորս թիվ. 21, 64, 36, 144:

ա) Առաջին թիվը երրորդի ո՞ր մասն է:

1) $\frac{2}{3}$, 2) $\frac{7}{12}$, 3) $\frac{7}{13}$, 4) $\frac{5}{12}$:

բ) Երրորդ թիվը չորրորդի քանի՞ տոկոսն է:

1) 50, 2) 25, 3) 35, 4) 20:

գ) Տրված թվերից ո՞րն է բնական թվի խորանարդ:

1) 21, 2) 64, 3) 36, 4) 144:

դ) Երրորդ թիվը քանի՞ տոկոսով է փոքր չորրորդից:

1) 25, 2) 75, 3) 50, 4) 80:

➢**395.** Գտեք 5^{20}-ը 24-ի բաժանելիս ստացված մնացորդը:

➢**396.** Գտեք այն բոլոր n բնական թվերը, որոնց դեպքում $(n^2 + 1)$-ը բաժանվում է $(n + 1)$-ի:

Լուծեք հավասարումը (397-413).

• **397.** $2(x - 1) = -1$:

1) 0,5, 2) – 0,5, 3) – 1,5, 4) 1,5:

• **398.** $4(x - 7) = 11 + x$:

1) $\frac{17}{3}$, 2) $-\frac{17}{3}$, 3) – 13, 4) 13:

• **399.** $\frac{1}{3x} - \frac{1}{x+1} = 0$:

1) $\varnothing$, 2) – 2, 3) 2, 4) 0,5:

• **400.** $\frac{1}{x-2} - \frac{2}{x^2 - 4} = 0$:

1) 0 և 2, 2) 0, 3) 0 և – 2, 4) 2:

• **401.** $\frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = 0$:

1) 0, 2) – 1 և 2, 3) – 2 և 1, 4) – 1:

• **402.** $\frac{x^2-5x+6}{x-3}=0$:

1) – 2, 2) 2, 3) 2 և 3, 4) 3:

• **403.** $x^3+\frac{1}{x^3}=x+\frac{1}{x}$:

1) – 1 2) 1, 3) $\varnothing$, 4) ± 1:

• **404.** $|x|-x=0$:

1) 0, 2) $\varnothing$, 3) $[0;\infty)$, 4) $(0;\infty)$:

• **405.** $|x|=-x$:

1) $\varnothing$, 2) 0, 3) $(-\infty;0)$, 4) $(-\infty;0]$:

• **406.** $\sqrt{x^2}=-x$:

1) $\varnothing$, 2) $[0;+\infty)$, 3) $(-\infty;0]$, 4) $(-\infty;0)$:

• **407.** $|5+2x|=7$:

1) 1, 2) – 6, 3) 1 և – 6, 4) 22:

• **408.** $\sqrt{x-4}(5x+20)=0$:

1) 4, 2) ± 4 , 3) – 4, 4) $\varnothing$:

• **409.** $\sqrt{x+5}+\sqrt{x+3}=\sqrt{2x+7}$:

1) 4, 2) $\varnothing$, 3) – 1, 4) 6:

• **410.** $\sqrt{x+5}+\sqrt{2x+8}=7$:

1) 4, 2) 5, 3) 3, 4) 0:

• **411.** $\sqrt{22-x}-\sqrt{10-x}=2$:

1) – 4, 2) ± 6 , 3) 6, 4) $\varnothing$:

• **412.** $\sqrt[3]{x^2-x^3-4}=-x$:

1) 2, 2) ± 2 , 3) $\varnothing$, 4) 4 և – 4:

• **413.** $\sqrt[3]{x^3+8}=-\sqrt[3]{19}$:

1) – 3, 2) $\varnothing$, 3) ± 3 , 4) 9:

Լուծեք համակարգը (414-425).

• **414.** $\begin{cases} x-2y=1 \\ 2x+y=-3 \end{cases}$:

1) $(-1;-1)$, 2) $(1;-1)$, 3) $(3;1)$, 4) $(3;-1)$:

• 415. $\begin{cases} \sqrt{y}-2\sqrt{x}=1 \\ 6\sqrt{x}-\sqrt{y}=7 \end{cases}$:

1) $(2;5)$, 2) $(4;25)$, 3) $(\pm 4;\pm 25)$, 4) $\{4;25\}$:

• 416. $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=\dfrac{5}{6}\sqrt{xy} \\ x+y=13 \end{cases}$:

1) $(4;9)$, 2) $(4;9)$ և $(9;4)$, 3) $(9;4)$, 4) $\{0;0\}$:

• 417. $\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=3 \\ xy=8 \end{cases}$:

1) $(1;8)$ և $(8;1)$, 2) $(1;8)$, 3) $(8;1)$, 4) $(\pm 1;\pm 8)$:

• 418. $\begin{cases} x^2=3 \\ 1-x>0 \end{cases}$:

1) -3, 2) ± 3, 3) $\sqrt{3}$, 4) $-\sqrt{3}$:

• 419. $\begin{cases} 4y\le -4 \\ 5-y>0 \end{cases}$:

1) $(-\infty;-1]$, 2) $(-\infty;5)$, 3) $(-\infty;-1)$, 4) $(-5;-1)$:

• 420. $\begin{cases} (x+3)(x-6)=0 \\ x+y=5 \\ |x|>|y| \end{cases}$:

1) $(-3;8)$, 2) $(6;-1)$, 3) $(-3;-6)$, 4) $(-1;8)$:

*** 421.** ա) $\begin{cases} x^2+y+1=0 \\ y^2+x+1=0 \end{cases}$, բ) $\begin{cases} x^2=5x+y \\ y^2=x+5y \end{cases}$, գ) $\begin{cases} 2xy-x^2=3 \\ 6x^2-11y^2=10 \end{cases}$,

դ) $\begin{cases} x^2-xy+y^2=7 \\ x+y=5 \end{cases}$, ե) $\begin{cases} x+y+xy=19 \\ xy(x+y)=84 \end{cases}$, զ) $\begin{cases} xy(x+y)=20 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{4} \end{cases}$:

➤**422.** ա) $\begin{cases}\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{10}{3}\\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{4}{3}\end{cases}$, բ) $\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{6}\\ x^2y+xy^2=30\end{cases}$:

➤**423.** ա) $\begin{cases}x\sqrt{x}+y\sqrt{y}=28\\ x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=12\end{cases}$, բ) $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=\dfrac{3}{4}\sqrt{xy}\\ \dfrac{x}{\sqrt{y}}+\dfrac{y}{\sqrt{x}}=9\end{cases}$:

➤**424.** ա) $\begin{cases}3|x|+2y=9\\ x+y=2\end{cases}$, բ) $\begin{cases}2x+3|y|=27\\ 3x-y=2\end{cases}$:

425. ա) $\begin{cases}x^{-1}+y^{-1}=4\\ x^{-2}+y^{-2}=10\end{cases}$, բ) $\begin{cases}x^{-0,5}+y^{-0,5}=1,5\\ x^{-1}+y^{-1}=1,25\end{cases}$:

Գտնել համակարգի ամենափոքր ամբողջ լուծումը (426-428).

426. ա) $\begin{cases}4x-7<2\\ 3x+1>3\end{cases}$, բ) $\begin{cases}2x+3>5\\ 3x-1>4\end{cases}$:

427. ա) $\begin{cases}x^2-2x\le 2-x\\ 2x^2-7x+3<0\end{cases}$, բ) $\begin{cases}2x+3\ge x^2\\ 3x^2-4x+4>4x\end{cases}$:

428. ա) $\begin{cases}\dfrac{2x-1}{3-x}<3\\ x^2-5x+4\le 0\end{cases}$, բ) $\begin{cases}\dfrac{x+1}{x-5}<-2\\ x^2-x-2\ge 0\end{cases}$:

Լուծեք համախումբը (429-432).

• **429.** $\left[\begin{array}{l}-3<x<0\\ \dfrac{1}{x}<0\end{array}\right.$:

1) $(-\infty;0)$, 2) $(-3;0)$, 3) $(-3;+\infty)$, 4) $(-\infty;-3)$:

• **430.** $\left[\begin{array}{l}\dfrac{x+3}{4}=2\\ 2^{(x-5)^2}<1\end{array}\right.$:

1) $(-\infty;5)$, 2) $(-\infty;+\infty)$, 3) 5, 4) $\varnothing$:

• **431.** $\left[\begin{array}{l} 3^x = \dfrac{1}{9} \\ \sqrt{x-2} \geq -1 \end{array}\right.$:

1) $(-\infty;+\infty)$, 2) $[2;+\infty)$, 3) $\{-2\} \cup [2;+\infty)$, 4) 2:

• **432** $\left[\begin{array}{l} x(x^2-4)=0 \\ 3^x < 1 \end{array}\right.$:

1) $(-\infty;0] \cup \{2\}$, 2) $(-\infty;0) \cup \{2\}$, 3) $(-\infty;0]$, 4) $\varnothing$:

• **433.** Տրված հավասարումներից ո՞րն արմատ չունի:

1) $\sqrt{1-x} = -x$, 2) $4(x+1)+2x = 6x+7$,

3) $\dfrac{4-x}{4-x} = 1$, 4) $6(x-2)+x = 7(x-2)+2$:

• **434.** Տրված հավասարումներից ո՞րի լուծումն է համընկնում ամբողջ թվային առանցքի հետ:

1) $\sqrt{1-x} = -x$, 2) $4(x+1)+2x = 6x+7$,

3) $\dfrac{4-x}{4-x} = 1$, 4) $6(x-2)+x = 7(x-2)+2$:

435. Գտնել a-ի այն թույլատրելի արժեքները, որոնց դեպքում հավասարումը լուծում չունի.

ա) $\dfrac{2x+3}{a-2} = \dfrac{x}{7}$, բ) $\dfrac{2x+5}{a+3} = \dfrac{3x+5}{a+1}$:

436. Գտնել a-ի և b-ի այն արժեքները, որոնց դեպքում հավասարումն ունի անվերջ բազմությամբ լուծումներ.

ա) $\dfrac{5}{x+2} = \dfrac{17}{ax-b}$, բ) $\dfrac{a}{2x-10} + \dfrac{b}{3x+15} = \dfrac{20}{x^2-25}$:

➢**437.** Տրված է $a^2x = ax + a - 1$ հավասարումը, որտեղ a-ն պարամետր է: Հետևյալ պնդումներից որո՞նք են ճշմարիտ:

ա) a-ի կամայական արժեքի դեպքում հավասարումն ունի արմատ:

բ) Երբ $a = 1$, հավասարման լուծումն է՝ $x \in \mathbf{R}$:

գ) Երբ $a > 1$, հավասարումն ունի մեկ արմատ:

դ) Երբ $a \neq 1$ և $a \neq 0$, հավասարման արմատը և a-ն փոխհակադարձ թվեր են:

ե) Գոյություն չունի a-ի այնպիսի արժեք, որի դեպքում $\sqrt{\pi + \sqrt{e}}$ թիվը հավասարման արմատ է:

զ) Երբ $a=\log_8 2$, հավասարման արմատը պարզ թիվ է:

➢438. Տրված է $\sqrt{4-|x|}=\dfrac{a-4}{a-8}$ հավասարումը, որտեղ a-ն պարամետր է: Հետևյալ պնդումներից որո՞նք են ճշմարիտ:

ա) Հավասարման ԹԱԲ-ը $(-4;4)$ միջակայքն է:

բ) Հավասարումն ունի երկու արմատ կամ արմատ չունի:

գ) Գոյություն չունի a-ի այնպիսի արժեք, որի դեպքում $\sqrt{17-\sqrt{2}}$ թիվը հավասարման արմատ է:

դ) $a>8$ դեպքում հավասարումը համարժեք է $4-|x|=\left(\dfrac{a-4}{a-8}\right)^2$ հավասարմանը:

ե) Կամայական a-ի դեպքում 3-ը հավասարման արմատ չէ:

զ) Երբ $a=\pi-e$, հավասարման արմատների միջին թվաբանականը 0 է:

➢439. Տրված է $|2x-a|<a-8$ անհավասարումը, որտեղ a-ն պարամետր է: Հետևյալ պնդումներից որո՞նք են ճշմարիտ:

ա) Կամայական a-ի դեպքում անհավասարումն ունի լուծում:

բ) 9-ը a-ի ամենափոքր ամբողջ արժեքն է, որի դեպքում անհավասարումն ունի լուծում:

գ) $a>8$ դեպքում անհավասարումը համարժեք է $x^2-ax+4(a-4)<0$ անհավասարմանը:

դ) 11-ն a-ի ամենափոքր բնական արժեքն է, որի դեպքում 7-ը անհավասարման լուծում է:

ե) Երբ $a\in(8;+\infty)$, անհավասարման լուծումը $a-8$ երկարությամբ միջակայք է:

զ) Եթե $a\in(13;+\infty)$, ապա անհավասարման ամբողջ լուծումների քանակը գերազանցում է 4-ը:

• 440. Տրված է $-3x^2+11x+4$ քառակուսային եռանդամը:

ա) Եռանդամը վերլուծել գծային արտադրիչների:

1) $(x-4)\left(x+\dfrac{1}{3}\right)$, 2) $-3(x-4)\left(x+\dfrac{1}{3}\right)$,

3) $-3(x+4)\left(x-\dfrac{1}{3}\right)$, 4) $3(x+4)\left(x-\dfrac{1}{3}\right)$:

բ) Գտնել եռանդամի արժեքը $x=-2$ կետում:

1) – 6, 2) 38, 3) 14, 4) – 30:

գ) Գտնել տրված եռանդամը $x+2$ երկանդամի բաժանելիս ստացված մնացորդը:

1) $x-30$, 2) – 38, 3) 14, 4) –30:

դ) Գտնել x փոփոխականի ամենամեծ բնական արժեքը, որի դեպքում եռանդամն ընդունում է (– 10)-ից մեծ արժեք:

1) 2, 2) 3, 3) 4, 4) 5:

441. Գտնել հավասարման արմատների քառակուսիների գումարը.

ա) $x^2+5x-3=0$, բ) $2x^2-14x+21=0$:

➤442. Գտնել հավասարման արմատների խորանարդների գումարը.

ա) $x^2-4x-3=0$, բ) $3x^2-18x+20=0$:

➤443. Դիցուք, x_1-ը և x_2-ը $x^2-20x+10=0$ հավասարման արմատներն են: Գտնել արտահայտության արժեքը.

ա) $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}$, բ) $\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_1}$:

➤444. Դիցուք, x_1-ը և x_2-ը $x^2-3x-2=0$ հավասարման արմատներն են: Գտնել արտահայտության արժեքը.

ա) $4x_1x_2^2-x_1^3+2x_1x_2+4x_1^2x_2-x_2^3$,

բ) $\frac{(3x_1+1)(3x_2+1)}{(2x_1-9)(2x_2-9)}$, գ) $\frac{1}{(2x_1-3)^2}+\frac{1}{(2x_2-3)^2}$:

➤445. Գտնել a-ի այն արժեքները, որոնց դեպքում $2x^2-(a+1)x+a+3=0$ հավասարման արմատների տարբերությունը 1 է:

➤446. Դիցուք, x_1-ը և x_2-ը $x^2+4x+q=0$ հավասարման արմատներն են: Գտնել q-ն, եթե՝

ա) $\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_1}=20$, բ) $\frac{x_1}{x_2^2}+\frac{x_2}{x_1^2}=-7$:

*** 447.** Գտնել k-ի այն արժեքը, որի դեպքում՝

ա) $x-27\sqrt{x}+k=0$ հավասարման արմատների գումարը 625 է:

բ) $2x-(k-8)\sqrt{x}+k+8=0$ հավասարման արմատների գումարը 83 է:

➤448. Գտնել p-ի այն արժեքը, որի դեպքում $x^2+px+p+2=0$ հավասարման՝

ա) արմատների քառակուսիների գումարը 620 է:

բ) արմատների հակադարձների գումարը – 1,4 է:

➤449. b-ի ի՞նչ արժեքների դեպքում $3x^2-bx+30=0$ հավասարման արմատները կբավարարեն տրված պայմանը.

ա) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}<0{,}7$, բ) $\frac{2}{5}\le\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\le\frac{5}{6}$:

➢**450.** Գտնել a-ն, եթե միևնույն սուր անկյան սինուսը և կոսինուսը տրված հավասարման արմատներն են.

ա) $18x^2 - 24x + a = 0$, բ) $ax^2 + 12 = 35x$:

➢**451.** a-ի ի՞նչ արժեքների դեպքում $(a^2-1)x^2 + 2(a-1)x + 2$ եռանդամի բոլոր արժեքները դրական են:

* **452.** a-ի ի՞նչ արժեքների դեպքում $2x^2 - 2(2a+1)x + a(a-1) = 0$ հավասարման արմատները կբավարարեն $x_1 < a < x_2$ պայմանը:

* **453.** a-ի ի՞նչ արժեքների դեպքում $(a-2)x^2 - 2(a+3)x + 4a = 0$ հավասարումն ունի մեկ 3-ից մեծ և մեկ 2-ից փոքր արմատներ:

* **454.** a-ի ի՞նչ արժեքների դեպքում $(2a+3)x^2 + (a+1)x + 1 = 0$ հավասարման արմատները կգտնվեն $(-2;0)$ միջակայքում:

➢**455.** Դիցուք, x_1-ը և x_2-ը $x^2 - ax + a - 1 = 0$ հավասարման արմատներն են: Գտնել a-ն այնպես, որ $x_1^2 + x_2^2$ արտահայտության արժեքը լինի փոքրագույնը:

* **456.** Դիցուք, x_1-ը և x_2-ը $x^2 - 6x + 1 = 0$ հավասարման արմատներն են: Ապացուցեք, որ կամայական բնական n-ի դեպքում $(x_1^n + x_2^n)$-ը բնական թիվ է:

Լուծել հավասարումը (457-463).

➢**457.** ա) $x^2 + 3\sqrt{x^2} = 9(x+8)$, բ) $3x^2 - 6\sqrt{x^2} = 4(x+2)$:

* **458.** ա) $x + 13\sqrt[4]{x^2} = 30$, բ) $3x + 20 = 17\sqrt[4]{x^2}$:

➢**459.** ա) $(x-5)^2 = 3\sqrt{x^2 - 10x + 25}$, բ) $(2x-3)^2 = 5\sqrt{4x^2 - 12x + 9}$:

➢**460.** ա) $2\sqrt{x} + 6 = \sqrt{x^2 - 18x + 81}$, բ) $\sqrt{x+2} + \sqrt{x^2 - 2x + 1} = 3$:

➢**461.** ա) $\sqrt{15-x} - \sqrt{5+x} = 1 - \dfrac{x}{|x|}$, բ) $\sqrt{13-x} + \sqrt{12+x} = 6 + \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$:

➢**462.** ա) $\sqrt{x^2 - 8x + 16} = 10 + \sqrt{-x}$, բ) $\sqrt{x^2 + 30x + 225} = 15 - \sqrt{-x}$:

* **463.** ա) $(x+3)\sqrt{x^2 + 6x - 2} = 30$, բ) $(x+3)\sqrt{x^2 + 6x - 2} = -30$:

Լուծել անհավասարումը (464-473).

• **464.** ա) $\dfrac{1}{x} < 1$:

1) $(1;\infty)$, 2) $(0;1)$, 3) $(-\infty;0) \cup (1;\infty)$, 4) $(-\infty;1)$:

բ) $\dfrac{x}{3} - \dfrac{4}{x} > \dfrac{4}{3}$:

1) $(-2;0)\cup(6;\infty)$, 2) $(-2;6)$, 3) $(-\infty;-2)\cup(6;\infty)$, 4) $(-2;6)$:

465. ա) $x^2+2x-4\le x+2$, բ) $x^2-x-2\ge 1-x^2$:

466. ա) $\dfrac{1}{x+2}\ge\dfrac{3}{x-3}$, բ) $\dfrac{1}{2x}\ge\dfrac{1}{1-x}$:

467. ա) $x-1>\dfrac{4x}{3-x}$, բ) $\dfrac{x+4}{x+1}>2-x$:

468. ա) $\dfrac{x}{1-x}<x-6$, բ) $\dfrac{2x-1}{3x-2}>x$:

469. ա) $|2x-5|<3$, բ) $|3-4x|>1$:

470. ա) $|x-3|>2x$, բ) $|4-3x|\le x+3$:

471. ա) $|x-5|>2|x+2|$, բ) $|2x+3|+|x-2|\ge 4$:

472. ա) $|x^2-2x-8|>2x$, բ) $|x^2+4x|\ge 1-2x$:

473. ա) $\dfrac{3}{|x|}\le\dfrac{3}{x}+2$, բ) $\dfrac{1}{2}>\dfrac{1}{|x-1|-3}$:

• **474.** $\sqrt{\dfrac{3x-1}{2-x}}>1$:

1) $\left(\dfrac{3}{4};2\right)$, 2) $(-1;2)$, 3) $\left(\dfrac{3}{4};\infty\right)$, 4) $\left(\dfrac{1}{3};2\right)$:

➢**475.** ա) $\sqrt{x^2+7x+2}>5-2x$, բ) $\sqrt{(x+2)(x-5)}<8-x$:

***476.** ա) $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}>\sqrt{2}$, բ) $\sqrt{25-x^2}+\sqrt{x^2+7x}>5$:

477. 29-րդ նկարում պատկերված են ստորև տրված ֆունկցիաների գրաֆիկները: Այդ գրաֆիկներից ո՞րն է`

ա) $y=2x+1$ ֆունկցիայի գրաֆիկը,

բ) $y=-2x+1$ ֆունկցիայի գրաֆիկը,

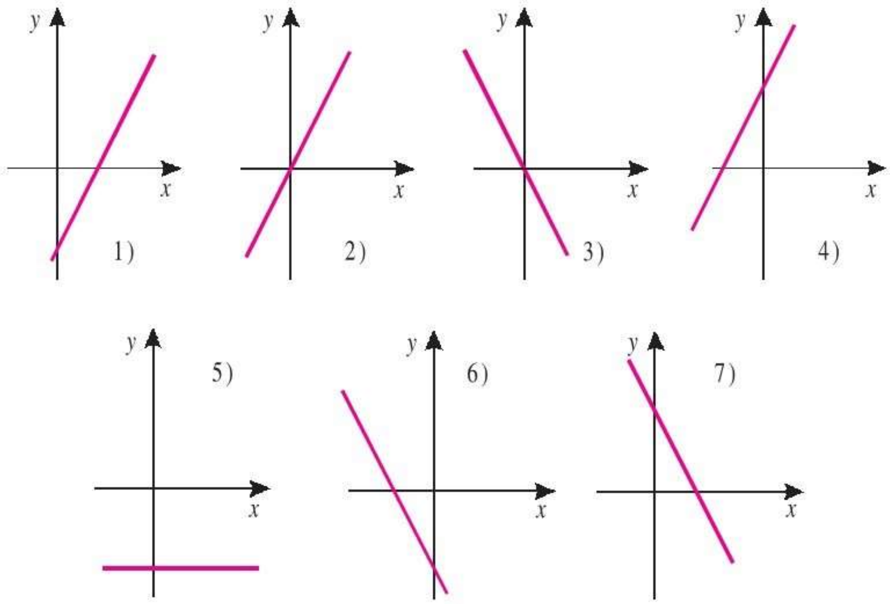
գ) $y=2x-1$ ֆունկցիայի գրաֆիկը,

դ) $y=2x$ ֆունկցիայի գրաֆիկը,

ե) $y=-1$ ֆունկցիայի գրաֆիկը,

զ) $y=-2x$ ֆունկցիայի գրաֆիկը,

է) $y=-2x-1$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:



Նկ. 29

478. 30-րդ նկարում պատկերված են ստորև տրված ֆունկցիաների գրաֆիկները: Այդ գրաֆիկներից ո՞րն է՝

ա) $y = x^2 + 6x + 9$ ֆունկցիայի գրաֆիկը,

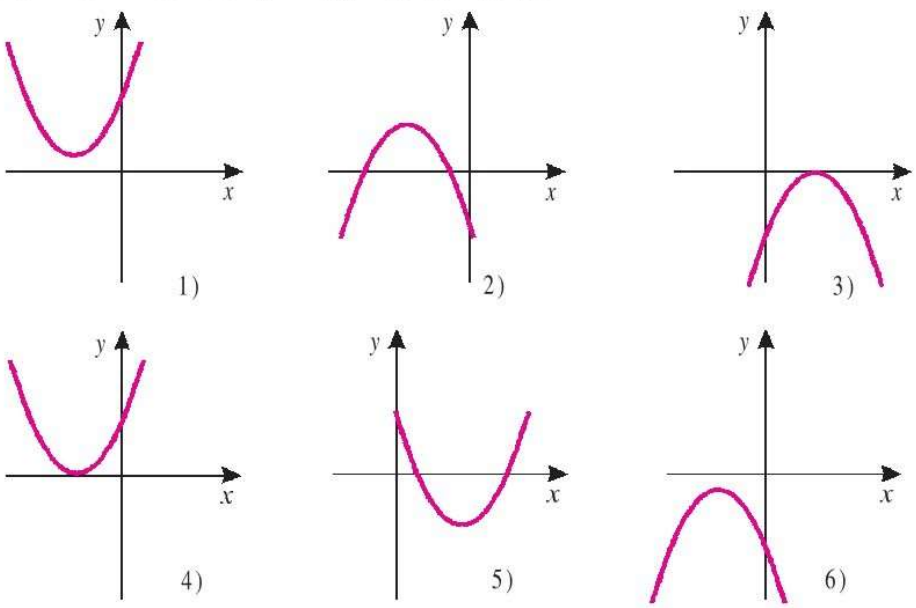
բ) $y = x^2 - 6x + 5$ ֆունկցիայի գրաֆիկը,

գ) $y = -x^2 + 6x - 9$ ֆունկցիայի գրաֆիկը,

դ) $y = x^2 + 6x + 10$ ֆունկցիայի գրաֆիկը,

ե) $y = -x^2 - 6x - 5$ ֆունկցիայի գրաֆիկը,

զ) $y = -x^2 - 6x - 10$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:



Նկ. 30

479. 31-րդ նկարում պատկերված են ստորև տրված ֆունկցիաների գրաֆիկները: Այդ գրաֆիկներից ո՞րն է՝

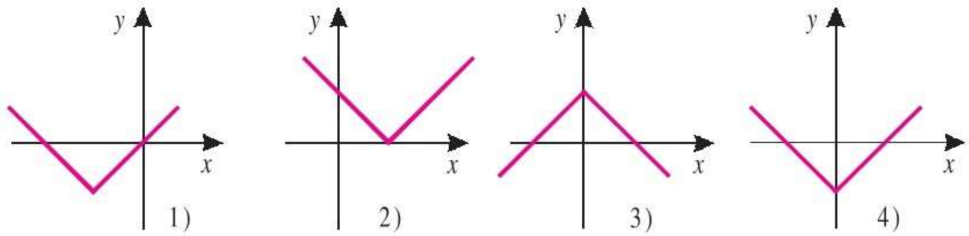
ա) $y=|x-3|$ ֆունկցիայի գրաֆիկը,

բ) $y=|x|-3$ ֆունկցիայի գրաֆիկը,

գ) $y=|3-x|$ ֆունկցիայի գրաֆիկը,

դ) $y=|x+3|-3$ ֆունկցիայի գրաֆիկը,

ե) $y=3-|x|$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:



Նկ. 31

Գտնել ֆունկցիայի որոշման տիրույթը (480-481).

480. ա) $y=\sqrt{\dfrac{x-4}{x^2-4}}$, բ) $y=\dfrac{1}{(x-2)^2}+\sqrt{2+\dfrac{4}{x}}$:

481. ա) $y=\sqrt{2x-x^3}$, բ) $y=\sqrt{x^3-7x}$:

§2. Պրոգրեսիաներ

a_n հաջորդականությունն անվանում են թվաբանական պրոգրեսիա, եթե նրա յուրաքանչյուր անդամ, սկսած երկրորդից, հավասար է նախորդ անդամին՝ գումարած միևնույն թիվը, այսինքն՝ $a_n=a_{n-1}+d$, $n>1$: Թվաբանական պրոգրեսիայի n-րդ անդամը գտնում են $a_n=a_1+d(n-1)$ բանաձևով, իսկ առաջին n անդամների գումարը՝

$$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n \quad \text{կամ} \quad S_n=\frac{2a_1+d(n-1)}{2}\cdot n$$

բանաձևերով:

b_n հաջորդականությունն անվանում են երկրաչափական պրոգրեսիա, եթե նրա առաջին անդամը տարբեր է զրոյից և յուրաքանչյուր անդամ, սկսած երկրորդից, հավասար է նախորդ անդամին՝ բազմապատկած զրոյից տարբեր միևնույն թվով,

այսինքն՝ $b_n = q \cdot b_{n-1}$, $n > 1$, $q \neq 0$*: Երկրաչափական պրոգրեսիայի n-րդ անդամը գրնում են* $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ *բանաձևով, իսկ առաջին անդամների գումարը՝*

$$S_n = \frac{b_{n+1} - b_1}{q - 1} \text{ կամ } S_n = b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

բանաձևերով, եթե $q \neq 1$*:*

Անվերջ նվազող b_n *երկրաչափական պրոգրեսիայի գումարն է* $\frac{b_1}{1-q}$*:*

• **482.** Գտեք x-ը, եթե x, 8, 4… թվերը կազմում են թվաբանական պրոգրեսիա:

1) 4, 2) 16, 3) 6, 4) 12:

• **483.** Գտեք 8, 4… թվաբանական պրոգրեսիայի ամենամեծ բացասական անդամը:

1) – 2, 2) – 4, 3) – 1, 4) – 3:

• **484.** Գտեք x-ի այն արժեքները, որոնց դեպքում 1, $\log_3 x$, $\log_3 x - 1$ թվերը թվաբանական պրոգրեսիայի երեք հաջորդական անդամներ են:

1) $\frac{1}{3}$, 2) 1, 3) 3, 4) $\frac{1}{9}$:

• **485.** Գտեք 3, 5, … թվաբանական պրոգրեսիայի այն անդամի համարը, որի արժեքը 33 է:

1) 14, 2) 15, 3) 16, 4) 17:

• **486.** Գտեք – 6, – 3, …, 39 թվաբանական պրոգրեսիայի անդամների քանակը:

1) 11, 2) 12, 3) 16, 4) 15:

• **487.** Գտեք գումարը՝ $60 + 61 + 62 + \cdots + 74$:

1) 871, 2) 1072, 3) 938, 4) 1005:

• **488.** Գտեք 8, 4, … երկրաչափական պրոգրեսիայի երրորդ անդամը:

1) 1, 2) 2, 3) – 4, 4) 2:

• **489.** Անվերջ նվազող երկրաչափական պրոգրեսիայի գումարը 4 է, իսկ առաջին անդամը՝ 3: Գտնել պրոգրեսիայի հայտարարը:

1) $-\frac{1}{3}$, 2) $\frac{1}{3}$, 3) 0,25, 4) $-\frac{1}{4}$:

• **490.** Տրված է հինգ թիվ՝ – 5, 0, 1, 2 և 25:

ա) Այդ թվերից ո՞րը չի կարող լինել որևէ երկրաչափական պրոգրեսիայի անդամ:

1) 0, 2) – 5, 3) 25, 4) 2:

բ) Այդ թվերից ո՞ր երեքը կարող են լինել որևէ թվաբանական պրոգրեսիայի երեք հաջորդական անդամներ:

1) 1, 2 և 25, 2) 0, 1 և 2, 3) – 5, 0 և 2, 4) 1, – 5 և 25:

գ) Այդ թվերից ո՞ր երեքը կարող են լինել որևէ երկրաչափական պրոգրեսիայի երեք հաջորդական անդամներ:

1) 1, 2 և 25, 2) 0, 1 և 2, 3) – 5, 0 և 2, 4) 1, – 5 և 25:

• **491.** Տրված են 3 մնացորդով 4-ի բաժանվող երկնիշ թվերը:

ա) Գտնել այդ թվերից ամենափոքրը:

1) 10, 2) 13, 3) 11, 4) 15:

բ) Այդ թվերն ի՞նչ բանաձևով են տրվում:

1) $3n+4$, $n=2,3,..31$, 2) $4n+3$, $n=2,3,..24$,

3) 4^n+3, $n=2,3,...$, 4) $10n+1$, $n\in N$:

գ) Քանի՞ այդպիսի թիվ կա:

1) 23, 2) 22, 3) 21, 4) 20:

դ) Գտնել այդ թվերի գումարը:

1) 1210, 2) 1155, 3) 1100, 4) 1265:

492. Թվաբանական պրոգրեսիայի առաջին անդամը 0,5 է, իսկ չորրորդը՝ 9,5: Գտնել պրոգրեսիայի առաջին 10 անդամների գումարը:

493. Գտնել 3 մնացորդով 7-ի բաժանվող եռանիշ թվերի քանակը:

494. Գտնել 15-ի և 25-ի բաժանվող եռանիշ թվերի քանակը:

495. Գտնել 3 մնացորդով 5-ի բաժանվող երկնիշ թվերի գումարը:

496. Գտնել 11 մնացորդով 17-ի բաժանվող եռանիշ թվերի գումարը:

497. Երկրաչափական պրոգրեսիայի 18-րդ և 23-րդ անդամների արտադրյալը 1,9 է: Գտնել 12-րդ և 29-րդ անդամների արտադրյալը:

498. Երկրաչափական պրոգրեսիայի երկրորդ անդամը 18 է, իսկ առաջին և երրորդ անդամների գումարը՝ 60: Գտնել այդ պրոգրեսիայի առաջին երեք անդամներից ամենափոքրը:

499. Թվաբանական պրոգրեսիայի 1-ին, 3-րդ և 9-րդ անդամների գումարը 78 է, և այդ թվերը երկրաչափական պրոգրեսիայի հաջորդական անդամներ են: Գտնել այդ թվերից ամենամեծը:

➢**500.** Երկրաչափական պրոգրեսիայի առաջին երեք անդամների գումարը 9 է, իսկ առաջին 6 անդամների գումարը՝ – 63: Գտնել այդ պրոգրեսիայի առաջին 10 անդամների գումարը:

* **501.** Երկրաչափական պրոգրեսիա կազմող 3 թվերի գումարը 13 է, իսկ նրանց

քառակուսիների գումարը՝ 91: Գտնել այդ թվերը:

502. Անվերջ նվազող երկրաչափական պրոգրեսիայի գումարը 12 է, իսկ նրա անդամների քառակուսիների գումարը՝ 48: Գտնել այդ պրոգրեսիայի առաջին 10 անդամների գումարը:

503. Գտնել x-ի այն արժեքները, որոնց դեպքում $\sqrt{2x}-1$, x, $\sqrt{2x}+1$ թվերը կազմում են երկրաչափական պրոգրեսիա:

504. $\sin x$, $\sin 2x$ և $\sin 3x$ թվերը թվաբանական պրոգրեսիայի հաջորդական անդամներ են: Գտնել x-ը:

➢**505.** $\lg 2$, $\lg\left(2^x-1\right)$ և $\lg\left(2^x+3\right)$ թվերը թվաբանական պրոգրեսիայի հաջորդական անդամներ են: Գտնել x-ը:

506. Ո՞ր x-երի դեպքում են $\sin x$, $\frac{1}{2}$ և $\cos x$ թվերը երկրաչափական պրոգրեսիայի հաջորդական անդամներ:

➢**507.** Ո՞ր x-երի դեպքում են -1, $x+2$ և $\sin(\arcsin x)$ թվերը երկրաչափական պրոգրեսիայի հաջորդական անդամներ:

➢**508.** Ո՞ր x-երի դեպքում են 32^x, 6^{x^2+1} և 3^{5x} թվերը երկրաչափական պրոգրեսիայի հաջորդական անդամներ:

➢**509.** Երկրաչափական պրոգրեսիայի առաջին երեք անդամների գումարը 28 է: Այդ պրոգրեսիայի առաջին և երկրորդ անդամներն ու երրորդից 4-ով փոքր թիվը թվաբանական պրոգրեսիայի հաջորդական անդամներ են: Գտնել երկրաչափական պրոգրեսիայի վեցերորդ անդամը:

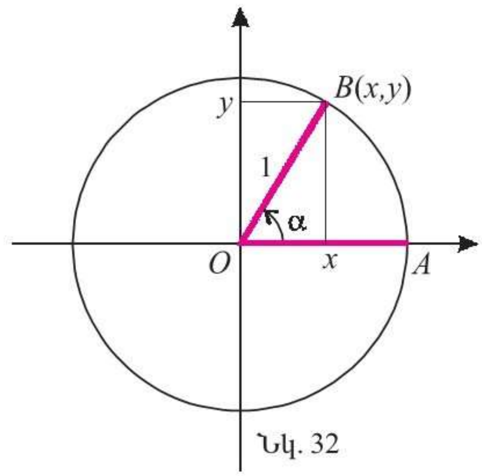
* **510.** a պարամետրի ո՞ր արժեքների դեպքում $x^4+(a-3)x^2+(a+10)^2=0$ հավասարման արմատները կլինեն թվաբանական պրոգրեսիայի հաջորդական անդամներ:

* **511.** Լուծել $x^3+x^2=a$ հավասարումը, եթե հայտնի է, որ նրա արմատները կազմում են թվաբանական պրոգրեսիա:

* **512.** Լուծել $x^3-6x^2+ax-6=0$ հավասարումը, եթե հայտնի է, որ նրա արմատները կազմում են թվաբանական պրոգրեսիա:

* **513.** Քանի՞ գումարելի պետք է վերցնել $1+2+\ldots+n$ գումարում, որպեսզի ստացվի նույն թվանշաններից կազմված եռանիշ թիվ:

§3. Եռանկյունաչափական արտահայտությունների ձևափոխություններ և արժեքների հաշվում



Նկ. 32

α անկյան սինուս (կոսինուս) կոչվում է միավոր շրջանագծի OA սկզբնական շառավիղը (նկ. 32) O կետի շուրջը α անկյունով պտույտի հետևանքով ստացված B կետի օրդինատը (աբսցիսը): Այսինքն՝ $\sin\alpha = y$, $\cos\alpha = x$: *Բացի այդ՝*

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x},\ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}:$$

Հիշեցնենք եռանկյունաչափական ֆունկցիաների արժեքները որոշ անկյունների դեպքում

α	0° 0	30° $\frac{\pi}{6}$	45° $\frac{\pi}{4}$	60° $\frac{\pi}{3}$	90° $\frac{\pi}{2}$	180° π	270° $\frac{3\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	*որոշվ. չէ*	0	*որոշվ. չէ*
$\operatorname{ctg}\alpha$	*որոշվ. չէ*	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	*որոշվ. չէ*	0

$\sin x$ *և* $\cos x$ *ֆունկցիաների որոշման տիրույթն ամբողջ թվային առանցքն է, իսկ արժեքների բազմությունը՝* $[-1;1]$ *հատվածը:* $\operatorname{tg} x$ *ֆունկցիան որոշված է, երբ* $x \ne \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$ *և ընդունում է կամայական իրական արժեք:* $\operatorname{ctg} x$*-ը որոշված է, երբ* $x \ne \pi k$, $k \in Z$, *և ընդունում է կամայական իրական արժեք:*

$\sin x$ *և* $\cos x$ *ֆունկցիաները* 2π*-պարբերական են, իսկ* $\operatorname{tg} x$ *և* $\operatorname{ctg} x$ *ֆունկցիաները՝* π*-պարբերական:*

Սինուսը դրական է I և II քառորդներում, կոսինուսը՝ I և IV քառորդներում, տանգենսը և կոտանգենսը՝ I և III քառորդներում:

Հիմնական եռանկյունաչափական նույնություններն են՝

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\quad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\quad \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1,$$

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\quad 1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha},\quad 1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}:$$

$\frac{\pi}{2}\pm\alpha$, $\pi\pm\alpha$, $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$ *և* $2\pi\pm\alpha$ *անկյունների եռանկյունաչափական ֆունկցիաները* α *անկյան եռանկյունաչափական ֆունկցիաներով արտահայտելիս (բերման բանաձևեր)՝*

1. եռանկյունաչափական ֆունկցիան չի փոխվում, եթե α *-ին (կամ* $(-\alpha)$ *-ին) գումարված է* π *կամ* 2π *և փոխվում է, եթե գումարված է* $\frac{\pi}{2}$ *կամ* $\frac{3\pi}{2}$, *ընդ որում՝ սինուսը փոխվում է կոսինուսի, կոսինուսը՝ սինուսի, տանգենսը՝ կոտանգենսի, կոտանգենսը՝ տանգենսի:*

2. α *անկյան եռանկյունաչափական ֆունկցիայի առջև դրվում է այն նշանը, ինչ նշան կունենա չձևափոխվող արտահայտությունը, եթե* α*-ն լինի սուր անկյուն:*

Երկու անկյունների գումարի և տարբերության բանաձևերն են՝

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,\qquad \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta,$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,\qquad \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta,$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},\qquad \operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta},\qquad \operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha}:$$

Կրկնակի անկյան եռանկյունաչափական ֆունկցիաների բանաձևերն են՝

$$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha,\quad \cos2\alpha=1-2\sin^2\alpha,\quad \cos2\alpha=2\cos^2\alpha-1,$$

$$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha,\quad \operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha},\quad \operatorname{ctg}2\alpha=\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\alpha}:$$

Կես անկյան եռանկյունաչափական ֆունկցիաների բանաձևերն են՝

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},\quad \cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}},\quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}, \qquad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}:$$

Ընդ որում՝ առաջին երեք բանաձևերում աջ կողմում նշանը պետք է ընտրել այնպես, որ աջ և ձախ մասերի նշանները համընկնեն:

Եռանկյունաչափական ֆունկցիաների արտադրյալի բանաձևերն են՝

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right),$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right),$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right):$$

Եռանկյունաչափական ֆունկցիաների գումարի բանաձևերն են՝

$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},$$

$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2},$$

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},$$

$$\sin x-\sin y=2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}:$$

Հակադարձ եռանկյունաչափական ֆունկցիաները որոշվում են հետևյալ առնչություններով՝

ա) $\arcsin x$ *-ը որոշված է, երբ* $x\in[-1;1]$, *ընդ որում՝*

$$\arcsin x=\alpha \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha\in[-\pi/2,\ \pi/2]\\ \sin\alpha=x\end{cases}:$$

բ) $\arccos x$ *-ը որոշված է, երբ* $x\in[-1;1]$, *ընդ որում՝*

$$\arccos x=\alpha \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha\in[0,\ \pi]\\ \cos\alpha=x\end{cases}:$$

գ) $\operatorname{arctg} x$ *-ը որոշված է, երբ* $x\in(-\infty;+\infty)$, *ընդ որում՝*

$$\operatorname{arctg} x=\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \in (-\pi/2,\ \pi/2) \\ \operatorname{tg}\alpha = x \end{cases}:$$

դ) $\operatorname{arcctg} x$*-ը որոշված է, երբ* $x \in (-\infty;+\infty)$, *ընդ որում՝*

$$\operatorname{arcctg} x=\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \in (0,\ \pi) \\ \operatorname{ctg}\alpha = x \end{cases}:$$

Հիշեցնենք հակադարձ եռանկյունաչափական ֆունկցիաների առավել հաճախ հանդիպող արժեքները.

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\arcsin x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$
$\arccos x$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$
$\operatorname{arctg} x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$
$\operatorname{arcctg} x$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$

Հաճախ օգտակար են լինում հետևյալ նույնությունները.

$$\arcsin(-x)=-\arcsin x, \qquad \arccos(-x)=\pi-\arccos x,$$

$$\operatorname{arctg}(-x)=-\operatorname{arctg} x, \qquad \operatorname{arcctg}(-x)=\pi-\operatorname{arcctg} x,$$

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}, \qquad \operatorname{arctg} x+\operatorname{arcctg} x=\frac{\pi}{2}:$$

• **514.** Տրված է, որ $\operatorname{tg}\alpha=3$:

ա) Գտնել $\operatorname{ctg}\alpha$-ն:

1) -3, 2) $0{,}3$, 3) $-\frac{1}{3}$, 4) $\frac{1}{3}$:

բ) Գտնել $\cos^2\alpha$-ն:

1) $\frac{1}{10}$, 2) $\frac{1}{\sqrt{10}}$, 3) $\frac{9}{10}$, 4) $\frac{3}{\sqrt{10}}$:

գ) Գտնել $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$-ն:

1) $-\frac{1}{3}$, 2) $\frac{1}{3}$, 3) 3, 4) – 3:

դ) Գտնել $\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$-ն:

1) 2, 2) – 2, 3) $-\frac{1}{2}$, 4) $\frac{1}{2}$:

• **515.** Հաշվեք արտահայտության արժեքը.

ա) $\sin 150^\circ+\cos(-60^\circ)$:

1) 1, 2) 0, 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}$, 4) $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}$:

բ) $\sin 15^\circ \sin 75^\circ$:

1) $\frac{\sqrt{3}}{4}$, 2) $-\frac{1}{2}$, 3) $\frac{1}{2}$, 4) $\frac{1}{4}$:

գ) $16\sin 18^\circ \cos 36^\circ$:

1) 2, 2) 8, 3) 6, 4) 4:

դ) $\frac{\sin^2 7^\circ-\cos^2 187^\circ}{\cos 14^\circ}$:

1) 1, 2) – 1, 3) 0, 4) $\operatorname{tg} 14^\circ$:

• **516.** Հաշվեք արտահայտության արժեքը.

ա) $\frac{1+\cos 2\alpha}{1-\sin 2\alpha}$, եթե $\operatorname{tg}\alpha=2$:

1) 2, 2) $\sqrt{2}$, 3) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 4) $\frac{1}{2}$:

բ) $\operatorname{tg}\alpha$, եթե $\sin 2\alpha=1$:

1) 0, 2) – 1, 3) 1, 4) $\sqrt{3}$:

գ) $\sin 2x$, եթե $\sin x+\cos x=0{,}5$:

1) – 0,75, 2) 0,75, 3) 1,25, 4) 0,25:

դ) $\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x$, եթե $\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x=5$ և $\pi<x<\frac{3\pi}{2}$:

1) $\pm\sqrt{5}$, 2) $\sqrt{5}$, 3) $\sqrt{7}$, 4) $-\sqrt{7}$:

Հաշվեք արտահայտության արժեքը (517-519).

• **517.** ա) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$:

1) $\frac{\pi}{2}$, 2) π, 3) $-\pi$, 4) $-\frac{\pi}{2}$:

բ) $\arccos(-1)+\arcsin(-1)$:

1) π, 2) $\frac{\pi}{2}$, 3) $\frac{\pi}{4}$, 4) $-\frac{\pi}{2}$:

գ) $\operatorname{arctg}1+\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$:

1) π, 2) $\frac{5\pi}{12}$, 3) $\frac{\pi}{6}$, 4) $\frac{7\pi}{12}$:

դ) $\arccos\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)$:

1) $\frac{\pi}{6}$, 2) $\frac{\pi}{3}$, 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 4) $\frac{1}{2}$:

518. ա) $2\arccos\frac{1}{2}+\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$, բ) $3\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

գ) $2\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}+\operatorname{arcctg}\sqrt{3}$, դ) $2\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)+\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$:

519. ա) $\arcsin 0{,}7+\arccos 0{,}7$, բ) $\arcsin(-0{,}1)+\arccos(-0{,}1)$,

գ) $\operatorname{arctg}\sqrt{2}+\operatorname{arcctg}\sqrt{2}$, դ) $\operatorname{arctg}(-5)+\operatorname{arcctg}(-5)$:

Պարզեցնել արտահայտությունը (520-521).

520. ա) $\frac{\sin 120^\circ-\cos 150^\circ}{\cos 120^\circ-\sin 150^\circ}$, բ) $\frac{\operatorname{tg}300^\circ-\operatorname{ctg}210^\circ}{\operatorname{ctg}300^\circ-\operatorname{tg}210^\circ}$:

521. ա) $\frac{\operatorname{ctg}^2\frac{5\pi}{6}-2\sin\frac{4\pi}{3}}{\operatorname{ctg}^2\frac{3\pi}{4}-2\cos\frac{7\pi}{6}}$, բ) $\frac{\operatorname{tg}^2\frac{4\pi}{3}+2\cos\frac{5\pi}{4}\cdot\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{6}}{\operatorname{tg}^2\frac{3\pi}{4}-2\cos\frac{7\pi}{4}\cdot\sin\frac{5\pi}{3}}$:

Ապացուցել նույնությունը (522-525).

522. ա) $\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$, բ) $\sin 2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$:

523. ա) $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha=2\operatorname{ctg}2\alpha$,   բ) $\dfrac{1-2\sin^2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=\dfrac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}$:

524. ա) $\dfrac{\cos 2\alpha}{1-\sin 2\alpha}=\dfrac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}$,   բ) $\dfrac{\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=\dfrac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}$:

525. ա) $\dfrac{\sin^2\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}+\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}-\sin\alpha=\cos\alpha$,

բ) $\dfrac{3-4\cos 2\alpha-\sin(3{,}5\pi+4\alpha)}{3+4\cos 2\alpha-\sin(3{,}5\pi+4\alpha)}=\operatorname{tg}^4\alpha$:

Հաշվել արտահայտության արժեքը (526-529).

➤**526.** ա) $\dfrac{2-4\cos^2 85^\circ}{\sin 280^\circ}$,   բ) $\dfrac{5\cos 70^\circ-\sin 160^\circ}{\cos 110^\circ}$:

➤**527.** ա) $\sin 16^\circ+\cos 16^\circ\cdot\operatorname{tg}37^\circ$,   բ) $\cos 48^\circ+\sin 48^\circ\cdot\operatorname{tg}24^\circ$:

➤**528.** ա) $\dfrac{\sin 84^\circ}{\cos 2^\circ}-\dfrac{\cos 84^\circ}{\sin 2^\circ}$,   բ) $\dfrac{2\cos 201^\circ-16\sin 111^\circ}{\cos 21^\circ}$:

➤**529.** ա) $\dfrac{2\sin^2 70^\circ-1}{2\operatorname{ctg}115^\circ\cdot\cos^2 155^\circ}$,   բ) $\sin 242^\circ\cdot\operatorname{ctg}31^\circ-\cos 242^\circ$:

Հաշվել (530-538).

530. ա) $\operatorname{tg}\alpha$-ն, եթե $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{3}$,   բ) $\operatorname{ctg}\alpha$-ն, եթե $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{4}$:

531. ա) $\sin\alpha$-ն, $\cos\alpha$-ն, $\operatorname{ctg}\alpha$-ն, եթե $\operatorname{tg}\alpha=-7$ և $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$,

բ) $\cos\alpha$-ն, $\operatorname{tg}\alpha$-ն, եթե $\sin\alpha=\dfrac{1}{7}$ և $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$:

➤**532.** ա) $\sqrt{2}\operatorname{tg}(\alpha-\pi)$-ն, եթե $\cos 2\alpha=\dfrac{1}{3}$ և $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$,

բ) $\sqrt{40}\sin(\pi+\alpha)$-ն, եթե $\sin 2\alpha=-\dfrac{\sqrt{15}}{4}$ և $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\dfrac{3\pi}{4}$:

➤**533.** ա) $\operatorname{tg}2\alpha$-ն, $\cos 2\alpha$-ն, եթե $\sin(\pi-\alpha)=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ և $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$,

բ) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-2\alpha\right)$-ն, եթե $\sin\alpha=0{,}3$:

➤**534.** ա) $\sin\dfrac{\alpha}{2}$-ը, եթե $\cos\alpha=-\dfrac{4}{5}$ և $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$, բ) $\cos\frac{\alpha}{2}$ -ը, եթե $\cos\alpha = -0{,}6$ և $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ ։

➤535. ա) $\sin 2\alpha$ -ն, եթե $\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{1}{2}$,

բ) $\cos 2\alpha$ -ն, եթե $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ ։

➤536. ա) $\mathrm{tg}\,\beta$ -ն, եթե $\mathrm{tg}(\alpha + \beta) = -1$ և $\mathrm{tg}\,\alpha = 3$,

բ) $28\,\mathrm{tg}\,\alpha$ -ն, եթե $\mathrm{tg}(\alpha + \beta) = \frac{16}{3}$ և $\mathrm{tg}\,\beta = \frac{1}{4}$ ։

➤537. ա) $\frac{\sin\alpha - 2\sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{\cos\alpha - 2\cos 2\alpha + \cos 3\alpha}$ -ն, եթե $\mathrm{tg}\,\alpha = 3$,

բ) $5\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)$ -ն, եթե $\sin\alpha = 0{,}3$ ։

*** 538.** ա) $\sin 2\alpha$ -ն, եթե $4\sin^2\alpha + 3\sin 2\alpha = 4\cos^2\alpha$ և $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$,

բ) $\cos 2\alpha$ -ն, եթե $2\,\mathrm{ctg}^2\alpha + 7\,\mathrm{ctg}\,\alpha + 3 = 0$ և $\frac{7\pi}{4} < \alpha < 2\pi$ ։

Հաշվել արտահայտության արժեքը (539-545).

➤539. ա) $\sin\left(\arccos\frac{3}{5}\right)$, բ) $\cos\left(\arcsin\frac{5}{13}\right)$,

գ) $\mathrm{tg}(\mathrm{arcctg}\,0{,}2)$, դ) $\mathrm{ctg}(\mathrm{arctg}\,0{,}25)$ ։

*** 540.** ա) $\sin\left(2\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, բ) $\cos\left(2\arcsin\frac{4}{5}\right)$,

գ) $\mathrm{tg}\left(2\,\mathrm{arcctg}\frac{1}{4}\right)$, դ) $\mathrm{ctg}(2\,\mathrm{arctg}\,5)$ ։

➤541. ա) $\mathrm{tg}\left(\arcsin\frac{4}{5} + \frac{3\pi}{2}\right)$, բ) $\mathrm{ctg}\left(\arccos\frac{3}{5} + \pi\right)$ ։

➤542. ա) $\sin^2\left(\arccos\frac{4}{5}\right)$, բ) $\sin\left(2\arcsin\frac{4}{5}\right)$ ։

*** 543.** ա) $\mathrm{tg}\left(\arccos\frac{1}{3}\right)$, բ) $\mathrm{tg}\left(2\arccos\frac{12}{13}\right)$ ։

➢544. ա) $\arccos\left(\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$, բ) $\arcsin\left(\sin\frac{8\pi}{7}\right)$:

➢545. ա) $\arcsin\left(\sin\frac{29\pi}{5}\right)$, բ) $\arccos\left(\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right)$:

➢546. Հաշվել՝

ա) $(4\,\mathrm{tg}^2\alpha-3\,\mathrm{ctg}\,\alpha)$ -ն, եթե $\sin^2\alpha+3\cos^2\alpha=2{,}6$ և $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$,

բ) $\sqrt{20}(\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{ctg}\,\alpha)$-ն, եթե $4\sin^2\alpha-5\cos^2\alpha=1{,}5\sin\alpha$ և $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$,

գ) $(3\cos\alpha-2\sin\alpha)$ -ն, եթե $3\,\mathrm{tg}\,\alpha-2\,\mathrm{ctg}\,\alpha=1$ և $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$,

դ) $\sqrt{2}(\mathrm{tg}\,\alpha+2\,\mathrm{ctg}\,\alpha)$, եթե $\sqrt{3}\sin\alpha-2\sqrt{2\cos\alpha}=0$:

*** 547.** Ապացուցել հավասարությունը.

ա) $2\,\mathrm{arctg}\frac{1}{4}+\mathrm{arctg}\frac{7}{23}=\frac{\pi}{4}$, բ) $2\,\mathrm{arctg}\sqrt{2}-\arcsin\frac{1}{3}=\frac{\pi}{2}$:

§4. Եռանկյունաչափական հավասարումներ

Պարզագույն եռանկյունաչափական հավասարումներն են՝ $\sin x=a$, $\cos x=a$, *երբ* $-1\le a\le 1$ *և* $\mathrm{tg}\,x=b$, $\mathrm{ctg}\,x=b$, *երբ* $-\infty<b<+\infty$ *: Այդ հավասարումների լուծումները տրվում են հետևյալ առնչություններով.*

$$\sin x=a\Leftrightarrow x=(-1)^n\arcsin a+\pi n,\ \ n\in\mathbf{Z},$$
$$\cos x=a\Leftrightarrow x=\pm\arccos a+2\pi n,\ \ n\in\mathbf{Z},$$
$$\mathrm{tg}\,x=b\Leftrightarrow x=\mathrm{arctg}\,b+\pi n,\ \ n\in\mathbf{Z},$$
$$\mathrm{ctg}\,x=b\Leftrightarrow x=\mathrm{arcctg}\,b+\pi n,\ \ n\in\mathbf{Z}:$$

Մասնավոր դեպքերում, երբ $a=0$, $a=\pm1$ *կամ* $b=0$, *այդ լուծումներն ունեն ավելի պարզ տեսք.*

$$\sin x=0\Leftrightarrow x=\pi n,\ \ n\in\mathbf{Z},$$
$$\sin x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ \ n\in\mathbf{Z},$$

$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$,

$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$,

$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$,

$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$,

$\operatorname{tg} x = 0 \Leftrightarrow x = \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$,

$\operatorname{ctg} x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$:

548. Միավոր շրջանագծի վրա նշելով համապատասխան կետերը՝ ապացուցեք բազմությունների հավասարությունը.

ա) $\left\{\frac{\pi}{2} + 2\pi k : k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{\frac{3\pi}{2} + 2\pi k : k \in \mathbf{Z}\right\} = \left\{\frac{\pi}{2} + \pi k : k \in \mathbf{Z}\right\}$,

բ) $\{\pi k : k \in \mathbf{Z}\} \cup \left\{\frac{\pi}{2} + \pi k : k \in \mathbf{Z}\right\} = \left\{\frac{\pi k}{2} : k \in \mathbf{Z}\right\}$,

գ) $\left\{\frac{\pi}{4} + \pi k : k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{4} + \pi k : k \in \mathbf{Z}\right\} = \left\{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} : k \in \mathbf{Z}\right\}$,

դ) $\left\{\pm\frac{\pi}{6} + \pi k : k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{2} + \pi k : k \in \mathbf{Z}\right\} = \left\{\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3} : k \in \mathbf{Z}\right\}$,

ե) $\left\{\pm\frac{\pi}{3} + \pi k : k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \{\pi k : k \in \mathbf{Z}\} = \left\{\frac{\pi k}{3} : k \in \mathbf{Z}\right\}$,

զ) $\left\{(-1)^k \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2} : k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{2} + \pi k : k \in \mathbf{Z}\right\} = \left\{\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3} : k \in \mathbf{Z}\right\}$,

է) $\left\{(-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k : k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{(-1)^{k+1} \frac{\pi}{4} + \pi k : k \in \mathbf{Z}\right\} = \left\{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} : k \in \mathbf{Z}\right\}$:

• **549.** Տրված է $\sin 2x = 1$ հավասարումը:

ա) Նշված թվերից ո՞րն է բավարարում հավասարմանը:

1) $\frac{\pi}{2}$, 2) $\frac{\pi}{4}$, 3) $\frac{3\pi}{4}$, 4) $\frac{\pi}{3}$:

բ) Ո՞րն է հավասարման լուծումը:

1) $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, 2) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$,

3) $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in \mathbf{Z}$, 4) $-\frac{\pi n}{2},\ n\in \mathbf{Z}$:

գ) Գտնել հավասարման այն արմատների քանակը, որոնք բավարարում են $|x-7|<1$ պայմանին:

1) 1, 2) 2, 3) 3, 4) 4:

դ) Գտնել $\operatorname{tg} x$-ի արժեքը, եթե x-ն այդ հավասարման արմատ է:

1) 0, 2) -1, 3) 1, 4) $\sqrt{3}$:

• **550.** Տրված է $\operatorname{tg} x=1$ հավասարումը:

ա) Ո՞ր քառորդներում են հավասարման արմատները:

1) I, 2) I և II, 3) I և III, 4) I և IV,

բ) Ո՞րն է հավասարման լուծումը:

1) $\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in \mathbf{Z}$, 2) $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in \mathbf{Z}$,

3) $\pm\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in \mathbf{Z}$, 4) $\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in \mathbf{Z}$:

գ) Գտնել հավասարման այն արմատների քանակը, որոնք գտնվում են $[-1;10]$ միջակայքում:

1) 2, 2) 3, 3) 4, 4) 5:

դ) Գտնել $\operatorname{ctg} x$-ի արժեքը, եթե x-ը տրված հավասարման արմատ է:

1) Գոյություն չունի, 2) -1, 3) 1, 4) 0:

• **551.** Տրված է $\frac{\cos x}{1+\sin x}=0$ հավասարումը:

ա) Նշված կետերից ո՞րը չի պատկանում հավասարման ԹԱԲ-ին:

1) 2π, 2) $-\pi$, 3) $\frac{3\pi}{2}$, 4) e:

բ) Ո՞րն է հավասարման լուծումը:

1) $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in \mathbf{Z}$, 2) $\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in \mathbf{Z}$,

3) $-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in \mathbf{Z}$, 4) $\pi n,\ n\in \mathbf{Z}$:

գ) Ո՞րն է հավասարման ամենամեծ բացասական արմատը:

1) $-\frac{3\pi}{4}$, 2) $-\frac{3\pi}{2}$, 3) $-\frac{7\pi}{2}$, 4) $-\frac{\pi}{2}$:

դ) Նշված հավասարումներից ո՞րն է համարժեք տրված հավասարմանը:

1) $(\sin x+1)\cos x=0$,   2) $\dfrac{\sin x-1}{\sin x+1}=0$,

3) $\operatorname{ctg} x=0$,   4) $\dfrac{\sin x-1}{\cos x}=0$:

Լուծել հավասարումը (552-585).

552. ա) $\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{12}\right)=\dfrac{1}{2}$,   բ) $2\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$:

553. ա) $\cos\left(\dfrac{2\pi}{7}-4x\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,   բ) $\sin\left(\dfrac{x}{4}-\dfrac{2\pi}{5}\right)=\dfrac{1}{2}$:

554. ա) $\operatorname{tg}\left(4x+\dfrac{\pi}{3}\right)=0$,   բ) $\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)=1$:

555. ա) $2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{3x}{2}\right)-1=0$,   բ) $\sin^2 2x=\dfrac{3}{4}$:

556. ա) $2\sin^2 x+7\cos x-5=0$,   բ) $2\cos^2 x+5\sin x-4=0$:

557. ա) $16\sin x-8\cos 2x+7=0$,   բ) $8\cos 2x+16\cos x+7=0$:

➢**558.** ա) $\cos\dfrac{x}{3}-\cos\dfrac{x}{6}+1=0$,   բ) $\cos\dfrac{x}{4}+3\sin\dfrac{x}{8}=3{,}5$:

559. ա) $\operatorname{tg}^2 x-2\operatorname{tg} x-3=0$,   բ) $\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg} x-2=0$:

➢**560.** ա) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right)+3\operatorname{tg} x+4=0$,   բ) $\operatorname{tg}^2 x=12\cos^2 x$:

561. ա) $\sin 4x=\sin 2x$,   բ) $\sin 2x=\sin 5x$:

➢**562.** ա) $\operatorname{tg} 2x=\operatorname{tg} 6x$,   բ) $\operatorname{tg}\pi x=\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}-3\pi x\right)$:

563. ա) $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$,   բ) $2\cos^2\dfrac{x}{2}-1=\sin 3x$:

564. ա) $\sin 3x+\cos 3x=1$,   բ) $\cos 2x-\sin 2x=\sqrt{2}$:

565. ա) $\sin x+\sqrt{3}\cos x=2$,   բ) $\sqrt{3}\sin x-\cos x=\sqrt{2}$:

➢**566.** ա) $\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)^2-5=\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)$,

բ) $\sqrt{3}(\cos x-\sin 3x)=\cos 3x-\sin x$:

567. ա) $\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\cos x-\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

բ) $\sin x\cos\frac{\pi}{8}+\cos x\sin\frac{\pi}{8}=\cos\frac{\pi}{3}$:

568. ա) $\sin x+\sin 3x=\sqrt{3}\cos x$, բ) $\cos x-\cos 2x=\sin 3x$:

➢**569.** ա) $\sin^2 2x+\sin^2 3x=\sin^2 5x$, բ) $\cos^2 2x+\cos^2 6x=1$:

➢**570.** ա) $1+\sin x+\cos x+\operatorname{tg} x=0$, բ) $\frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}=(\sin x+\cos x)^2$:

➢**571.** ա) $2\sin^2 x+\cos x=2\sin^2 x\cos x+1$, բ) $\cos x+\cos\frac{x}{2}=\sin\frac{x}{2}$:

572. ա) $\cos 3x\cos x=\cos 17x\cos 15x$, բ) $\cos 10x\cos 6x=\cos^2 8x$:

573. ա) $\sin x\sin 3x+\sin 4x\sin 8x=0$, բ) $\sin 3x=4\sin x\cos 2x$:

➢**574.** ա) $\sin^4 x+\cos^4 x=\sin x\cos x$, բ) $\sin^4 x+\cos^4 x=\cos 2x$:

➢**575.** ա) $\sin^2 x+3\sin x\cos x+2\cos^2 x=0$, բ) $\cos^2 x+4\sin^2 x=2\sin 2x$:

➢**576.** ա) $3\sin^2 x-2\sin 2x+5\cos^2 x=2$, բ) $\sin 2x=\cos^2 x-2\sin^2 x+1$:

➢**577.** ա) $5\sin 2x-5\cos 2x=1$, բ) $3\sin 2x+2\cos 2x=3$:

578. ա) $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x=\frac{4}{\sqrt{3}}$, բ) $\operatorname{ctg} x-\operatorname{tg} x=1{,}5$:

579. ա) $\operatorname{ctg} 3x-\operatorname{ctg} x=4\cos x$, բ) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}+x\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\frac{4}{\sqrt{3}}$:

* **580.** ա) $\sin x-3\sin 3x-7\sin 7x=11$, բ) $\cos x+2\cos 2x+4\cos 4x=7$:

➢**581.** ա) $(2\cos^2 x-1)\sqrt{2x-x^2}=0$, բ) $(\sin 2\pi x-3\cos\pi x)\sqrt{4-x^2}=0$:

➢**582.** ա) $(\cos x-1)\sqrt{\frac{x+2\pi}{2\pi-x}}=0$, բ) $(2\sin x-1)\sqrt{\frac{6x+7\pi}{6x-\pi}}=0$:

➢**583.** ա) $\cos x=\sqrt{1+\sin x}$, բ) $\sin x=\sqrt{1-\cos x}$:

➢**584.** ա) $\sqrt{\cos 2x}=1+2\sin x$, բ) $\sqrt{2}\sin x=\sqrt{5\cos x-1}$:

* **585.** ա) $(x^2-2)|\sin x|=\sin x$, բ) $2\cos^2 x+5|\sin x|-4=0$:

➢**586.** Տրված է $f(x)=\sin x$ ֆունկցիան: Հետևյալ ասույթներից որո՞նք են ճշմարիտ.

ա) f-ը զույգ ֆունկցիա է:

բ) (-4π)-ն f-ի պարբերություն է:

գ) $[-7;-5]$ միջակայքում ֆունկցիան աճում է:

դ) $[5;7]$ միջակայքում ֆունկցիան նվազում է:

ե) Ֆունկցիայի որոշման տիրույթը սահմանափակ է:

զ) Ֆունկցիայի կրիտիկական կետերի բազմությունը համաչափ է կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ:

➢587. Տրված է $y = 2|\cos x| - 2$ ֆունկցիան: Հետևյալ ասույթներից որո՞նք են ճշմարիտ:

ա) Ֆունկցիայի արժեքների տիրույթը $[-2;0]$ միջակայքն է:

բ) 2π -ն ֆունկցիայի հիմնական պարբերությունն է:

գ) Ֆունկցիայի գրաֆիկը համաչափ է OY կոորդինատային առանցքի նկատմամբ:

դ) Ֆունկցիան նվազում է $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ միջակայքում:

ե) Ֆունկցիան կոորդինատային առանցքները հատում է $(\pi k;0)$, $k \in \mathbf{Z}$, կետերում:

զ) $x = -\frac{5\pi}{2}$ կետը ֆունկցիայի մինիմումի կետ է:

➢588. Տրված է $a\sin^2 x - 3\sin x + a = 0$ հավասարումը, որտեղ a-ն պարամետր է: Հետևյալ ասույթներից որո՞նք են ճշմարիտ.

ա) $a = 2$ դեպքում հավասարումն արմատ չունի:

բ) $a = \sqrt{2}$ դեպքում հավասարումն ունի արմատ:

*գ) Հավասարումն ունի արմատ այն և միայն այն դեպքում, երբ $|a| \le 1{,}5$:

*դ) Երբ $|a| \le 1$, հավասարումը $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ միջակայքում ունի երկու արմատ:

ե) Երբ $a \in (0;1)$, հավասարումն ունի առաջին քառորդին պատկանող արմատ:

զ) Երբ $a \in (-1;0)$, հավասարումն ունի երկրորդ քառորդին պատկանող արմատ:

§5. Ասփիճանային, ցուցչային և լոգարիթմական ֆունկցիաներ, հավասարումներ, անհավասարումներ

Կամայական դրական a հիմքի և x իրական ցուցիչի համար a^x *-ը սահմանված է: Ընդ որում, կամայական դրական a, b և իրական x, y թվերի համար՝*

1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$, 2) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$, 3) $\left(a^x\right)^y = a^{xy}$,

4) $(a \cdot b)^x = a^x \cdot a^y$, 5) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$,

6) *եթե* $a > 1$ *և* $x > y$, *ապա* $a^x > a^y$,

7) *եթե* $0<a<1$ *և* $x>y$, *ապա* $a^x<a^y$:

Մեկից տարբեր դրական a-ի և դրական b-ի համար $\log_a b$ *-ն այն թիվն է, որով պետք է աստիճան բարձրացնել a-ն՝ b թիվն ստանալու համար: Այսինքն՝*

$$a^{\log_a b}=b,$$

ինչն անվանում են հիմնական լոգարիթմական նույնություն: Լոգարիթմի հիմնական հատկություններն են ($a>0$, $b>0$, $c>0$, $a\neq 1$*).*

1) $\log_a bc=\log_a b+\log_a c$, 2) $\log_a \frac{b}{c}=\log_a b-\log_a c$,

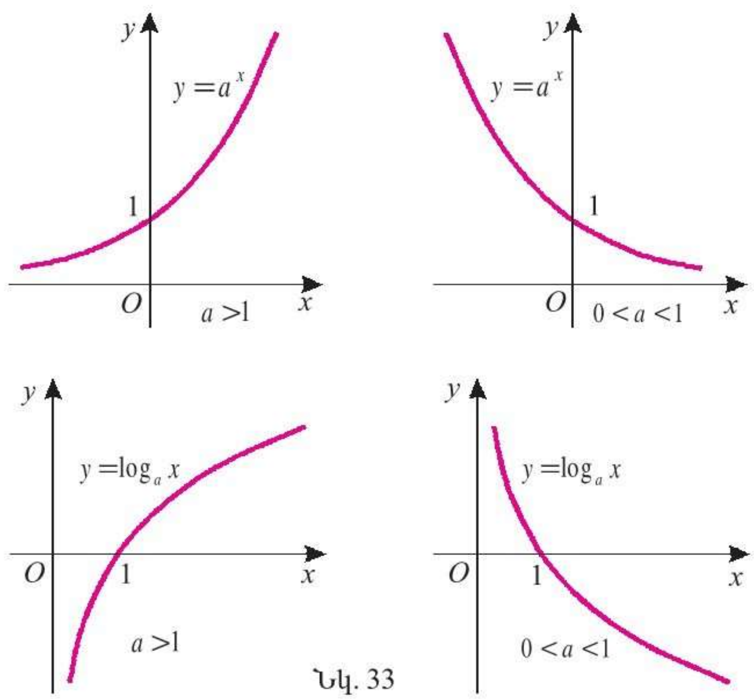
3) $\log_a b^m=m\cdot\log_a b$, *որտեղ m-ը կամայական իրական թիվ է,*

4) $\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$, *եթե* $c\neq 1$:

Հաճախ կիրառում են նաև հետևյալ նույնությունները.

5) $\log_{a^p} b=\frac{1}{p}\log_a b$, 6) $\log_a b=\log_{a^p} b^p$, 7) $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$:

$y=a^x$ *ցուցչային և* $y=\log_a x$ *լոգարիթմական ֆունկցիաները սահմանվում են մեկից տարբեր կամայական դրական հիմքի դեպքում: Ըստ որում՝ այդ ֆունկցիաները փոխհակադարձ են, երկուսն էլ աճող են, երբ* $a>0$, *և նվազող են, երբ* $0<a<1$: *Ցուցչային ֆունկցիայի որոշման տիրույթն ամբողջ իրական առանցքն է, իսկ արժեքների տիրույթը՝ դրական կիսաառանցքը: Լոգարիթմական ֆունկցիայի որոշման տիրույթը դրական կիսաառանցքն է, իսկ արժեքների տիրույթը՝ ամբողջ իրական առանցքը (նկ. 33):*



Նկ. 33

Հիմնական լոգարիթմական նույնության համաձայն, երբ a-ն 1-ից տարբեր դրական և b-ն դրական թվեր են,

$$\log_a b = x \iff a^x = b:$$

Ցուցչային և լոգարիթմական անհավասարումներ լուծելիս անհավասարման երկու կողմերը միևնույն հիմքով լոգարիթմելիս կամ միևնույն հիմքով աստիճան բարձրացնելիս անհավասարության նշանը պահպանվում է, եթե հիմքը մեծ է 1-ից և փոխվում է, եթե հիմքը փոքր է 1-ից:

Հաշվել արտահայտության արժեքը (589-593).

• **589.** $\sqrt{a^{1+\pi}\cdot a^3} : a^{\frac{\pi}{2}-1}$, եթե $a=\sqrt[3]{6}$:

1) 6, 2) $\sqrt[3]{6}$, 3) $\sqrt{6}$, 4) $6\sqrt{6}$:

• **590.** $\log_a b - \log_a \dfrac{b}{a}$, եթե $a>0$, $b>0$, $a\neq 1$:

1) – 1, 2) 1, 3) 0, 4) 2:

• **591.** $\log_{\frac{1}{2}} \log_3 81$:

1) $\dfrac{1}{2}$, 2) – 2, 3) $\log_{\frac{3}{2}} 81$, 4) $\log_{\frac{1}{2}} 27$:

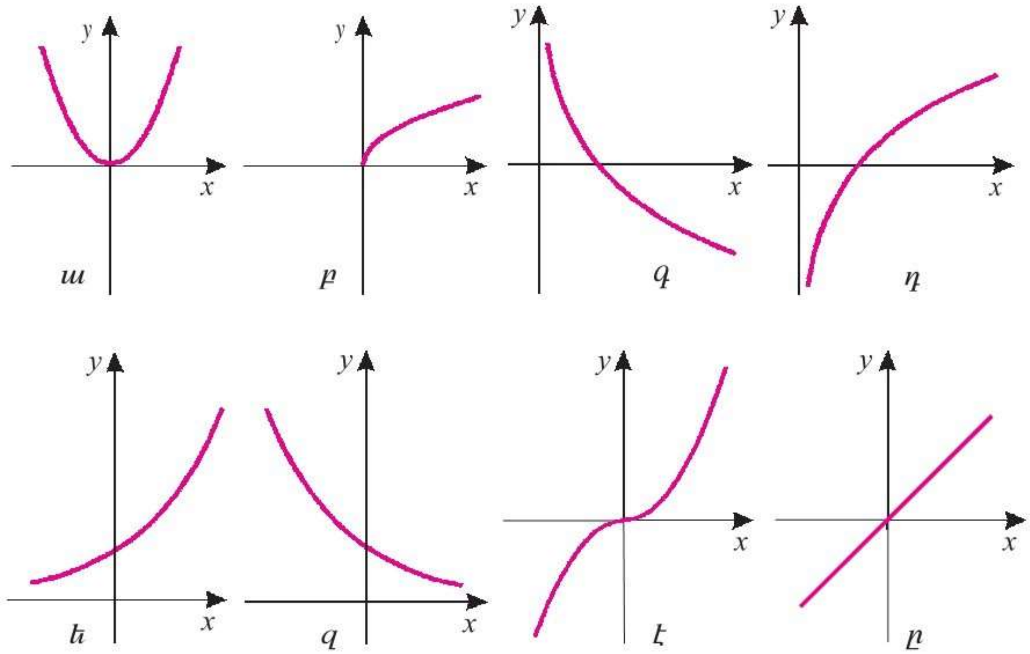
• **592.** $\left(\sqrt{x}\right)^{\sqrt{5}-1}\cdot\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{5}+1}$, երբ $x=\dfrac{1}{5}$:

1) 5, 2) $\dfrac{1}{5}$, 3) $\sqrt{5}$, 4) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$:

• **593.** $\ln 2^a + \ln 2^{-a}$:

1) $\ln\left(2^a + 2^{-a}\right)$, 2) e, 3) 1, 4) 0:

594. Ստորև բերված են աստիճանային, ցուցչային և լոգարիթմական ֆունկցիաների գրաֆիկներ: Յուրաքանչյուր գրաֆիկի համար նշել, թե ինչպիսի ֆունկցիայի գրաֆիկ է: Ցուցչային և լոգարիթմական ֆունկցիաների դեպքում նշել հիմքի մեկից մեծ կամ փոքր լինելը, իսկ աստիճանայինի դեպքում՝ նաև ցուցիչի կոտորակային, զույգ կամ կենտ լինելը:



595. Կառուցել հետևյալ ֆունկցիաների գրաֆիկները.

ա) $y=x^2$, բ) $y=\sqrt{x}$, գ) $y=2^x$, դ) $y=\log_{0,5} x$,

ե) $y=x$, զ) $y=\log_2 x$, է) $y=x^3$, ը) $y=(0,5)^x$:

Հավասարման արմատները ներկայացնել տասնորդական կոտորակով 10^{-2} ճշտությամբ պակասորդով (596-597).

596. ա) $\sqrt{x+1}=x$, բ) $x^{1/3}=2,2$, գ) $x^2+2x-4=0$, դ) $x^4=9$:

597. ա) $\log_3 x=1,5$, բ) $\log_{1/3} x^2=4$, գ) $2^{3x}=4$, դ) $3^{7x+1}=27$:

Լուծել հավասարումը (598-614).

598. ա) $36^{x-3}=216^{\sqrt{x}+1}$, բ) $8^{|x|-2}=(0,25)^{0,5-x}$:

599. ա) $9^{x-2}\cdot 27^{\sqrt{x}-2}=81^{x-3}$, բ) $5^{2|x|-1}\cdot(0,04)^{1-x}=125^x$:

➢**600.** ա) $25^{x-3}\cdot\left(\sqrt[3]{0,2}\right)^{x-1}=625^{\frac{1}{x}}$, բ) $4^{3-\sqrt{x}}\cdot\sqrt[3]{2^{1+\sqrt{x}}}=\left(\sqrt{0,125}\right)^{2-x}$:

601. ա) $9^{\sqrt{x+1}}\cdot 27^{\sqrt{x-3}}=81^{\sqrt{x-2}}$, բ) $8^{\sqrt{x+2}}\cdot 16^{\sqrt{x-3}}=32^{\sqrt{x-1,2}}$:

➢**602.** ա) $(2,5)^{x+2}\cdot(0,4)^{\sqrt{x+4}}=\left(\frac{4}{25}\right)^x$, բ) $(0,8)^{\sqrt{x+2}}\cdot(1,25)^x=\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{x-2}$:

603. ա) $0{,}2\cdot 125^{\sqrt{1+\frac{x}{9}}}=25^{\sqrt{0{,}5+\frac{x}{4}}}$, բ) $8^{\sqrt{1-\frac{x}{9}}}\cdot(0{,}25)^{\sqrt{1-\frac{x}{4}}}=4^{\sqrt{0{,}25+\frac{x}{4}}}$:

604. ա) $\left(\frac{4}{5}\right)^{x-1}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{x+1}=\frac{25}{81}$, բ) $\left(\frac{5}{8}\right)^{x-1}\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^{2-x}=\frac{5}{32}$:

605. ա) $(1{,}5)^{3-x}=0{,}16\cdot(0{,}6)^{3-x}$, բ) $\left(3\frac{1}{3}\right)^{2x-7}=27\cdot(0{,}9)^{7-2x}$:

606. ա) $5^{x-3}\cdot 3^{2x-5}=135$, բ) $4^{x-2}\cdot 5^{7-2x}=50$:

607. ա) $2^{3x-5}\cdot 5^{x-1}=10^{2x-3}$, բ) $8^{x-1}\cdot 9^{2x-3}=6^{x+3}$:

608. ա) $5^{x-2}\cdot 7^{x-1}=0{,}2\cdot 35^{6-x}$, բ) $6^{x-1}\cdot 5^{x-4}=0{,}008\cdot 30^{7-x}$:

* **609.** ա) $25^{x}+9^{x}=2\left(5^{x}+3^{x}-1\right)$, բ) $9^{x}+4^{x}=2\left(3^{x+1}+2^{x+1}-6{,}5\right)$:

➢**610.** ա) $2^{x+3}-2^{x}=7^{x-1}+7^{x-2}$, բ) $9^{x}-2^{x+0{,}5}=2^{x+3{,}5}-3^{2x-1}$:

➢**611.** ա) $7^{x-1}+4\cdot 7^{x-2}=11^{x-1}-4\cdot 11^{x-2}$, բ) $40\cdot 9^{x-1}+2^{3x+1}=8^{x+1}-8\cdot 3^{2x-3}$:

➢**612.** ա) $9^{x-1}\cdot 8^{x-2}-3^{2x-3}\cdot 2^{3x-5}=216$, բ) $2^{x-1}\cdot(0{,}2)^{2-x}+5^{x-1}\cdot(0{,}5)^{2-x}=700$:

613. ա) $9^{x+0{,}5}-28\cdot 3^{x-1}+1=0$, բ) $4^{x-0{,}5}+2^{x+1}-48=0$:

614. ա) $3^{x+1}+3^{1-x}=2\cdot 27^{1/3}$, բ) $2^{2+\sqrt{x}}+2^{2-\sqrt{x}}=17$:

Լուծել հավասարումը, եթե հայտնի է, որ x-ը բնական թիվ է (615-616).

➢**615.** ա) $\sqrt[x]{16^{2x-1}}-\sqrt[x]{16^{x-1}}=120$, բ) $\sqrt[x]{25^{2+x}}+\sqrt[x]{25^{2-x}}=125{,}2$:

➢**616.** ա) $\sqrt[x]{25^{x+1}}+\sqrt[x]{25^{x-1}}=130$, բ) $\sqrt[x]{81^{x+2}}-\sqrt[x]{81^{x-2}}=216$:

Լուծել հավասարումը (617-622).

617. ա) $20^{x}+64\cdot 5^{x}=2\cdot 10^{x+1}$, բ) $18^{x-1}-24\cdot 6^{x-2}+1{,}5\cdot 2^{x}=0$:

618. ա) $6^{3x-1}+6^{x+1}=2\cdot 36^{x}$, բ) $2^{3x-1}+(0{,}5)^{3-5x}=5\cdot 2^{x+3}$:

619. ա) $9\cdot 4^{x}+4\cdot 9^{x}=13\cdot 6^{x}$, բ) $2\cdot 9^{x+0{,}5}+3\cdot 4^{x+0{,}5}=13\cdot 6^{x}$:

620. ա) $25^{0{,}5-x}+4^{0{,}5-x}=7\cdot(0{,}1)^{x}$, բ) $25^{1+1/x}+9^{1+1/x}=34\cdot 15^{1/x}$:

➢**621.** ա) $25^{1+\sin(\pi-x)}+25^{1+\cos(\pi/2+x)}=130$, բ) $36^{1-\cos(\pi-x)}+36^{1-\sin(\pi/2+x)}=222$:

➢**622.** ա) $9^{(\sin x+\cos x)^2}+9^{(\sin x-\cos x)^2}=30$, բ) $4^{(\cos 2x-\sin 2x)^2}+4^{(\cos 2x+\sin 2x)^2}=10$:

Լուծել հավասարումը (623-624).

*** 623.**ա) $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x=4$, բ) $\left(\sqrt{\sqrt{2}+1}\right)^x+\left(\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)^x=6$:

*** 624.** ա) $4^{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}-8^{\frac{1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x}}}=56$, բ) $5^{\frac{x}{1+\sqrt{1-x}}}+5^{\frac{x}{1-\sqrt{1-x}}}=125{,}2$:

➢625. Տրված է $x^2-\left(2^a-1\right)x+3\left(2^{a-2}-4^{a-1}\right)=0$ հավասարումը, որտեղ a-ն պարամետր է: Հետևյալ ասույթներից որո՞նք են ճշմարիտ:

ա) Երբ $a=1$, հավասարումն ունի մեկ արմատ:

բ) Երբ $a=-2$, հավասարման արմատները դրական են:

գ) Երբ $a>1$, հավասարման արմատները տարբեր նշանի են:

դ) Եթե հավասարման արմատները տարբեր նշանի են, ապա $a>0$:

ե) Եթե հավասարումն ունի երկու տարբեր արմատներ, ապա $a\in\{-2;0\}$:

զ) Գոյություն ունի a, որի դեպքում 1-ը հավասարման արմատ է:

➢626. Տրված է $32^x+2^{a-x}=2^{a+2x}$ հավասարումը, որտեղ a-ն պարամետր է: Հետևյալ ասույթներից որո՞նք են ճշմարիտ:

ա) Տրված հավասարումը համարժեք է $16^x+2^{a-2x}=2^{a+x}$ հավասարմանը:

բ) Տրված հավասարումը համարժեք չէ $8^x+\dfrac{2^a}{8^x}=2^a$ հավասարմանը:

գ) Երբ $a>3$, հավասարումն ունի արմատ:

դ) Հավասարումն ունի մեկ արմատ, երբ $a=2$:

ե) Կամայական a-ի դեպքում հավասարումը բացասական արմատ չունի:

զ) $8^{x_1+x_2}=2^a$, որտեղ x_1-ը և x_2-ը տրված հավասարման արմատներն են:

➢627. Տրված է $6^{1-x^2}=a^2$ հավասարումը, որտեղ a-ն պարամետր է: Հետևյալ ասույթներից որո՞նք են ճշմարիտ:

ա) Հավասարումն ունի լուծում a-ի կամայական արժեքի դեպքում:

բ) Երբ $a\neq 0$, հավասարումը համարժեք է $x^2=\log_6\left(6a^{-2}\right)$ հավասարմանը:

գ) Երբ $a\in(0;1)$, հավասարման արմատների գումարը զրո է:

դ) Գոյություն չունի a-ի այնպիսի արժեք, որի դեպքում հավասարումն ունի մեկ արմատ:

ե) Երբ $a=\dfrac{1+\sqrt{14}}{2}$, հավասարումն ունի արմատ:

գ) Երբ $a \in [-\sqrt{6}; \sqrt{6}\,]$, հավասարումն ունի արմատ:

Ապացուցեք հավասարությունը (628-629).

628. ա) $\lg 500 \cdot \lg 200 - \lg 0{,}2 \cdot \lg 0{,}5 = 6$, բ) $\dfrac{1-\log_5 135}{1-\log_5 30} + \dfrac{2-\log_5 200}{2-\log_5 150} = 3$:

* **629.** ա) $\sqrt{4\lg 2 + \lg^2 5} + \sqrt{4\lg 5 + \lg^2 2} = 3$,

բ) $\sqrt{1+\log_6 2 \cdot \log_6 72} + \sqrt{1+\log_6 3 \cdot \log_6 108} = 3$:

Գտեք f ֆունկցիայի որոշման տիրույթը (630-631).

630. ա) $f(x) = \log_{5-x}(5+2x)$, բ) $f(x) = \log_{0,4x-1}\left(7x - x^2\right)$:

631. ա) $f(x) = \dfrac{\lg\left(8+2x-x^2\right)}{\lg\left(1-x+x^2\right)}$, բ) $f(x) = \dfrac{\lg\left(4x-x^2\right)}{\lg\left(3x^2-10x+8\right)}$:

Լուծեք հավասարումը (632-648).

➢**632.** ա) $\log_{x-2}(4x-1) = 2$, բ) $\log_{5-x}(11+2x) = 0{,}5$:

633. ա) $\log_4 x + \log_8 x + \log_{16} x = 6{,}5$, բ) $\log_{\sqrt{5}} x + \log_{0,2} x + \log_{25} x = 1{,}5$:

634. ա) $\lg(x-3) + \lg(x-6) = 1 + 2\lg 2$, բ) $\lg(4-x) + \lg(7-x) = 3 - 2\lg 5$:

635. ա) $2\lg(x-4) - \lg(x+11) = 2 - \lg 5$, բ) $2\lg(5-x) - \lg 2 = \lg(x+10) + 1$:

636. ա) $2\lg x - \lg\left(x^2 - x + 3\right) = 3\lg 2 - 1$, բ) $2\lg(-x) - \lg\left(x^2 - 2x + 5\right) = 2 - 3\lg 5$:

➢**637.** ա) $3\lg 2 + \lg\left(4^{x-2} + 9\right) = \lg\left(2^x + 4\right) + 1$,

բ) $\lg\left(4^x + 25^x\right) = x - 1 + \lg 29$:

➢**638.** ա) $(1-x)\log_3 2 + \log_3\left(4^x + 2\right) = 2$,

բ) $(1-x)\log_2 3 + \log_2\left(3^x + 1\right) = 3 - \log_2\left(3^x - 1\right)$:

➢**639.** ա) $\lg\left(0{,}01x^3\right) \cdot \lg\left(100x^2\right) = 24$, բ) $\log_5 \dfrac{x^2}{125} \cdot \log_5 \dfrac{x^4}{25} = 30$:

➢**640.** ա) $\lg^2(3x+2) = \lg^2(2x+3)$, բ) $\log_2^2(6x-11) = \log_2^2(4x-9)$:

* **641.** ա) $\left(\dfrac{x}{7}\right)^{\log_7 5} + \left(\dfrac{x}{49}\right)^{\log_7 5} = 30$, բ) $\left(\dfrac{x}{\sqrt{32}}\right)^{\log_2 49} + \left(\dfrac{\sqrt{x}}{2}\right)^{\log_2 49} = 14$:

642. ա) $\log_4\left(4x^2\right) + \log_2\left(2x^4\right) = 22$, բ) $\log_9\left(3x^4\right) - \log_3(-3x) = 1{,}5$:

➢**643.** ա) $\log_3 4^{x+1} \cdot \log_2 27^{x-1} = 12\log_{\sqrt[3]{2}} \sqrt{2}$, բ) $\log_2 \sqrt{3^x} \cdot \log_3 \sqrt{5^x} \cdot \log_5 \sqrt{8^x} = 6x$:

➢**644.** ա) $\log_2 \log_2 x = \log_4 \log_4 x$, բ) $\log_3 \log_9 x = \log_9 \log_3 x$:

* **645.** ա) $7^{\log_7^2 x} = 49x$, բ) $x^{\log_5 x} + 5^{\log_5^2 x} = 1250$:

* **646.** ա) $5^{\lg x} + x^{\lg 25} = 650$, բ) $6x^{\log_3 5} - 5^{\log_3 (3x)} = 25^{\log_3\left(\frac{x}{7}\right)}$:

647. ա) $\log_3\left(3^x - 1\right) \cdot \log_3\left(3^{x+1} - 3\right) = 6$, բ) $\log_5\left(5^{x-1} + 1\right) \cdot \log_5\left(5^x + 5\right) = 2$:

➢**648.** ա) $\left|\lg\left(0{,}1x^2\right)\right| + \left|\lg\left(100x^2\right)\right| = 3$, բ) $\left|\log_5(25x)\right| + \left|\log_{0,2} \dfrac{x^2}{125}\right| = 6$:

Հաշվել արտահայտության արժեքը (649-651).

• **649.** $\log_8 16 + \log_8 4$:

1) $\log_8 20$, 2) $\log_{16} 20$, 3) 2, 4) $\log_{16} 64$:

• **650.** $\log_2 4 \cdot \log_4 6 \cdot \log_6 8$:

1) 4, 2) 6, 3) 8, 4) 3:

• **651.** $\log_8 12 - \log_8 15 + \log_8 20$:

1) $\log_8 17$, 2) 8, 3) 8, 4) $\dfrac{4}{3}$:

• **652.** Տրված է $\log_7 x = \log_7 (9 - 2x)$ հավասարումը:

ա) Նշված թվերից ո՞րն է պատկանում հավասարման ԹԱԲ-ին:

1) 0, 2) 4,5, 3) $2e$, 4) π :

բ) Գտնել անհայտի թույլատրելի արժեքների բազմությունը:

1) $(0;+\infty)$, 2) $(0; 4{,}5)$, 3) $[0; 4{,}5]$, 4) $(-\infty; 4{,}5)$:

գ) Նշված հավասարումներից որի՞ն համարժեք չէ տրված հավասարումը:

1) $\dfrac{9-3x}{x} = 0$, 2) $\sqrt{x+1} = 2$, 3) $3x^2 - 9x = 0$, 4) $2^x - 8 = 0$:

դ) Ո՞ր ֆունկցիայի արժեքների բազմությանն է պատկանում տրված հավասարման արմատը:

1) $y = \sin x + \cos x$, 2) $y = |x+3| + 5$,

3) $y = x^2 - 2x + 5$, 4) $y = \dfrac{2}{x-3}$:

• **653.** Տրված է $\log_2 (x+2) \le 2$ անհավասարումը:

ա) Ո՞րն է անհավասարման ԹԱԲ-ը:

1) $x \neq 1$, 2) $[-2;+\infty)$, 3) $(-\infty;\infty)$, 4) $(-2;+\infty)$:

բ) Ո՞րն է անհավասարման լուծումը:

1) $(-2;2]$, 2) $(-2;2)$, 3) $[-2;2]$, 4) $(-2;1)\cup(1;2)$:

գ) Գտեք անհավասարմանը բավարարող ամբողջ թվերի քանակը:

1) 4, 2) 5, 3) 3, 4) 1:

դ) Գտեք անհավասարմանը բավարարող բնական թվերի քառակուսիների գումարը:

1) 6, 2) 5, 3) 4, 4) 0:

Լուծել անհավասարումը (654-680).

654. ա) $125^{1+x} > (0,04)^{3-x^2}$, բ) $(0,4)^{x-\sqrt{x}} \leq (6,25)^{1-\sqrt{x}}$:

➤**655.** ա) $36^{1+\frac{4}{x}} \geq 216$, բ) $(0,6)^{\frac{3}{x}-1} < \sqrt[5]{2\frac{7}{9}}$:

656. ա) $\sqrt[3]{49^{x^2-1}} < \sqrt{343^{x+1}}$, բ) $\sqrt{125^{1+\sqrt{x}}} \geq \sqrt[3]{25^x}$:

➤**657.** ա) $\left(16^{3x} - \sqrt[3]{32^{9x-15}}\right)\left(\pi^{|x-4|} - 1\right) > 0$, բ) $\left(\left(\frac{3}{\pi}\right)^{|x|} - 1\right)\left(\sqrt[3]{81^x} - \sqrt[4]{27^{x+7}}\right) \leq 0$:

➤**658.** ա) $\sqrt{10-x}\left(243 - 9^{|x+1|}\right) \geq 0$, բ) $\sqrt{17+2x}\left(216 - 36^{|x-1|}\right) \leq 0$:

➤**659.** ա) $\left(6\sqrt{2}\right)^{|x-4|} < \left(2\sqrt[3]{9}\right)^{x-1,5}$, բ) $\left(3\sqrt[3]{2}\right)^{|2x+1|} \geq \left(3\sqrt{6}\right)^{x+4}$:

660. ա) $\left(\frac{3}{4}\right)^{\sqrt{x}-1} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{\sqrt{x}+1} > \frac{1}{72}$, բ) $\left(\frac{27}{25}\right)^{x-1} \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^{2x-1} > \frac{5}{81}$:

661. ա) $\left(\frac{5}{9}\right)^{x-7} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{6-x} \leq \frac{16}{45}$, բ) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{x-4} \cdot \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^{6-x} < \frac{1}{8}$:

662. ա) $5^{x-3} + (0,2)^{2-x} \leq 150$, բ) $4^{x-1,5} - (0,5)^{5-2x} \geq 24$:

663. ա) $7^{x-2} + 7^{x-3} - 7^{x-4} < 5 \cdot 11^{x-3}$, բ) $6^x - 3 \cdot 6^{x-2} - 6^{x-1} > 2 \cdot 3^{3x-5}$:

664. ա) $2^{x+2} + 3^{x-5} < 3^{x-1} + 2^{x-2}$, բ) $5^{x+10} - 3^{x+10} \geq 3^{x+12} - 5^{x+11}$:

➤**665.** ա) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x-7} + \left(\frac{9}{4}\right)^{3-x} < \frac{20}{27}$, բ) $5 \cdot (0,6)^{2\sqrt{x}-1} - \left(\frac{25}{9}\right)^{1-\sqrt{x}} \geq 0,72$:

➤**666.** ա) $9^{x-1} - 1 \geq 8 \cdot 3^{x-2}$, բ) $4^{1+\sqrt{x}} - 4^{5-\sqrt{x}} < 96$:

667. ա) $\lg(11-3x) < 2 - \lg 5$, բ) $\log_9(5x+12) \leq \frac{1}{2} + \log_9 14$:

668. ա) $\log_4(14-3|x|)\le 2\sin^2\frac{5\pi}{3}$, բ) $\log_{1/8}(|x|-2)\ge\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{3}$:

669. ա) $\log_4\left(\frac{6}{x}+1\right)\le\log_5\sqrt{0{,}2}$, բ) $\log_{0,3}\left(2-\frac{4}{x}\right)\ge\lg 0{,}4+\lg 2{,}5$:

670. ա) $\log_9(x^2-9)\le\log_4(2{,}4)+\log_4\frac{10}{3}$, բ) $\log_{0,5}\left(4-\frac{x^2}{4}\right)>\log_6\frac{1}{8}+\log_6\frac{2}{9}$:

671. ա) $\log_7(x^2+3x-4)<2-\log_7 3{,}5$, բ) $\log_{1/9}(35+2x-x^2)\ge\log_{\sqrt[3]{2}}\cos\frac{7\pi}{4}$:

672. ա) $\log_2(2x-3)-\log_2(2x+3)<1-\log_2 3$,

բ) $\log_{0,3}(4x-2)-\log_{0,3}(x+1)\ge 1+\log_{0,3}10$:

673. ա) $\lg x+\lg(13-2x)\le 1+\lg 2$, բ) $\log_{1/3}(2x+1)+\log_{1/3}(7-x)>-3$:

➢**674.** ա) $\frac{\lg(0{,}6-0{,}2x)}{\log_{0,7}(3x^2+1)}>0$, բ) $\frac{\log_{0,2}(13-x-x^2)}{\log_{0,8}^2(2x^2-10x+13)}\le 0$:

➢**675.** ա) $\frac{\lg\left(\sqrt{|x|+1}-2\right)}{\lg\left(5-\sqrt[3]{65}\right)}\ge 0$, բ) $\frac{\log_{0,3}\left(\sqrt{|x+1|}-2\right)}{\log_{0,3}\left(\sqrt{10}-\sqrt[3]{10}\right)}\le 0$:

676. ա) $\log_4\frac{x+4}{x^2}\le\cos\frac{2\pi}{3}$, բ) $\log_{0,1}\left(\sqrt{x^2+3x}\right)\ge\sin\frac{31\pi}{6}$:

➢**677.** ա) $x^{\lg(10x)}<100x^2$, բ) $x^{1-\log_5 x}\ge\frac{25}{x^2}$:

➢**678.** ա) $(6{,}25)^{1-\lg^2(-x)}\ge(0{,}4)^{2+\lg x^2}$, բ) $\left(\frac{4}{9}\right)^{2+\log_3|x|}>\left(3\frac{3}{8}\right)^{\log_3\frac{9}{x^4}}$:

➢**679.** ա) $\log_3^2 x+\log_{1/3}(3x)<1$, բ) $\log_{0,5}^2 x-\log_2\left(\frac{4}{x}\right)>4$:

680. ա) $\log_2(4x-9)+2\log_{0,5}(x-2)\ge 2$, բ) $\log_{\sqrt{2}}(x+3)+\log_{1/2}(x+2)\le 2$:

Լուծեք համակարգը (681-682).

➢**681.** ա) $\begin{cases}5^x\cdot 6^y=150\\ 6^x\cdot 5^y=180\end{cases}$, բ) $\begin{cases}7^{2x}+4^{2y+1}=65\\ 7^x-4^y=5\end{cases}$:

➢**682.** ա) $\begin{cases}\log_y x+\log_x y=2\\ x^2-y=20\end{cases}$, բ) $\begin{cases}\log_y x-\log_x y=\frac{8}{3}\\ xy=16\end{cases}$:

§6. Սահման, անընդհատություն, ածանցյալ, ածանցման կանոնները

a_n հաջորդականությունը կոչվում է անվերջ փոքր, եթե կամայական դրական ε թվի համար գոյություն ունի այնպիսի N բնական թիվ, որ

$$n > N \Rightarrow |a_n| \le \varepsilon :$$

Անվերջ փոքր են, օրինակ, $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = q^n$, $|q| < 1$, հաջորդականությունները:

a թիվը կոչվում է a_n հաջորդականության սահման, եթե $a_n - a$ հաջորդականությունն անվերջ փոքր է:

Եթե հաջորդականությունն ունի վերջավոր սահման, կոչվում է զուգամետ, հակառակ դեպքում՝ տարամետ:

Զուգամետ հաջորդականությունների գումարը, տարբերությունը, արտադրյալը և քանորդը (եթե հայտարարի սահմանը և բոլոր անդամները զրո չեն) զուգամետ են:

Մոնոտոն և սահմանափակ հաջորդականությունը զուգամետ է:

f ֆունկցիան անընդհատ է իր որոշման տիրույթի x_0 կետում, եթե f-ի որոշման տիրույթի կամայական x_n հաջորդականության համար

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0):$$

Ֆունկցիան անվանում են անընդհատ, եթե այն անընդհատ է իր որոշման տիրույթի կամայական կետում:

Բոլոր տարրական ֆունկցիաներն անընդհատ են:

Եթե $[a;b]$ հատվածում անընդհատ f ֆունկցիան a և b կետերում ընդունում է տարբեր նշանի արժեքներ, ապա գոյություն ունի այնպիսի $c \in (a;b)$, որ $f(c) = 0$:

Ասում են, որ f ֆունկցիան ածանցելի է x_0 կետում, եթե կամայական h_n անվերջ փոքրի համար զուգամետ է

$$\frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n} \qquad (1)$$

հաջորդականությունը:

Եթե f ֆունկցիան ածանցելի է x_0 կետում, ապա (1) հաջորդականության սահմանն անվանում են f ֆունկցիայի ածանցյալ x_0 կետում և նշանակում $f'(x_0)$:

$s(t)$ օրենքով ուղղագիծ շարժվող մարմնի $V(t)$ արագությունը ժամանակի t պահին հավասար է $s(t)$ ֆունկցիայի ածանցյալին՝ $s'(t) = V(t)$:

Եթե ուղղագիծ շարժվող մարմնի արագությունը փոխվում է $V(t)$ օրենքով, ապա դրա $a(t)$ արագացումը t պահին հավասար է $V(t)$ ֆունկցիայի ածանցյալին՝

$$a(t) = V'(t):$$

Հիմնական տարրական ֆունկցիաների ածանցյալները.

$c'=0$ *կամայական* c *հաստատունի դեպքում,*

$\left(x^{\alpha}\right)'=\alpha\cdot x^{\alpha-1}$, *որտեղ* $a\in\mathbf{R}$, *մասնավորապես՝*

$$x'=1,\quad \left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}},\quad \left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}:$$

$\left(a^x\right)'=a^x\cdot\ln a$, *որտեղ* $a>0$, *մասնավորապես՝* $\left(e^x\right)'=e^x$,

$\left(\log_a x\right)'=\dfrac{1}{x\ln a}$, *որտեղ* $a>0$ *և* $a\neq 1$, *մասնավորապես՝*

$$\left(\ln x\right)'=\frac{1}{x},$$

$\left(\sin x\right)'=\cos x$, $\left(\cos x\right)'=-\sin x$, $\left(\operatorname{tg} x\right)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$, $\left(\operatorname{ctg} x\right)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$:

Ածանցման կանոններն են.

$\left(ku(x)\right)'=ku(x)'$,

$\left(u(x)\pm v(x)\right)'=u(x)'\pm v(x)'$,

$\left(u(x)v(x)\right)'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$,

$\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)'=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$, *եթե* $v(x)\neq 0$,

$\left(u(v(x))\right)'=u'(v(x))v'(x)$:

683. Ապացուցեք, որ հաջորդականությունն անվերջ փոքր է.

ա) $\dfrac{1}{\ln(n+1)}$, բ) $\dfrac{2^n+3^{-n}}{3^n+2^{-n}}$, գ) $\dfrac{\sin n}{\sqrt{n}}$:

684. Ապացուցեք, որ հաջորդականությունը սահմանափակ է.

ա) $\dfrac{n^3+102n}{n^3+\sin n}$, բ) $\dfrac{n^2-3n}{2^n}$, գ) $\dfrac{2\sin n}{1+\sin^2 n}$,

դ) $\dfrac{1+\operatorname{tg}^2 n}{1+\operatorname{ctg}^2 n}\cdot\operatorname{ctg}^2 n$, ե) $e^{-n}\ln n$, զ) $n^2\cdot 2^{-n}$:

685. Ապացուցեք, որ հաջորդականությունն անսահմանափակ է.

ա) $\dfrac{n^3-2}{n^2+55n}$, ➤բ) $\dfrac{3^n}{n^{30}}$, ➤գ) $\dfrac{n}{\ln^4 n}$:

686. Ապացուցեք, որ հաջորդականությունը մոնոտոն է.

ա) $\dfrac{n-1}{n+1}$, բ) $e^{-n}-e^n$, գ) $\dfrac{(n+2)!}{(n+2)^3}$:

➤**687.** Ապացուցեք, որ հաջորդականությունը մոնոտոն չէ.

ա) $\sin n$, բ) $n+2\cdot(-1)^n$, գ) $\dfrac{n!}{n^3}$:

* **688.** Կիրառելով մոնոտոն հաջորդականության զուգամիտության վերաբերյալ թեորեմը, ապացուցեք հաջորդականության զուգամիտությունը.

ա) $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}+\cdots+\dfrac{1}{n!}$, բ) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{4}+\cdots+\dfrac{n}{2^n}$, գ) $\dfrac{n!}{n^n}$:

689. Գտեք հաջորդականության սահմանը.

ա) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^7-7n}{n^8+6n}$, ➤բ) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n+\ln n}{n}$, ➤գ) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^7\cdot e^{-n}+5}{n^5+7e}$:

➤**690.** Տրված է $a_n=\dfrac{7n-7}{n+101}$ հաջորդականությունը:

ա) Ապացուցեք, որ $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=7$:

բ) Գտեք հաջորդականության ամենափոքր անդամը:

գ) Գտեք այն ամենափոքր թիվը, որից փոքր են հաջորդականության բոլոր անդամները:

դ) Գտեք հաջորդականության այն անդամների քանակը, որոնք դուրս են 7-ի 0,5-շրջակայքից:

Գտեք ֆունկցիայի ածանցյալը (691-699).

691. ա) $2\sqrt{x}-\dfrac{1}{x}+\sqrt[4]{x}$, բ) $0{,}8\sqrt[4]{x}-\dfrac{x^3}{0{,}3}+\dfrac{1}{5x^2}$:

692. ա) $\ln 2x+12x^5$, բ) $x^7+\ln 3x$:

693. ա) $e^x\left(x^2-2x+2\right)$, բ) $e^{2x}\left(x^3+1\right)$:

694. ա) $\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$, բ) $\dfrac{\cos x}{\ln 5x}$:

695. ա) $\dfrac{1}{x^2}+\operatorname{tg} 2x$, բ) $\dfrac{2}{\operatorname{ctg} 3x}-\dfrac{1}{x^2}$:

696. ա) $\sin 3x + 2^x$, բ) $\cos 4x + \log_2 x$:

697. ա) $\dfrac{\ln x - 1}{x}$, բ) $\dfrac{e^x - 1}{x^3}$:

➢**698.** ա) $\left(\sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x}\right)^3$, բ) $(\sin x + \cos x)^3$:

699. ա) $x^2 \sin x$, բ) $x^3 \operatorname{tg} x + e^{2x}$:

Գտեք f ֆունկցիայի ածանցյալն x_0 կետում (700-708).

700. ա) $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+1}$, $x_0 = 1$, բ) $f(x) = \dfrac{1-x}{x^2+3}$, $x_0 = 1$:

701. ա) $f(x) = \sqrt{2}\,\dfrac{x^2-2}{x^2+2}$, $x_0 = \sqrt{2}$, բ) $f(x) = x^2 + 3 + \dfrac{2x}{x+1}$, $x_0 = 1$:

702. ա) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1 + \sin x}{\cos x}$, $x_0 = 0$, բ) $f(x) = \dfrac{\cos x}{1 + \sin x}$, $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$:

703. ա) $f(x) = \dfrac{x^2+4}{e^x}$, $x_0 = 0$, բ) $f(x) = \dfrac{e^x + 3x}{\cos x}$, $x_0 = 0$:

704. ա) $f(x) = x^2 \ln x + \ln 3$, $x_0 = 1$, բ) $f(x) = \ln\left(6x - x^2\right)$, $x_0 = 2$:

➢**705.** ա) $f(x) = \sin^4 \dfrac{x}{2} - \cos^4 \dfrac{x}{2}$, $x_0 = \dfrac{5\pi}{6}$, բ) $f(x) = e^{\sin x} + e^{\cos x}$, $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$:

706. ա) $f(x) = \left(x^2 - 2x + 3\right)\sin 2x$, $x_0 = 0$,

բ) $f(x) = \left(x^2 + 3x + 15\right)\operatorname{tg} x$, $x_0 = 0$:

707. ա) $f(x) = \sqrt[4]{3 - 2x^2} + 3^x \dfrac{2}{\ln 3}$, $x_0 = 1$, բ) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x} \cdot \sqrt[4]{\dfrac{x}{e}}$, $x_0 = e$:

➢**708.** Գտեք a և b թվերը նշված պայմանների դեպքում.

ա) $f(x) = (a + b\sin x)(b + a\cos x)$, $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 14$, $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -10{,}5 \cdot \sqrt{2}$,

բ) $f(x) = a \operatorname{tg} x + b \operatorname{ctg} x$, $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 9$, $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 2$,

գ) $f(x) = \sqrt{ax + b}$, $f(2) = 3$, $f'(-2) = 1$:

Գտեք $s(t)$ օրենքով շարժվող մարմնի արագությունը և արագացումը t_0 պահին (709-710).

709. ա) $s(t) = t^3 + 6t + \sin \pi t$, $t_0 = 5$, բ) $s(t) = e^t - e^{-t}$, $t_0 = 3$,

710. ա) $s(t)=6t+t^{-3}$, $t_0=3$, բ) $s(t)=t^4+4\ln t$, $t_0=2$:

711. Երկու նյութական կետ շարժվում են

$$s_1=\frac{2}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2+6t+11 \text{ և } s_2(t)=\frac{2}{3}t^3-t^2+5t+6$$

օրենքներով, որտեղ ժամանակը չափվում է վայրկյաններով, իսկ ճանապարհը՝ մետրերով: Գտեք նյութական կետերի արագացումներն այն պահին, երբ նրանց արագությունները հավասար են:

Լուծեք հավասարումը (712-715).

712. $\cos^2 x-2f'(x)=\sin x\cdot f'(x)$, որտեղ $f(x)=\cos x$:

713. $f(x)+\sin 2x\cdot f'(x)=3f\left(\frac{\pi}{3}\right)$, որտեղ $f(x)=\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x$:

➢**714.** $\cos^2 x\cdot f'(x)+\sin 2x\cdot g'(x)=-2$, որտեղ $f(x)=\operatorname{tg}^2 x$, $g(x)=\operatorname{ctg} 2x$:

➢**715.** $f'(x)=g'(x)\cdot f(x)$, որտեղ $f(x)=x^2\cdot\sqrt{e^x}$, $g(x)=5\sqrt{x}$:

716. Գտեք $f'(x)>x$ անհավասարությանը բավարարող ամենամեծ ամբողջ թիվը, եթե $f(x)=-3x^2-7x+\pi$:

➢**717.** Լուծեք $f'(x)\le g'(x)$ անհավասարումը, որտեղ $f(x)=x^2+x^{-1}$, $g(x)=5x+x^{-1}$:

➢**718.** Ապացուցեք, որ տրված հավասարումը նշված հատվածում ունի արմատ.

ա) $x\ln x=1$, $[0;2]$, բ) $e^{x-1}\sin x=\sqrt{e}$, $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$,

գ) $3x\sin x+\cos x=4$, $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$:

* **719.** Ապացուցեք, որ տրված հավասարումը նշված հատվածում ունի առնվազն երկու արմատ.

ա) $3^x-7x\ln x=2$, $[1;4]$, բ) $4\cos x=x+2$, $[-2;2]$:

§7. Ածանցյալի կիրառություններ

$y=f(x)$ ֆունկցիայի ածանցյալն x_0 կետում հավասար է $(x_0, f(x_0))$ կետում ֆունկցիայի գրաֆիկի շոշափողի և աբսցիսների առանցքի կազմած անկյան տանգենսին:

$(x_0, f(x_0))$ կետում $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի շոշափողի հավասարումն է՝

$$y=f'(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0):$$

Եթե միջակայքի բոլոր կետերում $f'(x)>0$ $(f'(x)<0)$, ապա այդ միջակայքում ֆունկցիան աճող (նվազող) է:

Ֆունկցիայի որոշման տիրույթի ներքին կետն անվանում են կրիտիկական կետ, եթե այդ կետում ֆունկցիայի ածանցյալը զրո է կամ գոյություն չունի:

Ֆունկցիայի էքստրեմումի կետերը կրիտիկական կետեր են:

Եթե x_0 կետի վրայով ձախից աջ շարժվելիս ֆունկցիայի ածանցյալը փոխվում է դրականից բացասականի, ապա x_0-ն մաքսիմումի կետ է, իսկ եթե փոխվում է բացասականից դրականի, ապա x_0-ն մինիմումի կետ է:

Եթե $f'(x_0)=0$ և $f''(x_0)<0$, ապա x_0-ն f ֆունկցիայի մաքսիմումի կետ է:

Եթե $f'(x_0)=0$ և $f''(x_0)>0$, ապա x_0-ն f ֆունկցիայի մինիմումի կետ է:

$[a;b]$ միջակայքում անընդհատ f ֆունկցիայի մեծագույն կամ փոքրագույն արժեքը գտնելու համար անհրաժեշտ է.

1. գտնել f ֆունկցիայի կրիտիկական կետերը,

2. այդ կետերից ընտրել այն x_1, x_2,..., x_k կետերը, որոնք պատկանում են $[a;b]$ միջակայքին,

3. հաշվել $f(a)$, $f(b)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$,..., $f(x_k)$ արժեքները,

4. ստացված արժեքներից ամենամեծը կլինի ֆունկցիայի մեծագույն, իսկ ամենափոքրը՝ փոքրագույն արժեքը:

720. Գտեք f ֆունկցիայի գրաֆիկին նրա x_0 աբսցիս ունեցող կետով տարված շոշափողի և աբսցիսների առանցքի կազմած անկյունը.

ա) $y=\frac{1}{2}x^2$, $x_0=\frac{\sqrt{3}}{3}$, բ) $y=5-0{,}5x^2$, $x_0=-\sqrt{3}$,

գ) $f(x)=\sqrt{4x^2+3}$, $x_0=1{,}5$, դ) $f(x)=x^2\cdot e^{x-2}+\frac{9}{x-1}$, $x_0=2$:

721. Գտեք այն կետի աբսցիսը, որով $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկին տարված շոշափողն աբսցիսների առանցքի հետ կազմում է φ անկյուն.

ա) $f(x)=\frac{x+2}{x-2}$, $\varphi=135^\circ$, բ) $f(x)=\sqrt{x}$, $\varphi=45^\circ$:

➢**722.** Գտեք a-ն, եթե x_0 աբսցիս ունեցող կետում $f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկին տարած շոշափողն OX առանցքի հետ կազմում է φ անկյուն.

ա) $f(x)=\frac{x^3+3x}{a}+\frac{a}{x-2}$, $x_0=3$, $\varphi=135^\circ$,

բ) $f(x)=\sqrt{ax^2+30}+a^2$, $x_0=1{,}5$, $\varphi=120^\circ$, գ) $f(x)=e^x(x+3)^2+\dfrac{a}{x+2}$, $x_0=-1$, $\varphi=45^\circ$,

դ) $f(x)=\left(\sqrt{a}x^2+\sqrt{12}x\right)\cdot\ln\sqrt[4]{x+3}$, $x_0=-2$, $\varphi=60^\circ$:

Գտեք f ֆունկցիայի գրաֆիկին նրա x_0 աբսցիս ունեցող կետով տարված շոշափողի հավասարումը (723-726).

723. ա) $f(x)=x^2-5x+7$, $x_0=2$, բ) $f(x)=2+x-x^2$, $x_0=2$:

724. ա) $f(x)=x^4-2x^2$, $x_0=0{,}5$, բ) $f(x)=\sqrt{x}+1$, $x_0=4$:

725. ա) $f(x)=3e^x+3e$, $x_0=1$, բ) $f(x)=\dfrac{e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}}{2}$, $x_0=2\ln 2$:

726. ա) $f(x)=\sin(x+\pi)+1$, $x_0=\dfrac{\pi}{4}$, բ) $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$, $x_0=0$:

Գտեք f ֆունկցիայի գրաֆիկի այն կետերի աբսցիսները, որոնցում տարված շոշափողը զուգահեռ է նշված ուղղին (727-728).

727. ա) $f(x)=x^2+4x+7$, $y=2x+5$, բ) $f(x)=x^3+x-2$, $y=4x+5$:

728. ա) $f(x)=2e^{-x}+1$, $y=-2x+4$,

բ) $f(x)=8\sin x+\sqrt{27}\,\mathrm{tg}\,x+x$, $y=x+3$, $x_0\in[-\pi;0]$:

➢**729.** f ֆունկցիայի գրաֆիկին նրա x_1 և x_2 աբսցիս ունեցող կետերով տարված շոշափողները զուգահեռ են: Գտնել a-ն, եթե՝

ա) $f(x)=(x^2-1)(x+a)$, $x_1=-2$, $x_2=4$,

բ) $f(x)=3x^2-\dfrac{a}{x-1}$, $x_1=2$, $x_2=3$:

Գտեք f ֆունկցիայի գրաֆիկին նրա x_0 աբսցիս ունեցող կետով տարված շոշափողով և կոորդինատային առանցքներով սահմանափակված պատկերի մակերեսը (730-731).

➢**730.** ա) $f(x)=\dfrac{1-x^3}{x^2}$, $x_0=-1$, բ) $f(x)=\dfrac{x}{2x-1}$, $x_0=1$:

➢**731.** ա) $f(x)=\dfrac{2}{x}-\dfrac{8}{x^2}+x$, $x_0=2$, բ) $f(x)=\sqrt{2x^2-4}$, $x_0=2$:

➢ **732.** a պարամետրի ո՞ր արժեքների դեպքում $y=13-16x$ ուղիղը կշոշափի $f(x)=\dfrac{a+x^2}{x^2}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:

➢ **733.** p պարամետրի ո՞ր արժեքների դեպքում $y=x-1$ ուղիղը կշոշափի

$f(x)=x^2+p(x-1)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:

➢ **734.** a պարամետրի ո՞ր արժեքների դեպքում $y=ax-5$ ուղիղը կշոշափի $f(x)=3x^2-4x-2$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:

➢ **735.** Գտեք b-ն, եթե $y=-7+4x$ ուղիղը շոշափում է $f(x)=-x^2+10x+b$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:

➢ **736.** Գտեք a-ն և b-ն, եթե $y=7x-2$ ուղիղը $(1;5)$ կետում շոշափում է $f(x)=ax^2+bx+1$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:

* **737.** Գտեք a-ն, եթե $f(x)=2x^2+3x+5$ ֆունկցիայի գրաֆիկին $x_0=-2$ աբսցիս ունեցող կետով տարված շոշափողը շոշափում է նաև $g(x)=-x^2+4x+a$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:

➢ **738.** Գտեք ֆունկցիայի կրիտիկական կետերը.

ա) $f(x)=\sqrt{2x-4}+\sqrt{11-3x}$, բ) $f(x)=\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x-3)^2}$,

գ) $f(x)=\sqrt{24+2x-x^2}+\dfrac{(x-1)^2}{6}$:

➢ **739.** Գտեք a-ն այնպես, որ f ֆունկցիայի համար x_0-ն լինի կրիտիկական կետ.

ա) $f(x)=\dfrac{x^2+x+a}{x+1}$, $x_0=2$, բ) $f(x)=\sqrt{a+4x}+\sqrt{a-2x}$, $x_0=3$:

Գտեք ֆունկցիայի մոնոտոնության միջակայքերը (740-743).

740. ա) $y=x^3-3x^2+6$, բ) $y=-x^3-6x^2+15x+4$:

741. ա) $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{3-x^2}}$, բ) $y=x(1+\sqrt{x})$:

742. ա) $y=x-\ln x$, բ) $y=x^2-4x-2\ln(x-2)+e$:

743. ա) $y=9^{-x}+3^x$, բ) $y=6x+e^{-4x}$:

➢ **744.** Գտեք m-ի այն ամբողջ արժեքը, որի դեպքում $y=3x^2+10mx+9$ ֆունկցիան $[7;9]$ միջակայքում մոնոտոն չէ:

➢ **745.** Գտեք c պարամետրի այն արժեքը, որի դեպքում՝

ա) $f(x)=4(1+\sqrt{x})-x$ և $g(x)=3(1-x^2)-cx$ ֆունկցիաների նվազման միջակայքերը համընկնում են,

բ) $f(x)=\dfrac{4x-6}{e^x}$ և $g(x)=cx-x^2+3$ ֆունկցիաների աճման միջակայքերը համընկնում են:

Գտեք ֆունկցիայի էքստրեմումի կետերը և էքստրեմումները (746-749).

746. ա) $y=\dfrac{x^3}{3}-x^2-3x$, բ) $y=x^4-10x^2+9$:

747. ա) $y=xe^{-3x}$, բ) $y=(1-x)e^{-2x}$:

748. ա) $y=\left(\dfrac{2x-1}{x}\right)^2$, բ) $y=\dfrac{(x-2)^2}{x^2+4}$:

749. ա) $y=-x^2+2\ln x$, բ) $y=-x^3+3\ln x$:

Գտեք ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները նշված միջակայքում (750-757).

750. ա) $f(x)=2x^3-3x^2-12x-2$, $[-2;1]$, բ) $f(x)=x^3-3x^2-5$, $[1;4]$:

751. ա) $f(x)=(x+1)^2(x-3)$, $[-2;3]$, բ) $f(x)=x^2(x-2)$, $[1;2]$:

752. ա) $f(x)=2\sqrt{x}-x$, $[0;9]$, բ) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}(x-1)$, $[0{,}001;1]$:

753. ա) $f(x)=\dfrac{x}{x-x^2-1}$, $[-2;2]$, բ) $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2}{x-2}$, $[-1;1]$:

754. ա) $f(x)=\sqrt{-x^2+6x-5}$, $[1;4]$, բ) $f(x)=\sqrt{x^2-6x+16}$, $[1;6]$:

➢**755.** ա) $f(x)=x+\sin 2x$, $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, բ) $f(x)=5\sin x+\cos 2x$, $[0;\pi]$:

➢**756.** ա) $f(x)=4x+3\operatorname{ctg} x$, $\left[\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{2}\right]$, բ) $f(x)=\cos^2\dfrac{x}{2}\sin x$, $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$:

➢**757.** ա) $f(x)=\ln(2x)-6x^2+11x$, $\left[\dfrac{1}{2};2\right]$,

բ) $f(x)=x\ln 5-x\ln x$, $\left[\dfrac{5}{3};2{,}5\right]$:

➢**758.** Գտեք ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները.

ա) $f(x)=\dfrac{8x}{x^2+4}$, բ) $f(x)=\dfrac{18(x+2)}{x^2+4x+13}$,

գ) $f(x)=\sqrt{9-x}+\sqrt{2x+6}$, դ) $f(x)=3x+4\sqrt{25-x^2}$:

• **759.** Տրված է $f(x)=x^3-12x+5$ ֆունկցիան:

ա) Գտեք $f'(x)$-ը:

1) $3x^2-12$, 2) $2x^2-12$, 3) $3x-12$, 4) $3x^2+5$:

բ) Գտեք $f''(7)$-ը:

1) 28, 2) 3, 3) 42, 4) 21:

գ) Գտեք ֆունկցիայի մաքսիմումի կետերը:

1) 2, 2) – 2, 3) 2 և – 2, 4) այդպիսիք չկան:

դ) Գտեք ֆունկցիայի գրաֆիկին նրա $x_0=3$ աբսցիս ունեցող կետում տարված շոշափողի հավասարումը:

1) $y=15x-41$, 2) $y=15x-49$, 3) $y=15x-4$, 4) $y=15x+4$:

➢760. Տրված է $f(x)=2^x+2^{-x}$ ֆունկցիան: Հետևյալ ասույթներից որո՞նք են ճշմարիտ.

ա) $f(x)+f(-x)=2f(x)$:

բ) Ֆունկցիան կրիտիկական կետ չունի:

գ) $[1;10]$ միջակայքում ֆունկցիան աճում է:

դ) $[-3;2]$ միջակայքում ֆունկցիան աճում է:

ե) Գոյություն ունի ֆունկցիայի գրաֆիկի միայն մի կետ, որով տարած շոշափողը զուգահեռ է աբսցիսների առանցքին:

զ) $f''(x)=f(x)\ln 2$:

*** 761.** a պարամետրի ո՞ր արժեքների դեպքում $f(x)=3ax^2-12x+a^2-11$ ֆունկցիայի մեծագույն արժեքը կլինի 2:

➢762. p պարամետրի ո՞ր արժեքների դեպքում $x_0=7$ կետը կլինի $f(x)=px^2+$ $+(4p^2-8)x+11$ ֆունկցիայի մինիմումի կետ:

*** 763.** a պարամետրի ո՞ր արժեքների դեպքում $x^2+2ax+2a^2+4a+3=0$ հավասարման արմատների քառակուսիների գումարը կլինի մեծագույնը:

➢764. 36-ը ներկայացրեք երկու գումարելիների տեսքով այնպես, որ նրանց քառակուսիների գումարը լինի փոքրագույնը:

➢765. 64-ը ներկայացրեք երկու գումարելիների տեսքով այնպես, որ նրանցից առաջինի և երկրորդի քառակուսու գումարը լինի փոքրագույնը:

➢766. Գտեք $\sqrt{2}$ սրունքով և մեծագույն մակերեսով հավասարասրուն եռանկյան հիմքը:

➢767. Գտեք 30° սուր անկյունով, 6 սմ պարագծով և մեծագույն մակերեսով ուղղանկյուն սեղանի հիմքերի գումարը:

➢768. Գտնել 8 սմ ներքնաձիգով և 30° սուր անկյունով ուղղանկյուն եռանկյանը ներգծած մեծագույն մակերեսով ուղղանկյան մեծ կողմը, եթե ուղղանկյան երկու գագաթները ներքնաձիգի վրա են:

§8. Տեքստային խնդիրներ

• **769.** Գնացքը, ըստ չվացուցակի, A-ից B 600 կմ ճանապարհը պետք է անցներ 10 ժամում: Սակայն շարժումն սկսելուց 4 ժ անց գնացքը 1 ժ կանգնեց C կայարանում, որից հետո, ավելացնելով նախատեսված արագությունը, ժամանակին հասավ B:

ա) Գտեք գնացքի արագությունը՝ ըստ չվացուցակի:

1) 50 կմ/ժ, 2) 60 կմ/ժ, 3) 70 կմ/ժ, 4) 80 կմ/ժ:

բ) Գտեք AC հեռավորությունը:

1) 200 կմ, 2) 240 կմ, 3) 280 կմ, 4) 320 կմ:

գ) Ի՞նչ արագություն ուներ գնացքը CB ճանապարհահատվածում:

1) 75 կմ/ժ, 2) 64 կմ/ժ, 3) 68 կմ/ժ, 4) 72 կմ/ժ:

դ) Ի՞նչ ժամանակում գնացքն անցավ ճանապարհի առաջին կեսը:

1) 4 ժ 5 օր, 2) 5 ժ 45 ր, 3) 5 ժ 50 ր, 4) 5 ժ:

• **770.** Բանվորը 14 ժամում շարել էր 24 մ^2 պատ, ընդ որում, առաջին 12 մ^2-ն շարելուց հետո նրա արտադրողականությունն ընկել էր 25 %-ով:

ա) Որքա՞ն ժամանակ էր ծախսել բանվորը երկրորդ 12 մ^2-ն շարելու համար, եթե առաջին 12 մ^2-ն շարելու համար ծախսել էր T ժամ:

1) $\frac{3T}{4}$, 2) $\frac{T}{4}$, 3) $\frac{4T}{3}$, 4) $\frac{5T}{4}$:

բ) Ի՞նչ ժամանակում շարեց բանվորն առաջին 12 մ^2-ն:

1) 8 ժամ, 2) 6 ժամ, 3) 7 ժամ, 4) 7,5 ժամ:

գ) Քանի՞ քառակուսի մետր պատ շարեց բանվորն առաջին 2 ժամում:

1) 3, 2) 4, 3) $\frac{12}{7}$, 4) 3,75:

դ) Քանի՞ քառակուսի մետր պատ շարեց բանվորն առաջին 8 ժամում:

1) 16, 2) 12, 3) 15, 4) 14:

• **771.** Երկու համաձուլվածքներից առաջինում ցինկը և պղինձը $1:4$, իսկ երկրորդում՝ $2:3$ հարաբերությամբ են:

ա) Քանի՞ կիլոգրամ ցինկ կա երկրորդ համաձուլվածքի 10 կգ-ի մեջ:

1) 8, 2) 2, 3) 4, 4) 6:

բ) Առաջին համաձուլվածքի քանի՞ տոկոսն է պղինձ:

1) 20, 2) 80, 3) 40, 4) 60:

գ) Ցինկի քանի՞ տոկոսանոց համաձուլվածք կստացվի, եթե առաջին համաձուլվածքի 10 կգ-ը ձուլեն 10 կգ ցինկի հետ:

1) 20, 2) 80, 3) 40, 4) 60:

դ) Ի՞նչ հարաբերությամբ է պետք վերցնել այդ համաձուլվածքներից՝ ցինկի և պղնձի $7:13$ հարաբերությամբ համաձուլվածք ստանալու համար:

1) $1:3$, 2) $3:1$, 3) $2:3$, 4) $3:2$:

• **772.** a և b բնական թվերի գումարը 1244 է: Եթե a-ին աջից կցագրենք 3, իսկ b-ի վերջին թվանշանը՝ 2-ը դեն նետենք, կստանանք իրար հավասար թվեր:

ա) Ի՞նչ թվանշանով է վերջանում a-ն:

1) 12, 2) 2, 3) 0, 4) 4:

բ) Հետևյալ բանաձևերից որո՞վ է արտահայտվում a-ին աջից 3 կցագրելը:

1) $10a+3$, 2) $a\cdot 3$, 3) $a+3$, 4) $3a+10$:

գ) Նշված բանաձևերից որո՞վ է արտահայտվում b-ի վերջին թվանշանը՝ 2-ը դեն նետելը:

1) $b-2$, 2) $b:2$, 3) $10b-2$, 4) $(b-2):10$:

դ) Գտնել b-ն:

1) 12, 2) 232, 3) 1122, 4) 1232:

• **773.** Պողոսը, Պետրոսը և Մարտիրոսն ունեն ինչ-որ քանակով գնդակներ: Եթե Պետրոսը 2 գնդակ տա Պողոսին, ապա Պողոսը կունենա այնքան գնդակ, որքան Պետրոսը, իսկ եթե Պողոսը մեկ գնդակ նվիրի Մարտիրոսին, ապա Մարտիրոսը 5 գնդակ պակաս կունենա, քան Պետրոսը: Երբ Կիրակոսն իր ունեցած 11 գնդակներն ավելացրեց Պողոսի, Պետրոսի և Մարտիրոսի ունեցած գնդակներին և հավասարապես բաժանեց չորսի միջև, յուրաքանչյուրին հասավ 10 գնդակ:

ա) Պետրոսի գնդակները Պողոսի գնդակներից քանիսո՞վ են ավելի:

1) 6, 2) 2, 3) 13, 4) 4:

բ) Մարտիրոսի գնդակները Պետրոսի գնդակներից քանիսո՞վ են պակաս:

1) 4, 2) 2, 3) 6, 4) 7:

գ) Պողոսը Մարտիրոսից քանի՞ գնդակ ավելի ուներ:

1) 2, 2) 4, 3) 6, 4) 9:

դ) Քանի՞ գնդակ ուներ Պողոսը:

1) 13, 2) 7, 3) 6, 4) 9:

774. Երկու խողովակ միասին ավազանը լցնում են 12 րոպեում: Առաջինը կարող է ավազանը լցնել 20 րոպեում: Քանի՞ րոպեում կլցնի ավազանը երկրորդ խողովակը:

➢**775.** Երկու տրակտոր որոշակի ժամանակում պետք է ինչ-որ աշխատանք կատարեին: Սակայն անբարենպաստ եղանակի պատճառով տրակտորներից մեկը չաշխատեց, իսկ մյուսի արտադրողականությունն ընկավ 20 %-ով: Քանի՞ անգամ ավելի ժամանակ կպահանջվի աշխատանքը կատարելու համար:

776. Երկու բանվոր միասին աշխատելով՝ առաջադրանքը կատարում են 10 օրում: Քանի՞ օրում կկատարի առաջադրանքը բանվորներից յուրաքանչյուրը, եթե առաջինը երկու անգամ ավելի արագ է աշխատում:

777. Ավազանը երկրորդ խողովակով լցնելու համար պահանջվում է 3 ժամ պակաս ժամանակ, քան առաջինով լցնելու համար: Առաջին խողովակը բացելուց 5,75 ժամ հետո բացեցին երկրորդը, և ևս 10 ժամ անց ավազանը լցվեց: Քանի՞ ժամում կլցնի ավազանը միայն առաջին խողովակը:

➢**778.** Երեք բրիգադ միասին աշխատելով ճանապարհը կարող են նորոգել 8 օրում: Այդ նույն աշխատանքը կատարելու համար երկրորդ բրիգադին անհրաժեշտ է 8 օր ավելի ժամանակ, քան առաջինին և երկու անգամ քիչ՝ քան երրորդին: Քանի՞ օրում կնորոգի ճանապարհը բրիգադներից յուրաքանչյուրը:

779. Խրամատը փորելու համար էքսկավատորին անհրաժեշտ է 10 ժամ: 8 ժամ աշխատելուց հետո մնաց փորելու 50 մ: Քանի՞ մետր էր խրամատի երկարությունը:

780. Տրակտորիստների բրիգադը վարեց 300 հա հող: Եթե բրիգադում 3 տրակտոր ավելի լիներ, ապա այդ նույն աշխատանքը կավարտեին 6 օր շուտ: Քանի՞ տրակտոր կար բրիգադում, եթե մեկ տրակտորն օրական վարում է 15 հա:

*** 781.** Չորս միատեսակ պոմպ 11 ժամ միասին աշխատելով՝ լցրեցին առաջին տանկերը և երկրորդի (այլ տարողությամբ) մեկ երրորդը: Եթե երեք պոմպը լցնեին առաջին տանկերը, հետո նրանցից մեկը լցներ երկրորդի մեկ չորրորդը, ապա կպահանջվեր 18 ժամ: Քանի՞ ժամում կլցնեն երկրորդ տանկերը երեք պոմպը:

➢**782.** Երեք միատեսակ տրակտոր նախ վարեցին առաջին դաշտը, այնուհետև նրանցից երկուսը վարեցին երկրորդ (այլ չափի) դաշտը: Ամբողջ աշխատանքը տևեց 12 ժամ: Եթե երեք տրակտորը կատարեին ամբողջ աշխատանքի կեսը, այնուհետև նրանցից մեկն ավարտեր աշխատանքը, ապա կտևեր 20 ժամ: Քանի՞ ժամում առաջին դաշտը կվարեն երկու տրակտորը:

783. Խառատը պետք է մշակեր 80 դետալ: Օրական մեկ դետալ ավելի մշակելով՝ նա աշխատանքն ավարտեց ժամկետից 4 օր շուտ: Օրական քանի՞ դետալ պետք է մշակեր խառատը:

784. Ծեփագործների բրիգադը պետք է սվաղեր 560 մ² պատ, սակայն երկու ծեփագործ աշխատանքի դուրս չեկավ: Քանի՞ ծեփագործ կար բրիգադում, եթե յուրաքանչյուր աշխատող ստիպված եղավ սվաղել 14 մ² պատ:

➢**785.** Պատշարների առաջին և երկրորդ բրիգադները միասին տան պատերը շարում են 50 օրում: Առաջին և երրորդ բրիգադները միասին տան պատերը նույնպես շարում են 50 օրում: Իսկ երկրորդ և երրորդ բրիգադները միասին տան պատերը շարում են 100 օրում: Քանի՞ օրում կշարեն տան պատերը երեք բրիգադը միասին:

786. Երկու պատշար միասին պատը շարեցին 20 օրում: Քանի՞ օրում կշարեր այդ նույն պատը յուրաքանչյուր պատշարը, եթե առաջինին կպահանջվեր 9 օր ավելի, քան երկրորդին:

➢**787.** Մեքենաների թողարկման պատվերը գործարանը պետք է կատարեր 20 օրում: Օրական պլանը գերակատարելով 2 մեքենայով՝ գործարանը պատվերը կատարեց 18 օրում: Քանի՞ մեքենա թողարկեց գործարանը:

788. Սուզանավը, շարժվելով 15,6 կմ/ժ արագությամբ, տեղ հասավ 2 ժամ 15 րոպեում: Ի՞նչ արագությամբ պետք է շարժվեր սուզանավը 45 րոպե շուտ հասնելու համար:

➢**789.** Ճանապարհի մեկ երրորդն ավտոմեքենան անցավ 40 կմ/ժ արագությամբ, իսկ մնացածը՝ 70 կմ/ժ արագությամբ: Գտնել ավտոմեքենայի միջին արագությունը:

➢**790.** Երկու ավտոմեքենա A և B քաղաքներից միաժամանակ հանդիպակաց շարժվելով՝ հանդիպեցին 6 ժամ անց: AB ճանապարհի 2/5-ն անցնելու համար առաջին ավտոմեքենային անհրաժեշտ է 2 ժամ ավելի, քան երկրորդին՝ BA ճանապարհի 2/15-ն անցնելու համար: Որքա՞ն ժամանակ է անհրաժեշտ յուրաքանչյուր ավտոմեքենային A և B քաղաքների միջև ճանապարհն անցնելու համար:

➢**791.** A և B քաղաքներից միաժամանակ իրար ընդառաջ շարժվեցին երկու մեքենա: Հանդիպումից 2 ժամ անց առաջինը հասավ B, իսկ հանդիպումից 1,125 ժամ անց երկրորդը հասավ A: Գտեք երկրորդ մեքենայի արագությունը, եթե A և B քաղաքների հեռավորությունը 210 կմ է:

792. Մոտորանավակը, որի արագությունը կանգնած ջրում 15 կմ/ժ է, հոսանքի ուղղությամբ անցնելով 36 կմ, հանդիպեց իրենից 10 ժամ շուտ նույն նավահանգստից դուրս եկած լաստին: Գտեք հոսանքի արագությունը:

793. Գնացքը, անցնելով 420 կմ երկարությամբ ճանապարհի 4/7-ը, հարկադրաբար կանգնեց 15 րոպե, այնուհետև, մեծացնելով արագությունը 10 կմ/ժ-ով, ժամանակին տեղ հասավ: Գտնել գնացքի սկզբնական արագությունը:

➢**794.** Հեծանվորդի ճանապարհորդությունը A-ից B տևեց 2 ժամ: B-ից A վերադառնալիս առաջին 8 կիլոմետրն անցնելով նույն արագությամբ, իսկ մնացած մասում արագությունը մեծացնելով 2 կմ/ժ-ով, հեծանվորդը ծախսեց 10 րոպե քիչ ժամանակ, քան A-ից B գնալիս: Գտնել A-ից B հեռավորությունը:

795. Ջերմանավը 10 կմ հոսանքի ուղղությամբ և 8 կմ հոսանքին հակառակ անցնում է 3 ժամում: Գտնել ջերմանավի արագությունը կանգնած ջրում, եթե հոսանքի արագությունը 3 կմ/ժ է:

796. Մոտորանավակը 5 ժամում անցավ 45 կմ հոսանքի ուղղությամբ և 22 կմ՝ հոսանքին հակառակ: Գտնել մոտորանավակի արագությունը կանգնած ջրում, եթե հոսանքի արագությունը 2 կմ/ժ է:

797. Ջերմանավը հոսանքի ուղղությամբ A-ից B 132 կիլոմետրն անցավ 6 ժամում: Քանի՞ ժամում ջերմանավը B-ից կհասնի A, եթե հոսանքի արագությունը 3 կմ/ժ է:

798. Առաջին ճանապարհորդը հեծանիվով 16 կմ/ժ արագությամբ 1,5 ժամ գնալով՝ 1,5 ժամ դադար է առնում և շարունակում ճանապարհը նույն արագությամբ: Նրա դուրս գալուց 4 ժամ անց նույն տեղից մեքենայով շարժվում է երկրորդ ճանապարհորդը՝ 56 կմ/ժ արագությամբ: Ի՞նչ ճանապարհ կանցնեն նրանք մինչև հանդիպելը:

➤**799.** Ճանապարհորդը ճանապարհի 5/8-ն անցավ ավտոմեքենայով, իսկ մնացած մասը՝ մոտորանավակով: Մոտորանավակի արագությունը 20 կմ/ժ-ով փոքր է ավտոմեքենայի արագությունից: Ավտոմեքենայով ճանապարհորդն անցավ 15 ր-ով ավելի, քան մոտորանավակով: Գտնել ավտոմեքենայի և մոտորանավակի արագությունները, եթե ամբողջ ճանապարհը 160 կմ է:

➤**800.** Հեծանվորդը յուրաքանչյուր րոպեում անցնում է 500 մ պակաս ճանապարհ, քան մոտոցիկլիստը և այդ պատճառով 120 կմ ճանապարհին ծախսում է 2 ժամ ավելի ժամանակ: Գտնել նրանց արագությունները:

801. Սար բարձրանալիս ճանապարհորդն առաջին ժամում անցնում է 600 մ, իսկ հաջորդ յուրաքանչյուր ժամում՝ 10 մ պակաս, քան նախորդում: Քանի՞ ժամում ճանապարհորդը կանցնի 3450 մ:

802. Արամը, ծախսելով 2,5 ժամ, ամառանոց է գնում էլեկտրագնացքով և վերադառնում ավտոբուսով: Եթե նա ամառանոց գնա և վերադառնա էլեկտրագնացքով, կպահանջվի 2 ժամ: Որքա՞ն ժամանակում Արամն ամառանոց կգնա և կվերադառնա ավտոբուսով:

➤**803.** Միաժամանակ A-ից B ուղևորվեց ճեպընթացը և B-ից A՝ ապրանքատար գնացքը: Ուղևորությունն սկսելուց 5 ժամ 20 րոպե անց նրանք հանդիպեցին: Որքա՞ն ժամանակ ծախսեց ուղևորության համար նրանցից յուրաքանչյուրը, եթե ապրանքատարը A հասավ 8 ժամ ուշ, քան ճեպընթացը՝ B:

804. Երկու կետ շարժվում են 1,2 մ երկարությամբ շրջանագծով: Եթե նրանք շարժվեն միևնույն ուղղությամբ, ապա կհանդիպեն 60 վայրկյանը մեկ, իսկ տարբեր ուղղություններով շարժվելիս՝ 15 վայրկյանը մեկ: Գտնել կետերի արագությունները:

➤**805.** Երկու դահուկորդ մեկնարկեցին նույն կետից՝ 6 րոպե տարբերությամբ: Երկրորդ դահուկորդը հասավ առաջինին մեկնակետից 2 կմ հեռավորությամբ: Անցնելով ևս 5 կմ՝ երկրորդ դահուկորդը շրջվեց և հանդիպեց առաջինին շրջման կետից 1 կմ հեռավորությամբ: Գտնել դահուկորդների արագությունները:

806. Որքա՞ն ջուր պետք է ավելացնել 20 կգ 5 %-անոց աղի լուծույթին, որպեսզի ստացվի 4 %-անոց աղի լուծույթ:

807. Պղնձի և անագի համաձուլվածքը պարունակում է 45 % պղինձ: Որքա՞ն անագ պետք է ավելացնել 10 կգ համաձուլվածքին, որպեսզի պղնձի պարունակությունը դառնա 40 %:

808. Ի՞նչ հարաբերությամբ պետք է խառնել աղաթթվի 20 և 40 տոկոսանոց լուծույթները 25 տոկոսանոց լուծույթ ստանալու համար:

809. Ի՞նչ հարաբերությամբ պետք է խառնել ծծմբաթթվի 30 և 50 տոկոսանոց լուծույթները 45 տոկոսանոց լուծույթ ստանալու համար:

810. Երկու համաձուլվածքներում պղինձը և ցինկը հարաբերում են ինչպես 5:2 և 3:4: Ի՞նչ հարաբերությամբ պետք է խառնել այդ համաձուլվածքները, որպեսզի նոր համաձուլվածքում պղնձի և ցինկի հարաբերությունը լինի 1:1:

811. Մի հանքաքարի մեջ երկաթի պարունակությունը 72 % է, իսկ մյուսում՝ 58 %: Ի՞նչ հարաբերությամբ պետք է խառնել այդ հանքաքարերը, որպեսզի խառնուրդում երկաթի պարունակությունը լինի 62 %:

812. Համաձուլվածքներից մեկը պարունակում է 20 % պղինձ, իսկ մյուսը՝ 30 %: Որքա՞ն պետք է վերցնել յուրաքանչյուր համաձուլվածքից 27 % պղինձ պարունակող 10 կգ համաձուլվածք ձուլելու համար:

*** 813.** Երբ աղի լուծույթին ավելացրեցին 200 գ ջուր, աղի խտությունն ընկավ 1,5 անգամ: Գտնել լուծույթի սկզբնական քաշը:

814. Յորենի և գարու ալյուրների խառնուրդը պարունակում է 55 % գարու ալյուր: Եթե այդ խառնուրդին ավելացնենք 36 կգ գարու ալյուր, վերջինիս պարունակությունը խառնուրդում կհասնի 75 %-ի: Գտնել խառնուրդի սկզբնական քաշը:

815. Ծովի ջուրը պարունակում է 5 % աղ: Որքա՞ն մաքուր ջուր պետք է ավելացնել 60 կգ ծովի ջրին, որպեսզի ստացված խառնուրդում լինի 3 % աղ:

*** 816.** Սպիրտի 10%-անոց լուծույթով լցված անոթի 1/3-ը դատարկեցին և լցրեցին այնքան ջուր, որ լցվեց անոթի 5/6-ը: Սպիրտի քանի՞ տոկոսանոց լուծույթ ստացվեց:

817. Գտնել թիվը, որի 84 %-ը հավասար է 80-ի 25 %-ի և 20-ի 5 %-ի գումարին:

818. Առաջին թիվը փոքր է երկրորդից 90 %-ով: Երկրորդն առաջինից քանի՞ տոկոսով է մեծ:

819. 1000000 դրամ արժողությամբ հեռուստացույցը թանկացավ 6 %-ով, այնուհետև էժանացավ 8 %-ով և դարձյալ թանկացավ 2 %-ով: Գտնել հեռուստացույցի վերջնական գինը:

820. Առաջին ուղևորության համար ծախսվեց ավտոմեքենայի բաքում եղած բենզինի 10 %-ը, երկրորդ ուղևորության ժամանակ՝ մնացածի 25 %-ը: Դրանից հետո բաքում սկզբնականի համեմատ 13 լ պակաս բենզին մնաց: Որքա՞ն բենզին կար բաքում նախքան առաջին ուղևորությունը:

*** 821.** Հարստացուցիչ ֆաբրիկա ուղարկվող հանքանյութը պարունակում է 9 % երկաթ: Վերամշակումից հետո հարստացված հանքանյութը պարունակում է 42 % երկաթ, իսկ թափոնը՝ 2 %: Հանքանյութի քանի՞ տոկոսն է թափոն դառնում:

822. Նույն տոկոսով երկու հաջորդական էժանացումներից հետո 40000 դրամ արժողությամբ ապրանքը դարձավ 32400 դրամ: Ամեն անգամ քանի՞ տոկոսով էին էժանացնում ապրանքը:

823. Երկու թվերի գումարը 24 է: Գտնել այդ թվերից փոքրը, եթե դրանցից մեկի 35 տոկոսը հավասար է մյուսի 85 տոկոսին:

824. Գնացքը AB ճանապարհն անցնում է 10,5 ժամում: Քանի՞ ժամում այն կանցնի նույն ճանապարհը, եթե արագությունը մեծացնի 20 տոկոսով:

825. Թարմ սունկը պարունակում է 90 % ջուր, իսկ չորացրածը՝ 12 %: Որքա՞ն չորացրած սունկ կստացվի 22 կգ թարմ սնկից:

826. Ուսանողը երկու գրքի համար վճարեց 6000 դրամ: Եթե առաջին գիրքը լիներ 25 տոկոսով էժան, իսկ երկրորդը՝ 50 տոկոսով թանկ, ապա երկու գրքի գինը կլիներ նույնը: Որքա՞ն արժեր յուրաքանչյուր գիրքը:

➢**827.** Քանի՞ տոկոսով կմեծանա երկու թվերի արտադրյալը, եթե առաջինը մեծացնենք 20 տոկոսով, իսկ երկրորդը՝ 40 տոկոսով:

➢**828.** Երկու թվերի գումարը 50 տոկոսով մեծ է նրանց տարբերությունից: Քանի՞ տոկոսով է մեծ այդ թվերի քառակուսիների գումարն այդ թվերի արտադրյալից:

➢**829.** Եռանիշ թվի թվանշանների գումարը 11 է, իսկ թվանշանների քառակուսիների գումարը՝ 45: Եթե այդ թվից հանենք 198, կստացվի նույն թվանշաններով, բայց հակառակ կարգով գրված թիվը: Գտնել եռանիշ թիվը:

➢**830.** Գտնել երկնիշ թիվ, որի միավորների թվանշանը երկուսով մեծ է տասնավորների թվանշանից, իսկ այդ թվի ու նրա թվանշանների գումարի արտադրյալը 144 է:

➢**831.** Երկնիշ թվի տասնավորների թվանշանը մեկով մեծ է միավորների թվանշանից: Այդ թվի և նույն թվանշաններով, բայց հակառակ կարգով գրված թվի արտադրյալը 2430 է: Գտնել երկնիշ թիվը:

➢**832.** Գտնել երկնիշ թիվը, եթե նրա տասնավորների թվանշանը մեկով մեծ է միավորների թվանշանից, իսկ թվանշանների արտադրյալը 45-ով մեծ է տասնավորների թվանշանի եռապատիկից:

833. Գտնել երկնիշ թիվը, եթե այդ թվի տասնավորների թվանշանը հավասար է այդ թվի և նույն թվանշաններով, բայց հակառակ կարգով գրված թվի տարբերությանը:

➢**834.** Գտնել երկնիշ թիվը, որի տասնավորների թվանշանը երկուսով մեծ է միավորների թվանշանից, իսկ այդ թիվն իր թվանշանների արտադրյալին բաժանելիս քանորդում ստացվում է 2, իսկ մնացորդում՝ 16:

835. Գտնել երկնիշ թիվը, եթե նրա թվանշանների տարբերությունը 4 է, իսկ թվանշանների քառակուսիների գումարը 37-ով մեծ է թվանշանների արտադրյալից:

836. Երկու հրաձիգներից յուրաքանչյուրը կրակել է 30 անգամ, ընդ որում՝ նրանք 44 անգամ կրակել են դիպուկ, մնացածը՝ վրիպել: Քանի՞ անգամ է դիպուկ կրակել յուրաքանչյուրը, եթե երկրորդ հրաձիգի դիպուկ կրակոցների թիվը 2 անգամ ավելի է առաջինի վրիպումների թվից:

➢**837.** Երեք անոթում կա տարբեր քանակի հեղուկ: Առաջին անոթի հեղուկի 1/3-ը լցրեցին երկրորդի մեջ: Այնուհետև, երկրորդ անոթի հեղուկի 1/4-ը լցրեցին երրորդի մեջ: Եվ վերջապես երրորդ անոթի հեղուկի 1/10-ը լցրեցին առաջինի մեջ: Արդյունքում ստացվեց, որ յուրաքանչյուր անոթում կա 9 լ հեղուկ: Որքա՞ն հեղուկ կար անոթներից յուրաքանչյուրում:

➢**838.** Երկու մասնակից դուրս եկան շախմատի առաջնությունից՝ յուրաքանչյուրը խաղալով երեք պարտիա: Արդյունքում առաջնությունում խաղացվեց 84 պարտիա: Սկզբում քանի՞ մասնակից կար և խաղացե՞լ են արդյոք դուրս եկած մասնակիցներն իրար հետ:

839. Ձկնորսությունից հետո Պողոսը Պետրոսին տվեց մի քանի ձուկ, որպեսզի նրանց ձկների քանակությունները հավասարվեն: Եթե նույն քանակով ձուկ Պետրոսը տար Պողոսին, ապա Պողոսի ձկները հինգ անգամ շատ կլինեին Պետրոսի ձկներից: Քանի՞ անգամ էին Պողոսի ձկները շատ Պետրոսի ձկներից:

***840.** Զամբյուղում կային ոչ ավել, քան 55 սև և սպիտակ գնդակներ, որոնց քանակները հարաբերում էին ինչպես $3:2$: Երբ զամբյուղից հանեցին 4 գնդակ, սև և սպիտակ գնդակների քանակները հարաբերեցին ինչպես $4:3$: Քանի՞ գնդակ կար զամբյուղում:

841. Այժմ հայրը մեծ է որդուց երկու անգամ: Քսան տարի առաջ հայրը մեծ էր որդուց վեց անգամ: Այժմ քանի՞ տարեկան է նրանցից յուրաքանչյուրը:

842. Մորաքույրը, որն այժմ 40 տարեկան է, չորս անգամ մեծ է իր զարմիկի այն ժամանակվա տարիքից, երբ ինքը զարմիկի այժմյան տարիքին էր: Քանի՞ տարեկան է զարմիկը:

§9. Խառը խնդիրներ

*** 843.** Քանի՞ 0-ով է վերջանում 1-ից 100 թվերի արտադրյալը:

*** 844.** Ո՞րն է եռանիշ թվի և նրա թվանշանների գումարի հարաբերության մեծագույն արժեքը:

• **845.** Ի՞նչ թվանշանով է վերջանում 2^{100} թիվը.

1) 6, 2) 8, 3) 4, 4) 2:

• **846.** Գտեք ամենափոքր բնական թիվը, որը բաժանվում է 5-ի, 11-ի, և 12-ի.

1) 600, 2) 660, 3) 110, 4) 720:

• **847.** Գտեք ամենափոքր բնական թիվը, որը 2-ի բաժանելիս տալիս է 1 մնացորդ, 3-ի բաժանելիս՝ 2 մնացորդ, 4-ի բաժանելիս՝ 3 մնացորդ, 5-ի բաժանելիս՝ 4 մնացորդ.

1) 69, 2) 57, 3) 59, 4) 60:

848. Կա՞ արդյոք ուղղանկյուն եռանկյուն, որի կողմերի երկարությունները՝

ա) երեք հաջորդական զույգ թվեր են,

բ) երեք կենտ թվեր են:

• **849.** Եթե դրական թիվը մեծացնենք 4 անգամ, այն կմեծանա՝

1) 400%-ով, 2) 50%-ով, 3) 300%-ով, 4) 500%-ով:

• **850.** Եթե երկու արտադրիչներից մեկը մեծացնենք 25%-ով, իսկ երկրորդը փոքրացնենք 20%-ով, ապա արտադրյալը՝

1) չի փոխվի, 2) կփոքրանա, 3) կմեծանա, 4) կմեծանա 5%-ով:

• **851.** Տված արտահայտություններից որի՞ արժեքը կարող է լինել ռացիոնալ թիվ, եթե a-ն զրոյից տարբեր ռացիոնալ թիվ է, իսկ b-ն՝ իռացիոնալ.

1) ab, 2) $\sqrt{a+b}$, 3) $a+\sqrt{b}$, 4) $\sqrt{a}+b$:

852. Ենթադրենք a-ն և b-ն իռացիոնալ թվեր են: Կարո՞ղ է արդյոք հետևյալ արտահայտության արժեքը լինել ռացիոնալ.

ա) $a+b$, բ) ab, գ) $\sqrt{a+b}$, դ) $\dfrac{a}{\sqrt{b}}$:

853. Խմբում կա 100 ուսանող, որոնցից 70-ը խոսում է անգլերեն, 45-ը՝ ֆրանսերեն, 23-ը՝ երկու լեզուներով: Քանի՞ ուսանող այդ լեզուներից ոչ մեկով չի խոսում:

854. 800 հարցվածներից 430-ը ամեն օր նայում է հեռուստատեսային տեղեկատվական ծրագիրը, 220-ը՝ սպորտային ծրագիրը, իսկ 180-ը՝ և՛ մեկը, և՛ մյուսը: Հարցվածներից քանի՞սը չեն նայում այդ ծրագրերից և ոչ մեկը:

855. Դասարանում կա 35 աշակերտ: Նրանցից 20-ը հաճախում է մաթեմատիկայի խմբակ, 11-ը՝ ֆիզիկայի, իսկ 10-ը որևէ խմբակ չի հաճախում: Քանի՞ աշակերտ է հաճախում և՛ մաթեմատիկայի, և՛ ֆիզիկայի խմբակ:

➤**856.** Հայտնի է, որ A բազմությունն ունի 120 տարր, B բազմությունը՝ 75 տարր, իսկ $A\cup B$ բազմությունը՝ 150 տարր: Քանի՞ տարր ունի $A\cap B$ բազմությունը:

➤**857.** Գտնել, թե քանի տարր ունի A և B բազմություններից յուրաքանչյուրը, եթե նրանց միավորումն ունի 144 տարր, հատումը՝ 22 տարր, և A-ի տարրերի քանակը 26-ով մեծ է B-ի տարրերի քանակից:

* **858.** A, B, C բազմություններն ունեն տասական տարր, $A\cup B\cup C$ բազմությունն ունի 18 տարր, $A\cap B$ բազմությունը՝ 6 տարր, $A\cap C$-ն՝ 3 տարր: Գտեք, թե քանի տարր ունեն հետևյալ բազմությունները.

ա) $A\cup B$, բ) $C\setminus(A\cup B)$, գ) $A\cup C$, դ) $B\setminus(A\cup C)$:

➤**859.** Գտեք $A=\{4n+2 : n\in \mathbf{N}\}$ և $B=\{3n : n\in \mathbf{N}\}$ բազմությունների հատումը:

* **860.** Գտեք $3^x=4y+5$ հավասարման ամբողջ լուծումները:

Լուծեք հավասարումը (861-864).

861. ա) $\log_{2\cos x}\sin x = 1$, բ) $\log_{\cos x}\sin x = 2$:

➢**862*.** ա) $3\{x\}+2[x]=5$, բ) $2\{x\}+\left[x+\frac{1}{3}\right]=5$,

գ) $[x]=\sqrt{9-x^2}$, դ) $[x](x^2+x+1)=4$:

➢**863.** ա) $3\lg^2 x+2[x]=6$, *բ) $3|\sin x|+2[x]=6$:

* **864.** ա) $\cos\left(x^2-7\right)=1$, բ) $\mathrm{tg}(\sin x)=1$, գ) $6x-1=2\cos\pi x$:

➢**865.** Գտեք ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը.

ա) $f(x)=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$, բ) $f(x)=\sqrt{2x-x^2-1}$,

գ) $f(x)=\log_3 x+\log_x 3$, դ) $f(x)=4^x-2^x+1$:

866. Գտեք ֆունկցիայի հակադարձը.

ա) $y=\dfrac{x-1}{x+1}$, բ) $y=\sqrt[4]{x}$, գ) $y=\dfrac{1}{1+x^3}$, ➢դ) $y=x|x|+2x$:

➢**867.** Գտեք հավասարման արմատների գումարը և արտադրյալը.

$$x^2 6^{-x}+6^{\sqrt{x}+2}=x^2 6^{\sqrt{x}}+6^{2-x}:$$

***868.** Գրեք $\sqrt{a-\sqrt{a+x}}=x$ հավասարման արմատների քանակը՝ կախված a պարամետրից:

***869.** Քանի՞ արմատ ունի հավասարումը.

ա) $\sin x=0{,}01x$, բ) $\sin x=\lg x$:

➢**870.** Գտեք a պարամետրի այն արժեքները, որոնց դեպքում $\log_2\left(4^x+2a^2\right)=x+1$ հավասարումն ունի երկու արմատ:

* **871.** Գտեք a պարամետրի այն արժեքները, որոնց դեպքում հավասարումների համակարգն ունի երկու լուծում.

$$\begin{cases} x^2+y^2=2(1+a) \\ (x+y)^2=14 \end{cases} :$$

Լուծել անհավասարումը (872-879).

---

[1] Հիշենք, որ $[x]$-ը x-ի ամբողջ մասն է, իսկ $\{x\}$-ը՝ կոտորակային մասը:

872. ա) $\dfrac{2x-1}{2^x-1}<0$, բ) $\dfrac{4^{\frac{1}{x}}-4}{x-2}>0$:

873. ա) $\dfrac{6^x-5}{x^2+5x+4}\le 0$, բ) $\dfrac{2x-1}{\log_2 x}<0$:

874. ա) $x\lg x+1>x+\lg x$, բ) $x^2\cdot 2^x+4>4x^2+2^x$:

* **875.** ա) $x+2^x\le\sqrt{1-x}+3$, բ) $x+2^x+\sqrt{x-1}\ge 2+\sqrt{x}$:

➢**876.** ա) $2^{\sqrt{1-x}}\ge x$, բ) $2^{\sqrt{x}}<\dfrac{1}{x}+1$:

* **877.** ա) $2^{\sqrt{1-x}}-x\lg x\ge 0$, բ) $\sqrt{\lg\sin x}<x-13\pi$:

* **878.** ա) $\sqrt{\log_2 x}+2\sqrt{\log_x 2}\ge 3$, բ) $\sqrt{\log_3(9x+18)}\le\log_3(x+2)$:

* **879.** $\sqrt{1-\log_a x}-\sqrt{1+\log_a x}>a\sqrt{2}$, $a>0$, $a\ne 1$:

➢**880.** Գտնել անդրադարձ բանաձևով տրված a_n հաջորդականության ընդհանուր անդամը, եթե $a_n=a_{n-1}+a^{n-1}$, $n=2,3,\ldots$, և $a_1=1$:

881. Ձևակերպեք «եթե քառակուսային հավասարումն ունի իրարից տարբեր երկու իրական արմատ, ապա նրա տարբերիչը բացասական չէ» ասույթի հակադարձը, հակադիրը և հակադարձի հակադիրը: Այդ ասույթներից որո՞նք են ճշմարիտ:

882. Ձևակերպեք «եթե ֆունկցիան x_0 կետում ունի վերջավոր ածանցյալ, ապա ֆունկցիան անընդհատ է x_0 կետում» ասույթի հակադարձը, հակադիրը և հակադարձի հակադիրը: Այդ ասույթներից որո՞նք են ճշմարիտ:

883. Բազմակետերը փոխարինեք «անհրաժեշտ է և բավարար», «անհրաժեշտ է, բայց ոչ բավարար», «բավարար է, բայց ոչ անհրաժեշտ» բառերով այնպես, որ ստացվեն ճշմարիտ ասույթներ.

ա) Վիճակախաղով շահելու համար, ... ունենալ վիճակախաղի գոնե մեկ տոմս:

բ) Որպեսզի a, b, c թվերից որևէ երկուսը լինեն հավասար, ..., որ $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$:

գ) Որպեսզի երկու իրական թվերի գումարը լինի ռացիոնալ, ..., որ նրանցից յուրաքանչյուրը լինի ռացիոնալ:

➢դ) Որպեսզի $y=ax^2+bx+c$ ֆունկցիայի արժեքները ամբողջ x-երի դեպքում լինեն ամբողջ, ..., որ $2a$, $a+b$, c թվերը լինեն ամբողջ:

884. Ապացուցեք կամ ժխտեք ասույթը.

ա) որպեսզի (n^2-1)-ը, որտեղ $n\in\mathbf{N}$ և $n\ge 5$, բաժանվի 24-ի, բավարար է, որ

n-ը լինի պարզ,

բ) որպեսզի (n^2-1)-ը, որտեղ $n \in \mathbf{N}$ և $n \geq 5$, բաժանվի 24-ի, անհրաժեշտ է, որ n-ը լինի պարզ:

885. 12Ա դասարանի աշակերտները պարծենում էին, որ իրենք 12Բ դասարանի աշակերտներից ավելի բարձրահասակ են: Մաթեմատիկայի ուսուցչի՝ «Իսկ ի՞նչ է նշանակում, որ դուք ավելի բարձրահասակ եք» հարցին 12Ա դասարանի աշակերտները պատասխանեցին հետևյալ կերպ:

1. Մեզանից յուրաքանչյուրը բարձրահասակ է նրանց կամայականից:

2. Մեր ամենաբարձրահասակն ավելի բարձրահասակ է նրանց ամենաբարձրահասակից:

3. Մեր դասարանի կամայական աշակերտի համար կգտնվի նրանցից մեկը, որն ավելի ցածրահասակ է:

4. 12Բ դասարանի կամայական աշակերտ ցածրահասակ է մեր դասարանի գոնե մեկ աշակերտից:

5. Մեր դասարանի աշակերտների միջին հասակը մեծ է նրանց դասարանի աշակերտների միջին հասակից:

Կա՞ն արդյոք այս պատասխանների մեջ համարժեքները: Եթե այո, ապա որո՞նք:

➢886. Գտեք x-ի այն արժեքները, որոնց համար ճշմարիտ է հետևյալ ասույթներից մեկը և միայն մեկը.

1. x-ն ամբողջ թիվ է,

2. (x^2-3x)-ը բացասական ամբողջ թիվ է,

3. $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$-ը դրական ամբողջ թիվ է:

*** 887.** Ապացուցեք հավասարությունը.

ա) $k \cdot C_n^k = n \cdot C_{n-1}^{k-1}$, բ) $C_n^1 - 2 \cdot C_n^2 + 3 \cdot C_n^3 - ... + (-1)^{n-1} n \cdot C_n^n = 0$,

գ) $C_n^1 + 2 \cdot C_n^2 + 3 \cdot C_n^3 + ... + n \cdot C_n^n = n \cdot 2^{n-1}$:

*** 888.** Հարթությունն ուղիղներով բաժանված է մասերի: Ապացուցեք, որ հնարավոր է հարթությունը սև և սպիտակ ներկերով ներկել այնպես, որ ընդհանուր կող ունեցող կամայական երկու մաս ներկվի տարբեր գույներով:

➢889. Քանի՞ ամբողջ լուծում ունի $\log_{|x|}(7x+77) \geq 2$ անհավասարումը:

*** 890.** Գտեք a պարամետրի այն արժեքները, որոնց դեպքում անհավասարման լուծումն ամբողջ թվային առանցքն է.

ա) $a \cdot 9^x + 4(a-1) \cdot 3^x + a > 1$, բ) $\log_{a(a+1)}(|x|+2) > 1$:

Լուծեք համակարգը (891-892).

➢891. ա) $\begin{cases} x^{\log_3 y} = 27y \\ y^{\log_3 x} = 81x \end{cases}$, բ) $\begin{cases} \lg x \cdot \lg(x+y) = \lg y \cdot \lg(x-y) \\ \lg y \cdot \lg(x+y) = \lg x \cdot \lg(x-y) \end{cases}$:

➢892. ա) $\begin{cases} 2^{x+1} = y^2 + 4 \\ 2^{x-1} \le y \end{cases}$, բ) $\begin{cases} \log_x(x+2) > 2 \\ (x^2 - 8x + 13)^{x-6} < 1 \end{cases}$:

➢893. Գտեք a պարամետրի այն արժեքները, որոնց դեպքում տրված համակարգն ունի ճիշտ երեք ամբողջ լուծում.

$$\begin{cases} 2^{x^2-3x-6} < 16 \\ a \le x \le 1{,}5 \end{cases}:$$

894. Գտեք a պարամետրի այն արժեքները, որոնց դեպքում տրված համակարգն ունի անվերջ թվով լուծումներ.

ա) $\begin{cases} (a-2)x + 27y = 4{,}5 \\ 2x + (a+1)y = -1 \end{cases}$, բ) $\begin{cases} (a-1)x + 2ay = 3 \\ ax + 8y = 3a \end{cases}$:

➢895. Ապացուցեք, որ տրված թիվն իռացիոնալ է՝ ա) $\lg 5$, բ) $\sin 15^\circ$:

896. Եռանկյան կողմերն աճող թվաբանական պրոգրեսիայի 1-ին, 3-րդ, և 4-րդ անդամներն են, իսկ անկյուններից մեկը 60° է: Գտնել եռանկյան մյուս անկյունների սինուսները:

897. Գտնել անվերջ նվազող b_n երկրաչափական պրոգրեսիայի գումարը, եթե $b_1 = 4\sin\alpha$, $b_2 = \sin 2\alpha$:

➢898. a կողմով կանոնավոր եռանկյանը ներգծած է շրջանագիծ, որին ներգծած է կանոնավոր եռանկյուն, վերջինիս ներգծած է շրջանագիծ և այդպես շարունակ: Գտնել՝

ա) եռանկյունների պարագծերի գումարը,

բ) եռանկյունների մակերեսների գումարը,

գ) շրջանագծերի երկարությունների գումարը,

դ) շրջանների մակերեսների գումարը:

➢899. Ապացուցել, որ՝

ա) եթե $x^2-4x+3<0$, ապա $\sin x>0$,

բ) եթե $(4x^2-9)(x^2+x+1)<0$, ապա $\cos x>0$:

*** 900.** Գտեք f ֆունկցիան, եթե հայտնի է, որ՝

ա) $(x-1)f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x-1}$, $x\neq 0$, $x\neq 1$, բ) $f(x)+xf\left(\frac{x}{2x-1}\right)=2$, $x\neq\frac{1}{2}$:

Պատասխաններ

4. ա) ոչ **բ)** այո **գ)** այո **դ)** ոչ **ե)** ոչ **զ)** այո **5. ա)** $3x$ **բ)** x^2 **գ)** x^3 **դ)** $x^4/4$ **ե)** $\sin x$ **զ)** $-\cos x$ **է)** $-1/x$ **ը)** $\ln x$ **6. ա)** $0{,}25x^{-4}$ **բ)** $\cos x$ **գ)** $x^2/2+2x$ **դ)** $\sin x+x$ **ե)** e^x **զ)** e^{2x} **է)** $-e^{-2x}/2$ **ը)** $2^x/\ln 2$ **7.ա)** $\ln(-x)$ **9. ա)** $F(x+5)$ **բ)** $F(2x)/2$ **գ)** $0{,}3F(x)$ **դ)** $0{,}75\cdot F(4x-10)$ **10. ա)** f-ը g-ի ածանցյալն է և h-ի նախնականն **բ)** h-ը f-ի ածանցյալն է և g-ի նախնականն **գ)** g-ն h-ի ածանցյալն է և f-ի նախնականն **դ)** h-ը f-ի ածանցյալն է և g-ի նախնականն **11. ա)** այո **բ)** այո **գ)** ոչ **դ)** այո **ե)** այո **զ)** ոչ **12. ա)** $0,\ \pm 1$ **բ)** $\pm 2\pi/3+2\pi k$ **գ)** $\pm 1,\ \pm 3$ **դ)** $(-1)^n\pi/12+\pi n/2$ **13. ա)** $x+C$ **բ)** $9x+C$ **գ)** $x^{13}/13+C$ **դ)** $2x\sqrt{x}/3+C$ **ե)** $2\ln x+C$ **զ)** $5^{x+1}\cdot\log_5 e+C$ **է)** $2\sin x+C$ **ը)** $-3\cos x+C$ **14. ա)** $2x-x^4/4+C$ **բ)** x^2-3x+C **գ)** $2x^6/3-9x^4/4+C$ **դ)** $-3/x-2x+C$ **ե)** $2\sqrt{x^3}/3+\cos x+C$ **զ)** $5x^{1{,}8}/9+\sin x+C$ **15. ա)** $2x-1{,}5x^{4/3}-3/x^2+C$ **բ)** $10x^{0{,}6}/3+\sin x+C$ **գ)** $-1/x+\cos x+C$ **դ)** $5^{x+1}\cdot\log_5 e+\cos x+C$ **ե)** $\ln x+e^x+C$ **զ)** $2\ln x-3^x\log_3 e+C$ **16. ա)** $-(4-5x)^8/40+C$ **բ)** $-2/(9x-3)+C$ **գ)** $\dfrac{1}{15(4-15x)^3}+C$ **դ)** $\dfrac{-\cos(7x-9)}{7}+C$ **ե)** $3\sin\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{\pi}{6}\right)+C$ **զ)** $\operatorname{tg}(2x-3)+C$ **17. ա)** $-e^{3-2x}/2+C$ **բ)** $-0{,}1\cdot 2^{-10x+9}\cdot\log_2 e+C$ **գ)** $e^{3x}/3+2{,}3^{x+1}\cdot\log_{2{,}3} e+C$ **դ)** $\ln(x+2)+C$ **ե)** $0{,}4\cdot\ln(5x-8)+C$ **զ)** $\ln x-2\ln(x+5)+C$ **18. ա)** $\sin 3x/3+2^x\cdot\log_2 e+C$ **բ)** $-e^{-2x+1}/2+\cos x+C$ **գ)** $\sin 2x/4-\sin 6x/12+C$ **դ)** $\sin 2x/4+\sin 4x/8+C$ **ե)** $2\cdot 3^{0{,}5x}\cdot\log_3 e-5\cdot 9^{0{,}2x}\cdot\log_9 e+C$ **զ)** $4\cdot e^{0{,}25x}+\operatorname{tg} 3x/3+C$ **20. ա)** $2x^2-1/x+1$ **բ)** $x^4/4+2x+7$ **գ)** $x-x^2+8$ **դ)** $7{,}5-2x^5-0{,}5\cdot x^{-2}$ **ե)** x^2+x **զ)** x^3-x^2+4 **է)** $x^2/2+2x+0{,}5$ **ը)** $-x^3/3+3x^2/2-13/3$ **21. ա)** 4 **բ)** 0 **գ)** -2 **դ)** 18 **23. ա)** $2\sin x+3$ **բ)** $-\cos(x+\pi/3)-2$ **գ)** $\sqrt{x^2+1}+1-\sqrt{2}$ **դ)** $e^x(x-1)+1$

24. Ցուցում: ա) Օգտվել $(F(-x))'=-f(-x)=f(x)=F'(x)$ հավասարությունից, որտեղ F ֆունկցիան f-ի նախնական է: բ) Դիտարկել f-ի այն նախնականը, որի արժեքը 0-ում 0 է: **25. ա)** 13 **բ)** $4\sqrt{2}/3$ **գ)** 4 **26.** Ցուցում: Հաշվել $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(h_n)}{h_n}$ սահմանը, որտեղ h_n-ն անվերջ փոքր է: **ա)** 0 **բ)** 0 **գ)** 0 **27. ա)** $(x-1)e^x+C$ **բ)** $(x^2-2x+2)e^x+C$ **գ)** $(x^3-3x^2+6x-6)e^x+C$ **դ)** $(x^4-4x^3+12x^2-24x+24)\times$ $\times e^x+C$ **29. ա)** $x(\ln x-1)+C$ **բ)** $x(\ln^2 x-2\ln x+2)+C$ **գ)** $x(\ln^3 x-3\ln^2 x+$ $+6\ln x-6)+C$ **դ)** $x(\ln^4 x-4\ln^3 x+12\ln^2 x-24\ln x+24)+C$ **30.** Ցուցում: Օգտվել $\int\ln^n xdx=\int(\ln^n x)\cdot x'dx$ հավասարությունից և մասերով ինտեգրման բանաձևից: **31. ա)** $(2\ln x-1)x^2/4+C$ **բ)** $(3\ln x-1)x^3/9+C$ **գ)** $2x\sqrt{x}\times$ $\times(3\ln x-2)/9$ **դ)** $2x^{3,5}(7\ln x-2)/49+C$ **ե)** $x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+C$ **զ)** $-(x+1)e^{-x}+C$ **է)** $-x\cos x+\sin x+C$ **ը)** $-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+C$ **32. ա)** $\ln\ln x+C$ **բ)** $2(\ln x)^{1,5}/3+C$ **գ)** $\sqrt{x^2+1}+C$ **դ)** $-\cos(e^x)+C$ **ե)** $e^{x^2}/2+C$ **զ)** $e^{x^3}/3+C$ **է)** $0{,}5\cdot\ln(e^{2x}+1)+C$ **ը)** $-e^{\cos x}+C$ **33. ա)** $\ln\frac{x+2}{x+3}+C$ **բ)** $\ln\frac{x-2}{x-1}+$ $+C$ **գ)** $\frac{1}{4}\ln\frac{x-2}{x+2}+C$ **դ)** $\ln\frac{x+3}{x+4}+C$ **34. ա)** 135, 23 **բ)** 4,25, 3 **գ)** 1,5, −3 **դ)** π, $-\pi$ **36. ա)** 6,6 **բ)** 1 **գ)** 20 **դ)** 1 **ե)** 1/15 **զ)** 6 **է)** 0,9 **ը)** 0 **38. ա)** 9 **բ)** 1 **գ)** 2 **դ)** 0,5 **ե)** 6 **զ)** $2+\pi/2$ **է)** 32/3 **ը)** $\pi+1$ **39. ա)** 8/3 **բ)** 8/3 **գ)** 4/3 **դ)** 0,25 **40. ա)** 6 **բ)** 2 **գ)** $\sqrt{3}-\pi/3$ **դ)** $\pi-2$ **41. ա)** $e-1$ **բ)** $3{,}5\cdot\log_2 e$ **գ)** $1{,}5\ln 2$ **դ)** $4\ln 3+8$ **43. ա)** 4 **բ)** 2 **գ)** 2 **դ)** 2 **44. ա)** π **բ)** π **գ)** 0 **45.** Ցուցում: Օգտվել 24-րդ և 42-րդ առաջադրանքներից և հաշվի առնել, որ կենտ ֆունկցիայի արժեքը 0 կետում 0 է: **46.** Ցուցում: Օգտվել 24-րդ և 42-րդ առաջադրանքներից **47.** Ցուցում: Ցույց տալ, որ եթե F ֆունկցիան f-ի նախնական է, ապա ա) $F(x+c)$ ֆունկցիան $f(x+c)$-ի նախնական է, բ) $\frac{1}{c}F(cx)$ ֆունկցիան $f(cx)$-ի նախնական է: **48.** Ցուցում: Ցույց տալ, որ եթե F ֆունկցիան f-ի նախնական է, ապա $F(x+T)-$ $-F(x)$ ֆունկցիայի ածանցյալը 0 է: **49.** 1715610 դրամ **50. ա)** 14,25 **բ)** 25 **գ)** 288 **դ)** 104/15 **51. ա)** $2\pi/3-\sqrt{3}$ **բ)** $\sqrt{3}-2\pi/9$ **գ)** $0{,}75+\ln 6$ **դ)** $(194-16\sqrt{2})/3$ **52. ա)** 4,25 **բ)** $2\frac{2}{3}$ **գ)** 8 **դ)** 7/6 **53. ա)** $2\log_3 e$ **բ)** $(e-1)^2/2$ **գ)** $6-8\log_3 e/3$

դ) $3\cdot\log_2 e-2$ **54. ա)** 36 **բ)** 4,5 **գ)** 8/3 **դ)** 64/3 **55.** 16/3 **56.** 4,5 **57.** 1/3 **58.** $4\ln 3-2$ **59.** -1: Ցուցում: Եթե x_1-ը և x_2-ը $x^2-x+1=kx+2$ հավասարման արմատներն են, ապա նշված մակերեսն է՝ $\int\limits_{x_1}^{x_2}\left(kx+2-(x^2-x+1)\right)dx=$ $=-\left(\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{k+1}{2}x^2-x\right)\Bigg|_{x_1}^{x_2}$: Այնուհետև, օգտվելով Վիետի թեորեմից, $x_2^3-x_1^3$, $x_2^2-x_1^2$ և x_2-x_1 մեծությունները արտահայտեք k-ով: **60. ա)** πR^2H **բ)** $\pi R^2H/3$ **գ)** $\pi H\left(R^2+Rr+r^2\right)/3$ **61. ա)** $28\pi/15$ **բ)** $7{,}5\pi$ **գ)** $\pi/2$ **դ)** $16\pi/15$ **ե)** $2\pi/15$ **զ)** 11π **է)** $50\pi/3$ **ը)** $\pi/6$ **62.** Ցուցում: Օգտվել (7) բանձևից և 42-րդ առաջադրանքից: **ա)** 35 մ, $34\frac{10}{27}$ մ **բ)** $6\frac{1}{3}$ մ, 2 մ **գ)** 3 մ, 8 մ **դ)** -2 մ, 40 մ **63. ա)** $s(t)=4/3+$ $+3t-t^3/3$ **բ)** $s(t)=-\sin t+3-\pi/2$ **գ)** $s(t)=t^3+t+3$ **դ)** $s(t)=-\cos t$ **64. ա)** 0,64 Ջ **բ)** 0,256 Ջ **65. ա)** 20 Ն/սմ **բ)** 10 Ն/սմ **66.** 1215506,25 դրամ **71. ա)** $(-\infty;-1)\cup(0;1)\cup(1;+\infty)$ **բ)** $(-5;2]\cup\{3\}$ **գ)** $(-\infty;-4)\cup[-1;5)\cup(5;+\infty)$ **դ)** $(-7;4)\cup(4;8)$ **72. ա)** $(-9;2)$ **բ)** $(-6;-5)$ **գ)** $(2;43/9]\cup(7;+\infty)$ **դ)** $(-\infty;-6)\cup[0;3)$ **73. ա)** $(-\infty;-2)\cup\{-1\}\cup(0;+\infty)$ **բ)** $(-\infty;-2)\cup\{0\}\cup(2;+\infty)$ **գ)** $(2;3)\cup(3;+\infty)$ **դ)** $\{2\}\cup(4;+\infty)$ **74. ա)** $(3;+\infty)$ **բ)** $[-0{,}8;0]\cup[1;+\infty)$ **գ)** $[0{,}75;3]$ **դ)** $[1;5{,}5]$ **75. ա)** $(1;2]\cup\{3\}$ **բ)** $[2;3)\cup\{-2\}$ **գ)** $(5;6]\cup\{7\}$ **դ)** $(1/3;2/3]\cup\{1\}$ **76. ա)** $(0;7/8]\cup$ $\cup(1;7/6)$ **բ)** $(0;7/9]\cup(1;1{,}75)$ **գ)** $(6/7;1)\cup[1{,}5;2]$ **դ)** $(0{,}5;1)\cup(3;+\infty)$ **77.** 18 **78.** 18, 20, 24 **79. ա)** 17 **բ)** -1, 4 **գ)** $\varnothing$ **դ)** 9 **ե)** -6, 5 **զ)** 6 **80. ա)** 7 **բ)** 1 **գ)** -1 **դ)** $\sqrt{2}$ **ե)** 4 **զ)** 3 **է)** -2, 1 **ը)** -1, 2 **81. ա)** 6 **բ)** 8 **գ)** $-5/3$, 3 **դ)** $\pm\sqrt{2}$ **ե)** $-4{,}5$, 2 **զ)** -1, 3 **82. ա)** 4, 5 **բ)** 2 **գ)** 5 **դ)** 1/3 **83. ա)** 0 **բ)** 4 **գ)** -6, 7 **դ)** 11 **84. ա)** 6 **բ)** 12 **85. ա)** -1, 4 **բ)** -4, 2 **գ)** $-1/3$, 1 **86. ա)** 9, 28 **բ)** ± 4 **գ)** 7, 43/14 **դ)** 20 **87. ա)** -2, 2, 3 **բ)** 0, 0,5, 1 **88. ա)** 2 **բ)** -34, 1 **89. ա)** $1+\sqrt{5}$ **բ)** ±1, 8 **գ)** 4 **90. ա)** $(4;1)$ **բ)** $(34;-30)$, $(12;4)$, $\left(103-19\sqrt{17};-77+25\sqrt{17}\right)$ **գ)** $(6;3)$, $(-3;-1{,}5)$, $\left(\left(12-\sqrt{351}\right)/23;12-\sqrt{351}\right)$, $\left(\left(12+\sqrt{351}\right)/23;12+\sqrt{351}\right)$ **դ)** $(1;27)$, $(27;1)$ **91. ա)** -2, 6 **բ)** 2 **92. ա)** -6, 10 **բ)** $[1{,}2]$ **93. ա)** 2 Ցուցում: Օգտվել $x+\dfrac{1}{2}+\sqrt{x+\dfrac{1}{4}}=\left(\dfrac{1}{2}+\sqrt{x+\dfrac{1}{4}}\right)^2$ նույնությունից:

բ) 3 **94. ա)** 7,2 Ցուցում: Ձախ մասում կոտորակի համարիչն ու հայտարարը բաժանել $\sqrt{x+4}$-ի: **բ)** 2,05 **95. ա)** 3, 6 Ցուցում: Ձախ մասը գրել $x^2-\left(\sqrt{x-2}\right)^2$ տեսքով: **բ)** -1, $\left(9-\sqrt{153}\right)/2$ **96. ա)** 1, 5, 7 **բ)** 1,5, 5 Ցուցում: Հավասարման երկու մասերը բազմապատկել աջ մասի լծորդով: **97. ա)** -15, 12, 76 Ցուցում: Նշանակել $\sqrt{x+24}=u$, $\sqrt[3]{x-12}=v$ և հաշվի առնել, որ $u^2-v^3=36$: **բ)** -50, -175, 14 **98. ա)** 0, 4 **բ)** ± 6 **99. ա)** 0, 2, 3 **բ)** -2, -4 **101. ա)** Ցուցում: Եթե $x\in(2;3)$, ապա $\sqrt{x-2}>x-2$, $\sqrt[4]{3-x}>3-x$: **102. ա)** $(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$ **բ)** $(-\infty;0,2]$ **103. ա)** $(-7;-5/3]\cup[2;+\infty)$ **բ)** 3 **104. ա)** $(9;+\infty)$ **բ)** $(3;+\infty)$ **գ)** $[2;29]$ **դ)** $\varnothing$ **ե)** $[3;+\infty)$ **զ)** 2 **105. ա)** $\varnothing$ **բ)** $(-\infty;-4]\cup[4;+\infty)$ **գ)** $[0;1]$ **դ)** $(0;1)\cup(2;+\infty)$ **ե)** $(-\infty;-4)\cup[2;+\infty)$ **զ)** $(-\infty;-8)\cup(-2;+\infty)$ **106. ա)** $(-\infty;-11]\cup(2;+\infty]$ **բ)** $(-1,2;-0,2]\cup[1;2)$ **գ)** $[10/23;11)\,(-7;10/23]$ **դ)** $(-\infty;-2,4]\cup(8/7;+\infty)$ **107. ա)** $(-\infty;3]$ **բ)** $(-\infty;0)\cup(0,5;0,9]$ **գ)** $[2,5;7)$ **դ)** $(-\infty;-1]$ **108. ա)** $(-\infty;-1,5]\cup[-1,25;0,75]$ **բ)** $(-\infty;0]\cup\left[0,25;\left(7+\sqrt{17}\right)/8\right]$ **գ)** $(-\infty;1]\cup[2;4)$ **դ)** $(-\infty;-0,5]\cup[3,5;\infty)$ **109. ա)** $[-1;5]$ **բ)** $[-3;5)$ **110. ա)** $(4;6]$ **բ)** $[26/21;53/18]$ **գ)** $[0,5;0,6)$ **դ)** $[-16/7;-2]\cup[-1/7;0]$ **111. ա)** $(5;+\infty)$ **բ)** $[7;+\infty)\cup\{4\}$ **գ)** $(3;4,5)$ **դ)** 7 **112. ա)** $\{0,5\}\cup[4;5]$ **բ)** $[0,5;2]\cup\{4\}$ **113. ա)** $(-2;-1]\cup[5,5;+\infty)$ **բ)** $(-5;-2)$ **114. ա)** $[0;3]\cup\{-3\}$ **բ)** $[1;4)$ **115. ա)** $[-3;-2]\cup[6;+\infty)$ **բ)** $(-4;-16/9)\cup(4/9;+\infty)$ **116. ա)** $[1;5)\cup(5;9]$ **բ)** $[-3;1]\cup[22;26]$ **գ)** $[-2;-1)$ **դ)** $[0,5;1]$ **117. ա)** $(-4,75;-2,5)\cup(-2;+\infty)$ **բ)** $[-1,2;-1]\cup[0;+\infty)$ **գ)** $[-4;0)\cup[3;+\infty)$ **դ)** $(0;23)$ **118. ա)** $(13;+\infty)$ **բ)** $[9;18)$ **գ)** $[0;1)\cup[13;25)$ **119. ա)** 15 **բ)** 2 **գ)** -1 **դ)** -4 **120. ա)** $-0,2$, 1 **բ)** 0,25 **գ)** $\varnothing$ **դ)** $\varnothing$ **ե)** 1, 11/3 **զ)** 1,6 **121. ա)** 3, $3\pm\sqrt{2}$ **բ)** -1, $-1\pm 3\sqrt{2}$ **գ)** 0, 2 **122. ա)** πk, $\pi/2+2\pi k$ **բ)** $\operatorname{arctg}3+\pi k$, $-\pi/4+\pi k$ **գ)** 10, 100 **123. ա)** -1 **բ)** 1 **գ)** 0,4 **124. ա)** -8, 0 **բ)** 6, $\left(3+\sqrt{29}\right)/2$ **125. ա)** $(-\infty;0,5]\cup[1;+\infty)$ **բ)** $[-0,2;0,5]$ **126. ա)** $(-\infty;-1]\cup[6;+\infty)$ **բ)** $(-0,5;4)$ **գ)** $(-\infty;-0,4)\cup(2;+\infty)$ **դ)** $[2;3,5]$ **ե)** $(-\infty;2]\cup[3;+\infty)$ **զ)** $[-0,4;1]$ **127. ա)** R **բ)** $(-\infty;0,25)\cup(0,25;+\infty)$ **գ)** $\varnothing$ **դ)** 3,5 **ե)** $\varnothing$ **զ)** R **128. ա)** $(-\infty;0,4]\cup[4;+\infty)$ **բ)** $(-14/3;-3)\cup(-3;-2)$ **գ)** $(1/7;5/8)$ **129. ա)** $(-1;1)$ **բ)** $(-\infty;-2/3)\cup(8/7;+\infty)$ **գ)** $[-4;-2/7]$ **130. ա)** $(-\infty;-6]\cup\left[-\left(\sqrt{57}+1\right)/2;+\infty\right)$

բ) 0 131. ա) $-1/3$, 1 բ) -1, 2 գ) -1, 3, 4, 6 դ) $-0{,}5$, 3, 7 132.ա) ± 5 բ) ± 1,
$\pm 3{,}5$ գ) -2, -1, 3, 4 դ) -5, 1 133. ա) $-0{,}25$, 1 բ) -2, 4 134.ա) $[-1{,}8;-0{,}2]$
բ) $[-5;-3]$ 135.ա) $[-2;11/3]$ բ) $(-\infty;-15)\cup(1/3;+\infty)$ գ) $\left[-(1+\sqrt{65})/2;(3-\sqrt{41})/2\right]\cup$
$\cup\left[(\sqrt{65}-1)/2;(3+\sqrt{41})/2\right]$ դ) $(-\infty;0)\cup(0;3-\sqrt{2})\cup(3+\sqrt{2};+\infty)$ 136.ա) $(1/3;3/2)$
բ) $(-\infty;-9)\cup(9;+\infty)$ գ) $[-1;9]$ դ) $(-\infty;-3]\cup[1/3;+\infty)$ 137.ա) $(-\infty;-5)\cup(-2;2)\cup$
$\cup(5;+\infty)$ բ) $[-4;4]$ գ) $[-4;2]$ դ) $(-\infty;1]\cup[2;4]\cup[5;+\infty)$ 138. ա) $1/2$, $(1+\sqrt{3})/2$
բ) -1, $4/3$, 3 գ) -6, 2, 3 139.ա) $-1{,}5$, $4{,}5$ բ) -7, 5 գ) -2, 4 140.ա) $(-\infty;0]\cup$
$\cup(5;+\infty)$ բ) $[0{,}5;4)$ գ) $[0;1]\cup(7;+\infty)$ 141. ա) 7 բ) 5 142. ա) $(-5;2)\cup(10;+\infty)$
բ) $(-\infty;-5]\cup[1;10/3]$ 143. ա) $(-\infty;-1/3]\cup[5/3;+\infty)$ բ) $(-\infty;-11)\cup(13;+\infty)$
գ) $(-18;6)$ 144. ա) $(-\infty;-9)\cup\{0{,}8\}$ բ) $\{-2/3;1\}\cup(2{,}5;+\infty)$ գ) $(-\infty;0)\cup\{0{,}5\}$
145. ա) $(-\infty;-3)\cup(-3;+\infty)$ բ) $(-\infty;1/2)\cup(1/2;+\infty)$ 146. ա) 1 բ) 4 147. ա) 3
բ) 16,5 148. ա) 4, -4 բ) 3, -3 149. ա) 1 բ) 3 գ) 3 դ) -2 150. ա) 2 բ) 5
151. ա) 0 բ) 1, 3 գ) 0, 3 դ) 1 152. ա) $\sqrt{26}$, 6 բ) -7, -5 153. ա) -2; 4
բ) ± 3, $\sqrt{5}-2$ 154. ա) -1, $\sqrt{3}$, πk բ) 0, 3, $\pm\pi$ 155. ա) $1/3$, 2, 4 բ) $-0{,}2$,
0,5, 1, 3 156. ա) -2 բ) -1 157. ա) $1/27$, 9 բ) $[0{,}01;+\infty)$ 158. ա) $[0{,}2;25]$
բ) $[0{,}25;16]$ 159.ա) $[4;16]$ բ) 3, 27 160.ա) $(5;2)$, $(1/25;-1)$ բ) $(0{,}5;-1{,}5)$ գ) $(10;4)$,
$(4;10)$ 161. ա) $(3\pi/2+\pi k,-\pi/6+\pi k)$ բ) $(\operatorname{arctg}0{,}5+\pi k;\pi/4-\operatorname{arctg}0{,}5-\pi k)$,
$(\operatorname{arctg}1/3+\pi k;\pi/4-\operatorname{arctg}1/3-\pi k)$ գ) $(\pi/6+\pi k;\pi/6-\pi k)$ 162. ա) $\pi/4+\pi k/2$
բ) $\pi k/3$ գ) $\pi/6+\pi k/3$ 163. ա) πk բ) $\pi/2+\pi k$ գ) $\pi k/2$ 164. ա) πk, $\pi/3+\pi k$
բ) $\pi/2+\pi k$, $\pi/6+\pi k$ գ) πk 165. ա) $\pi/2+\pi k$, $\operatorname{arctg}0{,}5+2\pi k$
բ) $(-1)^k\arcsin(\sqrt{3}/3)+\pi k$ գ) $\pi/4+2\pi k$ 166. ա) $\pi/2+2\pi k$ Ցուցում: Եթե x-ը
բավարարում է հավասարմանը, ապա $\sqrt{\sin x+\cos x}\ge\sqrt{\sin x}\ge\sin x$: բ) $2\pi k$
167. ա) 7, 3π, 11 բ) 6, $9\pi/4$, 8 168. ա) $\pi/2+\pi k$ բ) $\pi/4+\pi k/2$ գ) $\pm\pi/6+$
$+\pi k$ դ) $\pm\pi/3+\pi k$ 169. ա) 5 բ) -3 170. ա) 0 բ) 0 171. ա) 2 բ) 4
172. ա) $(-\infty;-0{,}25]\cup[1{,}25;+\infty)$ բ) $\varnothing$ գ) $(-\infty;-7]\cup[1;+\infty)$ 173. ա) $[-9;3]$
բ) $(-\infty;0{,}5)\cup(4{,}5;+\infty)$ գ) $[-1;2-\log_4 14]\cup[2+\log_4 14;5]$ 174. ա) $(3;7)$ բ) $(3;7)$
գ) $[3;4]\cup\{0{,}2\}$ դ) $\{0{,}1\}\cup[0{,}2;0{,}3]$ 175. Ցուցում: Գտնել անհավասարման ԹԱԲ-ը
և հաշվել աջ մասը: ա) $\pm\pi/3$, $2\pi/3$, π բ) $\pm 2\pi/7$, $\pm 6\pi/7$, $10\pi/7$
176. ա) $[-1;3)\cup(8;+\infty)$ բ) $(5;10)$ 177. ա) $(-7{,}5;-7)\cup(-7;-6;5)$ բ) $[-3{,}5;-1{,}5)\cup$
$\cup(-1{,}5;0{,}5]$ գ) $(-1;3)$ դ) $(-7;3)$ 178. ա) $(3;+\infty)$ բ) $(-\infty;4)$ գ) $(0;0{,}2)\cup(625;+\infty)$
դ) $[1;1000]$ 179. ա) $9\pi/4$ բ) $7\pi/6$ գ) π 180. ա) $\pi k/15$, $k=1,2,\ldots,4$ բ) $\pi/12$,
$\pi/4$ 181. $\pi/32$, $5\pi/32$, $9\pi/32$ 182. ա) $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$ բ) 0 183. ա) 3 բ) 1
184. ա) $(-\infty;-1]\cup[0;+\infty)$ բ) $[0;+\infty)$ 185. ա) $\sqrt{51}/5$ 186. ա) $4x^2-61x+9=0$
բ) $8x^2-469x-27=0$ գ) $3x^2+7x-2=0$ 187. ա) Երբ $a\neq 0{,}5$, $x=7/(2a-1)$,
երբ $a=0{,}5$, $\varnothing$ բ) երբ $a\neq\pm 2$, $x=1/(a+2)$, երբ $a=2$, $x\in\mathbf{R}$, երբ $a=-2$, $\varnothing$
գ) Երբ $a\neq -2$, $x=1/(a+2)$, երբ $a=-2$, $\varnothing$ 188. ա) Երբ $a\in[-1;+\infty)$, $x=$

$=\left(a^2+2a+5\right)/5$, երբ $a\in(-\infty;-1)$, $\varnothing$ **բ)** ցանկացած a-ի դեպքում $x=$ $=\left(\left(a^4-16\right)^3-1\right)/9$ **գ)** երբ $a\in(-\infty;-5]\cup[5;+\infty)$, $x=\pm\sqrt{\left(2a^2-50\right)/7}$, երբ $a\in(-5;5)$, $\varnothing$ **189. ա)** Երբ $a\in(-\infty;0)\cup(0{,}4;+\infty)$, $\varnothing$, երբ $a\in[0;0{,}4]$, $x=(-1)^n\times$ $\times\arcsin(5a-1)+\pi n$ **բ)** երբ $a\in[-0{,}75;+\infty)$, $x=2a-2$ կամ $x=-2a-5$, երբ $a\in(-\infty;-0{,}75)$, $\varnothing$ **գ)** երբ $a\in(-\infty;2)$, $x=4+\log_2(6-3a)$, երբ $a\in[-2;+\infty)$, $\varnothing$ **190.ա)** -5 **բ)** 0 **գ)** $(0;6)$ **191.ա)** $(-1;7/9)$ **բ)** $(-45;0)$ **գ)** $(-\infty;-3)\cup(1;+\infty)$ **դ)** $(-1{,}8;3)$ **192. ա)** $(-\infty;-3]$ **բ)** $[0;8)$ **193. ա)** $(-2;1)\cup(2;+\infty)$ **բ)** $[-1{,}5;+\infty)$ **գ)** $(-\infty;-3]\cup$ $\cup(2{,}5;+\infty)$ **194. ա)** $(-\infty;8)$ **բ)** $(-\infty;-1]\cup[3{,}5;+\infty)$ **գ)** $[-3;-1)\cup(0;2]$ **195. ա)** $a\neq$ $\neq\pm1$ **բ)** $[-3;2)\cup(2;3]$ **196. ա)** ±1 **բ)** 0, $2{,}5$ **197. ա)** -2, 6 **բ)** 1 **գ)** -1, $7/9$ **դ)** -45, 0 **198. ա)** 3 **բ)** 8 **199. ա)** $(-\infty;2)\cup(2{,}125;+\infty)$ **բ)** 2, $2{,}125$ **գ)** $(2;2{,}125)$ **200. ա)** $\left(-\left(1+\sqrt{5}\right)/2;1\right)$ **բ)** $-\left(1+\sqrt{5}\right)/2$, 1 **գ)** $\left(-\infty;-\left(1+\sqrt{5}\right)/2\right)\cup(1;+\infty)$ **201. ա)** $(-\infty;3)\cup(3;+\infty)$ **բ)** $[-0{,}25;0{,}25]$ **գ)** $(-\infty;-4]\cup[4;+\infty)$ **դ)** $(-\infty;-1/9]\cup$ $\cup(0;+\infty)$ **ե)** $(-2;2)$ **զ)** $\left(-\infty;3-2\sqrt{2}\right]$ **202. ա)** $(-5;3)$ **բ)** -5, 3 **գ)** $(-\infty;-5)\cup$ $\cup(3;+\infty)$ **203.ա)** $(-\infty;-4)\cup(4;+\infty)$ **բ)** $(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$ **գ)** $(-2;2)$ **դ)** $(-\infty;-1{,}8)\cup$ $\cup(3;+\infty)$ **204. ա)** $(-\infty;1)\cup(1;2)\cup(2;+\infty)$ **բ)** $(-1;0)\cup(0;0{,}5)$ **205. ա)** $(-\infty;1/3)\cup$ $\cup(1;+\infty)$ **բ)** $\{0\}\cup(1;+\infty)$ **գ)** $(-\infty;-4)\cup\{-3;0\}\cup(1;+\infty)$ **դ)** $(-\infty;-0{,}5)\cup\{0;2{,}5\}\cup$ $\cup(3;+\infty)$ **206.ա)** $\pm3\sqrt{5}$ **բ)** -15 **գ)** ±5 **դ)** 3 **207. ա)** -4 **բ)** $1{,}75$ **208. ա)** 21 **բ)** 36 **209.ա)** $6{,}4$ **բ)** 7 **210.ա)** $(-2;-1)\cup(7/9;+\infty)$ **բ)** $(-\infty;-2)$ **գ)** $(7/9;+\infty)$ **դ)** $(-2;-1)$ **ե)** $\varnothing$ **զ)** $(7/9;1)$ **211. ա)** $[-1;4]$ **բ)** $[-1;1]$ **գ)** $[0{,}25;1{,}75]$ **դ)** $[4;6]$ **212. ա)** Երբ $a=7$, $x=2$, երբ $a\neq7$ հավասարումն արմատ չունի **բ)** Երբ $a=-3$, $x=5$, երբ $a=3$, $x=2$, երբ $a\neq\pm3$ հավասարումն արմատ չունի **213.ա)** 3 **բ)** 1 **գ)** $(-\infty;1)\cup(1;3)\cup$ $\cup(3;+\infty)$ **214.ա)** $a\neq12$ **բ)** $a\neq\pm6$ **գ)** $a\neq3$, $a\neq6$ **215.ա)** 6 **բ)** -5 **գ)** 6 **216.ա)** 6 **բ)** 5 **գ)** 3 **217. ա)** $(11/7;2)$ **բ)** $(1{,}5;10/3)$ **գ)** $(0;3)\cup(3;+\infty)$ **դ)** $(-\infty;-2)\cup(2;5)$ **218.** 93 **219.** $3{,}75$, $2{,}5$ **220. ա)** Երբ $a=1$, $x\in\mathbf{R}$, երբ $a>1$, $x<3/(a-1)$, երբ $a<1$, $x>3/(a-1)$ **բ)** երբ $a\in(-\infty;-3)\cup(3;+\infty)$, $x\geq(a+1)/\left(a^2-9\right)$, երբ $a\in$ $\in(-3;3)$, $x\leq(a+1)/\left(a^2-9\right)$, երբ $a=3$, $\varnothing$, երբ $a=-3$, $x\in\mathbf{R}$ **գ)** երբ $a\in$ $\in(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$, $x\leq2/\left(a^2-a\right)$, երբ $a\in(0;1)$, $x\geq2/\left(a^2-a\right)$, երբ $a\in\{0;1\}$, $x\in\mathbf{R}$ **221. ա)** Երբ $a\leq0$, $\varnothing$, երբ $a>0$, $x\in\left[1;16a^2+1\right)$ **բ)** երբ $a\leq4$, $x\geq-8$, երբ $a>4$, $x\geq\left(a^2-8a\right)/2$ **գ)** $x\leq(a-2)^3+8$ **222. ա)** Երբ $a\leq1$, $x\in\mathbf{R}$, երբ $a>1$, $x>2+\log_2(a-1)$ **բ)** երբ $a\leq3$, $\varnothing$, երբ $a>3$, $x\leq\log_2(a-3)-3$ **գ)** երբ $a\in(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)$, $x\in\varnothing$, երբ $a\in(-1;1)$, $x>\log_{0,2}\left(1-a^2\right)$ **223. ա)** Երբ $a>1$, $x\leq-1$, երբ $a\in(0;1)$, $x\geq-1$, երբ $a=1$, $x\in\mathbf{R}$, $a=0$, $x>3$ **բ)**երբ $a>1$, $x\geq5$, երբ $a\in(0;1)$, $x\leq5$, երբ $a=1$, $x\in\mathbf{R}$, երբ $a=0$, $x>0{,}5$ **գ)** երբ $a>1$, $x>5$, երբ $a\in(0;1)$, $x<5$, երբ $a=1$, $\varnothing$, երբ $a=0$, $\varnothing$ **224. ա)** 4 **բ)** ±8 **225. ա)** $-0{,}5$, 3 **բ)** $-2{,}5$, 1 **226. ա)** $13-\sqrt{2}$ **բ)** $\pm\sqrt{10+\sqrt{6}}$ **227. ա)** $p=q=1$

բ) $p=-0{,}8$, $q=-0{,}6$ **228.** ա) $p=-3$, $q=2$ բ) $p=-14$, $q=14$ **229.** ա) $p=2$, $q=0{,}4$ բ) $p=-1/6$, $q=1{,}5$ **230.** ա) $(2;6)$ բ) $(-8;0)$ գ) $[1;2]$ դ) $(-\infty;-1)$ **231.** ա) $(-1/3;0)\cup(0;1)$ Ցուցում: Գտնել a-ի այն արժեքները, որոնց դեպքում $at^2+2at+1$ եռանդամը դրական է $[-1;1]$ միջակայքում: բ) $\left(-1;\left(1-\sqrt{5}\right)/2\right)\cup$ $\cup\left(\left(\sqrt{5}-1\right)/2;1\right)$ **232.** ա) $\left[-3;2\sqrt{2}\right)$ Ցուցում: Գտնել a-ի այն արժեքները, որոնց դեպքում $t^2-(a+2)t+a+3$ եռանդամը դրական է դրական t-երի համար: բ) $[0{,}5;+\infty)$ **233.** ա) $(-7;1)$ բ) $(-2;6)$ **234.** ա) $0{,}5$ բ) 0 **235.** ա) $a=34$, $b=-10$ բ) $a=10$, $b=7{,}5$ **236.** ա) $(-\infty;-5{,}9)$ բ) $(-\infty;-94)$ **237.** $[-7;-5]\cup[1;5]$ **238.** ա) $(-1;+\infty)$ բ) $(-\infty;1)$ գ) $(-\infty;-5]$ **239.** 8%, 10% **240.** 9000000 դրամ **241.** գ) 10 դ) 9 ե) 40 զ) 0,2 **244.** ա) 12 բ) 10 գ) 0,12 դ) 24 **245.** ա) 11 բ) 5 գ) 0,36 դ) 44 **246.** ա) 2 բ) $\sqrt{3}$ **247.** ± 3 **248.** ա) 21, 12, 17 բ) $14\frac{1}{6}$, 7, 10 գ) 16, չունի, 16 **249.** 4,4, 3 և 4, 4 **250.** ա) 40, 20, 40 բ) 4, 3, 4 **251.** ա) 80, $16\sqrt{3}$ բ) 6, $\sqrt{70}/5$ **252.** ա) 63000 բ) 55000, 65000 գ) 60000, $1000\sqrt{226}$ **253.** ա) 6,25 բ) 6, 6 գ) 7, $\approx 1{,}67$ **254.** ա) 4 բ) 4,5 գ) 4 **255.** ա) -3, $2\frac{2}{3}$ բ) 3 գ) 5 դ) -4 **257.** ա) $\uparrow$ $(-\infty;-2]$-ում և $[1;+\infty)$-ում, $\downarrow$ $[-2;-0{,}5)$-ում և $(-0{,}5;1]$-ում բ) $\uparrow$ $[-7/3;3]$-ում, $\downarrow$ $(-\infty;-7/3]$-ում և $[3;+\infty)$-ում **258.** ա) $1/7$, $-1/27$ բ) $1/12$, $-0{,}5$ **259.** ա) $\{x;y;z;7;2;a\}$ բ) $\{x;2\}$ գ) $\{y;z;7\}$ դ) $\{a\}$ **260.** ա) $A=B$, $A\subset B$, $A\supset B$ բ) $A\subset B$ գ) $A\supset B$ դ) $A\subset B$ **261.** ա) $A\subset B$ բ) $A\supset B$ գ) $A\subset B$ դ) $A\subset B$ **265.** 2500 **266.** 5/72 **267.** 40 **268.** ա) 125 բ) 625 **269.** ա) 1250 բ) 3050 Ցուցում: ա) Կա 2-րդ տառն ընտրելու 2, մնացած 4 տառերն ընտրելու 5-ական հնարավորություն $\left(2\cdot 5^4=1250\right)$: բ) Բոլոր բառերի քանակից $\left(5^5\right)$ հանել ԲԱԴ պարունակողների քանակը $\left(3\cdot 5^2\right)$: **270.** 60 **271.** ա) 1500 բ) 375 գ) 750 դ) 1125 ե) 96 **272.** ա) 512 բ) 64 **273.** 28812 Ցուցում: Կա առաջին թվանշանը (4,5,6,7,8,9) ընտրելու 6, վեցերորդ թվանշանը (0 կամ 5) ընտրելու ՝ 2, մնացած 4 թվանշաններն ընտրելու 7-ական հնարավորություն $\left(2\cdot 6\cdot 7^4=28812\right)$: **274.** 600000 **275.** $81\cdot 10^5$ **276.** 306 օր 3 ժ 13 ր 20 վրկ **277.** Ցուցում: Ցույց տալ, որ $x_1x_2x_3x_4$ քառյակների քանակը, որտեղ x_1-ը սեռն է, x_2-ը՝ աշխարհամասը, x_3-ը՝ ծննդյան թիվը, x_4-ը մազերի թիվը, փոքր է երկրագնդի բնակչության թվից: **278.** ա) 256 բ) 6561 **279.** 16 **280.** ա) ոչ բ) ոչ գ) այո, 5 դ) այո, 6 **281.** 19, 11 **282.** 9 վրկ **283.** 11 վրկ **284.** ա) 1 բ) 4 գ) 12 դ) 24 ե) 24 **285.** 120 **286.** 840 **288.** 720 **289.** ա) 504 բ) 1320 գ) 2730 **290.** ա) 6 բ) 30 գ) 56 **291.** ա) 151200 **292.** 27216 Ցուցում: Քանի որ առաջին թվանշանը զրո չէ, կա 1-ին թվանշանն ընտրելու 9, 2-րդը՝ 9, 3-րդը՝ 8, 4-րդը՝ 7, 5-րդը՝ 6 հնարավորություն $(9\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6=27216)$: **293.** ≈ 65 **294.** 4/9 **295.** ա) 210 բ) 343 **296.** ա) 26048 Ցուցում: Բոլոր բառերի քանակից $\left(8^5\right)$ հանել առանց տառերի կրկնության բառերի քանակը $\left(A_8^5\right)$: բ) 4096 գ) 512 դ) 8192 **297.** ա) 3136 բ) 896 **298.** 10 **300.** 3 մ/վրկ, 4 մ/վրկ **301.** 3 մ/վրկ, 5 մ/վրկ **302.** 300, 600 **304.** 24 **305.** 24 **306.** 720 **307.** 3628800 **308.** 479001600 **309.** ա) 24 բ) 24 գ) 18 դ) 18 **310.** 203212800 **311.** ա) 50 բ) 50 Ցուցում: ԿՖ կամ ՖԿ զույգը համարել մեկ տառ: գ) 25 **312.** ա) 120 բ) 240 գ) 480 **314.** ա) 7 բ) 7 գ) 9 **315.** 55 դրամ **316.** 15 կմ/ժ **317.** ա) 1 բ) 4 գ) 6 դ) 4 ե) 1 **318.** 455 **319.** 10518300 **320.** ա) 21 բ) 21 գ) 35 դ) 35 **321.** ա) 28 բ) 66 գ) 190 դ) 780 **322.** ա) 4, 6 բ) 84, 36 գ) 220, 66 դ) 1140, 190 **323.** $n(n-3)/2$ **324.** Ցուցում: ա) C_{14}^3, բ) $C_8^3+C_6^3$, գ) $6\cdot C_8^2+8\cdot C_6^2$: ա) 364 բ) 76 գ) 288 **325.** ա) 2520 բ) 3360 գ) 700 **326.** 968 Ցուցում: Համաձայն (4) բանաձևի, $C_{10}^3+C_{10}^4+\cdots+C_{10}^{10}=2^{10}-\left(C_{10}^0+C_{10}^1+C_{10}^2\right)$: **327.** 1200 **329.** ա) $C_{10}^6=C_{10}^4$ բ) $C_{10}^4<C_{10}^5$ գ) $C_{10}^7>C_{10}^9$ դ) $C_{10}^6>C_{11}^9$ **331.** ա) 4, 5 բ) 7, 8 գ) 5 դ) 10 **332.** 495 Ցուցում: Տե՛ս 3-րդ օրինակը: **333.** 495 Ցուցում: Յուրաքանչյուր ճանապարհի համապատասխանում է 12 տառանոց բառ՝ բաղկացած 8 հատ Ա (աջ) և 4 հատ Վ (վերև) տառերից: Օգտվել 332-րդ առաջադրանքից: **334.** ա) 4 բ) 5 գ) 8 դ) 5 **336.** 40 կգ **337.** 70 կգ **338.** ա) $x^5+5x^4+10x^3+10x^2+5x+1$ բ) x^4-8x^3+ $+24x^2-32x+16$ գ) $x^8-4x^7+6x^6-4x^5+x^4$ դ) $x^{15}+5x^{12}+10x^9+10x^6+$ $+5x^3+1$ **339.** ա) -15120 բ) -540 գ) 112 դ) -50 **340.** ա) -10 բ) 112 գ) 960 դ) 2268 **341.** 16 **342.** 5 **345.** ա) Ցուցում: Օգտվել $12^n=(13-1)^n$ հավասարությունից և Նյուտոնի երկանդամի բանաձևից: **346.** Ցուցում: Օգտվել $C_n^0+C_n^1+$ $+\cdots+C_n^n=2^n$ հավասարությունից: ա) 20 բ) 35 **350.** Ցուցում: Օգտվել $\operatorname{tg}x+$ $+\operatorname{ctg}x\geq 2$ անհավասարությունից: **351.** Ցուցում: Օգտվել $C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=$ $=2^n$ հավասարությունից: ա) -5 բ) 70 **352.** 20 **353.** 7,1 **355.** ա) $\{2,3,5,6\}$ բ) $\{1,3,5,6\}$ գ) $\{1,2,3,6\}$ դ) $\{1,2,3,5\}$ ե) $\{1,2,3,5\}$ զ) $\{1,2,3,5\}$ **356.** $B\cup C=B\cup D=$ $=C\cup D$ **357.** «Զառերի արդյունքները տարբեր են», «զառերից յուրաքանչյուրի արդյունքը 4 չէ», «զառերի արդյունքների գումարը 7 չէ, «կարմիր զառի արդյունքը գերազանցում է սպիտակինը», «զառերից գոնե մեկի արդյունքը 5 չէ» **358.** 1024 Ցուցում: Տե՛ս 3-րդ պարագրաֆի 6-րդ օրինակը: **359.** ա) 2/3 բ) 0,13 գ) 0,2 դ) 0,75 **360.** $P(A)=P(D)=1/3$, $P(B)=P(C)=0{,}5$, $P(A\cup B)=P(A\cup C)=$ $=P(A\cup D)=P(B\cup C)=P(B\cup D)=P(C\cup D)=2/3$ **361.** ա) 0,25 բ) 0,25 գ) 0,5 **362.** ա) 0,2 բ) 0,25 գ) 0,35 դ) 0,74 **363.** ա) 0,375 բ) 0,875 գ) 0,875 դ) 0,5 **364.** ա) 5/36 բ) 1/12 գ) 1/12 դ) 2/9 ե) 5/12 զ) 0,25 է) 0,75 **365.** ա) 7 բ) 2, 12 **366.** Ոչ **367.** ա) 1/3 բ) 0,2 գ) 0,1 դ) 13/90 **368.** ա) 0,2 բ) 0,2 գ) 5/27 **369.** ա) 5/36 բ) 0,03 **372.** ա) 2/3, 1/3 **374.** Ցուցում: բ) Օգտվել 264-րդ առաջադրանքից: **375.** ա) 1/120 բ) 0,05 գ) 0,4 դ) 0,6 **376.** 1/376992 **377.** ա) 1/24 բ) 1/4 գ) 1/6 դ) 1/2 **378.** ա) 20/29 բ) 25/87 գ) 2/87 **379.** ա) 5/34 բ) 7/102 գ) 15/34 դ) 95/102 **380.** ա) 1/22 բ) 65/66 գ) 23/66 դ) 5/11 **381.** 1/30 **382.** ա) $(4;2)$ բ) $(1;1)$, $(4;2)$ գ) $(25;36)$ դ) $(512;1)$ **383.** ա) 1 բ) 2 գ) 3 **384.** ա) 1 բ) 3 գ) 2 **385.** 1 **386.** 2 **387.** 4 **388.** 3 **389.** ա) 1 բ) 3 գ) 1 դ) 4 **390.** ա) 3 բ) 1 գ) 2 դ) 1 **391.** ա) 3 բ) 2 գ) 3 դ) 4 **392.** 2 **393.** 3 **394.** ա) 2 բ) 2 գ) 2 դ) 2 **395.** 1 **396.** 1 **397.** 1 **398.** 4 **399.** 4 **400.** 2 **401.** 4 **402.** 2 **403.** 4 **404.** 3 **405.** 4 **406.** 3 **407.** 3 **408.** 1 **409.** 2 **410.** 1 **411.** 3 **412.** 2 **413.** 1 **414.** 1 **415.** 2 **416.** 2

417. 1 **418.** 4 **419.** 1 **420.** 2 **421. ա)** $\varnothing$ **բ)** $(0;0)$, $(6;6)$, $\left(2+2\sqrt{2};2-2\sqrt{2}\right)$, $\left(2-2\sqrt{2};2+2\sqrt{2}\right)$ **գ)** $(3;2)$, $(-3;-2)$ **դ)** $(2;3)$, $(3;2)$ **ե)** $(3;4)$, $(4;3)$, $\left(6+\sqrt{29};6-\sqrt{29}\right)$, $\left(6-\sqrt{29};6+\sqrt{29}\right)$ **զ)** $\left(-\left(\sqrt{41}+5\right)/2;\left(\sqrt{41}-5\right)/2\right)$, $\left(\left(\sqrt{41}-5\right)/2;-\left(\sqrt{41}+5\right)/2\right)$, $(1;4)$, $(4;1)$ **422.ա)** $(1;3)$, $(3;1)$ **բ)** $(2;3)$, $(3;2)$, $(-6;1)$, $(1;-6)$ **423. ա)** $(1;9)$, $(9;1)$ **բ)** $(4;16)$, $(16;4)$ **424. ա)** $(5;-3)$, $(-1;3)$ **բ)** $(3;7)$, $(-3;-11)$ **425. ա)** $(1;1/3)$, $(1/3;1)$ **բ)** $(4;1)$, $(1;4)$ **426. ա)** 1 **բ)** 2 **427. ա)** 1 **բ)** -1 **428. ա)** 1 **բ)** 4 **429.** 1 **430.** 3 **431.** 3 **432.** 1 **433.** 2 **434.** 4 **435. ա)** 16 **բ)** -7 **436. ա)** $a=3{,}4$, $b=-6{,}8$ **բ)** $a=4$, $b=-6$ **437.** բ, գ, դ, զ **438.** դ, ե, զ **439.** բ, գ, ե, զ **440.ա)** 2 **բ)** 4 **գ)** 4 **դ)** 3 **441.ա)** 31 **բ)** 28 **442. ա)** 100 **բ)** 96 **443. ա)** 38 **բ)** 740 **444. ա)** -73 **բ)** $-8/19$ **գ)** $2/17$ **445.** 9, -3 **446. ա)** -8 **բ)** -4, $16/7$ **447. ա)** 52 Ցուցում: Գտնել k-ի այն արժեքը, որի դեպքում $t^2-27t+k=0$ հավասարման t_1 և t_2 արմատները ոչ բացասական են, և $t_1^2+t_2^2=620$: **բ)** 30 **448.ա)** 26, -24 **բ)** -7 **449. ա)** $\left(-\infty;-6\sqrt{10}\right)\cup\left(6\sqrt{10};21\right)$ **բ)** $(6\sqrt{10};25]$ **450. ա)** 7 **բ)** 25, -49 **451.** $(-\infty;-3)\cup[1;+\infty)$ **452.** $(-\infty;-3)\cup(0;+\infty)$ **453.** $(2;5)$ **454.** $\left(3+2\sqrt{5};+\infty\right)$ **455.** 1 **457. ա)** 12, $6-6\sqrt{3}$ **բ)** 4, -2 **458. ա)** 4, -9, -100 **բ)** 16, -1, $25/9$ **459.ա)** 2, 5, 8 **բ)** -1, 1,5, 4 **460.ա)** 1, 25 **բ)** -1, ± 2 **461. ա)** 5, -1 **բ)** 4, -12 **462. ա)** -9 **բ)** -25, -1, 0 **463. ա)** 3 **բ)** -9 **464. ա)** 3 **բ)** 1 **465. ա)** $[-3;2]$ **բ)** $(-\infty;-1]\cup[1{,}5;+\infty)$ **466. ա)** $(-\infty;-4{,}5]\cup(-2;3)$ **բ)** $(0;1/3]\cup(1;+\infty)$ **467. ա)** $(3;+\infty)$ **բ)** $(-1;+\infty)$ **468. ա)** $\left(1;3-\sqrt{3}\right)\cup\left(3+\sqrt{3};+\infty\right)$ **բ)** $(-\infty;1/3)\cup(2/3;1)$ **469. ա)** $(1;4)$ **բ)** $(-\infty;0{,}5)\cup(1;+\infty)$ **470. ա)** $(-\infty;1)$ **բ)** $[0{,}25;3{,}5]$ **471. ա)** $(-9;1/3)$ **բ)** $(-\infty;-5/3]\cup[-1;+\infty)$ **472. ա)** $\left(-\infty;2\sqrt{2}\right)\cup\left(2+2\sqrt{3};+\infty\right)$ **բ)** $\left(-\infty;-3-\sqrt{10}\right)\cup$ $\cup\{-1\}\cup\left(\sqrt{10}-3;+\infty\right)$ **473. ա)** $(-\infty;-3]\cup(0;+\infty)$ **բ)** $(-\infty;-4)\cup(-2;4)\cup(6;+\infty)$ **474.** 1 **475.ա)** $\left(\left(27-\sqrt{453}\right)/6;+\infty\right)$ **բ)** $(-\infty;-2]\cup\left[5;74/13\right)$ **476. ա)** $(-1;1)$ **բ)** $(0;5]$ **477. ա)** 4 **բ)** 7 **գ)** 1 **դ)** 2 **ե)** 5 **զ)** 3 **է)** 6 **478. ա)** 4 **բ)** 5 **գ)** 3 **դ)** 1 **ե)** 2 **զ)** 6 **479. ա)** 2 **բ)** 4 **գ)** 2 **դ)** 1 **ե)** 3 **480. ա)** $(-2;2)\cup[4;+\infty)$ **բ)** $(-\infty;-2]\cup(0;2)\cup$ $\cup(2;+\infty)$ **481.ա)** $(-\infty;-\sqrt{2}]\cup[0;\sqrt{2}]$ **բ)** $[-\sqrt{7};0]\cup[\sqrt{7};+\infty)$ **482.** 4 **483.** 2 **484.** 2 **485.** 3 **486.** 3 **487.** 4 **488.** 2 **489.** 3 **490.ա)** 1 **բ)** 2 **գ)** 4 **491. ա)** 3 **բ)** 2 **գ)** 1 **դ)** 4 **492.** 140 **493.** 129 **494.** 12 **495.** 999 **496.** 29415 **497.** 1,9 **498.** 6 **499.** 54 **500.** -1023 **501.** 1, 3, 9 **502.** $3069/256$ **503.** 1 **504.** $\pi k/2$ **505.** $\log_2 5$ **506.** $(-1)^k\pi/12+\pi k/2$ **507.** -1 **508.** 2, 0,5 **509.** 128, 0,5 **510.** -10, -7, $-109/7$ Ցուցում: Որոնելի a-ի դեպքում $t^2+(a-3)t+(a+10)^2=0$ հավասարումն ունի երկու՝ $t_2>t_1\ge 0$ արմատներ այնպես, որ $t_1=0$ կամ $t_2-t_1=t_1-$ $-(-t_1)$, այսինքն՝ $t_2=9t_1$: **511.** $a=2/27$, $x_1=-\left(1+\sqrt{3}\right)/3$, $x_2=-1/3$, $x_2=$ $=\left(\sqrt{3}-1\right)/3$ Ցուցում: Ցույց տալ, որ հավասարման արմատների գումարը x^2 անդամի գործակիցն է՝ հակառակ նշանով, այսինքն՝ -1: **512.** $a=11$, $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$ Ցուցում: Ցույց տալ, հավասարման արմատների գումարը 6 է:

513. 36 Ցուցում: Ցույց տալ, որ n և $n+1$ թվերից մեկը բաժանվում է 37-ի: **514. ա)** 4 **բ)** 1 **գ)** 1 **դ)** 4 **515. ա)** 1 **բ)** 4 **գ)** 4 **դ)** 2 **516. ա)** 1 **բ)** 3 **գ)** 1 **դ)** 3 **517. ա)** 1 **բ)** 2 **գ)** 4 **դ)** 2 **518.ա)** π **բ)** $9\pi/4$ **գ)** $\pi/2$ **դ)** 0 **519.ա)** $\pi/2$ **բ)** $\pi/2$ **գ)** $\pi/2$ **դ)** $\pi/2$ **520.ա)** $-\sqrt{3}$ **բ)** 3 **521.ա)** $\sqrt{3}$ **բ)** $\sqrt{6}$ **526.ա)** -2 **բ)** -4 **527. ա)** 1 **բ)** 1 **528. ա)** -2 **բ)** -18 **529. ա)** -1 **բ)** -1 **530. ա)** $-0{,}75$ **բ)** $15/8$ **531. ա)** $0{,}7\times$ $\times\sqrt{2}$, $-0{,}1\cdot\sqrt{2}$, $-1/7$ **բ)** $-4\cdot\sqrt{3}/7$, $-\sqrt{3}/12$ **532. ա)** 1 **բ)** -5 **533. ա)** $4/3$, 0,6 բ) 0,82 **534.ա)** $0{,}3\cdot\sqrt{10}$ **բ)** $0{,}2\cdot\sqrt{5}$ **535.ա)** $-0{,}8$ **բ)** $-0{,}28$ **536. ա)** 2 **բ)** 61 **537. ա)** $-0{,}75$ **բ)** 0,8 **538. ա)** $-0{,}8$ **բ)** 0,8 **539. ա)** $4/5$ **բ)** $12/13$ **գ)** 5 **դ)** 4 **540.ա)** $2\sqrt{2}/3$ **բ)** $-0{,}28$ **գ)** $-8/15$ **դ)** $-2{,}4$ **541. ա)** $-0{,}75$ **բ)** 0,75 **542. ա)** 0,36 **բ)** 0,96 **543.ա)** $2\sqrt{2}$ **բ)** $120/119$ **544. ա)** $5\pi/6$ **բ)** $-\pi/7$ **545. ա)** $-\pi/5$ **բ)** $9\pi/14$ **546. ա)** 7 **բ)** 9 **գ)** $\sqrt{13}$ **դ)** 5 **548. ա)** Ցուցում: Օգտվելով անկյունների գումարի տանգենսի և կրկնակի անկյան տանգենսի բանաձևերից՝ ցույց տվեք, որ հավասարության ձախ մասի տանգենսը 1 է: **549. ա)** 2 **բ)** 3 **գ)** 1 **դ)** 3 **550. ա)** 3 **բ)** 2 **գ)** 2 **դ)** 3 **551. ա)** 3 **բ)** 2 **գ)** 2 **դ)** 2 **552. ա)** $\pi/8+\pi k$, $11\pi/24+\pi k$ **բ)** πk, $-\pi/4+\pi k$ **553. ա)** $15\pi/112+\pi k/2$, $\pi/112+\pi k/2$ **բ)** $34\pi/15+8\pi k$, $74\pi/15+$ $+8\pi k$ **554. ա)** $-\pi/12+\pi k/4$ **բ)** $-\pi/36+\pi k/3$ **555. ա)** $\pi k/3$ **բ)** $\pm\pi/6+\pi k/2$ **556. ա)** $\pm\pi/3+2\pi k$ **բ)** $(-1)^k\pi/6+\pi k$ **557. ա)** $(-1)^k\arcsin\left(\left(\sqrt{5}-2\right)/4\right)+\pi k$ **բ)** $\pm\arccos\left(\left(\sqrt{5}-2\right)/4\right)+2\pi k$ **558.ա)** $3\pi+6\pi k$, $\pm2\pi+12\pi k$ **բ)** $\varnothing$ **559.ա)** $-\pi/4+$ $+\pi k$, $\operatorname{arctg}3+\pi k$ **բ)** $\pi/4+\pi k$, $-\operatorname{arctg}2+\pi k$ **560.ա)** $-\pi/4+\pi k$, $-\operatorname{arctg}(1/3)+$ $+\pi k$ **բ)** $\pm\pi/3+\pi k$ **561. ա)** $\pi k/2$, $\pm\pi/6+\pi k$ **բ)** $2\pi k/3$, $\pi/7+2\pi k/7$ **562. ա)** $\pi k/2$ **բ)** $0{,}125+0{,}25k$ **563. ա)** $x\in\mathbf{R}$ **բ)** $\pi/4+\pi k$, $\pi/8+\pi k/2$ **564. ա)** $2\pi k/3$, $\pi/6+2\pi k/3$ **բ)** $-\pi/8+\pi k$ **565. ա)** $\pi/6+2\pi k$ **բ)** $5\pi/12+2\pi k$, $11\pi/12+2\pi k$ **566. ա)** $7\pi/6+2\pi k$ **բ)** $\pi/12+\pi k$, $\pi/8+\pi k/2$ **567. ա)** $2\pi k/3$, $-\pi/6+2\pi k/3$ **բ)** $\pi/24+2\pi k$, $17\pi/24+2\pi k$ **568. ա)** $\pi/2+\pi k$, $(-1)^k\pi/6+$ $+\pi k/2$ **բ)** $2\pi k/3$, $\pi/4+\pi k$, $\pi/2+2\pi k$ **569. ա)** $\pi k/3$, $\pi k/2$, $\pi/10+\pi k/5$ **բ)** $\pi/8+\pi k/4$, $\pi/16+\pi k/8$ **570. ա)** $-\pi/4+\pi k$, $\pi+2\pi k$ **բ)** $-\pi/4+\pi k$, πk **571. ա)** $2\pi k$, $\pi/4+\pi k/2$ **բ)** $\pi/2+2\pi k$, $-\pi+4\pi k$, $2\pi+4\pi k$ **572. ա)** $\pi k/14$, $\pi k/18$ **բ)** $\pi k/2$ **573. ա)** $\pi k/7$, $\pi k/5$ **բ)** πk, $\pm\pi/6+\pi k$ **574. ա)** $\pi/4+\pi k$ **բ)** πk **575. ա)** $-\pi/4+\pi k$, $-\operatorname{arctg}2+\pi k$ **բ)** $\operatorname{arctg}0{,}5+\pi k$ **576. ա)** $\pi/4+\pi k$, $\operatorname{arctg}3+$ $+\pi k$ **բ)** $\operatorname{arctg}\left(-1\pm\sqrt{3}\right)+\pi k$ **577. ա)** $\operatorname{arctg}0{,}5+\pi k$, $-\operatorname{arctg}3+\pi k$ **բ)** $\pi/4+\pi k$, $\operatorname{arctg}0{,}2+\pi k$ **578. ա)** $(-1)^k\pi/6+\pi k/2$ **բ)** $0{,}5\operatorname{arctg}(4/3)+\pi k/2$ **579. ա)** $\pi/2+$ $+\pi k$, $(-1)^{k+1}\pi/18+\pi k/3$ **բ)** πk, $-\pi/6+\pi k$ **580. ա)** $\pi/2+2\pi k$ Ցուցում: Նկատել, որ ձախ մասի գումարելիները չեն գերազանցում, համապատասխանաբար, 1, 3 և 7 թվերը, որոնց գումարը 11 է: **բ)** $2\pi k$ **581.ա)** 0, 2, $\pi/4$ **բ)** ±2, $\pm0{,}5$, $\pm1{,}5$ **582.ա)** -2π, 0 **բ)** $(-1)^k\pi/6+\pi k$, $k=\pm1,\pm2,\ldots$ **583.ա)** $2\pi k$, $-\pi/2+2\pi k$ **բ)** $2\pi k$, $\pi/2+2\pi k$ **584. ա)** πk **բ)** $\pi/3+2\pi k$ **585. ա)** πk, $\sqrt{3}$, -1 **բ)** $\pm\pi/6+\pi k$ **586.** բ,

գ, զ **587.** ա, գ, ե, զ **588.** ա, բ, գ, ե, զ **589.** 1 **590.** 2 **591.** 2 **592.** 1 **593.** 4
594. ա) զույգ ցուցիչով աստիճանային **բ)** կոտորակային ցուցիչով աստիճանային
գ) մեկից փոքր հիմքով լոգարիթմական **դ)** մեկից մեծ հիմքով լոգարիթմական
ե) մեկից մեծ հիմքով ցուցչային **զ)** մեկից փոքր հիմքով ցուցչային **է)** կենտ ցուցիչով
աստիճանային **ը)** գծային **596. ա)** 1,61 **բ)** 10,64 **գ)** 1,23, $-3,24$ **դ)** $-1,74$,
1,73 **597. ա)** 5,19 **բ)** $-0,12$, 0,11 **գ)** 0,66 **դ)** 0,28 **598. ա)** 9 **բ)** -1, 5 **599. ա)** 4
բ) -1, 3 **600. ա)** $-0,6$, 4 **բ)** 4 **601. ա)** 3 **բ)** 3 **602. ա)** 0 **բ)** ± 2 **603. ա)** 7 **բ)** 0,
4 **604.ա)** 3 **բ)** 4 **605.ա)** 5 **բ)** 5 **606.ա)** 4 **բ)** 2,5 **607.ա)** 2 **բ)** 3 **608.ա)** 3,5 **բ)** 4
609.ա) 0 **բ)** 1 **610.ա)** 3 **բ)** 1,5 **611.ա)** 3 **բ)** 2 **612. ա)** 3 **բ)** 4 **613. ա)** -2, 1 **բ)** 3
614.ա) 0 **բ)** 4 **615.ա)** 4 **բ)** 4 **616.ա)** 2 **բ)** 8 **617. ա)** 2, 4 **բ)** 1, 2 **618. ա)** 1 **բ)** 2
619. ա) 0, 2 **բ)** ± 1 **620. ա)** 0, 1 **բ)** $-0,5$ **621. ա)** $\pm\pi/6+\pi k$ **բ)** $\pm\pi/3+\pi k$
622. ա) $\pm\pi/12+\pi k/2$ **բ)** $\pm\pi/24+\pi k/4$ **623. ա)** ± 2 Ցուցում: Նկատել, որ
$\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)=1$: **բ)** ± 4 **624. ա)** 1 Ցուցում: 8-ի ցուցիչում ազատվել կոտորակի
իռացիոնալությունից: **բ)** -3 **625.** գ, դ, զ **626.** ա, գ, դ, ե, զ **627.** բ, գ, ե
630. ա) $(-2,5;4)\cup(4;5)$ **բ)** $(2,5;5)\cup(5;7)$ **631. ա)** $(-2;0)\cup(0;1)\cup(1;4)$ **բ)** $(0;1)\cup$
$\cup(1;4/3)\cup(2;7/3)\cup(7/3;4)$ **632. ա)** $4+\sqrt{11}$ **բ)** -4 **633. ա)** 64 **բ)** 5 **634. ա)** 11
բ) -1 **635. ա)** 34 **բ)** -5 **636. ա)** 2 **բ)** -10 **637. ա)** 2, 4 **բ)** ± 1 **638. ա)** -1, 2
բ) 1 **639. ա)** 100, $10^{-7/3}$ **բ)** $\pm 0,2$, ± 125 **640. ա)** $-0,5$, 1 **բ)** $7/3$ **641. ա)** 343
բ) 8 **642. ա)** ± 16 **բ)** -9 **643. ա)** ± 2 **բ)** 0, ± 4 **644. ա)** $\sqrt{2}$ **բ)** 81 **645. ա)** $1/7$,
49 **բ)** 0,04, 25 **646. ա)** 100 Ցուցում: Ապացուցել, որ $5^{\lg x}=x^{\lg 5}$: **բ)** 49
647. ա) $\log_3 10$, $\log_3 28-3$ **բ)** $\log_5 20$ **648. ա)** $[-\sqrt{10};-0,1]\cup[0,1;\sqrt{10}]$ **բ)** 0,2,
$5^{7/3}$ **649.** 3 **650.** 4 **651.** 4 **652. ա)** 4 **բ)** 2 **գ)** 3 **դ)** 4 **653. ա)** 4 **բ)** 1 **գ)** 1 **դ)** 2
654.ա) $(-1,5;3)$ **բ)** $[0;1]\cup[4;+\infty)$ **655.ա)** $(0;8]$ **բ)** $(0;5)$ **656. ա)** $(-1;3,25)$ **բ)** $[0;9]$
657.ա) $(-\infty;4)\cup(4;25/3)$ **բ)** $\{0\}\cup[9;+\infty)$ **658.ա)** $[-3,5;1,5]\cup\{10\}$ **բ)** $[-8,5;-0,5]\cup$
$\cup[2,5;+\infty)$ **659. ա)** $(3;9)$ **բ)** $(-\infty;-2]\cup[10;+\infty)$ **660. ա)** $[0;36)$ **բ)** $(-\infty;3)$
661. ա) $[10;+\infty)$ **բ)** $(8;+\infty)$ **662. ա)** $(-\infty;5]$ **բ)** $[4;+\infty)$ **663. ա)** $(4;+\infty)$ **բ)** $(-\infty;3)$
664. ա) $(6;+\infty)$ **բ)** $[-9;+\infty)$ **665. ա)** $(4,5;+\infty)$ **բ)** $[0;4]$ **666. ա)** $[2;+\infty)$ **բ)** $[0;6,25)$
667. ա) $(-3;11/3)$ **բ)** $(-2,4;6]$ **668. ա)** $(-14/3;-2]\cup[2;14/3)$ **բ)** $[-6;-2)\cup(2;6]$
669.ա) $[-12;-6)$ **բ)** $(2;4]$ **670.ա)** $[-6;3)\cup(3;6]$ **բ)** $(-4;0)\cup(0;4)$ **671.ա)** $(-6;-4)\cup$
$\cup(1;3)$ **բ)** $(-5;-2]\cup[4;7)$ **672. ա)** $(1,5;7,5)$ **բ)** $(0,5;5]$ **673. ա)** $(0;2,5]\cup[4;6,5)$
բ) $(-0,5;2,5)\cup(4;7)$ **674. ա)** $(-2;0)\cup(0;3)$ **բ)** $[-4;2)\cup(2;3)$ **675. ա)** $[-8;-3)\cup$
$\cup(3;8]$ **բ)** $[-10;-5)\cup(3;8]$ **676. ա)** $(-4;-2]\cup[4;+\infty)$ **բ)** $[-5;-3)\cup(0;2]$
677.ա) $(0,1;100)$ **բ)** $[5;25]$ **678.ա)** $[-100;-0,1]$ **բ)** $(-\infty;-3)\cup(3;+\infty)$ **679.ա)** $(1/3;9)$
բ) $(0;0,125)\cup(4;+\infty)$ **680. ա)** 2,5 **բ)** -1 **681. ա)** $(2;1)$ **բ)** $(1;0,5)$ **682. ա)** $(5;5)$
բ) $(8;2)$, $(0,25;64)$ **689. ա)** 0 **բ)** 0 **գ)** 0 **690. բ)** 0 **գ)** 7 **դ)** 1327 **691. ա)** $x^{-0,5}+$
$+x^{-2}+0,25\cdot x^{-0,75}$ **բ)** $0,2x^{-0,75}-10x^2-0,4x^{-3}$ **692. ա)** $x^{-1}+60x^4$ **բ)** $7x^6+x^{-1}$
693. ա) x^2e^x **բ)** $e^{2x}\left(2x^3+3x^2+2\right)$ **694. ա)** $\dfrac{1}{x\cos^2 x}-\dfrac{\operatorname{tg} x}{x^2}$ **բ)** $-\dfrac{\sin x}{\ln 5x}-\dfrac{\cos x}{x\ln^2 5x}$

695.ա) $-\frac{2}{x^3}+\frac{2}{\cos^2 2x}$ **բ)** $-\frac{6}{\sin^2 3x}+\frac{2}{x^3}$ **696.ա)** $3\cos 3x+2^x\ln 2$ **բ)** $-4\sin 4x+$ $+\frac{1}{x\ln 2}$ **697. ա)** $\frac{2-\ln x}{x^2}$ **բ)** $\frac{e^x(x-3)+3}{x^4}$ **698. ա)** $3\left(\sqrt[3]{x}-2\sqrt{x}\right)^2\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ **բ)** $3\cos 2x(\sin x+\cos x)$ **699. ա)** $2x\sin x+x^2\cos x$ **բ)** $3x^2\,\mathrm{tg}\,x+\frac{x^3}{\cos^2 x}+2e^{2x}$ **700. ա)** 1,25 **բ)** $-0,25$ **701. ա)** 1 **բ)** 2,5 **702. ա)** 1 **բ)** $-0,5$ **703. ա)** -4 **բ)** 4 **704.ա)** 1 **բ)** 0,25 **705. ա)** 0,5 **բ)** 0 **706. ա)** 6 **բ)** 15 **707. ա)** 5 **բ)** 0,25 **708. ա)** $a=5$, $b=2$ կամ $a=-5$, $b=-2$ **բ)** $a=5$, $b=4$ **գ)** $a=2$, $b=5$ **709. ա)** $81-\pi$, 30 **բ)** e^3+e^{-3}, e^3-e^{-3} **710. ա)** $5\frac{26}{27}$, $4/81$ **բ)** 34, 47 **711.** 1 մ/վրկ^2, 2 մ/վրկ^2 **712.** $(-1)^{k+1}\pi/6+\pi k$ **713.** $\pi/6+\pi k$ **714.** $-\pi/8+\pi k/2$ **715.** 1, 16 **716.** -2 **717.** $(-\infty;0)\cup(0;2,5]$ **719. ա)** Ցուցում: Օգտվել միջանկյալ արժեքի վերաբերյալ թեորեմից (գլ. 2, §1): **720. ա)** 30° **բ)** 60° **գ)** 60° **դ)** 135° **721. ա)** 0, 4 **բ)** 0,25 **722. ա)** -5, 6 **բ)** -5 **գ)** $8/e-1$ **դ)** 12 **723. ա)** $y=3-x$ **բ)** $y=6-3x$ **724. ա)** $y=-3x/2+5/16$ **բ)** $y=x/4+2$ **725. ա)** $y=3ex+3e$ **բ)** $y=0,375x-0,75\ln 2+1,25$ **726. ա)** $y=-\sqrt{2}x/2+\sqrt{2}\pi/8-\sqrt{2}/2+1$ **բ)** $y=x/2$ **727. ա)** -1 **բ)** ± 1 **728. ա)** 0 **բ)** $-5\pi/6$ **729. ա)** -3 **բ)** 8 **730. ա)** 4,5 **բ)** 2 **731. ա)** 3,2 **բ)** 1 **732.** 1 **733.** -3, 1 **734.** -10, 2 **735.** -16 **736.** $a=3$, $b=1$ **737.** $-23,25$ Ցուցում: Եթե նշված շոշափողի հավասարումն է՝ $y=kx+b$, ապա նրա և g ֆունկցիայի գրաֆիկի հատման կետում g ֆունկցիայի ածանցյալի արժեքը k է: **738. ա)** $8/3$ **բ)** 1 **գ)** -3, 1, 5 **739. ա)** 9 **բ)** 12 **740. ա)** $\uparrow(-\infty;0]$-ում և $[2;+\infty)$-ում, $\downarrow[0;2]$-ում **բ)** $\uparrow[-5;1]$-ում, $\downarrow(-\infty;-5]$-ում և $[1;+\infty)$-ում **741. ա)** $\uparrow\left(-\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$-ում **բ)** $\uparrow[0;+\infty)$-ում **742. ա)** $\uparrow[1;+\infty)$-ում, $\downarrow(0;1]$-ում **բ)** $\uparrow[3;+\infty)$-ում, $\downarrow(2;3]$-ում **743. ա)** $\uparrow[\log_{27}2;+\infty)$-ում, $\downarrow(-\infty;\log_{27}2]$-ում **բ)** $\uparrow\left[-\ln\sqrt[4]{1,5};+\infty\right)$-ում, $\downarrow\left(-\infty;-\ln\sqrt[4]{1,5}\right]$-ում **744.** -5 **745. ա)** -24 **բ)** 5 **746. ա)** $x_{max}=-1$, $x_{min}=3$, $y_{max}=5/3$, $y_{min}=-9$ **բ)** $x_{max}=0$, $x_{min}=\pm\sqrt{5}$, $y_{max}=9$, $y_{min}=-16$ **747.ա)** $x_{max}=1/3$, $y_{max}=1/(3e)$ **բ)** $x_{min}=1,5$, $y_{min}=-1/(2e^3)$ **748.ա)** $x_{min}=0,5$, $y_{min}=0$ **բ)** $x_{max}=-2$, $x_{min}=2$, $y_{max}=2$, $y_{min}=0$ **749. ա)** $x_{max}=1$, $y_{max}=-1$ **բ)** $x_{max}=1$, $y_{max}=-1$ **750.ա)** 5, -15 **բ)** 11, -9 **751.ա)** 0, $-9\frac{13}{27}$ **բ)** 0, $-32/27$ **752. ա)** 1, -3 **բ)** 0, $-0,6\cdot\sqrt[3]{0,16}$ **753. ա)** $1/3$, -1 **բ)** 0, -3 **754. ա)** 2, 0 **բ)** 4, $\sqrt{7}$ **755. ա)** $\pi/3+\sqrt{3}/2$, 0 **բ)** 4, 1 **756. ա)** $2\pi/3+3\sqrt{3}$, $4\pi/3+\sqrt{3}$ **բ)** $3\sqrt{3}/8$, 0 **757. ա)** $5+\ln 2$, $\ln 4-2$ **բ)** $5/e$, $2,5\ln 2$ **758. ա)** 2, -2 **բ)** 3, -3 **գ)** 6, $2\sqrt{3}$ **դ)** 25, -15 **759. ա)** 1 **բ)** 3 **գ)** 2 **դ)** 2 **760.** ա, գ, ե **761.** -3, -1 **762.** 0,5 **763.** -3 **764.** $36=18+18$ **765.** $64=63,5+0,5$ **766.** 2 **767.** 3 սմ **768.** 4 **769.ա)** 2 **բ)** 2 **գ)** 4 **դ)** 3 **770.ա)** 3 **բ)** 2 **գ)** 2 **դ)** 3 **771.ա)** 3 **բ)** 2 **գ)** 4 **դ)** 1 **772. ա)** 2 **բ)** 1 **գ)** 4 **դ)** 4 **773. ա)** 4 **բ)** 3 **գ)** 1 **դ)** 4 **774.** 30 **775.** 2,5 **776.** 15, 30 **777.** 27 **778.** 16, 24, 48

779. 250 **780.** 2 **781.** 8 **782.** 9 **783.** 4 **784.** 42 **785.** 40 **786.** 45, 36 **787.** 360 **788.** 23,4 կմ/ժ **789.** 56 կմ/ժ **790.** 10 ժ, 15 ժ **791.** 80 կմ/ժ **792.** 3 կմ/ժ **793.** 80 կմ/ժ **794.** 12 կմ, 32 կմ **795.** 7 կմ/ժ **796.** 13 կմ/ժ **797.** 8,25 **798.** 56 կմ **799.** 100 կմ/ժ և 80 կմ/ժ կամ 80 կմ/ժ և 60 կմ/ժ **800.** 30 կմ/ժ, 60 կմ/ժ **801.** 6 **802.** 3 ժ **803.** 8 ժ, 16 ժ **804.** 5 սմ/վրկ, 3 սմ/վրկ **805.** 20/3 կմ/ժ, 10 կմ/ժ **806.** 5 կգ **807.** 1,25 կգ **808.** 3:1 **809.** 1:3 **810.** 1:3 **811.** 2:5 **812.** 3 կգ, 7 կգ **813.** 400 գ **814.** 45 կգ **815.** 40 կգ **816.** 8 **817.** 25 **818.** 900 **819.** 994704 **820.** 40 լ **821.** 82,5 **822.** 10 **823.** 7 **824.** 8,75 **825.** 2,5 կգ **826.** 4000 դր, 2000 դր **827.** 68 **828.** 420 **829.** 452 **830.** 24 **831.** 54 **832.** 98 **833.** 98 **834.** 64 **835.** 37, 73 **836.** 16, 28 **837.** 12 լ, 8 լ, 7 լ **838.** 15, ոչ **839.** 2 **840.** 25 **841.** Հայրը՝ 50, որդին՝ 25 **842.** 25 **843.** 24 Ցուցում: Զրոների քանակը համընկնում է նշված արտադրյալի 5 արտադրիչների քանակին: **844.** 100 Ցուցում: Օգտվել $\frac{100x+10y+z}{x+y+z}=\frac{90x}{x+y+z}+\frac{9(x+y)}{x+y+z}+1$ նույնությունից: **845.** 1 **846.** 2 **847.** 3 **848. ա)** այո **բ)** ոչ **849.** 3 **850.** 1 **851.** 4 **852. ա)** այո **բ)** այո **գ)** այո **դ)** այո **853-858.** Ցուցում: Օգտվել Էյլեր Վեննի գծապատկերներից և 264-րդ առաջադրանքից: **853.** 8 **854.** 330 **855.** 6 **856.** 45 **857.** 96 և 70 **858. ա)** 14 **բ)** 4 **գ)** 17 **դ)** 1 **859.** $\{12n-6 : n\in\mathbf{N}\}$ **860.** $(2m;(9^m-5)/4)$, $m\in\mathbf{N}$ Ցուցում: Ցույց տալ, որ 3^x-ը 4-ի բաժանելիս ստացվում է 1 մնացորդ, եթե x-ը զույգ է, և 3 մնացորդ, եթե x-ը կենտ է: **861. ա)** $\operatorname{arctg}2+2\pi k$ **բ)** $\arcsin\left(\sqrt{1{,}25}-0{,}5\right)+2\pi k$ **862. ա)** 7/3 **բ)** 4,5, 5 **գ)** $\sqrt{5}$ **դ)** $\left(\sqrt{13}-1\right)/2$ **863. ա)** $10^{-\sqrt{2}}$ **բ)** $\pi-\arcsin(2/3)$, π Ցուցում: Դիտարկել $[x]=2$ և $[x]=3$ հնարավոր դեպքերը: **864. ա)** $\pm\sqrt{2\pi k+7}$, $k=-1,0,1,2,\ldots$ **բ)** $(-1)^k\arcsin(\pi/4)+\pi k$ **գ)** 1/3 **865. ա)** $(-1;1]$ **բ)** $\{0\}$ **գ)** $(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$ **դ)** $[0{,}75;+\infty)$ **866. ա)** $y=(x+1)/(1-x)$, **բ)** $y=x^4$, $x\in[0;+\infty)$ **գ)** $y=\sqrt[3]{(1-x)/x}$, **դ)** $y=\sqrt{1+x}-1$, երբ $x\geq 0$, $y=1-\sqrt{1-x}$, երբ $x<0$ **867.** 6, 0 **868.** Երբ $a<1$, հավասարումն արմատ չունի, երբ $a\geq 1$, հավասարումն ունի մեկ արմատ **869. ա)** 63 Ցուցում: Գրաֆիկորեն հիմնավորեք, որ հավասարումն ունի 2 արմատ $[2\pi k,\pi+2\pi k]$ և $[-(\pi+2\pi k),-2\pi k]$, $k=1,2,\ldots,15$, միջակայքերից յուրաքանչյուրում և 3 արմատ $[-\pi,\pi]$ միջակայքում: **բ)** 3 **870.** $\left(-\sqrt{2}/2;0\right)\cup\left(0;\sqrt{2}/2\right)$ Ցուցում: Տրված հավասարումը կունենա 2 արմատ, եթե $t^2-2t+2a^2=0$ հավասարումն ունենա 2 դրական արմատ: **871.** 2,5 Ցուցում: Համակարգի երկրորդ հավասարումով որոշվում է $y=\sqrt{14}-x$ և $y=-\sqrt{14}-x$ ուղիղների զույգը, որոնք պետք է շոշափեն առաջին հավասարումով տրված շրջանագիծը: **872. ա)** $(0;0{,}5)$ **բ)** $(-\infty;0)\cup(1;2)$ **873. ա)** $(-\infty;-4)\cup(-1;\log_6 5]$ **բ)** $(0{,}5;1)$ **874. ա)** $(0;1)\cup(10;+\infty)$ **բ)** $(-1;1)\cup(2;+\infty)$ **875. ա)** $(-\infty;1]$ Ցուցում: $x\leq 1\Rightarrow x+2^x\leq 3$: **բ)** $[1;+\infty)$ **876. ա)** $(-\infty;1]$ **բ)** $(0;1)$ **877. ա)** $(0;1]$ **բ)** $\pi/2+2\pi k$, $k=7,8,\ldots$ **878. ա)** $(1;2]\cup$ $\cup[16;+\infty)$ **բ)** $[7;+\infty)$ **879.** $\left(a^{-a\sqrt{2-a^2}};a^{-1}\right]$, երբ $0<a<1$, $\varnothing$, երբ $a>1$ **880.** երբ $a=1$, $a_n=n$, երբ $a\neq 1$, $a_n=(a^n-1)/(a-1)$ **883. ա)** «անհրաժեշտ է, բայց ոչ բավարար» **բ)** «բավարար է, բայց ոչ անհրաժեշտ» **գ)** «բավարար է, բայց ոչ անհրաժեշտ» **դ)** «անհրաժեշտ է և բավարար» **884.** **ա)** ճշմարիտ է **բ)** կեղծ է **885.** 2-ը և 4-ը **886.** $x \in \mathbf{Z} \setminus \{1;2\}$ կամ $x = \left(k \pm \sqrt{k^2 - 4}\right)/2$, $k = 4, 5, 6, \ldots$ **889.** 15

890. **ա)** $[1;+\infty)$ Ցուցում: Պետք է գտնել a-ի այն արժեքները, որոնց դեպքում $at^2 + 4(a-1)t + a - 1$ եռանդամը դրական է դրական t-երի համար: **բ)** $\left(-2;\left(-1-\sqrt{5}\right)/2\right) \cup \left(\left(\sqrt{5}-1\right)/2;1\right)$ **891.** **ա)** $(1/9;1/3)$, $(9;27)$ **բ)** $\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}};\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right)$ **892.** **ա)** $(2;2)$ **բ)** $(1;2)$ **893.** $(-\infty;-1]$ **894.** **ա)** -7 **բ)** 2

896. $4\sqrt{3}/7$, $5\sqrt{3}/14$ **897.** $8\sin\alpha/(2-\cos\alpha)$ **898.** **ա)** $6a$ **բ)** $\sqrt{3}a^2/3$ **գ)** $2\sqrt{3}\pi a/3$ **դ)** $\pi a^2/9$ **900.** **ա)** $f(x) = 1/(1-x)$, $x \neq 0$, $x \neq 1$ Ցուցում: Տրված հավասարության մեջ x-ի փոխարեն տեղադրել $\frac{1}{x}$: **բ)** $f(1) = 1$, $f(x) = 4 + 2/(x-1)$, երբ $x \neq 0{,}5$, $x \neq 1$: Ցուցում: Տրված հավասարության մեջ x-ի փոխարեն տեղադրել $\frac{x}{2x-1}$:

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Գեղամ Գրիգորի Գևորգյան
Արթուր Արտուշի Սահակյան

Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր

Ավագ դպրոցի
12 -րդ դասարանի դասագիրք
(բնագիտամաթեմատիկական հոսքի համար)

ՎԵՐԱՀՐԱՏԱՐԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Պատվեր՝ 1232: Տպաքանակ՝ 2347:
Թուղթը՝ օֆսեթ: Չափսը՝ 70x100/16: 13 տպ. մամուլ:
Տառատեսակը՝ Times Armenian:

Տպագրված է **«Տիգրան Մեծ»** հրատարակչություն ФБԸ տպարանում