Առաջաբան

Ձեռնարկը բաղկացած է երկու մասից: Առաջին մասը ներառում է վեկտորական հանրահաշվի և անալիտիկ երկրաչափության տարրերը հարթության վրա և տարածության մեջ, իսկ երկրորդ մասը՝ գծային հանրահաշվի տարրերը: Ձեռնարկը հագեցած է բազմաթիվ տիպային խնդիրների և վարժությունների լուծումներով: Կան նաև խնդիրներ տնային և լսարանային պարապմունքների համար: Պահպանված են ուսումնական գործընթացի հաջորդականությունը, մատչելիության սկզբունքներն ու մակարդակը:

Ուսումնական ձեռնարկը նախատեսված է տնտեսագիտական, տեխնիկական, ինչպես նաև մանկավարժական համալսարանների ուսանողների համար:

Հեղինակները երախտապարտ են Վանաձորի մանկավարժական ինստիտուտի անալիտիկ երկրաչափության ամբիոնի վարիչ՝ ֆիզմաթ. գիտությունների թեկնածու, դոցենտ Մելիս Սահակյանին և նույն ամբիոնի դասախոս՝ ֆիզմաթ. գիտությունների թեկնածու, դոցենտ Աշոտ Առաքելյանին, որոնք ծանոթացել են ձեռնարկին՝ կատարելով դիտողություններ և առաջարկություններ, որոնք հնարավորություն են տվել մեզ ուղղելու մի շարք վրիպակներ և թերություններ: Երախտապարտ ենք նաև ֆիզմաթ. գիտությունների թեկնածու, դոցենտ Գոհար Պետրոսյանին՝ տեքստի ձևավորման ժամանակ օգնություն ցուցաբերելու համար:

Շնորհակալությամբ կընդունենք բոլոր ընթերցողների դիտողություններն ու առաջարկությունները, որոնք հաշվի կառնվեն գրքի հաջորդ հրատարակման ժամանակ:

հեղինակներ՝ Անդրեյ Մերգևոսի Ավետիսյան, Ժորա Սարիբեկի Հովհաննիսյան

Բովանդակություն

Անալիտիկ երկրաչափություն և գծային հանրահաշիվ

Անալիտիկ երկրաչափությունը մաթեմատիկայի այն բաժինն է, որն ուսումնասիրում է երկրաչափական պատկերների հատկությունները հանրահաշվական մեթոդների օգնությամբ ու նաև այլ մեթոդներով:

Գծային հանրահաշիվն ուսումնասիրում է գծային հավասարումների համակարգերը, այսինքն այն հավասարումները, որոնց մեջ անհայտներն առաջին աստիճանի են:

Անալիտիկ երկրաչափության խնդիրների լուծման համար ներմուծվել է կոորդինատների մեթոդը, որը հնարավորություն է տալիս հարթության վրա յուրաքանչյուր կետի համապատասխանության մեջ դնել կարգավորված թվերի զույգ, իսկ տարածության յուրաքանչյուր կետի՝ կարգավորված թվերի եռյակ:

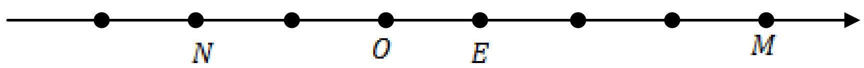
Կոորդինատների մեթոդի ներմուծման գաղափարը պատկանում է ֆրանսիացի մաթեմատիկոսներ՝ Ռենե Դեկարտին և Պիեր Ֆերմային:

Կոորդինատների մեթոդի հիմնական միջոցը հանդիսանում է կոորդինատների համակարգը:

Գլուխ1. Անալիտիկ երկրաչափություն

§ 1. Կետի դիրքի որոշումը ուղղի վրա, հարթության մեջ և տարածությունում կոորդինատների օգնությամբ: Կոորդինատների բևեռային համակարգ

Դիտարկենք որևէ l ուղղի վրա երկու կետեր O և E /նկ.1/:



նկ.1

O կետը l ուղիղը բաժանում է երկու ճառագայթի, որոնցից մեկին պատկանում է E կետը:

Անվանենք O կետը կոորդինատային համակարգի սկիզբ, l-ը կոորդինատային առանցք, իսկ E կետը միավոր կետ:

Ենթադրենք M կետը l ուղղի կամայական կետ է: Այդ կետին համապատասխանության մեջ դնենք x թիվը հետևյալ կերպ.

1/ $|x|$-ը OM հատվածի երկարությունն է, չափված OE միավոր հատվածի օգնությամբ:

2/ $x > 0$, եթե M և E կետերը պատկանում են (OE) ճառագայթին և $x < 0$, եթե M և E կետերը պատկանում են l ուղղի տարբեր ճառագայթներին O կետի նկատմամբ:

3/ $x = 0$, եթե M կետը համընկնում է O կետի հետ:

Այդ x թիվը կանվանենք M կետի կոորդինատ և կգրենք $M(x)$:

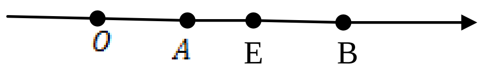
Հակառակը, ցանկացած x իրական թվի կարելի է համապատասխանության մեջ դնել l ուղղի վրա M կետը, որի համար x-ը կլինի կոորդինատ, եթե տրված է կոորդինատների սկիզբը/O կետը/ և E միավոր կետը:

N, O, E, M /նկ.1/ կետերն ունեն համապատասխանաբար -3,0,1,4 կոորդինատները:

Այժմ սահմանենք հատվածի երկարության գաղափարը:

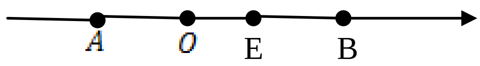
Ենթադրենք տրված են երկու կետեր $A(x_1)$ և $B(x_2)$: Գտնենք AB հատվածի երկարությունը: Այդ խնդիրը լուծելու համար քննարկենք վեց հնարավոր դեպքեր:

1/ (OE) և (AB) ճառագայթներն ունեն ընդհանուր ուղղություն, և A, B կետերը պատկանում են (OE) ճառագայթին/նկ.2ա/:



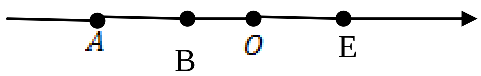
Նկ. 2ա

Այս դեպքում $x_1 > 0, x_2 > 0, x_2 > x_1$ և երկ.AB = երկ.OB - երկ.$OA = x_2 - x_1 > 0$:
2/ (OE) և (AB) ճառագայթներն ունեն ընդհանուր ուղղություն, A կետը պատկանում է (OE)-ի լրացման ճառագայթին, իսկ B կետը պատկանում է (OE) ճառագայթին /նկ. 2բ/:



Նկ. 2բ

Այս դեպքում $x_1 < 0, x_2 > 0$ և երկ.AB = երկ.OB + երկ.$OA = |x_1| + |x_2| = (-x_1) + x_2 = x_2 - x_1 > 0$:
3/ (OE) և (AB) ճառագայթներն ունեն ընդհանուր ուղղություն, A, B կետերը պատկանում են (OE) ճառագայթի լրացմանը /նկ. 2գ/: Այս դեպքում՝ $x_1 < x_2 < 0$, և երկ.AB = երկ.AO - երկ.$BO = |x_1| - |x_2| = (-x_1) - (-x_2) = x_2 - x_1 > 0$:



Նկ. 2գ

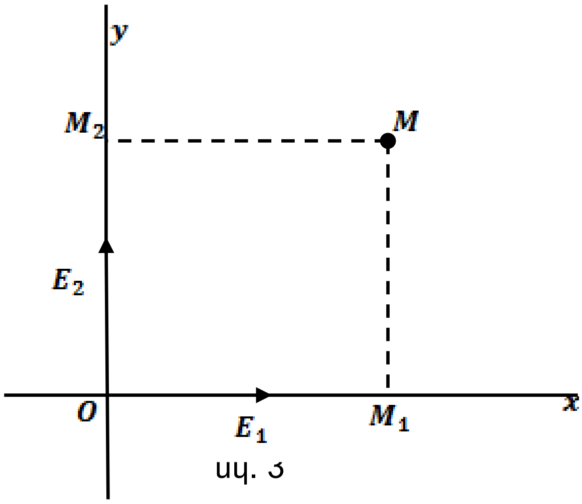
Քննարկված երեք դեպքերում մենք ենթադրենք, որ (AB) ճառագայթն ունի (OE) ճառագայթի հետ նույն ուղղությունը և ստացանք, որ հատվածի երկարությունը հավասար է $x_2 - x_1$:
Հաջորդ երեք դեպքերում ենթադրվում է, որ (OE) և (AB) ճառագայթներն ունեն հակադիր ուղղություն և նույն ձևով ցույց կտրվի, որ հատվածի d երկարությունը հավասար կլինի՝ $x_1 - x_2 > 0$: Հետևաբար, A, B կետերի կամայական դասավորության դեպքում նրանց d հեռավորությունը կորոշվի՝

$$d = |x_2 - x_1|$$

բանաձևով:
Դիտարկենք հարթության վրա երկու փոխուղղահայաց ուղիղներ: Ենթադրենք O կետը նրանց հատման կետն է, և E_1, E_2 կետերն այդ ուղիղներին պատկանող կետեր են, որոնք բավարարում են՝

երկ.OE_1 =երկ. OE_2:

O կետն անվանենք կոորդինատական համակարգի սկիզբ, OE_1 ուղիղը աբսցիսների առանցք կամ Ox առանցք, OE_2-ը օրդինատների առանցք կամ Oy առանցք, E_1, E_2 կետերը՝ միավոր կետեր Ox և Oy առանցքների վրա.



նկ. 3

Հարթության յուրաքանչյուր M կետին համապատասխանության մեջ դնենք երկու իրական թվեր՝ x և y, որոնք կորոշվեն հետևյալ կերպ. M կետից Ox և Oy առանցքներին տանենք զուգահեռ ուղիղներ մինչև առանցքների հետ M_2 և M_1 կետերում հատվելը:

M_1 կետն ունի x կոորդինատ OE_1 առանցքի նկատմամբ Ox ուղղի վրա և M_2 կետն ունի y կոորդինատ OE_2 առանցքի նկատմամբ Oy ուղղի վրա:

x թիվը կանվանենք M կետի աբսցիս, իսկ y թիվը՝ M կետի օրդինատ: x,y թվերի զույգը կանվանենք M կետի կոորդինատներ և կգրենք՝ $M(x,y)$:

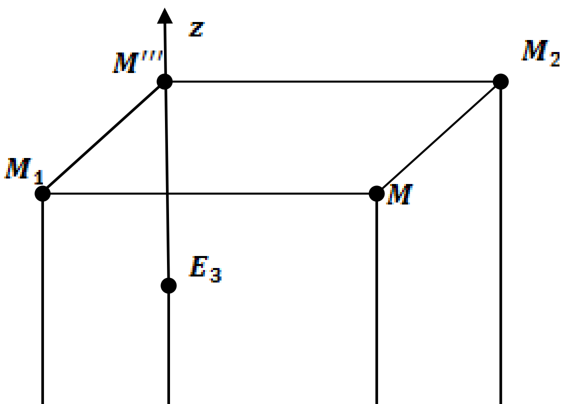
Այսպիսով, հարթությանը պատկանող յուրաքանչյուր M կետին համապատասխանում է x և y իրական թվերի զույգ: Հակառակը, յուրաքանչյուր (x,y) իրական թվերի զույգին, տրված համակարգի նկատմամբ, համապատասխանության մեջ է դրվում տրված հարթության M կետ, որի համար x և y կհանդիսանան կոորդինատներ:

Այժմ դիտարկենք O սկզբնակետով միմյանց փոխուղղահայաց Ox,Oy, Oz ուղիղներից կազմված համակարգը: Այս ուղիղներով տարածությունը կբաժանվի ութ մասերի: Այսպիսով, կոորդինատների ուղղանկյուն տարածական համակարգն ունի երեք կոորդինատական հարթություններ՝ Oxy, Oyz, Ozx: Ենթադրենք կետերը համապատասխանաբար այդ առանցքներին պատկանող կետեր են, որոնք բավարարում են հետևյալ պայմանին՝

$$\text{երկ.}OE_1 = \text{երկ.}OE_2 = \text{երկ.}OE_3:$$

O կետը կանվանենք կոորդինատական համակարգի սկիզբ, OE_1-ը կանվանենք աբսցիսների առանցք կամ Ox առանցք, OE_2-ը՝ օրդինատների առանցք, OE_3-ը կանվանենք ապլիկատների առանցք կամ Oz առանցք:

Ենթադրենք տարածության մեջ տրված է որևէ M կետ/նկ.4/:



Նկ. 4

Այս հարթությունները կհատեն Ox,Oy, Oz առանցքները համապատասխանաբար M',M'', M''' կետերում: M',M'', M''' կետերն ունեն x,y, z կոորդինատներ Ox,Oy, Oz առանցքներում սահմանված համապատասխան երկարությունների նկատմամբ: x,y, z երեք իրական թվերը կանվանենք M կետի կոորդինատներ. այն ընդունված է գրել՝ $M(x, y, z)$:

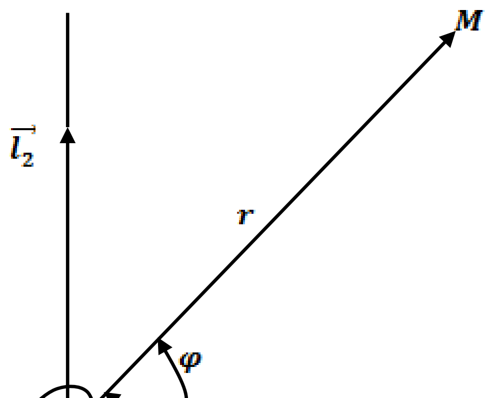
Այսպիսով, տրված համակարգի նկատմամբ յուրաքանչյուր կետի համապատասխանության մեջ է դրված միակ երեք թվերի եռյակը՝ դիտարկված որոշակի կարգով: Հակառակը, յուրաքանչյուր իրական թվերի եռյակի համապատասխանության մեջ կարելի է դնել միակ կետ տարածության մեջ, որի համար այդ թվերը հանդիսանում են կոորդինատներ: Դրա համար կոորդինատական առանցքների՝ Ox,Oy, Oz վրա կառուցենք M',M'', M''' կետերը x,y, z կոորդինատներով և այդ կետերով տանենք համապատասխան Oxy, Oyz, Ozx հարթություններին զուգահեռ հարթություններ: Այդ հարթությունների հատման կետում կգտնվի որոնելի M կետը:

Կոորդինատների բևեռային համակարգ

Թվերի միջոցով կետի դիրքի որոշումը մի ինչ-որ երկրաչափական պատկերի նկատմամբ դեկարտյան կոորդինատների օգնությամբ միակ եղանակը չէ: Այդ նպատակի համար օգտագործվում են բազմաթիվ այլ կոորդինատական համակարգեր: Նկարագրենք դրանցից մեկը:

Հարթության վրա հաճախ օգտագործվում է բևեռային կոորդինատական համակարգը: Այն որոշված է, եթե տրված է O կետը, որը կոչվում է բևեռ և նրանից դուրս եկող l ճառագայթը, որը կանվանենք բևեռային առանցք: M կետի դիրքը կորոշվի երկու թվերով. $r = |\overrightarrow{OM}|$ շառավղով և բևեռային առանցքով և $\overrightarrow{OM}$ վեկտորով կազմված φ անկյան առանցքով և $\overrightarrow{OM}$ վեկտորով կազմված φ անկյունով: φ անկյունը կոչվում է բևեռային անկյուն: Մենք այն կչափենք ռադիաններով և կհաշվենք բևեռային առանցքից ժամ սլաքի հակառակ ուղղությամբ:

Բևեռում $r = 0$, իսկ φ-ն որոշված չէ: Մնացած կետերի համար $r > 0$, իսկ φ-ն որոշվում է 2π թվի պատիկ մեծությամբ: Դա նշանակում է, որ (r, φ), $(r, \varphi + 2\pi)$ և, ընդհանրապես, $(r, \varphi + 2\pi k)$, որտեղ k-ն ցանկացած ամբողջ թիվ է, ներկայացնում են միևնույն կետի կոորդինատները/Նկ.1/:



նկ.1

Երբեմն բևեռային անկյան փոփոխության վրա դնում են ինչ-որ պայմաններ, օրինակ. $0 \leq \varphi < 2\pi$ կամ $-\pi < \varphi \leq \pi$: Այն վերացնում է ոչ միարժեքությունը, բայց ստեղծում է որոշ անհարմարություններ:

Ենթադրենք տրված է բևեռային կոորդինատական համակարգը և (r, φ) թվերի կարգավորված զույգը, որոնցից առաջինը ոչ բացասական է: Մենք կարող ենք այդ զույգին համապատասխանության մեջ դնել կետ, որի համար այդ թվերը կլինեն բևեռային կոորդինատներ: Ընդ որում, եթե $r = 0$, ապա մենք համապատասխանության մեջ կդնենք բևեռը: Եթե $r > 0$, ապա (r, φ) զույգին կհամապատասխանի կետ, որի վեկտոր-շառավիղը r է և կազմում է բևեռային առանցքի հետ φ անկյուն: Ընդ որում թվերի (r, φ) և (r_1, φ_1) զույգերին կհամապատասխանի միևնույն կետը, եթե $r = r_1$, իսկ $\varphi - \varphi_1 = 2\pi k$, k-ն ամբողջ թիվ է:

Հարթության վրա ընտրենք դեկարտյան ուղղանկյուն կոորդինատական համակարգ, որի սկիզբը տեղադրենք O բևեռում և ընդունելով որպես $\overrightarrow{l_1}, \overrightarrow{l_2}$ վեկտորներ՝ միավոր երկարությամբ, ուղղված համապատասխանաբար l առանցքով և l-ին տարված $\frac{\pi}{2}$ անկյունով:

Հեշտ է տեսնել/նկ.1/, որ կետի դեկարտյան կոորդինատները կարտահայտվեն նրա բևեռային կոորդինատներով.

$$x = rcos\varphi, \; y = rsin\varphi \tag{1}$$

բանաձևերով:

Կետի բևեռային կոորդինատները դեկարտյան կոորդինատներով արտահայտվում են հետևյալ բանաձևերի միջոցով՝

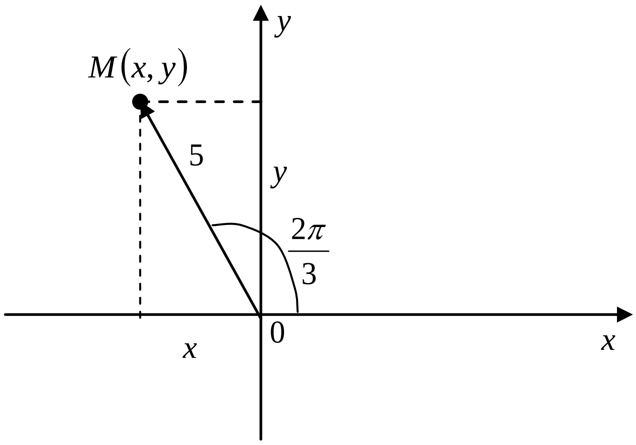
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad tg\varphi = \frac{y}{x}, \tag{2}$$

որոնք հետևում են (1) բանաձևից:

<u>Օրինակ</u>1. Գտնել $M(x, y)$ կետի դեկարտյան կոորդինատները, եթե նրա բևեռային կոորդինատներն են՝ $\left(5, \frac{2\pi}{3}\right)$:

<u>Լուծում</u>. օգտվելով (1) բանաձևից /որտեղ $\rho = 5, \varphi = \frac{2\pi}{3}$ / կստանանք՝

$$x = 5\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{5}{2}, \; y = 5\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{5\sqrt{3}}{2}:$$



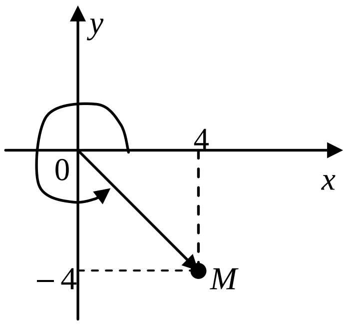
Օրինակ2. Գտնել M կետի բևեռային կոորդինատները, եթե նրա դեկարտյան կոորդինատներն են՝ $M(4,-4)$:
Լուծում. Օգտվելով (2) բանաձևերից, կստանանք՝

$$r=\sqrt{4^2+(-4)^2}=4\sqrt{2}:$$

$$tg\varphi=-\frac{4}{4}=-1:$$

Քանի որ M կետը գտնվում է չորրորդ քառորդում, ապա՝

$$\varphi=2\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{4}:$$



M կետի բևեռային կոորդինատներն են՝ $\left(4\sqrt{2};\frac{7\pi}{4}\right)$:

§ 2. Առաջին, երկրորդ և երրորդ կարգի դետերմինանտներ /որոշիչներ/ և նրանց հատկությունները

Առաջին կարգի (a_{11}) մատրիցի որոշիչ է կոչվում a_{11} թիվը:

Դիտարկենք չորս թվերից կազմված հետևյալ աղյուսակը, որը կանվանենք երկրորդ կարգի քառակուսի մատրից՝

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}: \qquad (1)$$

(1) մատրիցը կազմող թվերը նշանակված են երկու ինդեքսներով: Առաջին ինդեքսը ցույց է տալիս տողի համարը, իսկ երկրորդ ինդեքսը՝ սյան համարը, որում գտնվում է տրված թիվը: Օրինակ, a_{22}-ը գտնվում է մատրիցի երկրորդ տողում և երկրորդ սյունում: $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ թվերը կոչվում են (1) մատրիցի տարրեր:

<u>Սահմանում</u>. (1) մատրիցին համապատասխանող երկրորդ կարգի դետերմինանտ կոչվում է $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ թիվը:

Այն կնշանակենք հետևյալ ձևով՝

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}:$$

<u>Օրինակ</u>. $\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = 7 \cdot (-5) - (-3) \cdot 4 = -23:$

Դիտարկենք ինը թվերից կազմված հետևյալ աղյուսակը, որը կանվանենք երրորդ կարգի քառակուսի մատրից՝

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}: \qquad (2)$$

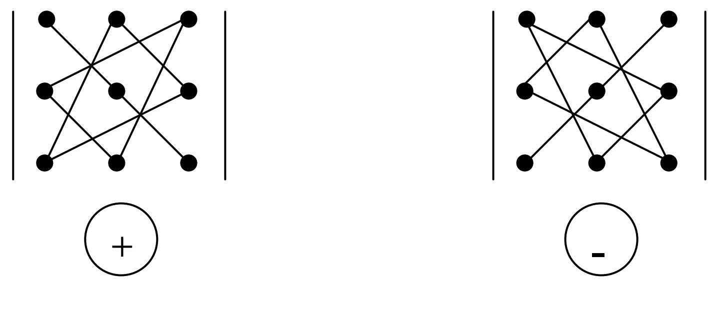
<u>Սահմանում</u>. (2) մատրիցին համապատասխանող երրորդ կարգի դետերմինանտ կոչվում է հետևյալ թիվը՝

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}:$$

Այն կնշանակենք հետևյալ ձևով՝

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}: \qquad (3)$$

Որպեսզի հիշենք, թե (3)-ի աջ կողմում, որ արտադրյալներն են դրական նշանով և որոնք բացասական նշանով, հարմար է օգտագործել եռանկյան կանոնը՝



Օրինակ.

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 4 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot1\cdot2+(-3)\cdot0\cdot(-3)+4\cdot1\cdot5-5\cdot1\cdot(-3)-0\cdot1\cdot2-4\cdot(-3)\cdot2 = 63:$$

Այժմ թվարկենք երկրորդ և երրորդ կարգի դետերմինանտների հատկությունները:

Հատկություն 1. Դետերմինանտը չի փոխի իր արժեքը, եթե նրա համապատասխան տողերը և սյուները փոխվեն տեղերով, այսինքն՝

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}:$$

Հատկություն 2. Դետերմինանտի երկու տողերի/սյուների/ տեղերը փոխելիս, դետերմինանտը փոխում է միայն նշանը, այսինքն՝

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}:$$

Հատկություն 3. Երկու միատեսակ տողեր/սյուներ/ ունեցող դետերմինանտը հավասար է զրոյի:

Հատկություն 4. Եթե դետերմինանտի որևէ տողի/սյան/ բոլոր տարրերը բազմապատկենք որևէ λ թվով, ապա դետերմինանտը կբազմապատկվի λ–ով, օրինակ՝

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \lambda a_{12} \\ a_{21} & \lambda a_{22} \end{vmatrix} = \lambda\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}:$$

Հատկություն 5. Եթե դետերմինանտի որևէ տողը/սյունը/ կազմված է զրոներից, ապա դետերմինանտը հավասար է զրոյի:

Հատկություն 6. Եթե դետերմինանտի որևէ տողի/սյան/ տարրերին ավելացնենք մյուս տողի/սյան/ համապատասխան տարրերը՝ բազմապատկելով այն միևնույն λ թվով, ապա դետերմինանտի արժեքը չի փոխվի, այսինքն՝ մասնավորապես,

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda a_{12} & a_{12} \\ a_{21}+\lambda a_{22} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}:$$

Այս հատկությունները հեշտությամբ ապացուցվում են՝ օգտվելով երկրորդ և երրորդ կարգի դետերմինանտների սահմանումից:

Երրորդ կարգի դետերմինանտի ուրիշ հատկություններ ձևակերպելու համար ծանոթանանք մինորի և հանրահաշվական լրացման գաղափարին:

Սահմանում. (2) մատրիցի / կամ նրան համապատասխանող դետերմինանտի/ a_{ij} $(i=1,2,3,\ j=1,2,3)$ տարրի մինոր կոչվում է նրա i-րդ տողի և j-րդ սյան ջնջումից հետո մնացած տարրերից կազմված երկրորդ կարգի դետերմինանտը: Այն կնշանակենք M_{ij}-ով:

Օրինակ, դետերմինանտի a_{12} տարրի մինորը՝ $M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$:

Սահմանում. (2) մատրիցի / կամ նրան համապատասխանող դետերմինանտի/ a_{ij} տարրի հանրահաշվական լրացում կոչվում է տարրի մինորը՝ վերցրած $(-1)^{i+j}$ նշանով:

Այն կնշանակենք A_{ij}-ով: Այսպիսով՝

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij}:$$

Թեորեմ 1. Դետերմինանտը հավասար է իր որևէ տողի/սյան/ տարրերի և նրանց հանրահաշվական լրացումների արտադրյալների գումարին:

Այսինքն տեղի ունեն հետևյալ հավասարությունները՝

$$\Delta=a_{11}\cdot A_{11}+a_{12}\cdot A_{12}+a_{13}\cdot A_{13},\quad \Delta=a_{11}\cdot A_{11}+a_{21}\cdot A_{21}+a_{13}\cdot A_{31},$$
$$\Delta=a_{21}\cdot A_{21}+a_{22}\cdot A_{22}+a_{23}\cdot A_{23},\quad \Delta=a_{12}\cdot A_{12}+a_{22}\cdot A_{22}+a_{32}\cdot A_{32},$$
$$\Delta=a_{31}\cdot A_{31}+a_{32}\cdot A_{32}+a_{33}\cdot A_{33},\quad \Delta=a_{13}\cdot A_{13}+a_{23}\cdot A_{23}+a_{33}\cdot A_{33},$$

որտեղ Δ-ով նշանակված է երրորդ կարգի դետերմինանտը:

Ապացուցենք այս հավասարություններից առաջինը: Դրա համար բավական է (3) բանաձևի աջ մասը ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$$\Delta=a_{11}\cdot(a_{22}\cdot a_{33}-a_{32}\cdot a_{23})+a_{12}\cdot(a_{23}\cdot a_{31}-a_{21}\cdot a_{33})+a_{13}\cdot(a_{21}\cdot a_{32}-a_{31}\cdot a_{22})=$$
$$=a_{11}\cdot A_{11}+a_{12}\cdot A_{12}+a_{13}\cdot A_{13}:$$

Օրինակ. Վերլուծելով ըստ առաջին տողի տարրերի, հաշվել հետևյալ դետերմինանտը՝

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 5 & 12 & 19 \\ 3 & 9 & 17 \end{vmatrix}:$$

Լուծում.

$$\Delta=2\cdot\begin{vmatrix} 12 & 19 \\ 9 & 17 \end{vmatrix}-4\cdot\begin{vmatrix} 5 & 19 \\ 3 & 17 \end{vmatrix}+6\cdot\begin{vmatrix} 5 & 12 \\ 3 & 9 \end{vmatrix}=8:$$

Թեորեմ 2. Դետերմինանտի որևէ տողի/սյան/ և մեկ այլ տողի/սյան/ համապատասխան տարրերի հանրահաշվական լրացումների արտադրյալների գումարը հավասար է զրոյի:

Ապացուցենք, օրինակ, որ երկրորդ սյան տարրեի և առաջին սյան համապատասխան տարրերի հանրահաշվական լրացումների արտադրյալների գումարը հավասար է զրոյի, այսինքն՝

$$a_{12}\cdot A_{11}+a_{22}\cdot A_{21}+a_{32}\cdot A_{31}=0:$$

Դրա համար Δ դետերմինանտը վերլուծենք ըստ առաջին սյան տարրերի՝

$$\Delta=a_{11}\cdot A_{11}+a_{21}\cdot A_{21}+a_{31}\cdot A_{31}: \qquad (4)$$

Պարզ է, որ A_{11}, A_{21}, A_{31} հանրահաշվական լրացումները կախված չեն a_{11}, a_{21}, a_{31} տարրերից, հետևաբար (4) հավասարությունը a_{11}, a_{21}, a_{31}-երի նկատմամբ նույնություն է և (4) –ի մեջ a_{11}, a_{21}, a_{31} թվերը կարող ենք փախարինել ցանկացած թվերով: Փոխարինելով այդ թվերը համապատասխանաբար թվերով՝ a_{12}, a_{22}, a_{32} (4) –ի ձախ մասում կստանանք միատեսակ սյուներով դետերմինանտ, որը հավասար է զրոյի: Այսպիսով՝ $a_{12} \cdot A_{11} + a_{22} \cdot A_{21} + a_{32} \cdot A_{31} = 0$:

§ 3. n-րդ կարգի որոշիչի /դետերմինանտի/ գաղափարը

Դիտարկենք n^2 թվերից կազմված հետևյալ աղյուսակը, որը կանվանենք n–րդ կարգի քառակուսի մատրից՝

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}: \qquad (1)$$

<u>**Սահմանում**</u>. (1) մատրիցի $a_{ij} (i = 1,2,\cdots,n,\ j = 1,2,\cdots,n)$ տարրի մինոր կոչվում է նրա i-րդ տողի և j-րդ սյան ջնջումից հետո մնացած տարրերից կազմված $n-1$–րդ կարգի դետերմինանտը: Այն կնշանակենք M_{ij}–ով:

<u>**Սահմանում**</u>. (1) մատրիցի a_{ij} տարրի հանրահաշվական լրացում կոչվում է այդ տարրի մինորը՝ վերցրած $(-1)^{i+j}$ նշանով: Այն կնշանակենք A_{ij}–ով:

Այսպիսով՝

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}:$$

Նկատի ունենալով նախորդ պարագրաֆի թեորեմ1-ը, n–րդ կարգի քառակուսի մատրիցի դետերմինանտը սահմանենք հետևյալ կերպ:

<u>**Սահմանում**</u>. $n = 1,2,3,\ldots$ դեպքում n–րդ կարգի որոշիչը սահմանվում է նախորդ վերնագրում: $n > 3$ դեպքում (1) մատրիցին համապատասխանող n–րդ կարգի դետերմինանտ կոչվում է $a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + \cdots + a_{1n} \cdot A_{1n}$ թիվը, որը կնշանակենք հետևյալ ձևով՝

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}:$$

Այսպիսով, ըստ սահմանման՝

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + \cdots + a_{1n} \cdot A_{1n} :$$

n–րդ կարգի դետերմինանտն օժտված է բոլոր այն հատկություններով, որոնք տեղի ունեն երկրորդ և երրորդ կարգի դետերմինանտների համար: Այդ հատկությունները մենք չենք ապացուցի:

§4. Վեկտորները հարթության վրա և տարածության մեջ: Համագիծ և համահարթ վեկտորներ, վեկտորի երկարությունը և պրոյեկցիան, գործողություններ վեկտորների հետ

Այն մեծությունները, որոնք բնութագրվում են միայն թվային արժեքով, որն իրենից ներկայացնում է այդ մեծության հարաբերությունը համապատասխան չափման միավորին, կոչվում են սկալյար մեծություններ: Օրինակ՝ ջերմաստիճանը, ժամանակը, զանգվածը, խտությունը, երկարությունը և այլն:

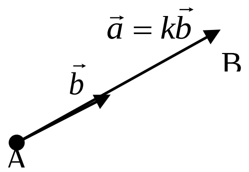
Մյուս կողմից, գոյություն ունեն մեծություններ /օրինակ ուժը, արագությունը, արագացումը/, որոնք բնութագրվում են և թվային արժեքով, և ուղղությամբ:

Այսպիսի մեծությունները կոչվում են վեկտորական մեծություններ:

Հետևաբար, յուրաքանչյուր այդպիսի վեկտորական մեծություն երկրաչափորեն կարող ենք պատկերել որոշակի երկարություն և ուղղություն ունեցող հատվածի օգնությամբ:

Այսպիսով, ուղղորդված հատվածը /հարթության վրա կամ տարածության մեջ/ կոչվում է վեկտոր: Վեկտորի բնութագրման համար անհրաժեշտ է՝

1. ուղղությունը,
2. երկարությունը:



Նկար 5.

Եթե վեկտորի սկիզբը գտնվում է A կետում, իսկ ծայրը B կետում, ապա վեկտորը նշանակվում է $\overrightarrow{AB}$, երբեմն նշանակում են մեկ տառով՝ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ և այլն (նկար5): $\overrightarrow{AB}$ երկարությունը /մոդուլը/ հավասար է AB հատվածի երկարությանը, նշանակվում է $|\overrightarrow{AB}|$, իսկ $\vec{a}$ վեկտորինը՝ $|\vec{a}|$:

Հետագայում մենք կդիտարկենք այսպես կոչված ազատ վեկտորները, որոնց համար որպես սկզբնակետ կարելի է վերցնել ցանկացած կետ: Այսինքն այդ վեկտորները կարելի է կամայականորեն զուգահեռ տեղափոխել:

Վեկտորի մոդուլը ոչ բացասական սկալյար մեծություն է: Վեկտորը, որի սկիզբը և վերջը համընկնում են, կոչվում է զրոյական վեկտոր և նշանակվում է 0:

Միևնույն ուղղի /կամ զուգահեռ ուղիղների/ վրա գտնվող վեկտորները կոչվում են համագիծ /կոլինար/ : Համագիծ /կոլինար/ վեկտորները կարող են ունենալ ինչպես նույն, այնպես էլ տարբեր ուղղություններ: Եթե $\vec{a}$ և $\vec{b}$ համագիծ են, ապա տեղի ունի $\vec{a} = k\vec{b}$:

Երկու $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները հավասար են՝ $\vec{a}=\vec{b}$, եթե տեղի ունեն հետևյալ պայմանները՝

1. վեկտորների երկարությունները հավասար են $|\vec{a}|=|\vec{b}|$,
2. վեկտորները համագիծ /կոլինիար/ են $\vec{a}\parallel\vec{b}$,
3. ունեն միևնույն ուղղությունը:

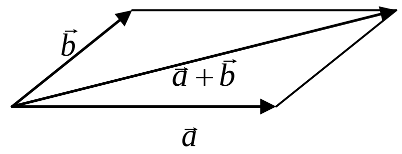
Վեկտորների հավասարությունը չի խախտվում, եթե վեկտորի սկզբնակետը զուգահեռ տեղափոխենք կամայական կետ:

Վեկտորները, որոնք ունեն միևնույն երկարությունները և հակառակ ուղղություններ, կոչվում են հակադիր վեկտորներ: $\vec{a}$ վեկտորի հակադիր վեկտորը նշանակվում է $-\vec{a}$:

Զրոյական վեկտորի մոդուլը հավասար է զրոյի և չունի որոշակի ուղղություն:

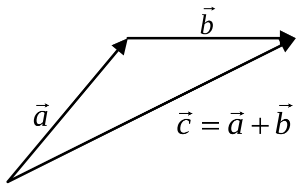
Այն վեկտորը, որի երկարությունը հավասար է մեկի, կանվանենք միավոր վեկտոր:

<u>**Վեկտորների գումարումը.**</u> $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների գումար կոչվում է այն $\vec{c}$ վեկտորը, որը հանդիսանում է $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորներով կառուցված զուգահեռագծի այն անկյունագիծը, որը դուրս է գալիս նրանց ընդհանուր սկզբնակետից: Գումարը գտնելու այս եղանակը կոչվում է զուգահեռագծի կանոն (նկար6):



նկար 6.

Դժվար չէ նկատել, որ երկու $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների $\vec{c}$ գումարը կարելի է գտնել նաև հետևյալ կերպ. $\vec{c}$ վեկտորի սկիզբը համընկնում է $\vec{a}$ վեկտորի սկզբի հետ, իսկ ծայրը $\vec{b}$ վեկտորի ծայրի հետ, այն դեպքում, երբ $\vec{b}$ վեկտորի սկիզբը համընկնում է $\vec{a}$ վեկտորի ծայրի հետ:

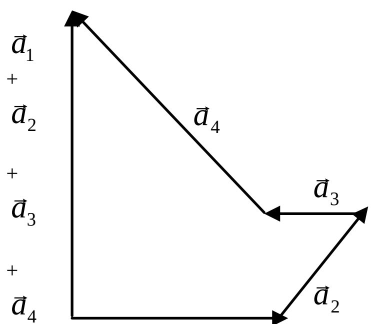


նկար 7.

Նշված եղանակը հայտնի է որպես «եռանկյան կանոն»(նկար 7):

Նույն եղանակով սահմանվում է նաև երեք և ավելի վեկտորների գումարը:

$\vec{a}_1,\vec{a}_{2,}...,\vec{a}_n$ վեկտորների գումար կոչվում է այն վեկտորը, որի սկիզբը համընկնում է $\vec{a}_1$ վեկտորի սկզբի հետ, իսկ ծայրը $\vec{a}_n$ վեկտորի ծայրի հետ, եթե ընդունենք, որ միշտ կարելի է $\vec{a}_1,\vec{a}_{2,}...,\vec{a}_n$ վեկտորներով կազմված պատկերի յուրաքանչյուր հաջորդ վեկտորի սկիզբը համընկնում է նախորդ վեկտորի ծայրի հետ:

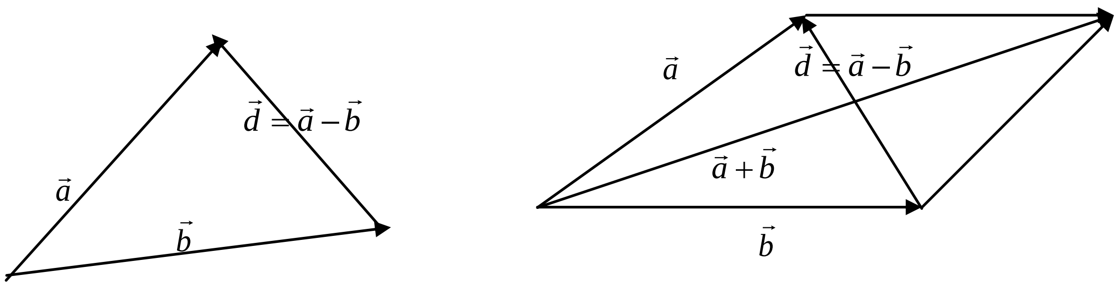


Նկար 8.

Այս կանոնն անվանում են վեկտորների գումարման «բազմանկյան կանոն»(նկար8):

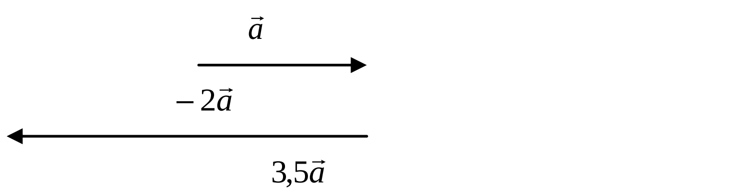
Գումարման սահմանումից հետևում է, որ $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$, այսինքն՝ զրոյական վեկտորը գումարման ժամանակ կատարում է նույն դերը, ինչ որ զրոն՝ թվերի գումարման ժամանակ, $\vec{a}+(-\vec{a})=0$ հակադիր վեկտորների գումարը հավասար է զրոյական վեկտորին:

Երկու $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների գումարի սահմանումից հետևում է տարբերության վեկտորի կառուցման կանոնը: Մի վեկտորից մյուսը հանելու համար պետք է նրանք բերել ընդհանուր սկզբի և կառուցել վեկտոր հանելի վեկտորի ծայրից մինչև նվազելի վեկտորի ծայրը (նկար 9):



Նկար 9.

<u>Վեկտորների բազմապատկումը թվով</u>. $\vec{a}$ վեկտորը λ թվով բազմապատկելիս վեկտորի երկարությունը բազմապատկվում է $|\lambda|-$ ով, իսկ ուղղությունը պահպանվում է, երբ λ-ն մեծ է 0-ից և փոխվում հակադիր ուղղությամբ, երբ λ-ն փոքր է զրոյից (λ=0 դեպքում արտադրյալը հավասար է 0-ի), (նկար10):



Նկար 10.

Վեկտորների գումարման և թվով բազմապատկման գործողությունները կոչվում են գծային գործողություններ: Հեշտ է համոզվել, որ վեկտորների հետ կատարվող գործողությունները բավարարում են հետևյալ պայմաններին՝

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$
2. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

3. $\exists\vec{0},\ \forall\vec{a}$, որ $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$

4. $\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$

5. $\forall\vec{a}$, $\exists(-\vec{a})$, որ տեղի ունի $\vec{a}+(-\vec{a})=0$

6. $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$

7. $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$

8. $\alpha(\beta\vec{a})=(\alpha\beta)\vec{a}$ ։

Եթե որևէ R բազմության տարրերի համար սահմանված են գումարման և իրական թվով բազմապատկման գործողությունները, որոնք բավարարում են 1. –ից 8. պայմաններին, ապա R բազմությունը կոչվում է գծային տարածություն:

Հարթության և եռաչափ տարածության մեջ բոլոր վեկտորների բազմությունները հանդիսանում են գծային տարածություններ, քանի որ նրանք բավարարում են 1.–ից 8. պայմաններին:

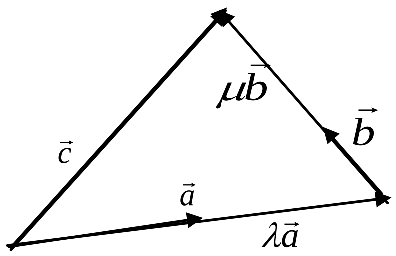
Միևնույն կամ զուգահեռ հարթությունների վրա գտնվող վեկտորները կոչվում են համահարթ /կոմպլանար/: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ոչ համագիծ վեկտորները համահարթ / կոմպլանար/ են, եթե գոյություն ունեն λ և μ թվեր, որ տեղի ունենա

$$\vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b} \qquad /*/$$

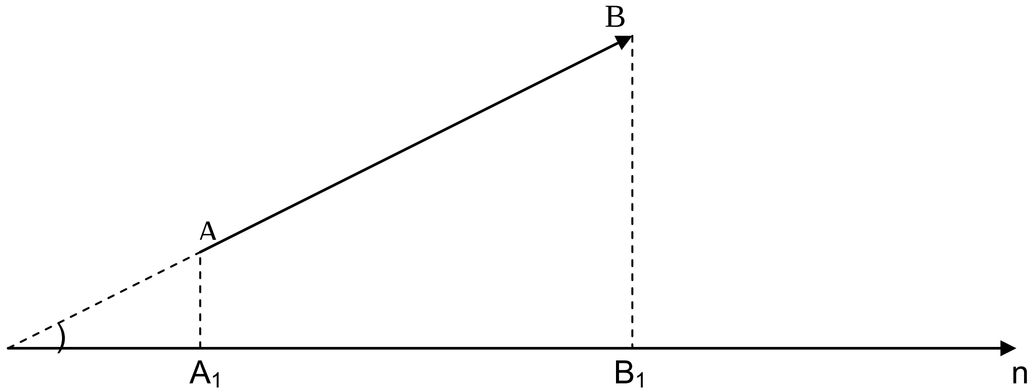
առնչությունը:

Զույգ առ զույգ ոչ համագիծ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ վեկտորների համահարթությունը համարժեք է այնպիսի λ և μ թվերի գոյությանը, որոնց դեպքում տեղի ունի /*/ առնչությունը:

/*/



<u>**Վեկտորի պրոյեկցիան առանցքի վրա -**</u> Դիցուք տրված է $\overrightarrow{AB}$ վեկտորը և n առանցքը, որոնց կազմած անկյունը հավասար է γ -ի: A և B կետերից իջեցնենք ուղղահայացներ n առանցքին և նրանց հատման կետերը (պրոյեկցիաները) նշանակենք A_1 և B_1 կետերով:



Նկար 11.

$\overrightarrow{AB}$ Վեկտորի պրոյեկցիա n առանցքի վրա կոչվում է A_1B_1 հատվածի մեծությունը (Նկար11):

$$A_1B_1 = \text{պր}_n \overrightarrow{AB}: \qquad (1)$$

Դժվար չէ նկատել, որ

$$\text{պր}_n \overrightarrow{AB} = \left|AB\right|\cos\gamma:$$

(2)

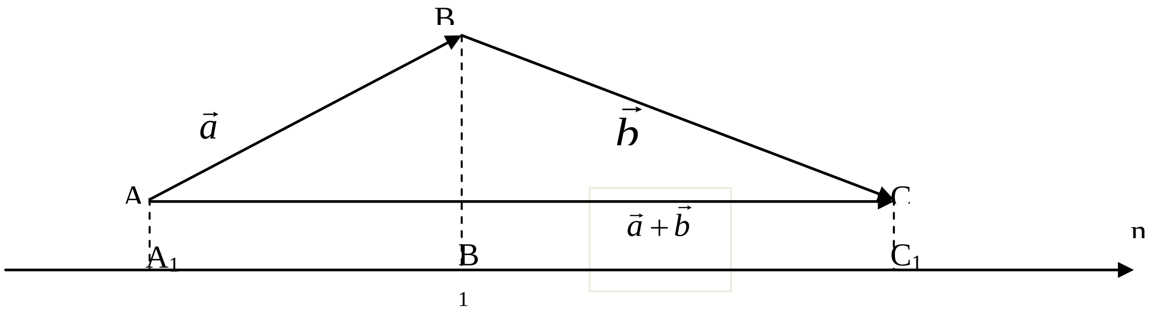
(2) հավասարությունից հետևում է, որ եթե $\vec{a} = \vec{b}$, ապա`

$$\text{պր}_n \vec{a} = \text{պր}_n \vec{b}, \qquad (3)$$

այսինքն` հավասար վեկտորներն ունեն հավասար պրոյեկցիաներ:

<u>Պնդում</u>. Վեկտորների պրոյեկցիաները օժտված են հետևյալ հատկությամբ`

$$\text{պր}_n(\vec{a} + \vec{b}) = \text{պր}_n \vec{a} + \text{պր}_n \vec{b}: \qquad (4)$$



Նկար 12.

Վեկտորների գումարի պրոյեկցիան n առանցքի վրա հավասար է գումարելի վեկտորների պրոյեկցիաների գումարին նույն առանցքի վրա (նկար 12):

<u>Ապացույց.</u>

Ենթադրենք $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$, A_1, B_1, C_1 կետերը A, B, C կետերի պրոյեկցիաներն են n առանցքի վրա,

$$\overrightarrow{A_1C_1} = \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1C_1}: \qquad (5)$$

Քանի որ $A_1B_1 = \text{պր}_n \vec{a}$, $B_1C_1 = \text{պր}_n \vec{b}$, $A_1C_1 = \text{պր}_n(\vec{a} + \vec{b})$:

Տեղադրելով ստացված արժեքները (5)- ի մեջ` կստանանք (4)- ը:

Մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով կարելի է ապացուցել, որ տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը:

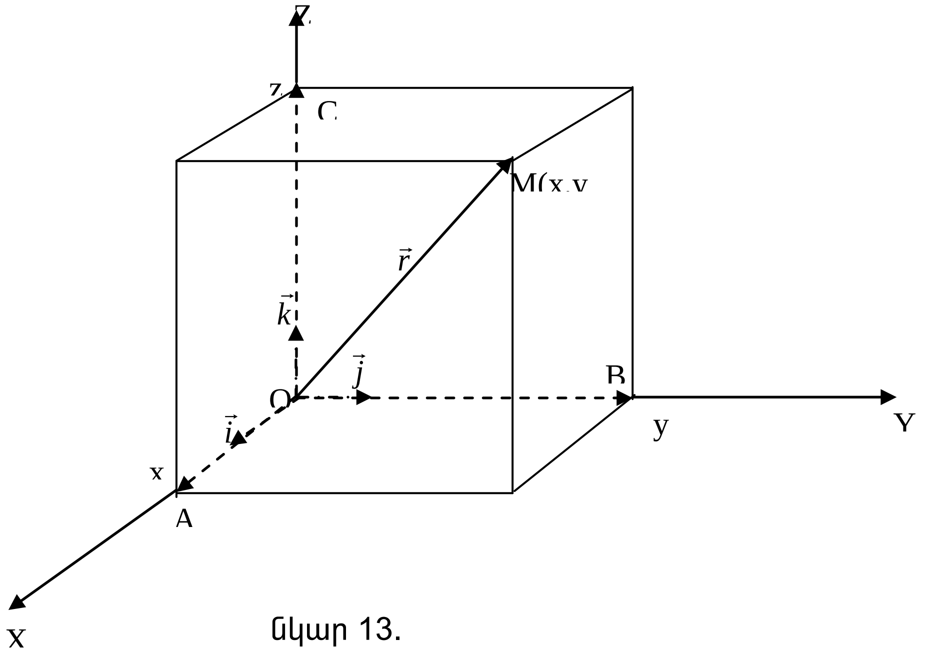
$$\text{պր}_n(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \cdots + \vec{a}_n) = \text{պր}_n \vec{a}_1 + \text{պր}_n \vec{a}_2 + \ldots + \text{պր}_n \vec{a}_n: \qquad (6)$$

§5. Տարածության մեջ վեկտորի ուղղանկյուն դեկարտյան կոորդինատները: Վեկտորի մոդուլը: Վեկտորի ուղղորդ կոսինուսները: Գործողություններ պրոյեկցիաներով տրված վեկտորների հետ

Տարածության մեջ դիտարկենք ուղղանկյուն դեկարտյան համակարգը: M կետի շառավիղ վեկտոր կոչվում է $\vec{r}=\overrightarrow{OM}$ վեկտորը, որի սկզբնակետը գտնվում է կոորդինատների սկզբնակետում, իսկ ծայրը՝ M կետում:

Եթե x, y, z իրական թվերը M կետի դեկարտյան կոորդինատերն են, ապա OM շառավիղ վեկտորի կոորդնատները հավասար են M կետի կոորդինատներին:

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ -ով նշանակենք այն միավոր վեկտորները, որոնք գտնվում են Ox, Oy, Oz առանցքների վրա, կիրառված են O կետից և ունեն այդ առանցքների դրական ուղղությունները: M կետից տանենք զուգահեռ հարթություններ, համապատասխանաբար Ozy, Ozx, Oxy հարթություններին: Նրանք կհատեն Ox-ը A, Oy-ը B, Oz-ը C կետերում: (նկար 13):



նկար 13.

Օգտվելով վեկտորների գումարից՝ կստանանք, որ $\vec{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$, հետևաբար,

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \tag{1}$$

քանի որ $\overline{OA}=x\vec{i}, \overline{OB}=y\vec{j}, OC=z\vec{k}$:

(1) բանաձևն իրենից ներկայացնում է $\vec{r}$ վեկտորի վերլուծությունը՝ ըստ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ բազիսային վեկտորների, քանի որ OM–ը հանդիսանում է զուգահեռանիստի անկյունագիծը, ապա վեկտորի երկարությունը /մոդուլը/ x, y, z կոորդինատների միջոցով կարտահայտվի հետևյալ բանաձևով՝

$$\left|\vec{r}\right| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} : \tag{2}$$

Ըստ նախորդ պարագրաֆի (3) հավասարության՝ հետևում է, որ հավասար վեկտորներն ունեն հավասար կոորդինատներ և այն կախված չէ կիրառման կետից:

Ցանկացած վեկտորի կոորդինատներ կոչվում են նրա պրոյեկցիաները կոորդինատական առանցքների վրա:

Եթե $\vec{a}$ վեկտորը R^3 տարածության ox, oy, oz առանցքների հետ կազմում է համապատասխանաբար α, β, γ անկյուններ, ապա ՝

$$պր_x \vec{a} = |\vec{a}| \cos\alpha = a_x$$
$$պր_y \vec{a} = |\vec{a}| \cos\beta = a_y$$
$$պր_z \vec{a} = |\vec{a}| \cos\gamma = a_z, \qquad (*)$$

$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ -ն կոչվում են տրված $\vec{a}$ վեկտորի ուղղորդ կոսինուսներ:

Օգտվելով (*) բանաձևից և (2) հավասարությունից կստանանք`

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \qquad (3)$$

որտեղից հետևում է, որ եթե քառակուսի բարձրացնենք վերջին հավասարություններից յուրաքանչյուրը և գումարենք իրար, կստանանք`

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1:$$

Այսինքն α, β, γ անկյունների կոսինուսների/որոնց կանվանենք ուղղորդ կոսինուսներ/ քառակուսիների գումարը հավասար է 1-ի: $x = |\vec{r}| \cos\alpha$, $y = |\vec{r}| \cos\beta$, $z = |\vec{r}| \cos\gamma$ հավասարություններից հետևում է, որ միավոր վեկտորի կոորդինատները համընկնում են այդ վեկտորի ուղղորդ կոսինուսների հետ.

$$\vec{\ell} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma):$$

<u>Օրինակ1.</u> Տրված է $\vec{a}$ =(1,2,2) վեկտորը: Գտնել նրա երկարությունը և a_o միավոր վեկտորը: Օգտվելով (2) և (3) բանաձևերից` $|\vec{a}| = \sqrt{1^2+2^2+2^2} = 3$,

$$\cos\alpha = \frac{1}{3}, \cos\beta = \frac{2}{3}, \cos\gamma = \frac{2}{3}, a_o = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}):$$

<u>Օրինակ2.</u> $\vec{a}(-1,2,3)$ և $\vec{b}\left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\right)$ վեկտորները կոլինար են և ունեն նույն ուղղությունը` $\vec{a} = \lambda\vec{b}$, $\lambda = \frac{1}{2}$, իսկ $\vec{a}(1,0,2)$ և $\vec{b}(2,0,1)$ վեկտորները կոլինար չեն:

Եթե $\vec{a}$ վեկտորը տրված է իր սկզբնակետով $A(x_1, y_1, z_1)$ և $B(x_2, y_2, z_2)$ ծայրակետով, ապա $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ վեկտորի պրոյեկցիաները կլինեն`

$$a_x = x_2 - x_1, a_y = y_2 - y_1, a_z = z_2 - z_1$$
$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$
$$|\vec{a}| = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2} :$$

Օգտվելով այն հանգամանքից, որ վեկտորների գումարի պրոյեկցիան որևէ առանցքի վրա հավասար է գումարելի վեկտորների պրոյեկցիաների գումարին նույն առանցքի վրա, կստանանք, որ վեկտորները գումարելիս գումարվում են նրանց համանուն պրոյեկցիաները:

Ենթադրենք տրված են` $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ և $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$: Եթե $\vec{a} + \vec{b} = (x, y, z)$, ապա`

$$x = x_1 + x_2,\ y = y_1 + y_2,\ z = z_1 + z_2 :$$

Քանի որ $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + \left(-\vec{b}\right)$, ապա $\vec{a} - \vec{b} = \left(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2\right)$:

Վեկտորը թվով բազմապատկելիս, պետք է նրա բոլոր պրոյեկցիաները բազմապատկել այդ թվով:

Եթե $\vec{a} = \left(x_1, y_1, z_1\right)$ և $\alpha \neq 0$, $\alpha\vec{a} = (\alpha x_1, \alpha y_1 \alpha z_1)$:

<u>Օրինակ3</u>. Տրված են $\vec{a} = (1,2,3)$, $\vec{b} = (0,2,-3)$: $\vec{a} + \vec{b} = (1,4,0)$, $4\vec{a} = (4,8,12)$:

Խնդիրներ

1. ABC եռանկյան մեջ AM ուղիղը հանդիսանում է BAC անկյան կիսորդը, ընդ որում M կետը գտնվում է BC կողմի վրա: Գտնել $\overrightarrow{AM}$ -ը, եթե $\overrightarrow{AB} = \bar{a}$, $\overrightarrow{AC} = \bar{b}$:

Պատ. $\overline{AM} = \dfrac{\left|\bar{b}\right|}{\left|\bar{a}\right| + \left|\bar{b}\right|} \cdot \bar{a} + \dfrac{\left|\bar{a}\right|}{\left|\bar{a}\right| + \left|\bar{b}\right|} \cdot \bar{b}$:

2. Գտնել $\vec{a} = 20\vec{i} + 30\vec{j} - 60\vec{k}$ վեկտորի երկարությունը և նրա ուղղորդ կոսինուսները:

Պատ. $\left|a\right| = 70$, $\cos\alpha = 2/7; \cos\beta = 3/7; \cos\gamma = -6/7$:

3. Տրված է ABC եռանկյունը: BC կողմի վրա տեղադրված է M կետն այնպես, որ $\left|BM\right| : \left|MC\right| = \lambda$: Գտնել $\overrightarrow{AM}$ -ը, եթե $\overrightarrow{AB} = b$, $\overrightarrow{AC} = c$:

Պատ. $\overrightarrow{AM} = (b + \lambda c)/(1 + \lambda)$:

4. Գտնել $\vec{a}$ վեկտորի պրեյեկցիաները կոորդինատային առանցքների վրա, եթե $\vec{a} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$, $A(0;0;1)$, $B(3;2;1)$, $C(4;6;5)$ և $D(1;6;3)$:

Պատ. $a_x = 0, a_y = 2, a_z = -2$:

5. Տրված են $M_1(1;2;3)$ և $M_2(3;-4;6)$: Գտնել $\overrightarrow{M_1M_2}$ վեկտորի երկարությունը և ուղղությունը:

Պատ. $\left|M_1M_2\right| = 7$, $\cos\alpha = 2/7; \cos\beta = -6/7; \cos\gamma = 3/7$:

6. Կառուցել $M(5;-3;4)$ կետը և որոշել նրա շառավիղը, վեկտորի երկարությունն ու ուղղությունը:

Պատ. $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = 5\sqrt{2}$, $\cos\alpha = 0{,}5\sqrt{2}$, $\cos\beta = -0{,}3\sqrt{2}$, $\cos\gamma = 0{,}4\sqrt{2}$:

7. ox և oz առանցքների հետ վեկտորը կազմում է $40^0, 80^0$ անկյուններ, համապատասխանաբար: Գտնել oy առանցքի հետ կազմած անկյունը:

Պատ. $\beta \approx 52^0$ կամ 128^0 :

8. xoy հարթության վրա տրված են $A(4;2)$ և $C(0;5)$ կետերը և կառուցված են $\overrightarrow{OA}=a, \overrightarrow{OB}=b, \overrightarrow{OC}=c$ վեկտորները: $\vec{a}$ վեկտորը երկրաչափորեն և անալիտիկորեն ներկայացնել $\vec{b}, \vec{c}$ վեկտորների միջոցով:

Պատ. $\vec{a}=2\vec{b}-0.8\vec{c}$:

9. Տրված են $A(2;2;0)$ և $B(0;-2;5)$ կետերը; Կառուցել $\overrightarrow{AB}=u$ վեկտորը և որոշել նրա երկարությունը և ուղղությունը:

Պատ. $u=3\sqrt{5}, \cos\alpha=-\frac{2}{3\sqrt{5}}$:

10. $|\vec{a}|=13$, $|\vec{b}|=19$, $|\vec{a}+\vec{b}|=24$: Հաշվել $|\vec{a}-\vec{b}|$-ն:

11. $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորներով կազմված անկյունը՝ $\varphi=60^0$, ընդ որում $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=8$: Գտնել $|\vec{a}+\vec{b}|$–ն և $|\vec{a}-\vec{b}|$-ն:

12. $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորներով կազմված անկյունը՝ $\varphi=120^0$, ընդ որում $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=5$: Գտնել $|\vec{a}+\vec{b}|$–ն և $|\vec{a}-\vec{b}|$-ն:

13. $\overrightarrow{AB}=\vec{a}+2\vec{b}, \overrightarrow{BC}=-4\vec{a}-\vec{b}, \overrightarrow{CD}=-5\vec{a}-3\vec{b}$: Ապացուցել, որ $ABCD$ բազմանկյունը սեղան է:

14. Ապացուցել, որ $\vec{a}=\{2;-1;3\}$ և $\vec{b}=\{-6;3;-9\}$ վեկտորները համագիծ են: Պարզել՝ նրանցից ո՞րն է երկար մյուսից և քանի անգամ, միևնույն թե՞ հակադիր ուղղություններ ունեն նրանք:

15. $\propto$-ի և β-ի ինչպիսի՞ արժեքների դեպքում $\vec{a}=\{-2;3;\beta\}$ և $\vec{b}=\{\propto;-6;2\}$ վեկտորները կլինեն համագիծ:

16. Տրված են $A(-1;5;-10), B(5;-7;8), C(2;2;-7), D(5;-4;2)$ կետերը: Ցույց տալ, որ $\overrightarrow{AB}$ և $\overrightarrow{CD}$ վեկտորները համագիծ են:

17. Համոզվել, որ $(3;-1;2), B(1;2;-1), C(-1;1;-3), D(3;-5;3)$ կետերը սեղանի գագաթներ են:

18. Տրված են $\vec{a}=\{3;-5;8\}$ և $\vec{b}=\{-1;2;-4\}$ վեկտորները:Գտնել $|\vec{a}+\vec{b}|$-ն և $|\vec{a}-\vec{b}|$-ն:

19. Հարթության վրա տրված են $\vec{p}=\{2;-3\}, \vec{q}=\{1;2\}$ վեկտորները: Գտնել $\vec{a}=\{9;4\}$ վեկտորի վերլուծությունը ըստ $\vec{p},\vec{q}$ բազիսի:

20. $\propto$-ի և β-ի ինչպիսի՞ արժեքների դեպքում $\vec{a}=\{-2;3;\propto\}$ և $\vec{b}=\{\beta;-6;2\}$ վ վեկտորները համագիծ են:

21. Գտնել այն $\vec{x}$ վեկտորը, որը համագիծ է $\vec{a}=\{1;-2;-2\}$ վեկտորին, oy առանցքի հետ կազմում է սուր անկյուն և $|\vec{x}|=15$:

22. Գտնել այն $\vec{x}$ վեկտորը, որը oy առանցքի հետ կազմում է 60^0-ի, oz առանցքի հետ՝ 120^0-ի անկյուններ և $|\vec{x}|=5\sqrt{2}$:

23. Տրված են $\vec{a}=3\vec{i}+7\vec{j}$ և $\vec{b}=2\vec{i}+\vec{j}$ վեկտորները: Գտնել $3\vec{b}-\vec{a}$ վեկտորի երկարությունը:

Պատ. 5:

24. Տրված են $\vec{a}=3\vec{i}-5\vec{j}+8\vec{k}$ և $\vec{b}=-\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k}$ վեկտորները: Գտնել $\vec{a}-\vec{b}$ վեկտորի երկարությունը:

Պատ. 14:

25. Տրված են $\vec{a}=-2\vec{i}+\vec{j}$ և $\vec{b}=-\vec{i}-2\vec{j}$ վեկտորները: Գտնել $2\vec{b}-\vec{a}$ վեկտորի երկարությունը:

Պատ. 5:

26. Տրված են $A(7;4;-2)$ և $B(1;2;1)$ կետերը: $\overrightarrow{AB^0}$ միավոր վեկտորը:

Պատ. $\overrightarrow{AB^0}=\left\{\frac{6}{7};\frac{2}{7};-\frac{3}{7}\right\}$:

27. Գտնել $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$ վեկտորով ուղղված $\overrightarrow{a^0}$ միավոր վեկտորը:

Պատ. $\overrightarrow{a^0}=\frac{1}{3}\vec{i}+\frac{2}{3}\vec{j}+\frac{2}{3}\vec{k}$:

§ 6. Երկու վեկտորների սկալյար արտադրյալը: Սկալյար արտադրյալի հատկությունները: Սկալյար արտադրյալը կոորդինատներով: Երկու վեկտորների համագիծ լինելու պայմանը նրանց կոորդինատների միջոցով

<u>**Սահմանում.**</u> Երկու $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների սկալյար արտադրյալ կոչվում է այն թիվը, որը հավասար է նրանց երկարությունների և նրանցով կազմած անկյան կոսինուսի արտադրյալին:
Եթե սկալյար արտադրյալը նշանակենք $\vec{a}\vec{b}$ –ով, ապա՝

$$\vec{a}\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi\ , \qquad (1)$$

որտեղ φ-ն այդ վեկտորներով կազմած անկյունն է: Քանի որ $\left|\vec{b}\right|\cos\varphi =$ պր$_a \vec{b}$ կամ $\left|\vec{a}\right|\cos\varphi =$ պր$_b \vec{a}$, ապա (1) հավասարությունը կարելի է գրել հետևյալ կերպ՝

$$\vec{a}\vec{b} = \left|\vec{a}\right| \text{պր}_{\vec{a}} \vec{b} = \left|\vec{b}\right| \text{պր}_{\vec{b}} \vec{a} \; : \qquad (2)$$

Այսինքն, երկու վեկտորների սկալյար արտադրյալը հավասար է վեկտորներից մեկի մոդուլին՝ բազմապատկած մյուսի պրոեկցիայով առաջինի վրա: $\vec{a}$ վեկտորի սկալյար քառակուսի կոչվում է a վեկտորի սկալյար արտադրյալն իր հետ՝

$$\vec{a}^2 = \vec{a}\vec{a} = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{a}\right|\cos 0 = \left|\vec{a}\right|^2 ,$$

$$\vec{a}^2 = \left|\vec{a}\right|^2 :$$

Այսինքն՝ սկալյար քառակուսին հավասար է իր երկարության քառակուսուն:
Եթե $a \perp b$, այսինքն՝ $\varphi = 90^0$, ապա $\cos\varphi = 0$, հետևաբար $\vec{a}\vec{b} = 0$, հակառակը, եթե $\vec{a}\vec{b} = 0$ և $\vec{a}$, $\vec{b}$ վեկտորները զրոյական չեն, ապա (1) -ից հետևում է, որ $\cos\varphi = 0$, $\varphi = 90^0$, այսինքն $\vec{a} \perp \vec{b}$:

Եթե այդ վեկտորներից մեկը զրոյական է, ապա /օրինակ $\vec{b} = 0$/ նրան կարելի է համարել ուղղահայաց մյուսին, քանի որ զրոյական վեկտորը չունի որոշակի ուղղություն:

Սկալյար արտադրյալը չի կարելի կիրառել երեք վեկտորների վրա, քանի որ երկու վեկտորների սկալյար արտադրյալը թիվ է, իսկ թիվը երրորդ վեկտորով բազմապատկելիս ստացվում է վեկտոր, որտեղից հետևում է նաև, որ անիմաստ է սկալյար խորանարդը:

Օրինակ. Ենթադրենք՝ տրված են $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները, որոնց երկարությունները համապատասխանաբար հավասար են 6մ և 3մ, իսկ նրանց կազմած անկյունը՝ $\varphi = 60^0$: Գտնել նրանց սկալյար արտադրյալը:
Լուծում. Օգտվելով (1) բանաձևից՝

$$\vec{a}\vec{b} = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\varphi , \; \vec{a}\vec{b} = 6 \cdot 3\cos 60 = 9 :$$

1. $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$ տեղափոխական հատկությունը, որն անմիջապես հետևում է (1) բանաձևից:

2. $(\alpha\vec{a})\vec{b} = \alpha\left(\vec{a}\vec{b}\right)$ թվային բազմապատկիչի նկատմամբ օժտված է զուգորդական հատկությամբ:

Ենթադրենք $\alpha > 0$, այդ դեպքում $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների կազմած φ անկյունը հավասար է $\alpha\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորներով կազմած անկյանը: Հետևաբար՝ $\alpha(\vec{a}\vec{b}) = \alpha\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\varphi$,

$$(\alpha\vec{a})\vec{b} = \left|\alpha\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\varphi = \alpha\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\varphi ,$$

որտեղից հետևում է (2) հատկությունը: $\alpha \le 0$ դեպքերի համար համոզվել ինքնուրույն:

3. $\vec{a}\left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$ հետևում է սկալյար արտադրյալը պրոյեկցիաներով արտահայտելու բանաձևից և պրոյեկցիայի հատկությունից:

Վեկտորների սկալյար արտադրյալի շատ հատկություններ, ըստ 1, 2, 3 նշված պայմանների, համընկնում են թվերի արտադրյալի հատկությունների հետ, բայց սկալյար արտադրյալն օժտված է նաև մի քանի յուրատեսակ հատկություններով, որով տարբերվում է թվերի արտադրյալից: Նշենք դրանցից մի քանիսը՝

1. Եթե $a \in R$, $b \in R$, ապա $a \cdot b \in R$ (իրական թվեր), $\vec{a} \in \vec{V}$, $\vec{b} \in \vec{V}$, ապա $\vec{a} \cdot \vec{b} \in R$ (օբյեկտը փոխվեց):
2. Եթե $A \neq 0$, ապա $Ax = b$ թվային հավասարումն ունի միակ լուծում՝ $x = \dfrac{B}{A}$: Իսկ $\vec{A}\vec{x} = \vec{b}$ տեսքի հավասարումն իմաստ չունի:
3. Եթե A և B թվեր են, ապա $A \cdot B = 0$ հավասարումից հետևում է, որ A և B թվերից գոնե մեկը հավասար է 0-ի: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ -ից չի հետևում, որ $\vec{a}$ կամ $\vec{b}$ զրոյական վեկտորներ են:
4. Եթե a_1, a_2, a_3-ը թվեր են, ապա $(a_1 a_2) \cdot a_3 = a_1 \cdot (a_2 a_3) = (a_1 a_2 a_3)$, բայց $\forall$ $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ վեկտորների համար

$$\underbrace{(\vec{a}_1 \vec{a}_2) \cdot \vec{a}_3}_{\vec{q}_1} \neq \underbrace{\vec{a}_1 \cdot (\vec{a}_2 \vec{a}_3)}_{\vec{q}_2},$$

որովհետև վեկտոր $\vec{q}_1$-ը կոլինար է $\vec{a}_3$-ին, $\vec{q}_2$-ը կոլինար է $\vec{a}_1$ վեկտորին:

Այս է պատճառը, որ չի կարելի սկալյար ձևով բազմապատկել երեք և ավելի վեկտորներ: Ուստի $\vec{a}^{\,n}$, որտեղ $n > 2$, կարգի վեկտոր սահմանված չէ:

<u>Թեորեմ</u>. Երկու $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ և $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ վեկտորների սկալյար արտադրյալը հաշվվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$\vec{a}\vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 :$$

<u>Ապացույց</u>. Վերլուծելով ըստ ուղղանկյան դեկարտյան բազիսի, ըստ x_1, y_1, z_1 և x_2, y_2, z_2 կոորդինատների՝ կստանանք՝

$$\begin{aligned} \vec{a} &= x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k} \\ \vec{b} &= x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k} \end{aligned} :$$

Օգտվելով սկալյար արտադրյալի (1)-(3) հատկություններից՝ կարող ենք գրել՝

$$\vec{a}\vec{b} = \left(x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}\right)\left(x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}\right) =$$
$$= x_1 x_2 \vec{i}^{\,2} + x_1 y_2 \vec{i}\vec{j} + x_1 z_2 \vec{i}\vec{k} + y_1 x_2 \vec{j}\vec{i} + y_1 y_2 \vec{j}^{\,2} + y_1 z_2 \vec{j}\vec{k} + z_1 x_2 \vec{k}\vec{i} + z_1 y_2 \vec{k}\vec{j} + z_1 z_2 \vec{k}^{\,2} : \qquad (1')$$

Քանի որ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ վեկտորները փոխուղղահայաց են, կարող ենք գրել՝

$$\begin{aligned} \vec{i} \cdot \vec{i} &= \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1, \\ \vec{i} \cdot \vec{j} &= \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0, \end{aligned}$$

տեղադրելով ստացված արժեքները (1’) բանաձևի մեջ՝ կստանանք՝

$$\vec{a}\vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 : \qquad (2')$$

Այսպիսով, երկու վեկտորների սկալյար արտադրյալը հավասար է նրանց համանուն կոորդինատների արտադրյալների գումարին:

Հետևանք. Երկու վեկտորներով կազմած անկյան կոսինուսը հավասար է նրանց սկալյար արտադրյալը բաժանած երկարությունների արտադրյալի վրա.

$$\cos\varphi = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}\ , \qquad (3)$$

օգտվելով $\vec{a}\vec{b} = |a||b|\cos\varphi$, (2') և $|a| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ բանաձևերից՝ կստանանք վերջին բանաձևը:

Հետևանք. Երկու վեկտորների ուղղահայացության համար անհրաժեշտ է և բավարար, որպեսզի տեղի ունենա՝

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$$

հավասարությունը:

Օրինակ. Գտնել $\vec{a}(1,2,1)$ և $\vec{b}(2,-2,0)$ վեկտորների սկալյար արտադրյալը և նրանց կազմած անկյունը:

Լուծում. $\vec{a}\vec{b} = 1\cdot 2 + 2\cdot(-2) + 1\cdot 0 = -2$,

$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^{\ 2} + y_1^{\ 2} + z_1^{\ 2}}\sqrt{x_2^{\ 2} + y_2^{\ 2} + z_2^{\ 2}}}\ ,$$

$$\cos\varphi = \frac{1\cdot 2 + 2\cdot(-2) + 0\cdot 1}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 0}} = \frac{-2}{\sqrt{4}\sqrt{8}} = \frac{-2}{4\sqrt{2}} = \frac{-1}{2\sqrt{2}}$$

$$\varphi = \arccos\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right):$$

Ինչպես գիտենք, որպեսզի $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները լինեն համագիծ, անհրաժեշտ է և բավարար որ տեղի ունենա

$$\vec{a} = \lambda\vec{b}$$

հավասարությունը:

Իրոք, ենթադրենք $\vec{a}$ և $\vec{b}$ համագիծ են, այդ դեպքում ընտրելով՝ $\lambda = \frac{\vec{a}}{|\vec{b}|}$, եթե $\vec{a}$ և $\vec{b}$ համուղղված են, իսկ $\lambda = -\frac{\vec{a}}{|\vec{b}|}$, եթե $\vec{a}$ և $\vec{b}$ հակուղղված են, կունենանք՝ $\vec{a} = \lambda\vec{b}$:

Այժմ ենթադրենք՝ $\vec{a} = \lambda\vec{b}$: Օգտվելով վեկտորը թվով բազմապատկելու սահմանումից, կունենանք, որ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ համուղղված են, եթե $\lambda > 0$, հակուղղված են, եթե $\lambda < 0$, այսինքն կոլինեար(համագիծ) են:

Առանց ապացույցի նշենք նաև, որ որպեսզի երեք վեկտորներ լինեն համահարթ(կոմպլանար), անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրանց կոորդինատներից կազմված երրորդ կարգի որոշիչը հավասար լինի զրոյի:

Վերջին հավասարությունից հետևում է որ

$$x_1 = \lambda x_2\ ,\ y_1 = \lambda y_2\ ,\ z_1 = \lambda z_2\ ,$$

որտեղից կստանանք՝

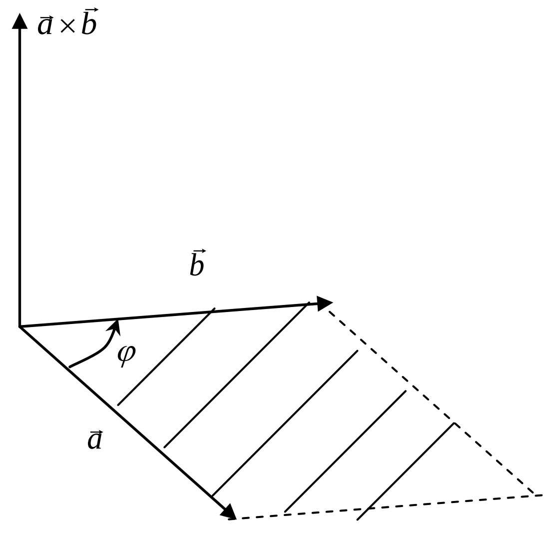
$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}:$$

Այսինքն, որպեսզի երկու վեկտորներ լինեն համագիծ, անհրաժեշտ է և բավարար, որպեսզի նրանց համապատասխան կոորդինատները լինեն համեմատական:

§7. Վեկտորական արտադրյալ և նրա հատկությունները: Վեկտորական արտադրյալի արտահայտումը վեկտորների կոորդինատների միջոցով

Սահմանում. $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների վեկտորական արտադրյալ կոչվում է $\vec{a}\times\vec{b}$ վեկտորը, որը որոշվում է հետևյալ ձևով.

ա/ $\vec{a}\times\vec{b}$ վեկտորն ուղղահայաց է $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորներին,
բ/ $\vec{a}\times\vec{b}$ վեկտորի երկարությունը հավասար է $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների վրա կառուցած զուգահեռագծի մակերեսին, այսինքն $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\varphi$, որտեղ φ-ն $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների կազմած անկյունն է,
գ/ $\vec{a}\times\vec{b}$ վեկտորն ուղղված է այնպես, որ եթե $\vec{a}\times\vec{b}$ վեկտորի ծայրից նայենք, $\vec{a}$-ից դեպի $\vec{b}$ կարճագույն պտույտը համընկնում է ժամ սլաքի հակառակ ուղղության հետ(նկար1.):



Նկար 1.

Նկատենք, որ բ/ և գ/ պայմանները վերաբերվում են այն դեպքին, երբ $\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\varphi\neq 0$, այսինքն $\vec{a}\times\vec{b}\neq 0$: Իսկ եթե $\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\varphi=0$, ապա $\vec{a}\times\vec{b}=0$:

Դիտարկենք վեկտորական արտադրյալի հիմնական հատկությունները:

1. Եթե $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները համագիծ են, ապա

$$\vec{a}\times\vec{b}=0:$$

Ապացույց. Եթե $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները համագիծ են, ապա $\sin\varphi=0$: Հետևաբար, $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\varphi=0$, և ուրեմն՝ $\vec{a}\times\vec{b}=0$:

2. $\vec{a}\times\vec{b}=-\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)$:

Ապացույց. Ենթադրենք $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները համագիծ են, ապա հատկությունն ակնհայտ է: Ենթադրենք $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները համագիծ չեն: Վեկտորական արտադրյալի սահմանումից հետևում է, որ $\vec{a}\times\vec{b}$ և $\vec{b}\times\vec{a}$ վեկտորների երկարությունները հավասար են: Նրանք համագիծ են և ուղղված են հակառակ ուղղություններով: Այդ պատճառով $\vec{a}\times\vec{b}=-\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)$:

3. $\left(\lambda\vec{a}\right)\times\vec{b}=\lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$:

Ապացույց. Եթե $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները համագիծ են կամ $\lambda=0$, ապա հատկությունն ակնհայտ է: Ենթադրենք $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները համագիծ չեն և $\lambda\neq 0$: Վեկտորական արտադրյալի սահմանումից հետևում է, որ

$$\left|\lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\right|=\left|\lambda\right|\cdot\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\varphi \quad \text{և}$$
$$\left|\left(\lambda\vec{a}\right)\times\vec{b}\right|=\left|\lambda\right|\cdot\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\varphi,$$

այդ պատճառով $\left(\lambda\vec{a}\right)\times\vec{b}$ և $\lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$ վեկտորների երկարությունները հավասար են: Բացի դրանից նրանք ուղղահայաց են $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորներին և, հետևաբար, համագիծ են: Ցույց տանք, որ նրանք ունեն նույն ուղղությունը: Իրոք, $\lambda>0$-ի դեպքում դա ակնհայտ է, քանի որ $\lambda\vec{a}$ և $\vec{a}$ վեկտորներն ունեն նույն ուղղությունը: Իսկ $\lambda<0$-ի դեպքում $\lambda\vec{a}$ և $\vec{a}$ վեկտորներն ունեն հակառակ ուղղությունը, հետևաբար, $\left(\lambda\vec{a}\right)\times\vec{b}$ վեկտորն ունի $\vec{a}\times\vec{b}$ վեկտորի հակառակ ուղղությունը: Այդ պատճառով, եթե $\lambda<0$, ապա $\left(\lambda\vec{a}\right)\times\vec{b}$ և $\lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$ վեկտորներն ունեն նույն ուղղությունը, հետևաբար, $\left(\lambda\vec{a}\right)\times\vec{b}=\lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$:

4. $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$:

Այս հատկությունը չենք ապացուցի:

Թեորեմ. Եթե $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները տրված են իրենց կոորդինատներով՝ $\vec{a}=\left\{a_x,a_y,a_z\right\}$, $\vec{b}=\left\{b_x,b_y,b_z\right\}$, ապա

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}:$$

Ապացույց. Համաձայն վեկտորական արտադրյալի սահմանման, ինչպես նաև վեկտորական արտադրյալի 1. և 2. հատկությունների, հեշտությամբ կարելի է համոզվել, որ տեղի ունեն հետևյալ հավասարությունները.

$$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=0,$$
$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\ \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}: \qquad (1)$$

Օգտվելով վեկտորական արտադրյալի հատկություններից, ինչպես նաև (1) հավասարություններից, ստանում ենք.

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(a_x\cdot\vec{i}+a_y\cdot\vec{j}+a_z\cdot\vec{k}\right)\times\left(b_x\cdot\vec{i}+b_y\cdot\vec{j}+b_z\cdot\vec{k}\right)=a_xb_x\left(\vec{i}\times\vec{i}\right)+a_yb_x\left(\vec{j}\times\vec{i}\right)+a_zb_x\left(\vec{k}\times\vec{i}\right)+$$
$$a_xb_y\left(\vec{i}\times\vec{j}\right)+a_yb_y\left(\vec{j}\times\vec{j}\right)+a_yb_z\left(\vec{j}\times\vec{k}\right)+a_zb_y\left(\vec{k}\times\vec{j}\right)+a_xb_z\left(\vec{i}\times\vec{k}\right)+a_zb_z\left(\vec{k}\times\vec{k}\right)=-a_yb_x\vec{k}+a_zb_x\vec{j}$$
$$+a_xb_y\vec{k}+a_yb_z\vec{i}-a_zb_y\vec{i}-a_xb_z\vec{j}=\left(a_yb_z-a_zb_y\right)\cdot\vec{i}-\left(a_xb_z-a_zb_x\right)\cdot\vec{j}+\left(a_xb_y-a_yb_x\right)\cdot\vec{k}=$$
$$=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\cdot\vec{i}-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}\cdot\vec{j}+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\cdot\vec{k}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}:$$

Օրինակ. Հաշվել $A(1;1;0)$, $B(1;0;1)$ և $C(0;1;1)$ գագաթներով եռանկյան մակերեսը:

Լուծում. Գտնենք $\overline{AB}$ և $\overline{AC}$ վեկտորների կոորդինատները՝ $\overline{AB}=\{0;-1;1\}$ և $\overline{AC}=\{-1;0;1\}$: ABC եռանկյան մակերեսը՝ $S=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|$:

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{vmatrix}=-\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}:$$

Հետևաբար, $S=\frac{1}{2}\sqrt{3}$:

§ 8. Երեք վեկտորների խառը արտադրյալը և նրա երկրաչափական իմաստը: Երեք վեկտորների համահարթության պայմանը: Խառը արտադրյալի արտահայտումը վեկտորների կոորդինատների միջոցով

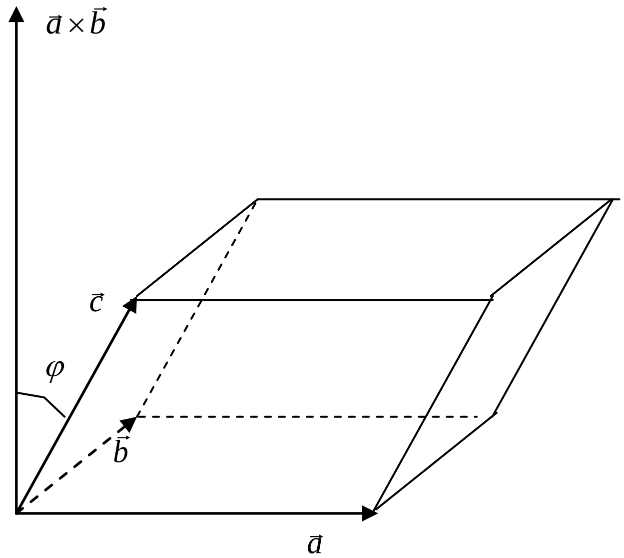
Ենթադրենք տրված են $\vec{a},\vec{b}$ և $\vec{c}$ վեկտորները: $\vec{a}$ վեկտորը վեկտորապես բազմապատկենք $\vec{b}$ վեկտորով: Այնուհետև $\vec{a}\times\vec{b}$ վեկտորը սկալյարապես բազմապատկենք $\vec{c}$ վեկտորով, կստանանք՝ $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$ թիվը:

Սահմանում. $\vec{a},\vec{b}$ և $\vec{c}$ վեկտորների խառը արտադրյալը կոչվում է $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$ թիվը:

Պարզենք երեք ոչ համահարթ վեկտորների խառը արտադրյալի երկրաչափական իմաստը:

Թեորեմ. Ոչ համահարթ $\vec a, \vec b$ և $\vec c$ վեկտորների խառը արտադրյալը հավասար է այդ վեկտորների վրա կառուցված զուգահեռանիստի ծավալի թվային արժեքին՝ դրական կամ բացասական նշանով:

Ապացույց. $\vec a, \vec b$ և $\vec c$ վեկտորները կիրառենք միևնույն կետից և նրանց վրա, իբրև կողմերի, կառուցենք զուգահեռանիստը(նկար1.):



Նկար 1.

Զուգահեռանիստի ծավալը նշանակենք V -ով, $\vec a$ և $\vec b$ վեկտորների վրա կառուցված զուգահեռագծի մակերեսը S -ով, իսկ զուգահեռանիստի բարձրությունը H -ով:

Համաձայն սկալյար և վեկտորական արտադրյալների սահմանումների՝

$$\left(\vec a \times \vec b\right)\cdot \vec c = \left|\vec a \times \vec b\right| \cdot \left|\vec c\right| \cdot \cos\varphi = S \cdot \left|\vec c\right| \cdot \cos\varphi,$$

որտեղ φ-ն $\vec a \times \vec b$ և $\vec c$ վեկտորներով կազմված անկյունն է: Եթե $\varphi < \frac{\pi}{2}$, ապա $\left|\vec c\right| \cdot \cos\varphi = H$: Հետևաբար, $\left(\vec a \times \vec b\right)\cdot \vec c = S \cdot H = V$: Իսկ եթե $\varphi > \frac{\pi}{2}$, ապա $\cos\varphi < 0$ և $\left|\vec c\right| \cdot \cos\varphi = -H$: Հետևաբար, այս դեպքում՝ $\left(\vec a \times \vec b\right)\cdot \vec c = -V$: Այսպիսով,

$$\left(\vec a \times \vec b\right)\cdot \vec c = \pm V:$$

Թեորեմ. Որպեսզի երեք վեկտորներ լինեն համահարթ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրանց խառը արտադրյալը հավասար լինի զրոյի:

Անհրաժեշտություն. Ենթադրենք $\vec a, \vec b$ և $\vec c$ վեկտորները համահարթ են: Եթե այդ վեկտորները կիրառենք միևնույն կետից, ապա նրանք կգտնվեն մի հարթության մեջ: $\vec a \times \vec b$ վեկտորն ուղղահայաց է այդ հարթությանը, հետևաբար, ուղղահայաց է նաև $\vec c$ վեկտորին, այդ պատճառով նրանց սկալյար արտադրյալը հավասար է զրոյի՝ $\left(\vec a \times \vec b\right)\cdot \vec c = 0$:

Բավարարություն. Տրված է $\left(\vec a \times \vec b\right)\cdot \vec c = 0$: Հնարավոր են հետևյալ դեպքերը.

1. $\vec a \times \vec b = 0$:

Այս դեպքում $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները համագիծ են, ուստի $\vec{a},\vec{b}$ և $\vec{c}$ վեկտորները համահարթ են:

2. $\vec{a}\times\vec{b}\neq 0$:

Այս դեպքում $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=0$ հավասարությունից հետևում է, որ $\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{c}$: Մյուս կողմից ըստ վեկտորական արտադրյալի սահմանման՝ $\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{a}$ և $\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{b}$: Այսպիսով, $\vec{a},\vec{b}$ և $\vec{c}$ վեկտորներն ուղղահայաց են միևնույն $\vec{a}\times\vec{b}$ վեկտորին, հետևաբար, համահարթ են:

Թեորեմ. $\vec{a},\vec{b}$ և $\vec{c}$ վեկտորները տրված են իրենց կոորդինատներով՝ $\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$, $\vec{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$, $\vec{c}=\{c_x,c_y,c_z\}$, ապա նրանց խառը արտադրյալը որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}: \qquad (1)$$

Ապացույց. Համաձայն վեկտորական արտադրյալն ըստ կոորդինատների հաշվման բանաձևի՝

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left\{\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix};\begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix};\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\right\}:$$

Օգտվելով սկալյար արտադրյալն ըստ կոորդինատների հաշվման բանաձևից, ստանում ենք՝

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=c_x\cdot\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}+c_y\cdot\begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix}+c_z\cdot\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}:$$

Օրինակ. Տրված են եռանկյուն բուրգի գագաթների կոորդինատները՝ $A(1;1;1)$, $B(4;4;4)$; $C(3;5;5)$, $D(2;4;7)$: Հաշվել բուրգի ծավալը:

Լուծում. Հայտնի է, որ այդ բուրգի ծավալը հավասար է $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ և $\overline{AD}$ վեկտորների վրա կառուցված զուգահեռանիստի ծավալի $\frac{1}{6}$ մասին: Օգտվելով խառը արտադրյալի երկրաչափական իմաստից՝ ստանում ենք, որ բուրգի ծավալը՝

$$V=\frac{1}{6}\left|(\overline{AB}\times\overline{AC})\cdot\overline{AD}\right|:$$

Քանի որ $\overline{AB}=\{3;3;3\}$, $\overline{AC}=\{2;4;4\}$; $\overline{AD}=\{1;3;6\}$, ապա համաձայն (1) բանաձևի՝

$$(\overline{AB}\times\overline{AC})\cdot\overline{AD}=\begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}=72+12+18-12-36-36=18,$$

այստեղից՝ $V = 3$:

Խնդիրներ

1. Հաշվել $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ և $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ վեկտորների վրա կառուցված եռանկյան մակերեսը:

Պատ. $\frac{5}{2}\sqrt{3}$:

2. Հաշվել $A(1;1;1)$, $B(2;3;4)$ և $C(4;3;2)$ գագաթներով եռանկյան մակերեսը:

Պատ. $\sqrt{24}$:

3.Գտնել $\vec{c}$ վեկտորի կոորդինատները, եթե այն ուղղահայաց է $\vec{a} = 2\vec{j} - \vec{k}$ և $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ վեկտորներին, oy առանցքի հետ կազմում է բութ անկյուն, և $|\vec{c}| = \sqrt{7}$:

Պատ. $\vec{c} = \left\{ \frac{4}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{2}{\sqrt{3}} \right\}$:

3. Գտնել $\vec{c}$ վեկտորի կոորդինատները, եթե այն ուղղահայաց է $\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ և $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ վեկտորներին, ox առանցքի հետ կազմում է բութ անկյուն, և $|\vec{c}| = \sqrt{10}$:

Պատ. $\vec{c} = \left\{ -\frac{7}{3}; \frac{5}{3}; \frac{4}{3} \right\}$:

5. Գտնել $\vec{c}$ վեկտորի կոորդինատները, եթե այն ուղղահայաց է $\vec{a} = 4\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$ և $\vec{b} = \vec{j} + 3\vec{k}$ վեկտորներին, oz առանցքի հետ կազմում է սուր անկյուն, և $|\vec{c}| = 26$:

Պատ. $\vec{c} = -6\vec{i} - 24\vec{j} + 8\vec{k}$:

6. Գտնել $\vec{c}^{\,0}$ միավոր վեկտորի կոորդինատները, եթե այն ուղղահայաց է $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ և $\vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ վեկտորներին և oy առանցքի հետ կազմում է բութ անկյուն:

Պատ. $\vec{c}^{\,0} = \left\{ \frac{2}{\sqrt{6}}; -\frac{1}{\sqrt{6}}; -\frac{2}{\sqrt{6}} \right\}$:

7. Գտնել $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ և $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$ վեկտորների խառն արտադրյալը:

Պատ. 33:

8. Ապացուցել, որ $\vec{a} = 2\vec{i} + 5\vec{j} + 7\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ և $\vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ վեկտորները համահարթ] են:

9. m-ի ո՞ր արժեքի դեպքում $\vec{a}=\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{b}=3\vec{i}+\vec{j}$ և $\vec{c}=m\vec{i}+2\vec{k}$ վեկտորները կլինեն համահարթ:

Պատ. $m=4$:

10. m-ի ո՞ր արժեքի դեպքում $\vec{a}=m\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$ և $\vec{c}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ վեկտորները կլինեն համահարթ:

Պատ. $m=1$:

11. Ապացուցել, որ $A(5;7;-2)$, $B(3;1;-1)$, $C(9;4;-4)$ և $D(1;5;0)$ կետերը գտնվում են նույն հարթության մեջ:

12. Հաշվել $A(0;0;1)$, $B(2;3;5)$, $C(6;2;3)$ և $D(3;7;2)$ գագաթներով եռանկյուն բուրգի ծավալը:

Պատ. 20:

13. Հաշվել $A(1;1;1)$, $B(4;4;4)$, $C(3;5;5)$ և $D(2;4;7)$ գագաթներով եռանկյուն բուրգի ծավալը:

Պատ. 3:

14. Միևնույն կետից տարված են $\vec{a}=\{4;0;3\}$ և $\vec{b}=\{4;\sqrt{5};\ -2\}$ վեկտորները: Գտնել $\vec{c^0}$ վեկտորը, որն ուղղված է $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորներով կազմված անկյան կիսորդով:

Պատ. $\vec{c^0}=\left\{\frac{8}{\sqrt{10}};\ \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{70}};\ \frac{1}{\sqrt{70}}\right\}$:

15. Միևնույն կետից տարված են $\vec{a}=\{-3;0;4\}$ և $\vec{b}=\{5;2;\ -14\}$ վեկտորները: Գտնել $\vec{c^0}$ վեկտորը, որն ուղղված է $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորներով կազմված անկյան կիսորդով:

Պատ. $\vec{c^0}=\left\{-\frac{2}{\sqrt{6}};\ -\frac{1}{\sqrt{6}};\ -\frac{1}{\sqrt{6}}\right\}$:

16. Միևնույն կետից տարված են $\vec{a}=\{2;-3;6\}$ և $\vec{b}=\{-1;2;\ -2\}$ վեկտորները: Գտնել $\vec{c}$ վեկտորը, որն ուղղված է $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորներով կազմված անկյան կիսորդով և $|\vec{c}|=3\sqrt{42}$:

Պատ. $|\vec{c}|=\{-3;15;12\}$:

17. Միևնույն կետից տարված են $\vec{a}=\{0;8;-6\}$ և $\vec{b}=\{\sqrt{2};-7;\ 7\}$ վեկտորները: Գտնել $\vec{c}$ վեկտորը, որն ուղղված է $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորներով կազմված անկյան կիսորդով և $|\vec{c}|=4$:

Պատ. $|\vec{c}|=\{2\sqrt{2};2;2\}$:

18. Տրված են հետևյալ վեկտորները. $\vec{a}=\{4;-2;-4\}$, $\vec{b}=\{6;-3;2\}$: Գտնել 1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$, 2) $\sqrt{\vec{a}^2}$, 3) $\sqrt{\vec{b}^2}$, 4) $(2\vec{a}-3\vec{b})(\vec{a}+2\vec{b})$, 5)$(\vec{a}+\vec{b})^2$, 6) $(\vec{a}-\vec{b})^2$:

19. Գտնել $A(-1;-2;4)$, $B(-4;-2;0)$, $C(3;-2;1)$ գագաթներ ունեցող եռանկյան կողմերի երկարությունները և ներքին անկյունները:

20. Գտնել $\vec{a}=2\vec{m}+4\vec{n}$ և $\vec{b}=\vec{m}-\vec{n}$ վեկտորներով կազմված անկյունը, որտեղ $\vec{m}$-ը և $\vec{n}$ –ը միավոր վեկտորներ են և կազմում են 120^0-ի անկյուն:

21. $\propto$-ի ինչպիսի՞ արժեքների դեպքում $\vec{p}=\propto\vec{a}+17\vec{b}$ և $\vec{q}=3\vec{a}-\vec{b}$ վեկտորները կլինեն փոխուղղահայաց, եթե $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=5$ և $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=120^0$:

22. Տրված են եռ երեք վեկտորներ. $\vec{a}=\{0;1;-2\}$, $\vec{b}=\{2;-4;2\}$, $\vec{c}=\{1;0;-2\}$: Հաշվել՝ $\vec{a}+\vec{b}$ վեկտորի պրոյեկցիան $\vec{b}+\vec{c}$ վեկտորի ուղղության վրա:

23. Գտնել $\vec{a}=\{-1;2;15\}$ վեկտորի պրոյեկցիան $\vec{b}=\{2;-1;0\}$ և $\vec{c}=\{1;0;1\}$ վեկտորների գումարի ուղղության վրա:

24. Տրված են $\vec{a}=-\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$ և $\vec{c}=-2\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}$ վեկտորները: Գտնել $2\vec{a}-\vec{c}$ և $\vec{a}+\vec{b}$ վեկտորներով կազմված անկյունը:

Պատ. 60^0:

25. Տրված են $A(-5;1)$, $B(-1;4)$, $C(1;-4)$ և $D(2;3)$ կետերը: Գտնել $\overrightarrow{AB}$ և $\overrightarrow{CD}$ վեկտորներով կազմված անկյունը:

Պատ. 45^0:

26. Տրված են $\vec{a}=8\vec{i}+4\vec{j}$, $\vec{b}=4\vec{i}-\vec{j}$ վեկտորները: Գտնել $\vec{a}-\vec{b}$ և $\vec{a}+\vec{b}$ վեկտորներով կազմված անկյունը:

Պատ. $arccos\frac{63}{65}$:

27. Տրված են $A(0;1;-1)$, $B(3;1;-5)$, $C(1;3;-3)$ կետերը: Գտնել $\overrightarrow{AB}$ և $\overrightarrow{AC}$ վեկտորներով կազմված անկյունը:

Պատ. $arccos\frac{11}{15}$:

28. Գտնել m-ը և n-ը, եթե $\vec{a}=\{3;m;-1\}$ վեկտորն ուղղահայաց է $\vec{b}=\{2;1;n\}$ վեկտորին և $|\vec{a}|=|\vec{b}|$:

Պատ. $m=-\frac{31}{12}$, $n=\frac{41}{12}$:

29. x-ի և y-ի ո՞ր արժեքների դեպքում $\vec{a}=\{x;-2;5\}$ և $\vec{b}=\{1;y;-4\}$ վեկտորները կլինեն համագիծ:

Պատ. $x=-\frac{5}{4}, y=\frac{8}{5}$:

30. m-ի և n-ի ո՞ր արժեքների դեպքում $\vec{a}=3\vec{i}-2\vec{j}+m\vec{k}$ և $\vec{b}=n\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$ վեկտորները կլինեն համագիծ:

Պատ. $m=4, n=-\frac{3}{2}$:

31. $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները համագիծ չեն: Գտնել x և y թվերը, եթե $x\vec{a}+y\vec{b}$ և $(y+1)\vec{a}+(2-x)\vec{b}$ վեկտորները հավասար են:

Պատ. $x=\frac{3}{2}, y=\frac{1}{2}$:

32. $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները համագիծ չեն: Գտնել x և y թվերը, եթե $(2-x)\vec{a}+\vec{b}$ և $y\vec{a}+(x-3)\vec{b}$ վեկտորները հավասար են:

Պատ. $x=4, y=2$:

33. $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները համագիծ չեն: Գտնել x թիվը, եթե $(x-1)\vec{a}+2\vec{b}$ և $3\vec{a}+x\vec{b}$ վեկտորները համագիծ են:

Պատ. $x=3$ կամ $x=-2$:

34. $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները համագիծ չեն: Գտնել x թիվը, եթե $3\vec{a}+x\vec{b}$ և $(1-x)\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}$ վեկտորները համագիծ են և ունեն միևնույն ուղղությունը:

Պատ. $x=-1$:

35. $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները համագիծ չեն: λ-ի ո՞ր արժեքների դեպքում $\lambda\vec{a}+\vec{b}$ և $3\vec{a}+\lambda\vec{b}$ վեկտորները կլինեն համագիծ:

Պատ. $\lambda=\pm\sqrt{3}$:

36. Գտնել $\vec{b}$ վեկտորի կոորդինատները, եթե այն համագիծ է $\vec{a}=\{-1;2\}$ վեկտորին, ox առանցքի հետ կազմում է բութ անկյուն և $|\vec{b}|=\sqrt{10}$:

Պատ. $\vec{b}=\{\sqrt{-2};2\sqrt{2}\}$:

37. $\propto$-ի ո՞ր արժեքների դեպքում $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}+3\propto\vec{k}$ և $\vec{b}=\propto^2\vec{i}+7\vec{j}-3\vec{k}$ վեկտորները կլինեն փոխուղղահայաց:

Պատ. $\propto=4, \propto=\frac{1}{2}$:

38. Տրված են $A(-5;7;-8)$, $B(-7;9;-9)$ կետերը և $\vec{a}=\{1;-3;1\}$ վեկտորը: Գտնել $\overrightarrow{AB}$ և $\vec{a}$ վեկտորներով կազմված անկյունը:

Պատ. $arccos\left(-\frac{3}{\sqrt{11}}\right)$:

39. Տրված են $A(-2;3;-4)$, $B(3;2;5)$, $C(1;-1;2)$ և $D(3;2;-4)$ կետերը: Հաշվել $\overrightarrow{AB}$ վեկտորի պրոյեկցիան $\overrightarrow{CD}$ վեկտորի ուղղության վրա:

Պատ. $-6\frac{5}{7}$:

§9. Վեկտորների գծային կախվածությունն ու անկախությունը

__Սահմանում__. x վեկտորը կոչվում է $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n$ վեկտորների գծային կոմբինացիա, եթե գոյություն ունեն այնպիսի $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ իրական թվեր, որոնց համար տեղի ունի

$$x=\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+...+\alpha_n\vec{a}_n$$

հավասարությունը:

__Սահմանում__. $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n$ վեկտորները կոչվում են գծորեն կախված, եթե գոյություն ունեն այնպիսի իրական $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ թվեր, որոնցից գոնե մեկը զրոյից տարբեր է, և որոնց համար տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը՝

$$\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+...+\alpha_n\vec{a}_n=0: \tag{1}$$

Եթե (1) հավասարությունը տեղի ունի միայն այն դեպքում, երբ $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_n=0$, ապա $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n$ վեկտորները կոչվում են գծորեն անկախ:

Դժվար չէ նկատել, որ եթե $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n$ վեկտորներից գոնե մեկը, օրինակ $\vec{a}_1$, հավասար է զրոյի, ապա $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3,...,\vec{a}_n$ վեկտորները հանդիսանում են գծորեն կախված, քանի որ (1) հավասարությունը տեղի է ունենում $\alpha_1=1,\alpha_2=\alpha_3=...=\alpha_4=0$ պայմաններում:

Եթե $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3,...,\vec{a}_n$ վեկտորների համախմբի մի մասը գծորեն կախված է, ապա գծորեն կախված է նաև ամբողջ համակարգը, քանի որ $\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+...+\alpha_k\vec{a}_k=0$, հետևում է, որ $\alpha_1^2+\alpha_n^2+...+\alpha_k^2\neq 0$, իսկ $\alpha_{k+1}=\alpha_{k+2}=...=\alpha_n=0$:

__Թեորեմ__ . Որպեսզի $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3,...,\vec{a}_n$ (n>1) վեկտորների համակարգը լինի գծորեն կախված, անհրաժեշտ է և բավարար, որպեսզի դրանցից գոնե մեկը հանդիսանա մյուսների գծային կոմբինացիան:

__Անհրաժեշտություն__. Ենթադրենք $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3,...,\vec{a}_n$ վեկտորները գծորեն կախված են, այդ դեպքում պետք է տեղի ունենա (1) հավասարությունը, երբ $\alpha_k(k=1,2,...n)$ թվերից գոնե մեկը հավասար չի զրոյի, օրինակ $\alpha_1\neq 0$, այդ դեպքում՝

$$\vec{a}_1 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_1}\vec{a}_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1}\vec{a}_3 - ... - \frac{\alpha_n}{\alpha_1}\vec{a}_n:$$

Այսինքն $\vec{a}_1$-ը հանդիսանում է մյուսների գծային կոմբինացիա :

<u>Բավարարություն</u>. Ենթադրենք $\vec{a}_1$-ը հանդիսանում է մյուսների գծային կոմբինացիան:

$$\vec{a}_1 = \alpha_2\vec{a}_2 + \alpha_3\vec{a}_3 + ... + \alpha_n\vec{a}_n \qquad \text{կամ}$$
$$(-1)\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \alpha_3\vec{a}_3 + ...\alpha_n\vec{a}_n = 0,$$

այսինքն՝ տեղի ունի (1) հավասարությունը, որի մեջ $\alpha_1 = -1 \neq 0$, իսկ սա նշանակում է, որ վեկտորների համակարգը գծորեն կախված է:

Կարելի է նշել, որ եթե համակարգը կազմված է մեկ ոչ զրոյական $\vec{a}_1$ վեկտորից, ապա նա գծորեն անկախ է, քանի որ $\alpha\vec{a} = 0$ հավասարությունը տեղի ունի միայն $\alpha = 0$ դեպքում, և գծորեն կախված է, եթե $\vec{a}$ =0 :

<u>Հետևանք</u>. $\vec{a}_1$ և $\vec{a}_2$ վեկտորները գծորեն կախված են, եթե դրանք կոլինար են:

Իրոք, եթե $\vec{a}_1$ և $\vec{a}_2$ կոլինար են, ապա $\vec{a}_1 = \alpha\vec{a}_2 => (-1)\vec{a}_1 + \alpha\vec{a}_2 = 0$:

$\vec{a}_1$ և $\vec{a}_2$ վեկտորները գծորեն կախված են, քանի որ տեղի ունի (1) հավասարությունը:

Եթե $\vec{a}_1$ և $\vec{a}_2$ գծորեն կախված են, ապա

$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 = 0 => \vec{a}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\vec{a}_2$ կամ նշ. $-\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \alpha$, կստանանք $\vec{a}_1 = \alpha\vec{a}_2$, այսինքն՝ վեկտորները կոլինար են:

<u>Թեորեմ</u>. Եթե $\vec{e}_1$ և $\vec{e}_2$ հարթության երկու ոչ կոլինար վեկտորներ են, ապա ցանկացած $\vec{a}$ վեկտոր կարելի է ներկայացնել միակ ձևով՝

$$\vec{a} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2\ , \qquad (2)$$

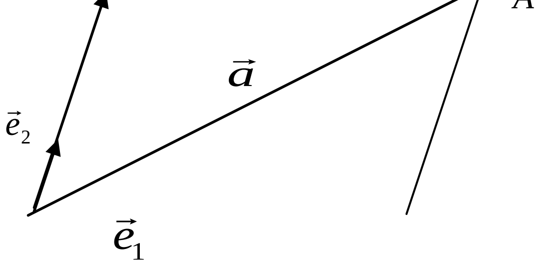
որտեղ (x_1, x_2) թվերը $\vec{a}$ վեկտորի կոորդինատներն են $\vec{e}_1$ և $\vec{e}_2$ վեկտորների համակարգում:

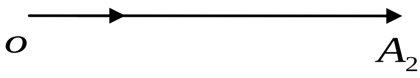
<u>Ապացույց</u> . $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ և $\vec{a}$ վեկտորները տեղափոխենք այնպես, որ նրանք ունենան միևնույն 0 սկզբնակետը: Այսինքն՝ կառուցենք $\overrightarrow{OE_1} = \vec{e}_1$, $\overrightarrow{OE_2} = \vec{e}_2$, $\overrightarrow{OA_1} = \vec{a}$ վեկտորները: A կետից տանենք զուգահեռ ուղիղներ $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ -ին և նրանց հատման կետերը նշանակենք A_1 և A_2-ով (նկար14):

$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1A}$, $\overrightarrow{A_1A} = \overrightarrow{OA_2}$, որտեղից $\vec{a} = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}$:

Քանի որ $\overrightarrow{OA_1} = x_1\vec{e}_1, \overrightarrow{OA_2} = x_2\vec{e}_2$, տեղադրելով ստացված արժեքները վերջին հավասարության մեջ՝ կստանանք՝

$$\vec{a} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2\ :$$





Նկար 14.

x_1 և x_2 գործակիցները որոշվում են միարժեք ձևով:

Ենթադրենք գոյություն ունի մեկ այլ վերլուծություն՝

$$\vec{a} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 : \qquad (3)$$

(2) հավասարությունից հանելով (3)-ը՝ կստանանք՝

$$(x_1 - y_1)\vec{e}_1 + (x_2 - y_2)\vec{e}_2 = 0 :$$

Քանի որ $\vec{e}_1$ և $\vec{e}_2$ վեկտորները կոլինար չեն, ապա վերջին հավասարությունը տեղի կունենա, երբ $x_1 - y_1 = 0$, $x_2 - y_2 = 0$ => $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$:

<u>**Թեորեմ**</u> . $\vec{a}_{1,}\vec{a}_2, \vec{a}_3$ գծորեն կախված են, եթե համահարթ /կոմպլանար/ են:

<u>Ապացույց</u> . Եթե $\vec{a}_{1,}\vec{a}_2, \vec{a}_3$ գծորեն կախված են, ապա ըստ նախորդ թեորեմի, նրանցից որևէ մեկը հանդիսանում է մյուս երկուսի գծային կոմբինացիան՝

$$\vec{a}_1 = \alpha_2\vec{a}_2 + \alpha_3\vec{a}_3 :$$

Հետևաբար, $\vec{a}_1$ վեկտորը գտնվում է նույն հարթության վրա $\vec{a}_2, \vec{a}_3$- ի հետ միասին:

Եթե $\vec{a}_{1,}\vec{a}_2, \vec{a}_3$ վեկտորները համահարթ /կոմպլանար/ են, և $\vec{a}_{1,}\vec{a}_2$ կոլինար/համագիծ/ չեն, ապա ըստ նախորդ թեորեմի՝

$$\vec{a}_3 = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2, \text{ որտեղից}$$

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + (-1)\vec{a}_3 = 0 :$$

Այսինքն՝ $\vec{a}_{1,}\vec{a}_2, \vec{a}_3$ վեկտորները գծորեն կախված են, քանի որ տեղի ունի (1) հավասարությունը, երբ $\alpha_3 \cdot (-1) \neq 0$, իսկ $\vec{a}_1 = \alpha\vec{a}_2$ (ըստ նրանց համագծության):

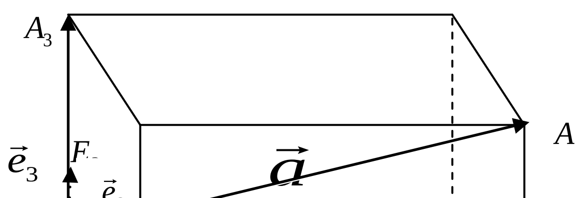
<u>**Թեորեմ**</u>. Եթե տարածության ցանկացած երեք $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ վեկտորներ կոմպլանար չեն, ապա ցանկացած $\vec{a}$ վեկտոր միարժեք ձևով կարելի է ներկայացնել՝

$$\vec{a} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$$

տեսքով, որտեղ x_1, x_2, x_3 թվերը կոչվում են $\vec{a}$ վեկտորի կոորդինատներ $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ վեկտորների համակարգում:

<u>Ապացույց</u>. Տարածության մեջ վերցնենք $\overrightarrow{OE_1} = \vec{e}_1, \overrightarrow{OE_2} = \vec{e}_2, \overrightarrow{OE_3} = \vec{e}_3, \overrightarrow{OA} = \vec{a}$ վեկտորների համակարգը:

Քանի որ նրանք կոմպլանար չեն, նրանք կկազմեն կոորդինատական համակարգ:



A_1

Նկար 15.

A կետից տանենք երեք հարթություններ, որոնք զուգահեռ են $(\vec{e}_2, \vec{e}_3)$, $(\vec{e}_1, \vec{e}_3)$, $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ հարթություններին, հատման կետերը համապատասխանաբար նշանակենք A_1, A_2, A_3 կետերով:

Արդյունքում կստանանք զուգահեռանիստ, որի համար OA-ն հանդիսանում է անկյունագիծ(նկար15): Երեք վեկտորների գումարման կանոնի համաձայն՝

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3}:$$

Վերջին հավասարության մեջ տեղադրելով $\overrightarrow{OA} = x_1\vec{e}_1$, $\overrightarrow{OA_2} = x_2\vec{e}_2$, $\overrightarrow{OA_3} = x_3\vec{e}_3$, կստանանք՝

$$\vec{a} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3:$$

Վերլուծման միարժեքությունն ապացուցվում է նախորդ թեորեմի ձևով:
$\vec{a}$ վեկտորի մոդուլը հաշվվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}:$$

<u>Թեորեմ</u>. Եռաչափ տարածության ցանկացած $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ չորս վեկտորներ գծորեն կախված են:
<u>Ապացույց</u> . Եթե $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ վեկտորներից $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ համահարթ /կոմպլանար/ չեն, այդ դեպքում ըստ նախորդ թեորեմի՝ $\vec{a}_4 = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \alpha_3\vec{a}_3$, նրանք գծորեն կախված են:

Եթե $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ գծորեն կախված են, ապա $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \alpha_3\vec{a}_3 = 0$ $(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 \neq 0)$ => $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \alpha_3\vec{a}_3 + 0\vec{a}_4 = 0$ այսինքն $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ վեկտորները գծորեն կախված են:

<u>Սահմանում</u>. Հարթության վրա կամայական երկու գծորեն անկախ (ոչ կոլինար) վեկտորներ կոչվում են բազիս:
<u>Սահմանում</u>. տարածության մեջ կամայական երեք գծորեն անկախ (ոչ կոմպլանար) վեկտորներ կազմում են բազիս:

Խնդիրներ

1. Որոշել $\vec{a} = -\vec{i} + \vec{j}$ և $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$ վեկտորների միջև եղած անկյունը:

Պատ. 135^0:

2. Տրված են $A(a;0;0)$; $B(0;0;2a)$ և $C(a;0;a)$ կետերը: Կառուցել $\overrightarrow{OC}$ և $\overrightarrow{AB}$ վեկտորները և գտնել նրանց կազմած անկյունը:

Պատ. $\cos\varphi = 1/\sqrt{10} = 0{,}316;\qquad \varphi = 71^0 35'$:

3. Գտնել XOY և YOZ անկյունների կիսորդներով կազմված անկյունը:

Պատ. 60^0:

4. Տրված են $\vec{a}$, $\vec{b}$ և $\vec{c}$ կոմպլանար (համահարթ) վեկտորները, ընդ որում $a = 3,\ b = 2, c = 5,\ (\angle a,b) = 60^0$ և $(\angle b,c) = 60^0$: Կառուցել $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b} - c$ վեկտորը և հաշվել նրա մոդուլը հետևյալ բանաձևով.

$$u = \sqrt{(a+b-c)^2}\ :$$

Պատ. 7:

5. Տրված են $\overrightarrow{OA} = a$ և $\overrightarrow{OB} = b$, ընդ որում $a = 2, b = 4,$ իսկ $(\angle a,b) = 60^0$: Որոշել AOB եռանկյան $\overrightarrow{OM}$ միջնագծի և $\overrightarrow{OA}$ կողմի կազմած անկյունը:

Պատ. $\cos\varphi = 2/\sqrt{7}$:

6. Հայտնի է, որ $|\vec{a}| = 6;\ \ |\vec{b}| = \sqrt{2}$: Գտնել $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների սկալյար արտադրյալը հետևյալ դեպքերում՝

$$\cos\varphi_1 = 45^0;\quad \cos\varphi_2 = 90^0;$$
$$\cos\varphi_3 = 135^0;\quad \cos\varphi_4 = 180^0;$$

Պատ. $6; 0; -6;\ -6\sqrt{2}$:

7. Հաշվել տրված կոորդինատներով $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների սկալյար արտադրյալը և նրանց կազմած անկյունը.

1) $\vec{a} = \{3;-4\};\quad \vec{b} = \{5;12\};$

2) $\vec{a} = \{2;-3;2\};\quad \vec{b} = \{4;2;-1\}$:

Պատ. 1) $\vec{a}\vec{b} = -33;\quad \cos\varphi = -\dfrac{33}{65}$

2) $\vec{a}\vec{b} = 0$:

8. Գտնել $A(5;2;-4); B(9;-8;-3); C(16;-6;-11)$ գագաթներով եռանկյան ներքին անկյունները:

Պատ. $\varphi_1 = \varphi_2;\quad \varphi_3 = 90^0$:

9. Տրված են $\vec{a}=\{1;-2;4\}$ և $\vec{b}=\{3;1;-5\}$ վեկտորները: Գտնել $\vec{x}$ վեկտորը, գիտենալով, որ այն ուղղահայաց է OY առանցքին և բավարարում է $\vec{x}\vec{a}=-3,\quad \vec{x}\vec{b}=8$ պայմաններին:

Պատ. $\vec{x}=\{1;0;-1\}$:

10. Գտնել $\bar{a}=\{4;3;-7\}$ վեկտորի պրոյեկցիան $b=\{1;-2;-2\}$ վեկտորի առանցքի վրա:

Պատ. 4:

11. Գտնել $3\vec{a}-5\vec{b}$ և $5\vec{a}-6\vec{b}$ վեկտորների սկալյար արտադրյալը, եթե $a=4, b=6$ և $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների կազմած անկյունը $\pi/3$ է:

Պատ. – 96:

12. m-ի ինչ արժեքի դեպքում $\vec{a}=m\vec{i}+\vec{j}$ և $\vec{b}=3\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}$ վեկտորները կլինեն ուղղահայաց:

Պատ. $m=1$:

13. Ցույց տալ, որ $\vec{a}=7\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k},\quad \vec{b}=3\vec{i}-7\vec{j}+8\vec{k},\ \vec{c}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ վեկտորները կոմպլանար են:

14. Ցույց տալ, որ $A(5;7;-2); B(3;1;-1); C(9;4;-4)$ և $D(1;5;0)$ կետերն ընկած են միևնույն հարթության մեջ:

15 . Տրված են $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}, \vec{b}=4\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$ վեկտորները: Հաշվել $2\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների վեկտորական արտադրյալը:

Պատ. $6\vec{i}-8\vec{j}-10\vec{k}$:

16. Տրված են $\vec{a}=\{3;-1;-2\}, \vec{b}=\{1;2;-1\}$ վեկտորները: Հաշվել $2\vec{a}+\vec{b}$ և $\vec{b}$ վեկտորների վեկտորական արտադրյալը:

Պատ. $10\vec{i}+2\vec{j}+14\vec{k}$:

17. Տրված են $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$ և $\vec{b}=2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ վեկտորները: Գտնել $\vec{a}\times\vec{b}$ վեկտորով ուղղված միավոր վեկտորը:

Պատ. $-\frac{1}{\sqrt{11}}\vec{i}+\frac{3}{\sqrt{11}}\vec{j}--\frac{1}{\sqrt{11}}\vec{k}$:

18. Հաշվել $\vec{a}+2\vec{b}$ և $3\vec{a}-\vec{b}$ վեկտորների վրա կառուցված զուգահեռագծի մակերեսը, եթե $|\vec{a}|=1, |\vec{b}|=2, \left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=\frac{\pi}{6}$:

Պատ. 7:

19. Հաշվել $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ և $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ վեկտորների վրա կառուցված եռանկյան մակերեսը:

Պատ. $\frac{5}{2}\sqrt{3}$:

20. Հաշվել $A(1;1;1)$, $B(2;3;4)$, $C(4;3;2)$ գագաթներով եռանկյան մակերեսը:

Պատ. $\sqrt{24}$:

21. Հաշվել այն զուգահեռագծի մակերեսը, որը կառուցված է $\vec{a} = \{8;4;1\}$ և $\vec{b} = \{2;-2;1\}$ վեկտորների վրա:

22. Պարզել $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ վեկտորների կոմպլանարությունը/համահարթությունը/.
1. $\vec{a} = \{2;3;8\}$, $\vec{b} = \{1;-1;3\}$, $\vec{c} = \{1;9;-11\}$,
2. $\vec{a} = \{3;-2;1\}$, $\vec{b} = \{2;1;2\}$, $\vec{c} = \{3;-1;-2\}$,
3. $\vec{a} = \{2;-1;2\}$, $\vec{b} = \{1;2;-3\}$, $\vec{c} = \{3;-4;7\}$:

23. Հաշվել $ABCD$ բուրգի ծավալը, եթե՝

1. $A(2;-1;1)$, $B(6;5;4)$, $C(3;2;-1)$, $D(4;1;3)$,
2. $A(2;-3;5)$, $B(0;2;1)$, $C(-2;-2;3)$, $D(3;2;4)$,
3. $A(0;0;0)$, $B(3;4;2)$, $C(2;3;5)$, $D(6;0;-3)$:

24. Տրված են բուրգի գագաթների կոորդինատները՝ $A(2;3;1)$, $B(4;1;-2)$, $C(6;3;7)$, $D(-5;-4;7)$: Գտնել D գագաթից իջեցրած բարձրության երկարությունը:

25. $ABCD$ բուրգի գագաթի կոորդինատներն են՝ $A(1;1;1)$, $B(2;0;2)$, $C(2;2;2)$, $D(3;4;-3)$: Գտնել D գագաթից իջեցրած բարձրության երկարությունը:

26. Տրված են $A(-2;3;-4)$, $B(3;2;5)$, և $C(1;-1;2)$ կետերը: Հաշվել $\overrightarrow{AB}$ և $\overrightarrow{AC}$ վեկտորների վեկտորական արտադրյալը:

Պատ. $7\vec{i} + 7\vec{j} + 7\vec{k}$:

27. Տրված են $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ և $\vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ վեկտորները: Գտնել $\vec{a} \times \vec{b}$ վեկտորով ուղղված միավոր վեկտորը:

Պատ. $-\frac{4}{5\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{3}{5\sqrt{2}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{k}$:

28. Տրված են $A(1;-1;2)$, $B(2;0;3)$, և $C(-2;1;3)$ կետերը: Գտնել $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ վեկտորով

ուղղված միավոր վեկտորը:

Պատ. $-\frac{1}{\sqrt{42}}\vec{i}+\frac{4}{\sqrt{42}}\vec{j}+\frac{5}{\sqrt{42}}\vec{k}$:

29. Տրված են $\vec{a}=-\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}-\vec{k}$ և $\vec{c}=2\vec{i}-\vec{j}$ վեկտորները: Հաշվել $\vec{a}$ վեկտորի պրոյեկցիան $\vec{b}\times\vec{c}$ վեկտորի ուղղության վրա:

Պատ. $-\frac{4}{\sqrt{6}}$:

30. Տրված են $\vec{a}=\{1;-2;1\}$, $\vec{b}=\{1;2;-1\}$ և $\vec{c}=\{-1;1;2\}$ վեկտորները: Հաշվել $\vec{a}$ վեկտորի պրոյեկցիան $\vec{b}\times\vec{c}$ վեկտորի ուղղության վրա:

Պատ. $\frac{2}{7}\sqrt{35}$:

31. Հաշվել $6\vec{a}-\vec{b}$ և $\vec{a}+\vec{b}$ վեկտորների վրա կառուցված զուգահեռագծի մակերեսը, եթե $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|$=4, $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\frac{\pi}{4}$:

Պատ. $42\sqrt{2}$:

32. Հաշվել $A(0;0;1)$, $B(2;3;5)$, $C(6;2;3)$ և $D(3;7;2)$ գագաթներով եռանկյուն բուրգի ծավալը:

Պատ. 20:

33. Հաշվել $A(1;1;1)$, $B(4;4;4)$, $C(3;5;5)$ և $D(2;4;7)$ գագաթներով եռանկյուն բուրգի ծավալը:

34. Հարթության վրա տրված են $A(0;-2)$, $B(4;2)$ և $C(4;-2)$ կետերը: Կոորդինատների սկզբնակետում տեղադրված են $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ և $\overrightarrow{OC}$ ուժերը: Կառուցել նրանց համազոր $\overrightarrow{OM}$ ուժը, գտնել նրա մեծությունը և պրոյեկցիաները կոորդինատային առանցքների վրա: $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ և $\overrightarrow{OM}$ ուժերն արտահայտել կոորդինատային առանցքների i և j միավոր վեկտորների միջոցով:

Պատ.

$$X=\sum x_i=8;$$
$$Y=\sum y_i=-2;$$
$$OM=\sqrt{64+4}=2\sqrt{17}:$$

35. Տրված է $OABCDE$ կանոնավոր վեցանկյունը $OA=3$ կողմով: $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ վեկտորների միավոր վեկտորները համապատասխանաբար նշանակելով m, n և p-ով՝ նկարագրել կախվածությունը միմյանց միջև /օրինակ $OABC$ սեղանը դիտարկելով/: Այնուհետև $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OD}$ և $\overrightarrow{DA}$ վեկտորներն արտահայտել m-ի և n-ի միջոցով:

Պատ. $m+p=n; \overrightarrow{OB}=3(m+n); \overrightarrow{BC}=3(n-m); \overrightarrow{EO}=3(m-n); \overrightarrow{OD}=3(2n-m); \overrightarrow{DA}=6(m-n)$:

36. Հարթության վրա տրված են $A(3;-3)$, $B(-3;3)$ և $C(-3;0)$ կետերը: Կոորդինատների սկզբնակետում տեղադրված են $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ և $\overrightarrow{OC}$ ուժերը: Կառուցել նրանց համազոր $\overrightarrow{OM}$ ուժը, գտնել նրա մեծությունը և պրոյեկցիաները կոորդինատային առանցքների վրա: $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ և $\overrightarrow{OM}$ ուժերն արտահայտել կոորդինատային առանցքների i և j միավոր վեկտորների միջոցով:

Պատ. $x=x_1+x_2+x_3=-3; y=\sum y_i=6, OM=\sqrt{9+36}=3\sqrt{5}$:

37. Տրված է $ABCD$ ուղղանկյունը: Կոլինեա՞ր են արդյոք $\overrightarrow{AD}$ և $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}$, և $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$ վեկտորները:

Պատ. $\overrightarrow{AD}$ և $\overrightarrow{CB}$ կոլինեար են, $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DB}$ և $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BD}$ կոլինեար են:

38. Տրված է $ABCD$ շեղանկյունը: Հավասար են արդյո՞ք $\overrightarrow{AD}$ և $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD}$ և $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}$ և $\overrightarrow{CD}$ վեկտորները:

Պատ. $\overrightarrow{AD}\neq\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}\neq\overrightarrow{CD}$:

39. Տրված է $ABCD$ զուգահեռագծի անկյունագծերը հատվում են O կետում և $\overrightarrow{AB}=\vec{p}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{q}$: $\vec{p}$-ով և $\vec{q}$-ով արտահայտել հետևյալ վեկտորները՝ $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{CO}$, $\overrightarrow{BO}$:

Պատ. $\overrightarrow{BC}=\vec{q}$, $\overrightarrow{CB}=-\vec{q}$, $\overrightarrow{CD}=-\vec{p}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{p}+\vec{q}$, $\overrightarrow{BD}=-\vec{p}+\vec{q}$, $\overrightarrow{DB}=\vec{p}-\vec{q}$,
$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}(\vec{p}+\vec{q})=\frac{1}{2}\vec{p}+\frac{1}{2}\vec{q}$, $\overrightarrow{CO}=-\frac{1}{2}(\vec{p}+\vec{q})$, $\overrightarrow{BO}=\frac{1}{2}(-\vec{p}+\vec{q})$:

39. ABC եռանկյան մեջ AB կողմը M և N կետերով տրոհված է երեք մասերի՝ $|AM|=|MN|=|NB|$: Գտնել $\overrightarrow{CM}$-ը, եթե $\overrightarrow{CA}=a$, $\overrightarrow{CB}=b$:

Պատ. $CM=(2a+b)/3$:

40. K- ն և M-ը $ABCD$ զուգահեռագծի համապատասխանաբար BC և CD կողմերի միջնակետերն են: $\overrightarrow{AK}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AM}=\vec{b}$: $\overrightarrow{BD}$ վեկտորն արտահայտել $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների միջոցով:

Պատ. $\overrightarrow{BD}=2\vec{b}-2\vec{a}$:

41. M-ը ABC զուգահեռագծի CD կողմի միջնակետն է: $\overrightarrow{BM}=\vec{a}$, $\overrightarrow{MC}=\vec{b}$: $\overrightarrow{BD}$ վեկտորն արտահայտել $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների միջոցով:

Պատ. $\overrightarrow{BD}=\vec{a}=\vec{b}$:

42. M-ը ABC եռանկյան AB կողմի միջնակետն է, իսկ O-ն միջնագծերի հատման կետը: $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$: $\overrightarrow{MO}$ վեկտորն արտահայտել $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների միջոցով:

Պատ. $\overrightarrow{MO} = \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{1}{6}\vec{a}$:

43. $ABCD$ սեղանի AD և BC հիմքերի երկարությունները հարաբերում են ինչպես 3:2 $\overrightarrow{BD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{a}$: $\overrightarrow{BC}$ վեկտորն արտահայտել $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների միջոցով:

Պատ. $\overrightarrow{AB} = \frac{3}{5}\vec{a} - \frac{2}{5}\vec{b}$:

44. $ABCD$ սեղանի AD և BC հիմքերի երկարությունների հարաբերությունը հավասար է 4-ի: M-ը անկյունագծերի հատման կետն է: $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$: $\overrightarrow{AM}$ վեկտորն արտահայտել $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների միջոցով:

Պատ. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{5}\vec{a} - \frac{4}{5}\vec{b}$:

45. ABC եռանկյան մեջ AM-ը BAC անկյան կիսորդն է, ընդ որում M կետն ընկած է BC կողմի վրա: $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$: $\overrightarrow{AM}$ վեկտորն արտահայտել $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների միջոցով:

Պատ. $\overrightarrow{AM} = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}\cdot\vec{a} + \frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}\cdot\vec{b}$:

46. M-ը $ABCD$ զուգահեռագծի BC կողմի միջնակետն է: $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$: $\overrightarrow{MD}$ վեկտորն արտահայտել $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների միջոցով:

Պատ. $\overrightarrow{MD} = \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}$:

47. ABC եռանկյան մեջ E-ն և F-ը համապատասխանաբար AB և AC կողմերի միջնակետերն են: $\overrightarrow{BF} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CE} = \vec{b}$: $\overrightarrow{CA}$ վեկտորն արտահայտել $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների միջոցով:

Պատ. $\overrightarrow{CA} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b}$:

48. $ABCD$ սեղանի մեջ AD և BC հիմքերի երկարությունները հարաբերում են, ինչպես 3:2: $\overrightarrow{AC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BD} = \vec{b}$: $\overrightarrow{BC}$ վեկտորն արտահայտել $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների միջոցով:

Պատ. $\overrightarrow{BC} = \frac{2}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}$:

49. K–ն և M-ը $ABCD$ զուգահեռագծի համապատասխանաբար BC և CD կողմերի միջնակետերն են: $\overrightarrow{AK} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AM} = \vec{b}$: $\overrightarrow{AD}$ վեկտորն արտահայտել $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների միջոցով:

Պատ. $\overrightarrow{AD} = \frac{4}{3}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a}$:

50. E-ն F-ը $ABCD$ քառանկյան համապատասխանաբար AB և CD կողմերի միջնակետերն են: $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$: $\overrightarrow{EF}$ վեկտորն արտահայտել $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների միջոցով:

Պատ. $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$:

51. Տրված է $ABCA_1B_1C_1$ եռանկյուն պրիզման: $\overrightarrow{BB_1} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{BA} = \vec{c}$: O-ն ABC եռանկյան միջնագծերի հատման կետն է: $\overrightarrow{A_1O}$ վեկտորն արտահայտել $\vec{a}$, $\vec{b}$ և $\vec{c}$ վեկտորների միջոցով:

Պատ. $\overrightarrow{A_1O} = -\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{c}$:

52. Տրված է $ABCA_1B_1C_1$ եռանկյուն պրիզման: $\overrightarrow{BB_1} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{BA} = \vec{c}$: M-ը BB_1C_1C նիստի անկյունագծերի հատման կետն է: $\overrightarrow{AM}$ վեկտորն արտահայտել $\vec{a}$, $\vec{b}$ և $\vec{c}$ վեկտորների միջոցով:

Պատ. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}$:

53. ABC ուղղանկյուն եռանկյան C ուղիղ անկյան գագաթից տարված է CD բարձրությունը: $\overrightarrow{CB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$: $\overrightarrow{CD}$ վեկտորն արտահայտել $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների միջոցով:

Պատ. $\overrightarrow{CD} = \frac{|\vec{b}|^2}{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2} \cdot \vec{a} + \frac{|\vec{a}|^2}{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2} \cdot \vec{b}$:

§10. Դեկարտյան կոորդինատների ձևափոխություն, պտույտ, զուգահեռ տեղափոխություն: Կոորդինատական առանցքների պտտումը

Ինչպես արդեն գիտենք կետի դիրքը հարթության վրա որոշվում է երկու կոորդինատներով, մի որոշ կոորդինատային համակարգի նկատմամբ: Այսինքն, եթե փոխենք կոորդինատային համակարգը, ապա կփոխվեն կետի կոորդինատները, այսինքն նույն կետը տարբեր կոորդինատական համակարգերում ունի տարբեր կոորդինատներ:

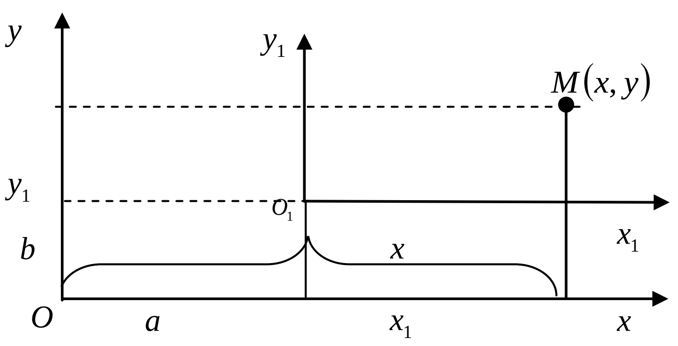
Ճիշտ նույն ձևով միևնույն գիծը տարբեր համակարգերում տարբեր հավասարումներով է արտահայտվում:

Այսպիսով, կոորդինատների ձևափոխման խնդիրը կայանում է նրանում, որ գիտենալով կետի կոորդինատները/կամ որևէ գծի հավասարումը/ կոորդինատների մի համակարգում, գտնենք նրա կոորդինատները/կամ գծի հավասարումը/ մեկ այլ համակարգում:

<u>Կոորդինատների զուգահեռ տեղափոխում</u>.

Դիցուք հարթության վրա տրված են երկու դեկարտյան կոորդինատական համակարգեր՝ o, o_1 տարբեր սկզբնակետերով և առանցքների միևնույն ուղղություններով: Նոր o_1 սկզբնակետի կոորդինատների հին համակարգի նկատմամբ նշանակենք $(a;b)$: Կամայական M կետի կոորդինատների հին համակարգի նկատմամբ նշանակենք $(x;y)$, իսկ նոր համակարգի նկատմամբ $(x_1;y_1)$: Մենք այստեղ նկատի ունենք, որ առանցքների ուղղությունները համընկնում են:

Այլ կերպ ասած, նոր կոորդինատական $o_1x_1y_1$ համակարգը ստացվում է oxy համակարգի զուգահեռ տեղափոխման միջոցով, որի ժամանակ $O(0,0)$ կետը տեղափոխվում է $O_1(a;b)$ կետը, այստեղ a-ն և b-ն o_1 կետի կոորդինատներն են հին համակարգում, որոշակիության համար $a>0, b>0$ (նկար 25): $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M}$:



նկար 25.

Այժմ հարթության վրա վերցնենք կամայական M կետը, որի կոորդինատները հին համակարգում հավասար են (x,y), իսկ նոր համակարգում՝ (x_1,y_1): Գծագրից հետևում է, որ

$$x = x_1 + a\,,\; y = y_1 + b\, :$$

Իսկ սա նշանակում է, որ զուգահեռ տեղափոխման ժամանակ հին կոորդինատները հավասար են նորին՝ գումարած նոր սկզբնակետի կոորդինատը հին համակարգի նկատմամբ:

Կամ $x_1 = x - a$, $y_1 = y - b$, որոնք հնարավորություն են տալիս նոր կոորդինատներն արտահայտել հնի միջոցով:

<u>Օրինակ.</u> Օգտվելով կոորդինատների ձևափոխման բանաձևերից՝ $y = x^2 + 4x + 5$ կորի հավասարումը բերենք կանոնական տեսքի:

<u>Լուծում</u>. Ձևափոխենք աջ մասը՝ անջատելով լրիվ քառակուսի՝

$$x^2 + 4x + 5 = (x+2)^2 + 1 \text{ կամ՝}$$
$$y = (x+2)^2 + 1$$
$$y - 1 = (x+2)^2 :$$

Եթե ընդունենք $y-1=y_1$, $x+2=x_1$, կստանանք՝ $y_1=x_1^{\ 2}$, վերջին հավասարումն իրենից ներկայացնում է պարաբոլ, որի կենտրոնը գտնվում է նոր համակարգի սկզբնակետում և համաչափ է o_1y_1 առանցքի նկատմամբ:

Նոր սկզբնակետի կոորդինատները հին համակարգում ստանալու համար օգտվենք $y-1=y_1$, $x+2=x_1$ բանաձևերից: Քանի որ նոր համակարգում $y_1=0$, $x_1=0$, ապա

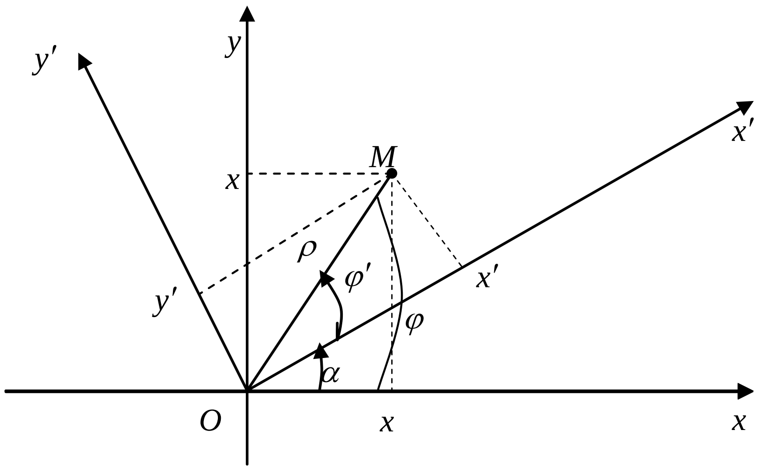
$$x=-2,\ y=1,$$

այսպիսով, նոր համակարգի սկզբնակետը գտնվում է $O_1(-2,1)$ կետում:

Կոորդինատական առանցքների պտտումը.

Դիցուք տրված են երկու դեկարտյան կոորդինատական համակարգեր՝ միևնույն O սկզբնակետով և առանցքների տարբեր ուղղություններով:

α-ն ox և ox' առանցքերի կազմած անկյունն է (նկար 26): Կամայական M կետի կոորդինատները հին և նոր համակարգի նկատմամբ նշանակենք համապատասխանաբար $M(x,y)$ և $M(x',y')$-ով:



Նկար 26.

Այդ համակարգերից յուրաքանչյուրի համար, ըստ նկար 26-ի, M կետի բևեռային կոորդինատները այդ դեպքում կլինեն՝ $\rho=\rho',\varphi=\varphi'+\alpha$, ի նկատի ունենալով բևեռային և դեկարտյան կոորդինատների կապի բանաձևերը՝ $x=\rho\cos\varphi, y=\rho\sin\varphi$, կստանանք՝

$$x=\rho\cos\varphi=\rho\cos(\varphi'+\alpha)=(\rho\cos\varphi')\cos\alpha-(\rho\sin\varphi')\sin\alpha=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha$$

$$y=\rho\sin\varphi=\rho\sin(\varphi'+\alpha)=(\rho\sin\varphi')\cos\alpha-(\rho\cos\varphi')\sin\alpha=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha$$

$$\begin{cases} x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha \\ y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha \end{cases}:$$

Վերջին բանաձևերը հնարավորություն են տալիս նոր կոորդինատների միջոցով ստանալ կետի կոորդինատները հին համակարգում:

Որպեսզի արտահայտենք x',y', x,y-ի միջոցով, անհրաժեշտ է վերջին համակարգը լուծել x',y'-ի նկատմամբ: Դրա համար առաջին հավասարումը բազմապատկենք $\cos\alpha$-ով, երկրորդը՝ $\sin\alpha$-ով, կստանանք՝

$$x\cos\alpha = x'\cos^2\alpha - y'\sin\alpha\cos\alpha,$$
$$y\sin\alpha = x'\sin^2\alpha + y'\sin\alpha\cos\alpha:$$

Նույն ձևով, եթե առաջին հավասարումը բազմապատկենք $\sin\alpha$-ով, իսկ երկրորդը՝ $\cos\alpha$-ով, կստանանք՝

$$\begin{aligned} x\sin\alpha &= x'\sin\alpha\cos\alpha - y'\sin^2\alpha, \\ y\cos\alpha &= x'\sin\alpha\cos\alpha + y'\cos^2\alpha \end{aligned}:$$

Երկրորդից հանենք առաջինը՝

$$\begin{aligned} y' &= y\cos\alpha - x\sin\alpha \\ y' &= -x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{aligned}$$, այսպիսով ստացանք՝ $$\begin{cases} x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}:$$

Ճիշտ նույն ձևով ստացված բանաձևերի միջոցով կարելի է ստանալ կետի կոորդինատները նոր համակարգում, եթե հայտնի են նրա կոորդինատները հին համակարգում:

Ընդհանուր դեպքում, եթե տեղի ունի վերը նշված ձևափոխությունը, և կոորդինատների սկզբնակետը տեղափոխված է $(a;b)$ կետը, և կա առանցքների պտույտ, ապա կիրառելով սկզբից տեղափոխման, իսկ հետագայում պտույտի բանաձևերը՝ կստանանք՝

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha + a \\ y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha + b \end{cases}:$$

Խնդիրներ

1. Պտտելով կոորդինատների առանցքերը 45^0-ով՝ պարզեցնել հավասարումը.

   1. $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 32$, 2. $3x^2 - 10xy + 3y^2 + 32 = 0$:

   Պատ. $1. x^2 + 4y^2 = 16;\ \ 2. x^2 + 4y^2 = 16$:

2. Ըստ համապատասխան կետերի՝ կառուցել $xy = -4$ կորը, և պտտելով կոորդինատային առանցքները $\varphi = 45^0$-ով՝ ձևափոխել հավասարումը:

   Պատ. $x^2 - y^2 = 8$:

3. Կատարված է կոորդինատային առանցքների զուգահեռ տեղափոխություն, ընդ

որում նոր սկիզբը տեղադրված է $O_1(3;-4)$ կետում: Հայտնի են $M(7;8)$) կետի հին կոորդինատները: Որոշել այդ կետի նոր կոորդինատները:

Պատ. $x'=4$, $y'=12$:

4. xoy հարթության վրա տրված է $M(4;3)$ կետը: Կոորդինատների համակարգը կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ այնպես է պտտված, որ նոր առանցքն անցնում է M կետով: Որոշել A կետի հին կոորդինատները, եթե հայտնի են նոր կոորդինատները՝ $x'=5$, $y'=5$:

Պատ. $x=1$, $y=7$:

5. Կոորդինատների համակարգը պտտված է $\alpha=\frac{\pi}{6}$ անկյունով: Որոշել $M(\sqrt{3};3)$ կետի նոր կոորդինատները:

Պատ. $x'=3, y'=\sqrt{3}$:

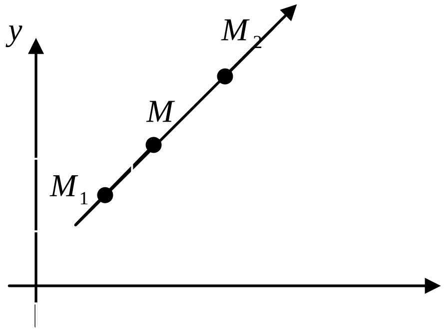
6. Տրված է $M(\frac{9}{2};\frac{11}{2})$ կետը: Որպես նոր կոորդինատային առանցքներ ընտրված են $2x-1=0$ (O_1Y' առանցքը) և $2y-5=0$ (O_1X' առանցքը) ուղիղները: Գտնել M կետի կոորդինատները նոր կոորդինատային համակարգում:

Պատ. $(3;2)$:

7. Տրված է $M(4\sqrt{5};2\sqrt{5})$ կետը: Որպես աբսցիսների նոր առանցք վերցված է $y=2x$ ուղիղը, իսկ օրդինատների նոր առանցք՝ $y=0{,}5x$, ընդ որում նոր կոորդինատային առանցքները հին առանցքների հետ կազմում են համապատասխանաբար սուր անկյուններ: Գտնել M կետի կոորդինատները նոր համակարգում:

Պատ. $M(8;-6)$:

§11. Հատվածի բաժանումը տրված հարաբերությամբ: Երկու կետերի միջև եղած հեռավորությունը հարթության վրա



o x

Նկար 16.

Ենթադրենք հարթության վրա տրված են M_1 և M_2 կետերը(նկար16): M_1 և M_2 կետերով տանենք ուղիղ և նրա վրա նշենք դրական ուղղությունը: Այդ ուղղի վրա վերցնենք որևէ M կետ:

Անկախ այն հանգամանքից, թե որ կողմն է գտնվում M կետը, հատվածի ներսում, թե շարունակության վրա՝ դեպի մեկ կամ մյուս կողմը, պայմանավորվենք ասել, որ նա բաժանում է $M_1 M_2$ ուղղությամբ օժտված հատվածը λ հարաբերությամբ, եթե

$$\frac{M_1M_2}{MM_2} = \lambda, \qquad (1)$$

որտեղ M_1M, MM_2-ը ուղղությամբ օժտված հատվածների մեծություններն են: (1) հարաբերությունը չի փոխվի, եթե փոխենք առանցքի դրական ուղղությունը կամ մասշտաբը:

Եթե M կետը պատկանում է $[M_1M_2]$ հատվածին, ապա $\lambda > 0$ /քանի որ M_1M և MM_2 ունեն միևնույն նշանը/, այս դեպքում ասում են M կետը $M_1 M_2$ հատվածը բաժանում է ներքնապես:

Եթե M-ը գտնվում է $[M_1M_2]$ հատվածից դուրս, ապա $\lambda < 0$ /քանի որ M_1M և MM_2 հատվածներն ունեն տարբեր նշաններ/: Այս դեպքում ասում են, որ M կետը $M_1 M_2$ հատվածը բաժանում է արտաքնապես: Նկատենք, որ $\lambda \neq -1$:

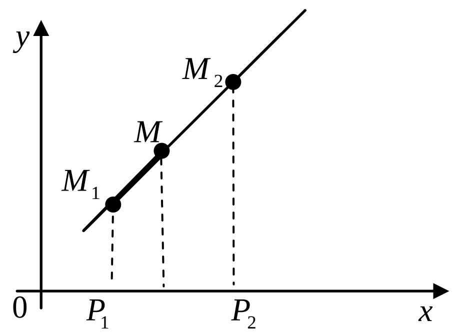
Եթե $\lambda = -1$, ապա $\frac{M_1M}{MM_2} = -1$, M_1M =-MM_2, $M_1M + MM_2$=0, $M_1 M_2$=0, որը հնարավոր է միայն այն դեպքում, երբ M_1 և M_2 համընկնում են:

Եթե M կետը համընկնում է M_1 կետի հետ, ապա $\lambda = 0$, իսկ եթե M-ը անսահմանափակորեն մոտենում է M_2-ին, ապա $|\lambda|$-ն անսահմանափակորեն մեծանում է:

Հատվածը λ հարաբերությամբ բաժանելու խնդիրը ձևակերպվում է հետևյալ կերպ. տրված են $M_1(x_1; y_1), M_2(x_2; y_2)$ կետերը և λ հարաբերությունը, որով $M_1 M_2$ ուղղի մի որոշ $M(x; y)$ կետ բաժանում է $M_1 M_2$ հատվածը: Պահանջվում է գտնել M կետի $(x; y)$ կոորդինատները:

<u>**Թեորեմ**</u>. Եթե $M(x; y)$ կետը բաժանում է $M_1 M_2$ հատվածը $\lambda \neq -1$ հարաբերությամբ ($M_1(x_1; y_1), M_2(x_2; y_2)$), ապա M կետի կոորդինատները որոշվում են հետևյալ բանաձևերով՝

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}:$$



P

Նկար 17.

M_1, M, M_2 կետերը պրոյեկտենք ox առանցքի վրա և նրանց պրոյեկցիաները համապատասխանաբար նշանակենք P_1, P_2, P - ով(նկար17):

Քանի որ $M_1P_1 \parallel MP \parallel M_2P_2$ ուղիղները զուգահեռ են, հետևաբար նրանք M_1M_2 ուղիղը և ox առանցքը բաժանում են համեմատական մասերի՝

$$\frac{M_1M}{MM_2} = \frac{P_1P}{PP_2} = \lambda, P_1P = x - x_1, PP_2 = x_2 - x$$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda \Rightarrow x - x_1 = \lambda(x_2 - x),$$

$$x + \lambda x = x_1 + \lambda x_2,$$

$$x(1+\lambda) = x_1 + \lambda x_2 \Rightarrow x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$$

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda},$$

Նույն ձևով, եթե M_1, M, M_2 կետերը պրոյեկտենք y-ի առանցքի վրա նախորդի նման կստանանք՝

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \lambda \neq -1:$$

Եթե վերջին բանաձևերում ընդունենք $\lambda = 1$, կստանանք՝ $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$, որոնք կհանդիսանան հատվածի միջնակետի կոորդինատները: Այսինքն, հատվածի միջնակետի կոորդինատները հավասար են հատվածի ծայրակետերի կոորդինատների թվաբանական միջինին:

Հատվածը λ հարաբերությամբ բաժանման խնդիրը լուծենք՝ օգտվելով վեկտորների հատկություններից:

Դիցուք տրված է M_1M_2 հատվածը, ընդ որում $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ և $M(x, y, z)$ կետը, որն այդ հատվածը բաժանում է λ հարաբերությամբ, այսինքն՝ $\frac{M_1M}{M_2M} = \lambda$, ցանկանում ենք գտնել M կետի x, y, z կոորդինատները:

Կազմենք $\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1, y - y_1, z - z_1\}$ և $\overrightarrow{MM_2} = \{x_2 - x, y_2 - y, z_2 - z\}$ վեկտորները:

Քանի որ $\overrightarrow{M_1M}$ և $\overrightarrow{MM_2}$ վեկտորները կոլինար են, և $\frac{|\overrightarrow{M_1M}|}{|\overrightarrow{M_2M}|} = \lambda \Rightarrow \overrightarrow{M_1M} = \lambda \overrightarrow{MM_2}$:

Գրելով վերջին հավասարությունը ըստ կոորդինատների՝ կունենանք՝

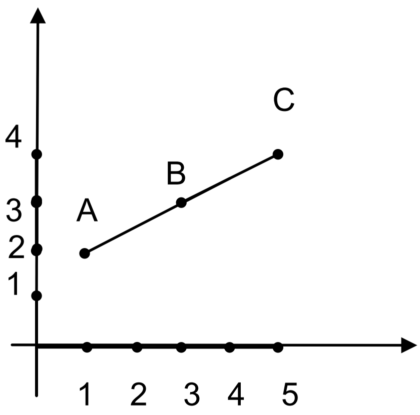
$$x - x_1 = \lambda(x - x_2), \quad y - y_1 = \lambda(y - y_2), \quad z - z_1 = \lambda(z - z_2):$$

Ստացված հավասարումները լուծելով x, y, z-ի նկատմամբ, կունենանք՝

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\ z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}:$$

Օրինակ․ Տրված են A(1;2) և B(3;3) կետերը: Գտնել AB հատվածի վրա մի C(x;y) կետ, որ A – ից 2 անգամ ավելի հեռու է քան B –ից(նկար 18.):

Լուծում․



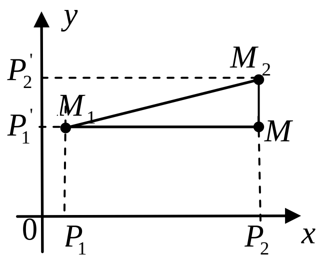
նկար 18.

$$\lambda=\frac{AC}{BC}=-2$$

$$x_1=1, y_1=2, x_2=3, y_2=3, x=\frac{1+(-2)\cdot 3}{1-2}=5, y=\frac{2+(-2)\cdot 3}{1-2}=4:$$

C կետի կոորդինատներն են C(5;4):

Դիցուք xoy հարթության վրա տրված են $M_1(x_1;y_1), M_2(x_2;y_2)$ կետերը: Այդ 2 կետերի միջև եղած հեռավորությունը արտահայտենք նրանց կոորդինատներով: Գտնենք նրանց պրոյեկցիաները կոորդինատական առանցքների վրա (նկար19):



նկար 19.

$P_1P_2=|x_2-x_1|, P_1'P_2'=|y_2-y_1|$ եռանկյունի M_1MM_2 -ից՝

քանի որ $M_1M_2^2=M_1M^2+MM_2^2$, $M_1M=P_1P_2=|x_2-x_1|, MM_2=P_1'P_2'=|y_2-y_1|$,

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \ ,$$

որը հանդիսանում է երկու կետերի հեռավորությունը հարթության վրա, երբ կետերից մեկը համընկնում է կոորդինատների սկզբնակետի հետ, ապա՝

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} \ :$$

Օրինակ1. Հաշվել $A(5;7)$, $B(-7;2)$ կետերի հեռավորությունը:

Լուծում . $d = AB = \sqrt{(5+7)^2 + (7-2)^2} = \sqrt{169} = 13$:

Օրինակ2. Ապացուցել, որ $A(-2,-1)$, $B(6,1)$ և $C(3,4)$ գագաթներով եռանկյունը ուղղանկյուն եռանկյուն է:

Լուծում. Եռանկյան կողմերը նշանակենք a, b, c-ով: Ըստ Պյութագորասի թեորեմի, եթե եռանկյունը ուղղանկյուն եռանկյուն է, ապա $a^2 + b^2 = c^2$, սուրանկյան դոպքում տեղի ունի $c^2 < a^2 + b^2$ անհավասարությունը, իսկ բութանկյան դեպքում՝ $c^2 > a^2 + b^2$:

Այժմ հաշվենք եռանկյան կողմերի երկարությունները: Օգտվենք $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ բանաձևից: A և B կետերի կոորդինատները՝ $x_1 = -2, y_1 = -1, x_2 = 6, y_2 = 1$, տեղադրենք բանաձևի մեջ, կստանանք՝

$$AB = \sqrt{[6-(-2)]^2 + [1-(-1)]^2} = \sqrt{68} \ ,$$

նույն ձևով՝

$$AC = \sqrt{[3-(-2)]^2 + [4-(-1)]^2} = \sqrt{50} \ ,$$

$$BC = \sqrt{(3-6)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{18} \ ,$$

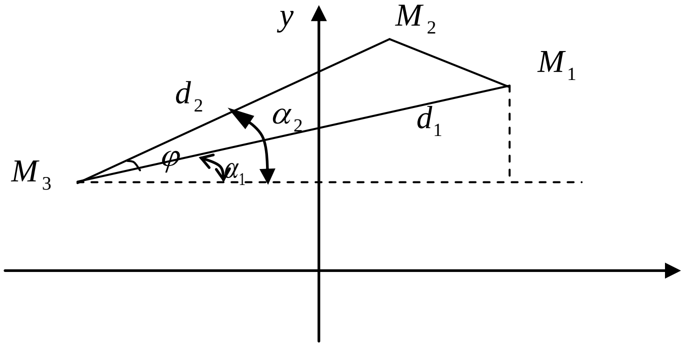
որտեղից՝

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 \qquad (68 = 50 + 18):$$

Վերջին հավասարությունը նշանակում է, որ ABC եռանկյունը ուղղանկյուն եռանկյուն է:

§12. Եռանկյան մակերեսի բանաձևը

Դիցուք հարթության վրա տրված է $M_1(x_1; y_1), M_2(x_2; y_2)$ $M_3(x_3; y_3)$ գագաթներով եռանկյունը: Եռանկյան մակերեսը արտահայտենք նրա գագաթների կոորդինատների միջոցով(նկար 20):



o x

Նկար 20.

Ենթադրենք $M_3M_1 = d_1$, $M_3M_2 = d_2$: M_3M_2 և M_1M_3 հատվածներով կազմած անկյունը նշանակենք φ-ով: Ինչպես հայտնի է եռանկյան մակերեսը՝

$$S = \pm \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi:$$

Քանի որ եռանկյան $M_1(x_1; y_1), M_2(x_2; y_2)$ $M_3(x_3; y_3)$ գագաթների այլ դասավորության դեպքում φ անկյունը կարող է լինել, ինչպես դրական, այնպես էլ բացասական, դժվար չէ նկատել, որ $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$, որտեղ α_1 և α_2 ox առանցքի և M_1M_3, M_3M_2 ուղիղների կազմած անկյուննն է, ուստի՝

$$\frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{1}{2} d_1 d_2 (\sin \alpha_2 \cos \alpha_1 - \cos \alpha_2 \sin \alpha_1) =$$

$$= \frac{1}{2}(d_1 \cos \alpha_1 d_2 \sin \alpha_2 - d_2 \cos \alpha_2 d_1 \sin \alpha_1) = \frac{1}{2}\left|(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_3)\right|$$

Օգտվելով վեկտորի պրոյեկցիան առանցքի վրա §4-ի (1) բանաձևից, կարող ենք գրել, որ

$$d_1 \cos \alpha_1 = x_1 - x_3, d_2 \cos \alpha_2 = x_2 - x_3$$
$$d_1 \sin \alpha_1 = y_1 - y_3, d_2 \sin \alpha_2 = y_2 - y_3:$$

Օգտվելով դետերմինանտի գաղափարից՝ ստացված բանաձևը կարելի է գրել հետևյալ ձևով՝

$$S = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 \end{vmatrix}, \qquad (1)$$

կամ կարելի է գրել (2) տեսքով՝

$$S = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}: \qquad (2)$$

Եթե գագաթներից մեկը՝ M_3-ը, գտնվի կոորդինատների սկզբնակետում, $x_3 = y_3 = 0$:

$$S = \pm \frac{1}{2}\left(x_1 y_2 - x_2 y_1\right) = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}:$$

Եթե A,B,C կետերը գտնվում են միևնույն ուղղի վրա, ապա $S = 0$,

$$\frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3} = \frac{y_1 - y_3}{y_2 - y_1}:$$

Վերջին համեմատությունն արտահայտում է երեք կետերի մեկ ուղղի վրա գտնվելու պայմանը:

Ստացված արդյունքը կարելի է ձևակերպել հետևյալ կերպ՝ $M_1(x_1;y_1), M_2(x_2;y_2)$ $M_3(x_3;y_3)$ կետերի ցանկացած դասավորության դեպքում /եթե նրանք չեն գտնվում մեկ ուղղի վրա/ $M_1M_2M_3$ եռանկյան մսկերեսը որոշվում է (1) կամ (2) բանաձևերի միջոցով, որտեղ տվյալ արտահայտությունների աջ մասերն ունեն + նշանը, եթե $M_3\,M_1$-ից $M_3\,M_2$ անկյունը դրական է, - նշանը, եթե $M_3\,M_1$-ից $M_3\,M_2$ կազմած անկյունը բացասական է:

Օրինակ . Հաշվել այն եռանկյան մակերեսը, որի գագաթներն են A(1,3), B(2,-5), C(-8,4):
Լուծում . Ընդունելով A գագաթի կոորդինատները, որպես $x_1 = 1, y_1 = 3,$
B-ի՝ $x_2 = 2, y_2 = -5$,C-ի՝ $x_3 = -8, y_3 = 4$ և տեղադրելով

$$S = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 \end{vmatrix}$$ -ում՝ կստանանք՝

$$S = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1+8;3-4 \\ 2+8;-5-4 \end{vmatrix} = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 9;-1 \\ 10;-9 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}(-71) = 35{,}5\,,$$

գագաթների ընտրությունը կամայական է:

Խնդիրներ

1. Գտնել այն կետը, որը 5 միավորով հեռացված է ինչպես $A(2;1)$ կետից, այնպես էլ oy առանցքից:

   Պատ. $(5;5), (5;-3)$:

2. ox առանցքի վրա գտնել կետ, որը հավասարապես է հեռացված կոորդինատների սկզբնակետից և $\mathrm{A}(8;4)$ կետից:

   Պատ. $\mathrm{M}(5;0)$:

3. Օրդինատների առանցքի վրա գտնել կետ, որը հավասարապես է հեռացված կոորդինատների սկզբնակետից և $\mathrm{A}(-2;5)$ կետից:

   Պատ. $(0;2{,}9)$:

4. Աբսցիսների առանցքի վրա գտնել կետ, որը $\mathrm{A}(-2;3)$ կետից հեռացված է $3\sqrt{5}$ միավորով:

Պատ. $B(4;0), B_1(-8;0)$:

5. Կառուցել $A(-2;1)$ և $B(3;6)$ կետերը և գտնել $M(x;y)$ կետը, որը AB հատվածը բաժանում է հետևյալ հարաբերությամբ. $AM:MB=-3:2$

Պատ. $M(13;16)$:

6. $O(0;0), A(8;0)$ և $B(0;6)$ գագաթներով եռանկյան համար որոշել OC միջնագծի և OD կիսորդի երկարությունները:

Պատ. $OC=5; \quad OD=\frac{24\sqrt{2}}{7}$:

7. Հաշվել $A(2;0), B(5;3)$ և $C(2;6)$ գագաթներով եռանկյան մակերեսը:

Պատ. 9:

8. $A(-2;0), B(6;6)$ և $C(1;-4)$ գագաթներով եռանկյան համար որոշել AE կիսորդը:

Պատ. $\frac{10\sqrt{2}}{3}$:

9. Ցույց տալ, որ $A(4;3), B(7;6)$ և $C(2;11)$ գագաթներով եռանկյունը ուղղանկյուն եռանկյուն է:

10. Տրված է $A(-1;-1), B(0;-6)$ և $C(-10;-2)$ գագաթներով եռանկյունը: Գտնել A գագաթից իջեցված միջնագծի երկարությունը:

Պատ. 5:

11. Տրված են AB հատվածի ծայրակետերը՝ $A(-3;7)$ և $B(5;11)$: Այդ հատվածը 3 կետերով բաժանված է 4 հավասար մասերի: Գտնել բաժանման կետերի կոորդինատները:

Պատ. $(-1;8), (1;9), (3;10)$:

12. Գտնել $A(1;5), B(2;7), C(4;11)$ գագաթներով եռանկյան մակերեսը:

Պատ. $S=0$; այսինքն՝ A,B,C կետերը գտնվում են միևնույն ուղղի վրա:

13. Տրված են եռանկյան երկու գագաթները՝ $A(3;8)$ և $B(10;2)$ և միջնագծերի հատման $M(1;1)$ կետը: Գտնել եռանկյան երրորդ գագաթի կոորդինատները:

Պատ. $C(-10;-7)$:

14. $L(0;0), M(3;0)$ և $N(0;4)$ կետերը հանդիսանում են եռանկյան կողմերի միջնակետերը: Գտնել եռանկյան մակերեսը:

Պատ. 24 քառ. միավոր:

15. Տրված է հատվածի միջնակետը՝ $L(5;2)$ և նրա ծայրակետերից մեկը՝ $M(2;-1)$: Գտնել երկրորդ ծայրակետը:

Պատ՝. $N(8;5)$:

16. $M_1(-8;-9), M_2(-3;-4)$ ծայրակետերով հատվածը բաժանված է 5 հավասար մասերի: Գտնել բաժանման կետերը: Մինչև ո՞ր կետը պետք է շարունակել M_1M_2 հատվածը, որպեսզի նրա երկարությունը մեծանա 4 անգամ:

<u>Ցուցում.</u> $\ell_1 = \frac{1}{4}; \quad \ell_2 = \frac{2}{3}; \quad \ell_3 = \frac{3}{2}; \quad \ell_4 = 4; \quad \ell_5 = -\frac{4}{3}$:

Պատ՝. $L_1(-7;-8)$, $L_2(-6;-7)$, $L_3(-5;-6)$,
$L_4(-4;-5)$ և $P(12;11)$:

17. Տրված է $A(2;1), B(-2;-2), C(-8;6)$ գագաթներով ABC եռանկյունը: Գտնել B գագաթից իջեցված բարձրության երկարությունը:

<u>Ցուցում.</u> Հաշվել S մակերեսը և AC երկարությունը:

Պատ. $h = 2\sqrt{5}$:

18. Տրված են $L(4;2)$ և $M(6;-2)$ կետերը: ox առանցքի վրա գտնել այնպիսի N կետ, որ LMN եռանկյան մակերեսը հավասար լինի 8 քառ. միավորի:

Պատ. $N_1(1;0)$, $N_2(9;0)$:

19. Կոորդինատային առանցքների վրա գտնել կետեր, որոնք $M(4;3)$ կետից հեռացված են 5 միավորով:

Պատ. $M_1(0;0)$, $M_2(0;6)$, $M_3(8;0)$:

20. Տրված են $M(2;7)$, $A(-1;6)$ և $B(3;-2)$ կետերը: Կազմել այն ուղիղների հավասարումները, որոնք անցնում են M կետով և A ու B կետերով անցնող ուղղի հետ կազմում են 45^0 անկյուն:

Պատ. $x + 3y - 23 = 0$, $3x - y + 1 = 0$:

21. Տրված են հավասարասրուն ուղղանկյուն եռանկյան ներքնաձիգի հավասարումը՝ $y = 3x + 5$ և ուղիղ անկյան գագաթը՝ $(4;-1)$: Կազմել էջերի հավասարումները:
Պատ. $x - 2y - 6 = 0$, $2x + y - 7 = 0$:

22. $2x-3y+4=0$ ուղղի վրա գտնվող A կետի հեռավորությունը $4x-3y=0$ ուղղից հավասար է 2-ի: Գտնել A կետի կոորդինատները:

Պատ. $A(7;6), A\left(-3;\frac{2}{3}\right)$:

23. Տրված են եռանկյան երկու գագաթները՝ $A(2;2)$, $B(3;0)$ և միջնագծերի հատման կետը՝ $D(3;1)$: Գտնել եռանկյան երրորդ՝ C գագաթի կոորդինատները:

Պատ. $C(4;1)$:

24. Կառուցել $A(-4;2)$, $B(0;-1)$ և $C(3;3)$ գագաթներով եռանկյունը և որոշել նրա պարագիծը և անկյունները:

Պատ. $5(2+\sqrt{2}), 90^0, 45^0$:

25. Կառուցել $A(-4;0)$, $B(-1;4)$ կետերը և oy առանցքի նկատմամբ տրված կետերին սիմետրիկ A_1, B_1 կետերը: Հաշվել ABB_1A_1 սեղանի պարագիծը:

Պատ. 20:

26. Գտնել $M(-1;5)$ կետին սիմետրիկ կետերը ox, oy առանցքների, կոորդինատների սկզբնակետի, կոորդինատային անկյունների կիսորդների նկատմամբ:

Պատ. $N(-1;-5)$, $L(1;5)$, $R(1;-5)$, $P(5;-1)$, $Q(-5;1)$:

27. Գտնել $M(a;b)$ կետին սիմետրիկ կետերը կոորդինատային առանցքների, կոորդինատների սկզբնակետի, կոորդինատային անկյունների կիսորդների նկատմամբ:

Պատ. $N(a;-b)$, $L(-a;b)$, $R(-a;-b)$, $P(b;a)$, $Q(-b;-a)$:

28. (φ, r) բևեռային կոորդինատական համակարգում կառուցել $A(0;3), B(\frac{\pi}{4};2), C(\frac{\pi}{2};3), D(\pi;2), E(\frac{3\pi}{2};3)$ կետերը:

29. Բևեռային կոորդինատական համակարգում կառուցել այն ուղղի հավասարումը, որն անցնում է $A(\alpha;a)$ կետով և բևեռային առանցքի հետ կազմում է β անկյուն:

Պատ. $r=\dfrac{a\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta-\varphi)}$:

30. Հետևյալ կորերի հավասարումները ձևափոխել բևեռային կոորդինատների.

$$1) x^2-y^2=a^2,$$
$$2) x^2+y^2=a^2,$$
$$3) x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0,$$

$$4)\,y = x\,,$$
$$5)\,x^2 + y^2 = ax,$$
$$6)\left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2\left(x^2 - y^2\right):$$

Պատ. $1)\,r^2 = \dfrac{a^2}{\cos 2\varphi}\,,\quad 2)\,r = a,\ 3)\,r = \dfrac{p}{\cos(\varphi - \alpha)}\,,$

$4)\,tg\varphi = 1,\ 5)\,r = \alpha\cos\varphi;\ 6)\,r^2 = a^2\cos 2\varphi:$

31. Գտնել $A(2\sqrt{3};2); B(0;-3), C(-4;4); D(\sqrt{2};-\sqrt{2}); E(-\sqrt{2};-\sqrt{6}), F(-7;0)$ կետի բևեռային կոորդինատները:

Պատ. $A(4;\dfrac{\pi}{6}); B(3;-\dfrac{\pi}{2}); C(4\sqrt{2};\dfrac{3\pi}{4}); D(2;-\dfrac{\pi}{4}); E(2\sqrt{2};\dfrac{4\pi}{3}); F(7;\pi):$

32. Գտնել այն կետի բևեռային կոորդինատները, որոնք սիմետրիկ են $M(\rho,\Theta)$ կետին բևեռային առանցքի նկատմամբ:

Պատ. $M_1(\rho;-\Theta):$

33. Հետևյալ կորերի(գծերի) հավասարումները գրել դեկարտյան կոորդինատներով և կառուցել այդ գծերը.

$$1)\,\rho\sin\varphi = b;\quad 2)\,\rho^2\cos 2\varphi = a^2\,,\ 3)\,\rho = a\cos\varphi:$$

Պատ . $1)\,y = b\,,\ 2)\,x^2 - y^2 = a^2\,,\ 3)\,x^2 + y^2 = ax:$

§ 13. Ուղիղ գիծը և նրա հավասարումը: Ուղիղ գծի հավասարման տարբեր տեսքերը

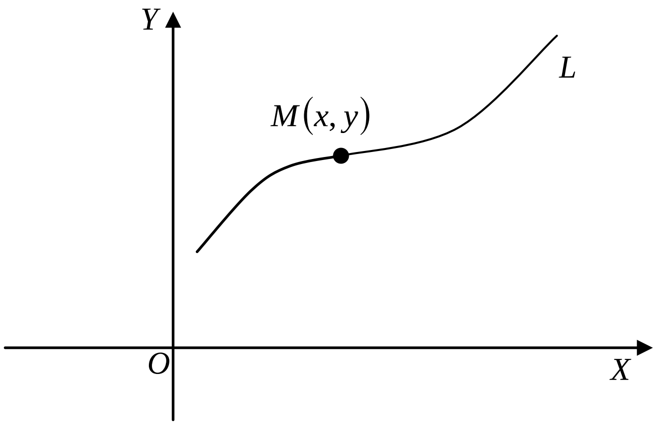
Ենթադրենք հարթության վրա տրված է Oxy ուղղանկյուն կոորդինատական համակարգը և մի ինչ որ L կոր(նկ. 1):

Սահմանում. $F(x,y)=0$ հավասարումը կոչվում է L կորի հավասարում, եթե այդ հավասարմանը բավարարում է L կորի ցանկացած կետի կոորդինատները և չեն բավարարում L կորի վրա չգտնվող կետի կոորդինատները:

Դիտողություն. Պետք չէ կարծել, որ ցանկացած $F(x,y)=0$ հավասարում որոշում է ինչ որ գիծ:

Օրինակ, $x^2+y^2+3=0$ հավասարումը ոչ մի գիծ չի որոշում:

Իրականում x և y փոփոխականների յուրաքանչյուր իրական արժեքների դեպքում հավասարման ձախ կողմը դրական է, իսկ աջ կողմը հավասար է զրոյի, և հետևաբար, այդ հավասարմանը չի կարող բավարարել oxy հարթության ոչ մի կետ:

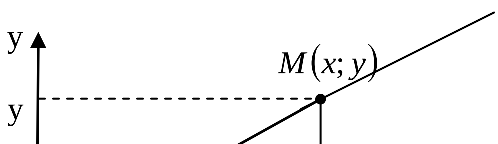


նկ. 1

xoy կոորդինատային հարթության վրա դիտարկենք L գիծը: Այդ գծի վրա վերցնենք կամայական $M(x,y)$ կետ, որը կանվանենք գծի ընթացիկ կետ: Երբ $M(x,y)$ կետը տեղաշարժվում է L գծի վրա, ապա նրա x և y կոորդինատները փոփոխվում են, սակայն մնալով որոշակի կապի մեջ: Այդ կապն արտահայտվում է x և y փոփոխականների նկատմամբ որոշակի հավասարումով, որն ընդհանուր տեսքով գրվում է այսպես`

$$F(x,y)=0: \qquad (*)$$

Ենթադրենք ուղիղը oy առանցքը հատում է $B(0;b)$ կետում և ox առանցքի հետ կազմում է α անկյուն, որտեղ $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$; Այդ ուղղի վրա վերցնենք որևէ $M(x;y)$(նկար 2):



նկար 2.

BMN ուղղանկյուն եռանկյունուց՝ $tg\alpha = \frac{MN}{NB} = \frac{y-b}{x}$: Նշանակենք ուղղի անկյունային գործակիցը $tg\alpha = k$, կստանանք՝

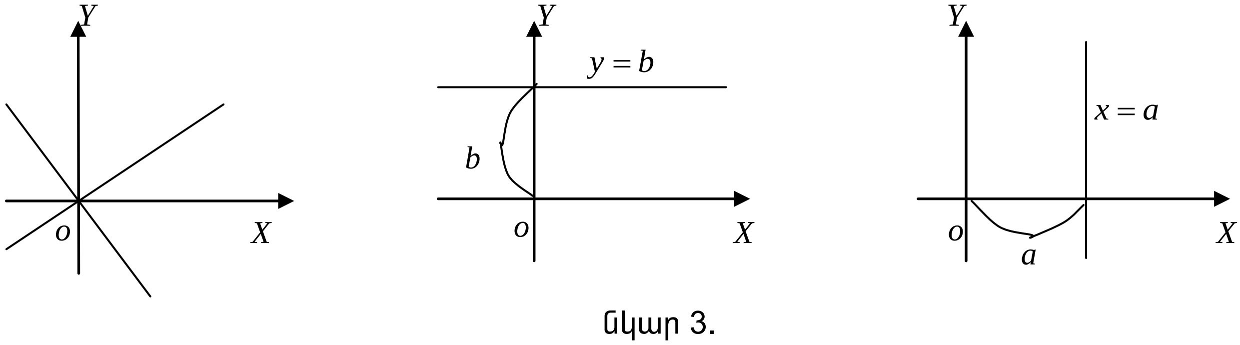
$$\frac{y-b}{x} = k \Rightarrow y = kx + b: \qquad (1)$$

Կարելի է ցույց տալ, որ ստացված բանաձևը ճիշտ է նաև $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ դեպքում:

Այսպիսով, մենք ցույց տվեցինք, որ այդ ուղղի ցանկացած կետի կոորդինատները բավարարում է (1) հավասարմանը: (1) հավասարումը կոչվում է ուղիղ գծի հավասարում անկյունային գործակցով:

Դիտարկենք (1) հավասարման մի քանի մասնավոր դեպքեր:

1. Եթե $b = 0$, ապա կստանանք՝ $y = kx$ ուղղի հավասարում, որն անցնում է կոորդինատների սկզբնակետով՝ $tg\alpha = k > 0$, x-երի առանցքի հետ կազմում է սուր անկյուն, իսկ $tg\alpha = k < 0$՝ բութ անկյուն:
2. $\alpha = 0$, $k = tg0 = 0$, $y = b$ զուգահեռ է x-երի առանցքին:
3. $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $k = tg\frac{\pi}{2}$ գոյություն չունի, և ուղիղը ուղղահայաց է x-երի առանցքին, կամ զուգահեռ է y-ների առանցքին(նկար 3):



նկար 3.

Օրինակ. Գրել այն ուղղի հավասարումը, որը զուգահեռ է կոորդինատների առաջին քառորդի անկյան կիսորդին և oy առանցքից անջատում է մի հատված, որը հավասար է 5-ի:

Լուծում. Որոնելի ուղիղը, ինչպես I քառորդի անկյան կիսորդը, x-երի առանցքի հետ կազմում է 45^0 անկյուն: $k = tg45^0 = 1$, տեղադրելով $y = kx + b$ հավասարման մեջ՝ կստանանք՝ $k = 1$ և $b = 5$, ուղղի որոնելի հավասարումը կլինի՝ $y = x + 5$:

Դիցուք տրված է $M_1(x_1, y_1)$ կետը և k անկյունային գործակիցը, /կամ տրված է որևէ ուղիղ, որին պատկանում է $M_1(x_1, y_1)$ կետը և ox առանցքի հետ կազմում է $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ անկյուն:

Քանի որ $M_1(x_1, y_1)$ կետը գտնվում է ուղղի վրա, ապա նրա կոորդինատները պետք է բավարարեն

$$y = kx + b \tag{1}$$

հավասարմանը, այսինքն՝

$$y_1 = kx_1 + b: \tag{2}$$

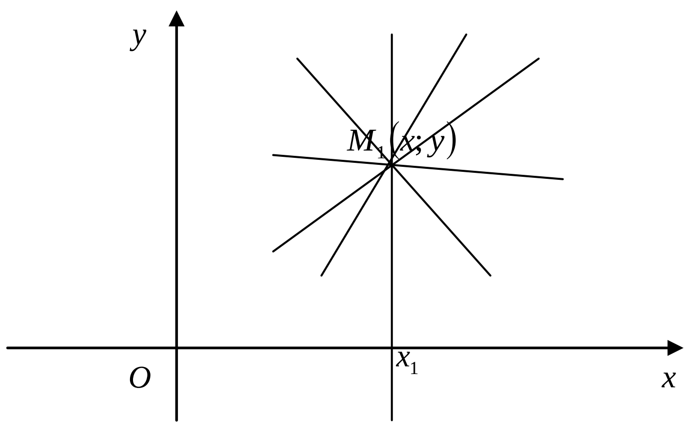
Նկատի ունենալով (2)-ը՝ (1)-ից կստանանք՝

$$y - y_1 = k(x - x_1): \tag{3}$$

(3)-ը $M_1(x_1, y_1)$ կետով անցնող և k անկյունային գործակցով ուղղի հավասարումն է:

Հարթության մի որոշ կետով անցնող ուղիղների համախումբը կոչվում է ուղիղների փունջ:

Եթե k-ի տակ հասկանանք այնպիսի մեծություն, որը ընդունում է ամեն հնարավոր արժեքներ, ապա այդ հավասարումը կորոշի $M_1(x_1, y_1)$ կետով անցնող բոլոր ուղիղները, բացի oy-ին զուգահեռ ուղիղներից (նկար 4): $x = x_1$ ուղիղը մտնում է ուղիղների փնջի մեջ, բայց (3)-ով չի որոշվում, որն էլ (3)-ի թերությունն է:

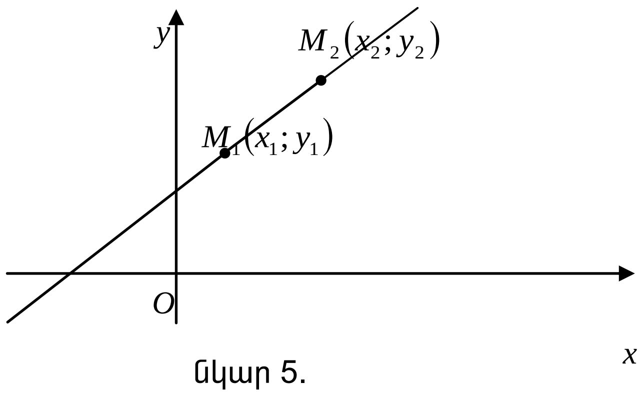


նկար 4.

Օրինակ . Կազմել ուղիղների փնջի հավասարումը, որն անցնում է $M(-2;-4)$ կետով:

<u>Լուծում</u> . Համաձայն (3) հավասարման` $y+4=k(x+2)$:

Դիցուք ուղղի վրա տրված են երկու $M_1(x_1;y_1)$ և $M_2(x_2;y_2)$ կետերը, որտեղ $x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2$ (նկար 5):



նկար 5.

Կազմենք M_1 կետով անցնող ուղիղների փնջի հավասարումը`

$$y-y_1=k(x-x_1):$$

Քանի որ այդ ուղիղը անցնում է նաև $M_2(x_2;y_2)$ կետով, այդ փնջից պետք է ընտրել այն ուղիղը, որն անցնում է նաև $M_2(x_2;y_2)$ կետով, այսինքն` մենք պետք է պահանջենք, որպեսզի տեղի ունենա $y_2-y_1=k(x_2-x_1)$ հավասարությունը: Որոշենք անկյունային գործակիցը`

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}:$$

Տեղադրելով ստացված արժեքը որոնելի հավասարման մեջ` կստանանք`

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1),$$

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1},$$

որը հանդիսանա երկու կետով անցնող ուղղի հավասարումը:

<u>Օրինակ</u>. կազմել ուղղի հավասարումը, որն անցնում է A(-5;4) և B(3;-2) կետերով:

<u>Լուծում.</u>

$$\frac{y-4}{-2-4}=\frac{x+5}{3+5}\Rightarrow y=-\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}:$$

Դիցուք տրված են $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$ կետերը: Գրենք M_1M_2 կետով անցնող ուղղի հավասարումը՝

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}, \ (y_2 \neq y_1, x_2 \neq x_1):$$

$M_3(x_3; y_3)$ կետը կգտնվի այդ ուղղի վրա այն և միայն այն դեպքում, երբ նրա $(x_3; y_3)$ կոորդինատները բավարարեն այդ ուղղի հավասարմանը.

$$\begin{vmatrix} y_3-y_1 & x_3-x_1 \\ y_2-y_1 & x_2-x_1 \end{vmatrix}=0,$$

որը և կլինի երեք կետերի մեկ ուղղի վրա գտնվելու պայմանը:

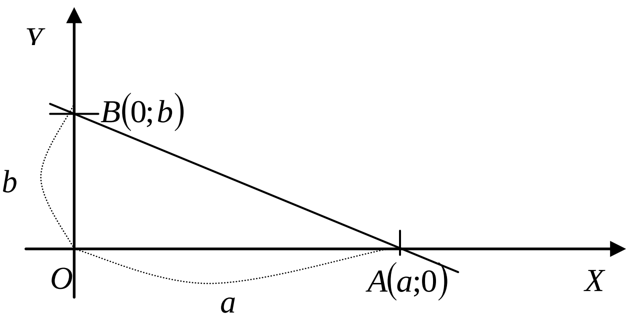
Գտնել այն ուղղի հավասարումը, որը կոորդինատային առանցքներից հատում է $a \neq 0$ և $b \neq 0$ հատվածը: Օգտվելով երկու կետերով անցնող ուղղի հավասարումից, ի նկատի ունենալով, որ այդ ուղիղը անցնում է $A(a;0)$ և $B(0;b)$ կետերով, կստանանք՝

$$\frac{y-0}{b-0}=\frac{x-a}{0-a},$$

որտեղից՝

$$\frac{y}{b}=-\frac{x}{a}+1, \quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,$$

որը կանվանենք ուղղի հավասարում հատվածներով(նկար 6):



նկար 6.

Օրինակ. $2x-3y+2=0$, գտնենք $A(a;0)$ կետի a կոորդինատը:

$2a-3\cdot 0+2=0$, $a=-1$, գտնենք $A(0;b)$ կետի b կոորդինատը:

$2\cdot 0-3b+2=0$, $b=\frac{2}{3}$, ուղղի հավասարումը կլինի՝ $\frac{x}{-1}+\frac{y}{2/3}=1$:

Խնդիրներ

1. Կառուցել ուղիղ , որը oy առանցքից անջատում է $b=-3$ հատվածը և ox առանցքի հետ կազմում է 1. 60^0 2. 120^0 --ի անկյուններ: Գրել այդ ուղիղների հավասարումները:

Պատ. $1. y = x\sqrt{3}-3$
$2. y = -x\sqrt{3}-3$:

2. Գրել ուղղի հավասարումը, որն անցնում է կոորդինատների սկզբնակետով և ox առանցքի հետ կազմում է 1. 45^0 2. 60^0, 3. 90^0, 4. 120^0, 5. 135^0 անկյուն:

Պատ. $1. y=x;\ 2. y=\dfrac{x}{\sqrt{3}};\ 3. x=0;\ 4. y=-\sqrt{3}x;\ 5. y=-x$:

3. Որոշել ուղղի k և b պարամետրերը, եթե այն անցնում է $A(2;3)$ կետով և ox առանցքի հետ կազմում է 45^0-ի անկյուն: Գրել այդ ուղղի հավասարումը:

Պատ. $k=1; b=1; y=x+1$:

4. Գրել ուղիղների փնջի հավասարումը, որոնք անցնում են $A(2;3)$ կետով: Ընտրել այդ փնջից ուղիղներ, որոնք ox առանցքի հետ կազմում են՝ 1. 45^0 2. 60^0, 3. 135^0, 4. 0^0 անկյուններ և կառուցել այդ ուղիղները:

Պատ. 1. $y=x+1$, 2. $y=\sqrt{3}x-2\sqrt{3}+3$, 3. $y=-x+5$, 4. $y=3$:

5. Կազմել ուղղի հավասարումը, որը օրդինատների առանցքից անջատում է $b=1$ հատվածը և աբսցիսների առանցքի դրական ուղղության հետ կազմում է $\alpha = 2\pi/3$ անկյուն:

Պատ. $\sqrt{3}x+y-1=0$:

6. Կազմել ուղղի հավասարումը, որն անցնում է $A(2;5)$ կետով և օրդինատների առանցքից կտրում է $b=7$ հատվածը:

Պատ. $x+y-7=0$:

7. Գրել ուղիղների հավասարումները, որոնք զուգահեռ են II քառորդի անկյան կիսորդին և անջատում են oy առանցքից $b_1=3, b_2=-4, b_3=\dfrac{5}{2}$ հատվածները:

Պատ. $1. y=-x+3,\ 2. y=-x-4,\ 3. y=-x+\dfrac{5}{2}$:

8. Կազմել ուղիղ գծի հավասարումները, որոնք անջատում են oy առանցքից $b=2$ հատված և ox առանցքի նկատմամբ թեքված են համապատասխանաբար՝

1. $\alpha_1 = 30^0$
2. $\alpha_2 = 45^0$, 3. $\alpha_3 = 0^0$, 4. $\alpha_4 = 135^0$ անկյունների տակ:

Պատ. $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+2; y=x+2; y=2; y=-x+2$:

9. Գտնել այն ուղղի հավասարումը, որն oy առանցքից կտրում է 4 միավոր մեծության հատված և ox առանցքի նկատմամբ թեքված է α անկյունով. $\alpha = 120^0$:

Պատ. $y = -\sqrt{3}x + 4$:

10. Գտնել $\sqrt{3}x - 3y + 5 = 0$ ուղղի թեքման անկյունը x առանցքի նկատմամբ:

Պատ. $\alpha = 30^0$:

11. Գրել ուղղի հավասարումը, որն անցնում է $A(-1;3)$ և $B(4;-2)$ կետերով:

Պատ. $y = -x + 2$:

12. Տրված է $A(-2;0)$, $B(2;6)$ և $C(4;2)$ գագաթներով եռանկյունը, տարված են BD բարձրությունը և BE միջնագիծը: Գրել AC կողմի BE միջնագծի և BD բարձրության հավասարումները:

Պատ. $x - 3y + 2 = 0$, $5x - y = 4$, $3x + y = 12$:

13. Տրված է $A(-2;0)$, $B(2;4)$ և $C(4;0)$ գագաթներով եռանկյունը: Գրել եռանկյան AE միջնագծի, AD բարձրության հավասարումները: Գտնել AE միջնագծի երկարությունը:

Պատ. AE: $2x - 5y = -4$,
AD: $x - 2y = -2$, $|AE| = \sqrt{29}$:

14. Գրել $A(0;7)$, $B(6;-1)$ և $C(2;1)$ գագաթներով եռանկյան կողմերը և գտնել եռանկյան անկյունները:

Պատ. $\angle A = 18^0 26'; \angle B = 26^0 34', \angle C = 135'$:

15. Տրված է $A(-4;2)$, $B(2;-5)$ և $C(5;0)$ գագաթներով եռանկյունը: Գտնել միջնագծերի և բարձրությունների հատման կետերը:

Պատ. $(1;-1)$, $(8/3;-2)$:

16. Կազմել ուղղի հավասարումը, որն անցնում է $A(-2;4)$ և $B(-2;-1)$ կետերով:

Պատ. $x = -2$:

17. Տրված է $A(0;1)$, $B(6;5)$ և $C(12;-1)$ գագաթներով եռանկյունը: Գտնել C կետից իջեցված բարձրության հավասարումը:

Պատ. $y + 1 = -\frac{3}{2}(x - 12)$ կամ $3x + 2y - 34 = 0$:

18. Տրված է ABC եռանկյան բարձրությունների հավասարումները՝ $x + y - 2 = 0$,

$9x-3y-4=0$ և գագաթի կոորդինատները՝ $A(2;2)$: Կազմել եռանկյան կողմերի հավասարումները:

Պատ. $AC: \ y-2=-\frac{1}{3}(x-2)$ կամ $x+3y-8=0$, $AB: \ y-2=x-2$, այսինքն՝ $y=x$:

$BC: \ 7x+5y-8=0$:

19. Տրված են եռանկյան կողմերը $x+2y+5=0(AB)$, $3x+y+1=0(BC)$, $x+y+7=0(AC)$: Կազմել AC կողմին իջեցրած բարձրության հավասարումը:

Պատ. $5x-5y-17=0$:

20. Տրված է $A\left(\frac{3}{2};1\right)$, $B\left(1;\frac{5}{3}\right)$; $C(3;3)$ գագաթներով եռանկյունը, գտնել C գագաթից իջեցված բարձրության հավասարումը:

Պատ. $2{,}4$:

21. $A(1;2)$ և $C(3;6)$ կետերը հանդիսանում են քառակուսու հակադիր գագաթները: Որոշել մյուս երկու գագաթների կոորդինատները:

Պատ. $(0;5)$ և $(4;3)$:

22. Տրված են եռանկյան գագաթները $A(1;1), B(4;5), C(13;-4)$: Կազմել B գագաթից տարված միջնագծի և C գագաթից իջեցված բարձրության հավասարումները: Հաշվել եռանկյան մակերեսը:

Պատ. $13x+6y-82=0$; $3x+4y-23=0$;

$S=31{,}5$ քառ. միավոր:

23. Տրված է $P(-4;0), Q(0;4)$ և $R(2;2)$ գագաթներով եռանկյունը: Գրել նրա միջնագծերի հավասարումները:

Պատ.

$3x-5y+12=0$;

$3x-y+4=0; y=2$:

24. Տրված է $P(6;0), Q(0;6), R(-4;4)$ գագաթներով եռանկյունը: Կազմել այն եռանկյան կողմերի հավասարումները, որի գագաթները հանդիսանում են տրված եռանկյան կողմերի միջնակետերը:

Պատ.

$x-2y+3=0$;

$x+y-3=0$

$2x+5y-21=0$:

25. Գտնել $P(2;1), Q(0;7), R(-4;-1)$ գագաթներով եռանկյան միջնագծերի հատման կետը:

Պատ. $N(\frac{2}{3};\frac{7}{3})$:

26. Գտնել այն կետը, որը հավասարապես է հեռացված տրված 3 կետերից՝ $L(4;-1), M(8;1), N(9;4)$:

Պատ. $N(4;4)$:

27. $x-2y+2=0$ ուղղի վրա գտնել կետ, որը հավասարապես է հեռացված $M_1(-2;3), M_2(2;-1)$ կետերից:

Պատ. $N(0;1)$:

28. Գտնել $M(5;5)$ կետին սիմետրիկ կետ $x+y-3=0$ ուղղի նկատմամբ:

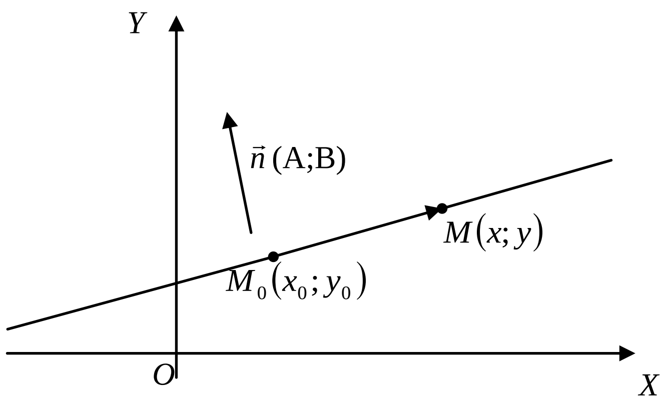
Պատ. $N(-2;-2 :)$

§ 14. Տրված $M_0(x_0, y_0)$ կետով անցնող և $\vec{n}(A,B)$ վեկտորին ուղղահայաց ուղղի հավասարումը

Դիցուք կոորդինատական հարթության վրա տրված է կամայական ուղիղ գիծ: Ապացուցենք, որ հավասարումն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$Ax + By + C = 0 \qquad (1)$$

Դիցուք ուղղի վրա տրված է $M_0(x_0, y_0)$ կետը և ուղղին ուղղահայաց $\vec{n}(A,B)$ վեկտորը: $\vec{n}(A,B)$ վեկտորը կոչվում է ուղիղ գծի նորմալ վեկտոր(նկար 32):



նկար 32.

Այժմ ուղղի վրա վերցնենք $M(x;y)$ ընթացիկ կետը և կազմենք $\overrightarrow{M_0M} = (x-x_0, y-y_0)$ վեկտորը: M-ը կպատկանի ուղղին, այն և միայն այն դեպքում, երբ $\vec{n}$ վեկտորը ուղղահայաց է $\overrightarrow{M_0M}$ - ին (նրանց սկալյար արտադրյալը հավասար է 0 – ի):

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0:$$

$Ax + By - Ax_0 - By_0 = 0$ նշանակենք $-Ax_0 - By_0 = C$ կստանանք`

$$Ax + By + C = 0: \qquad (2)$$

(2)-ը կանվանենք ուղիղ գծի ընդհանուր հավասարում:
Օրինակ. Կազմել ուղիղ գծի հավասարումը, որն անցնում է $M_0(1;-3)$ կետով և ուղղահայաց է $\vec{n}(2;5)$ վեկտորին: Կազմենք ուղիղ գծի հավասարումը`

$$2(x-1) + 5(y+3) = 0$$
$$2x + 5y + 13 = 0$$
$$y = -\frac{2}{5}x - \frac{13}{5}:$$

Դիտարկենք երկու փոփոխականներով առաջին աստիճանի հավասարումը, որը տրված է

$$Ax + By + C = 0 \qquad (1)$$

տեսքով, որի մեջ A և B գործակիցները միաժամանակ հավասար չեն 0-ի, այսինքն

$$A^2 + B^2 \neq 0:$$

1. Ենթադրենք $B \neq 0$ այդ դեպքում (1) հավասարումը կարելի է գրել

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

տեսքով:

Եթե նշ. $-\frac{A}{B} = K, -\frac{C}{B} = b,$ եթե $A \neq 0,$ և $C \neq 0,$ կստանանք $y = kx + b$ ուղղի հավասարումը անկյունային գործակցով: Եթե $A \neq 0,$ $C = 0$, $y = kx$ ուղղի հավասարումը, որն անցնում է կոորդինատների սկզբնակետով: Եթե $A = 0$, $C \neq 0$, $y = b$ (ուղիղը զուգահեռ ox առանցքին):
Եթե $A = 0$, $C = 0$, ապա $y = 0$ որը հանդիսանում է ox առանցքի հավասարումը:

2. $B = 0$, $A \neq 0,$ ապա (1) հավասարումը կընդունի $x = -\frac{C}{A}$ տեսքը: Եթե նշանակենք $-\frac{C}{A} = a$, $x = a$, $C \neq 0$, ապա կստանանք ուղղի հավասարումը, որը զուգահեռ է oy առանցքին: Իսկ եթե $C = 0$, ապա $x = 0$ (կստանանք oy առանցքի հավասարումը):

Այսպիսով, A, B, C գործակիցների ցանկացած թույլատրելի արժեքների դեպքում (1) հավասարումը հանդիսանում է ուղիղ գծի հավասարում xoy հարթության վրա:

(1) հավասարումը կոչվում է ուղիղ գծի հավասարում ընդհանուր տեսքով: Այստեղ անհրաժեշտ է նկատել, որ ի տարբերություն ուղիղների փնջի հավասարմանը, ընդհանուր տեսքով տրված հավասարումն իր մեջ պարունակում է նաև ցանկացած ուղղի հավասարում, որը զուգահեռ է y-երի առանցքին:

Խնդիրներ

1. Հետևյալ ուղիղների հավասարումները բերել ուղիղ գծի հատվածներով հավասարումների՝

1) $2x - 3y = 6$ 2) $3x - 2y + 4 = 0$

Պատ. 1) $\frac{x}{3} + \frac{y}{-2} = 1$ 2) $\frac{x}{-4/3} + \frac{y}{2} = 1$:

2. Տրված են $O(0;0)$ և $A(-3;0)$ կետերը: OA հատվածի վրա կառուցված է զուգահեռագիծ, որի անկյունագծերը հատվում են $B(0;2)$ կետում: Գրել զուգահեռագծի անկյունագծերի և կողմերի հավասարումները:

Պատ. $y = 0;\ 4x - 3y = 0;\ y = 4; 4x - 3y + 12 = 0$:

3. 8սմ և 2սմ հիմքերով հավասարասրուն սեղանն ունի 45^0-ի սուր անկյուն: Գրել սեղանի կողմերի հավասարումները՝ որպես ox առանցք վերցնելով մեծ հիմքը, իսկ որպես oy՝ սեղանի սիմետրիայի առանցքը:

Պատ. $x + y - 4 = 0; x - y + 4 = 0; y = 3; y = 0$:

4. Գրել 10սմ և 6սմ անկյունագծերով շեղանկյան կողմերի հավասարումները, որպես մեծ անկյունագիծ ընդունելով ox առանցքը, իսկ որպես փոքր՝ oy-ը:

Պատ. $\frac{x}{5} \pm \frac{y}{3} = \pm 1$:

5. Գրելով այն ուղղի հավասարումը, որն անցնում է $(-4;6)$ կետով և կոորդինատների առանցքներից անջատում է 6 քառ. միավոր մակերեսով եռանկյուն:

Պատ. $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$ և $\frac{x}{-2} + \frac{y}{-6} = 1$:

6. Գրել ուղիղ գծի հավասարումը, որով շարժվում է $M(x,y)$ կետը, մնալով 2 անգամ հեռու ox առանցքից, քան $x = -3$ ուղղից:

Պատ. $y = \pm 2(x + 3)$:

7. Ուղիղը կոորդինատային առանցքների վրա անջատում է դրական հավասար հատվածներ: Կազմել ուղղի հավասարումը, եթե եռանկյան մակերեսը, որը կազմվել է ուղղի և կոորդինատային առանցքների միջոցով, հավասար է 8 քառ. միավորի:

Պատ. $x + y - 4 = 0$:

8. Հաշվել եռանկյան մակերեսը, որը եզրափակված է $2x + 7y - 14 = 0$ ուղղով և կոորդինատների առանցքներով:

Պատ. 7 քառ. մ:

9. 10 և 12 միավոր անկյունագծով շեղանկյան համար անկյունագծերը հանդիսանում են կոորդինատային առանցքներ: Գտնել շեղանկյան կողմերի հավասարումները:

Պատ. $\frac{x}{5}+\frac{y}{6}=1;\ -\frac{x}{5}+\frac{y}{6}=1;$
$-\frac{x}{5}-\frac{y}{6}=1;\ \frac{x}{5}-\frac{y}{6}=1:$

10. C-ի ի՞նչ արժեքների դեպքում $2x+3y+C=0$ ուղիղը oy առանցքի վրա անջատում է $b_1=4, b_2=-6$ հատվածներ:

Պատ. $C_1=-12;\ C_2=18:$

11. A-ի ի՞նչ արժեքների դեպքում $Ax+5y-40=0$ ուղիղը կոորդինատային առանցքներից անջատում է հավասար հատվածներ:

Պատ. $A=5:$

12. Որոշել b պարամետրը, որի դեպքում $y=2x+b$ ուղիղն անջատում է ox առանցքից $a=3$ հատվածը:

Պատ. $b=-6:$

13. Գտնել $3x-y+9=0$ ուղղի նկատմամբ $A(1;2)$ կետի համաչափ կետի կոորդինատները:

Պատ. $(-5;4)$:

14. Գտնել $y=-\frac{1}{2}x+6$ ուղղի նկատմամբ $A(2;4)$ կետի համաչափ կետի կոորդինատները:

Պատ. $\left(\frac{14}{5};\frac{28}{5}\right)$:

15. Կազմել այն ուղղի հավասարումը, որն անցնում է $x+y-6=0$ և $2x+y-13=0$ ուղիղների հատման կետով և կոորդինատական առանցքներից կտրում է հավասար դրական հատվածներ:

Պատ. $x+y-6=0$:

16. Տրված են ABC եռանկյան B գագաթից տարված բարձրության և միջնագծի հավասարումները՝ $2x-3y+12=0$, $2x+3y=0$, ինչպես նաև C գագաթի կոորդինատները՝ $C(4;-1)$: Գտնել A գագաթի կոորդինատները:

Պատ. $A(8;-7)$:

17. Հաշվել $y-2=0$, $3x-2y+4=0$ և $x-2y-7=0$ ուղիղներով սահմանափակված եռանկյան մակերեսը:

Պատ. $45\frac{3}{8}$:

18. Հաշվել $3x-y-9=0$, $2x+y-1=0$ և $x+y-1=0$ ուղիղներով սահմանափակված եռանկյան մակերեսը:

Պատ. $2{,}5$:

19. Տրված են եռանկյան երկու կողմերի հավասարումները՝ $y=2x$ և $y=-x+3$: Այդ եռանկյան բարձրությունները հատվում են $H(-3;2)$ կետում: Գտնել եռանկյան երրորդ կողմի հավասարումը:

Պատ. $x-5=0$:

20. Տրված են եռանկյան երկու գագաթների կոորդինատները՝ $A(-1;3)$, $B(2;5)$ և բարձրությունների հատման կետը՝$H(1;4)$: Գտնել եռանկյան երրորդ գագաթի կոորդինատները:

Պատ. $(7;-5)$:

21. Կազմել այն ուղղի հավասարումը, որը զուգահեռ է $3x-4y-10=0$ ուղղին և գտնվում է նրանից 3 միավոր հեռավորության վրա:

Պատ. $3x-4y-25=0$:

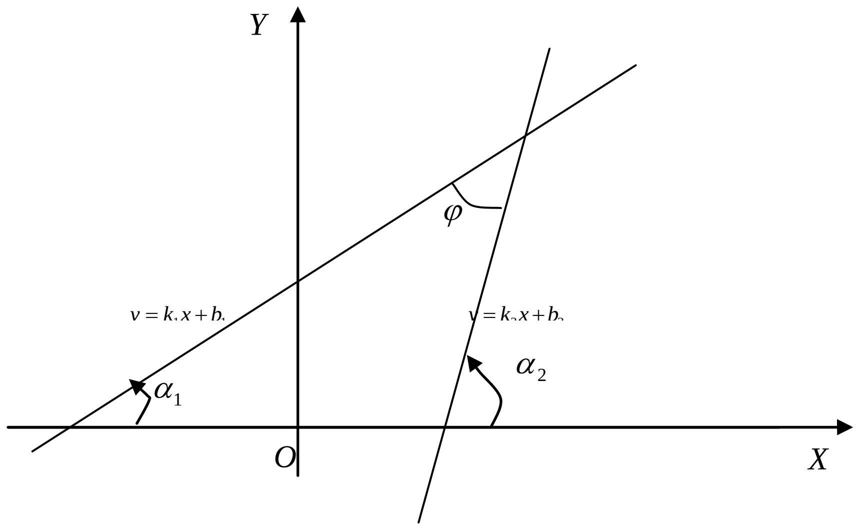
22. Գտնել այն կետի կոորդինատները, որը հավասարապես է հեռացված $M(4;-3)$ և $N(2;-1)$ կետերից և $4x+3y-2=0$ ուղղից գտնվում է 2 միավոր հեռավորության վրա:

Պատ. $(1;-4)$, $\left(3\frac{6}{7};-1\frac{1}{7}\right)$:

23. Կազմել այն ուղիղների հավասարումները, որոնք անցնում են $A(-1;5)$ կետով և հավասարապես են հեռացված $B(3;7)$ և $C(1;-1)$ կետերից:

Պատ. $4x-y+9=0$, $2x+3y-13=0$:

§ 15. Երկու ուղիղներով կազմված անկյունը: Ուղիղների զուգահեռության և ուղղահայացության պայմանները: Երկու ուղիղների հատման կետի որոշումը



նկար 33.

Ենթադրենք տրված են երկու ուղիղները՝ $y = k_1x + b_1$ և $y = k_2x + b_2$, պահանջվում է որոշել նրանցով կազմված φ անկյունը(նկար 33):

Գծագրից ակնհայտ է, որ $\alpha_2 = \alpha_1 + \varphi \Rightarrow \varphi = \alpha_2 - \alpha_1$, ընդ որում $k_1 = tg\alpha_1, k_2 = tg\alpha_2$, $\alpha_1 \neq \frac{\pi}{2}, \alpha_2 \neq \frac{\pi}{2}$:

Այստեղից՝

$tg\varphi = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 tg\alpha_2}$ կամ տեղադրելով $tg\alpha_2, tg\alpha_1$ արժեքները՝ կստանանք՝

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}: \qquad (1)$$

Եթե ուղիղները զուգահեռ են ապա $\varphi = 0$ և $tg\varphi = 0$, որտեղից ըստ նախորդ պարագրաֆի (1) բանաձևի՝ $k_1 = k_2$ և հակառակը, եթե $k_1 = k_2$, ապա ըստ (1) բանաձևի՝ $tg\varphi = 0$ => $\varphi = 0$:

Այսպիսով, երկու ուղիղների անկյունային գործակիցների հավասարությունը հանդիսանում է անհրաժեշտ և բավարար պայման նրանց զուգահեռության համար:

Եթե ուղիղները փոխուղղահայաց են, ապա

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \quad ctg\varphi = \frac{1 + k_1 k_2}{k_2 - k_1}, \quad ctg\frac{\pi}{2} = 0,$$

որտեղից $1 + k_1 k_2 = 0$, $k_1 k_2 = -1$, $k_1 = -\frac{1}{k_2}$; ճիշտ է նաև հակադարձը, եթե $k_1 k_2 = -1$, ապա $\varphi = \frac{\pi}{2}$:

Այսպիսով, երկու ուղիղների ուղղահայացության համար անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրանց անկյունային գործակիցները լինեն հակադարձ համեմատական և ունենան տարբեր նշաններ:

Եթե ուղիղների հավասարումները տրված են ընդհանուր տեսքով՝

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 \end{cases}:$$

Ի նկատի ունենալով, որ $k_1 = -\frac{A_1}{B_1}, k_2 = -\frac{A_2}{B_2}$, ըստ զուգահեռության պայմանի՝ $k_1 = k_2$, կհետևի՝

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}:$$

Այսինքն՝ ընդհանուր տեսքով տրված հարթությունների զուգահեռության համար անհրաժեշտ է նրանց համապատասխան գործակիցների համեմատականությունը:

Ուղղահայացության համար մենք կունենանք, որ ուղղահայաց կլինեն նաև նրանց նորմալ վեկտորները՝ $\vec{N}_1 = \{A_1; B_1\}$ և $\vec{N}_2 = \{A_2; B_2\}$: Հետևաբար, երկու ուղիղների ուղղահայացության պայմանը հետևյալն է՝ $\overline{N}_1 \perp \overline{N}_2 \Leftrightarrow \overline{N}_1 \cdot \overline{N}_2 = 0$, այսինքն՝

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0:$$

Այսինքն՝ ընդհանուր տեսքով տրված ուղիղների ուղղահայացության համար անհրաժեշտ է, որ նրանց համապատասխան գործակիցների արտադրյալների գումարը հավասար լինի 0-ի:

<u>Օրինակ.</u> Գտնել $y = 2x + 3$ և $y = -3x + 4$ ուղիղներով կազմած անկյունը:

<u>Լուծում</u>. Օգտվելով $tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$ բանաձևից և ընդունելով $k_1 = 2$ $k_2 = -3$ և տեղադրելով բանաձևի մեջ, կստանանք ՝

$$tg\varphi = \frac{-3-2}{1+2(-3)} = 1; \varphi = 45^0:$$

Ենթադրենք տրված են $A_1x+B_1y+C_1=0$ և $A_2x+B_2y+C_2=0$ ուղիղները:

Ակնհայտ է, որ նրանց հատման կետի կոորդինատները պետք է բավարարեն այդ հավասարումներից յուրաքանչյուրին, հետևաբար դա պետք է որոշվի հետևյալ համակարգի լուծումի.

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2=0 \end{cases}:$$

Եթե այդ ուղիղները II չեն, այսինքն $\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2}$, ապա այդ համակարգի լուծումը միակն է:

Խնդիրներ

1. Հետևյալ ուղիղներից գտնել զուգահեռները և ուղղահայացները.
$3x-2y+7=0$, $6x-4y-9=0$, $6x+4y-5=0$, $2x+3y-6=0$:

2. $2x-5y-10=0$ ուղղի կոորդինատային առանցքների հետ հատման կետերում տեղադրված են ուղղահայացներ: Գրել այդ ուղղահայացների հավասարումները:

Պատ. $5x+2y+4=0$, $5x+2y=25$:

3. $2x-y+8=0$ ուղիղը հատում է ox և oy առանցքները A և B կետերում: M կետը բաժանում է AB հատվածը հետևյալ հարաբերությամբ. $AM:MB=3:1$: Գրել AB հատվածի M կետում կանգնեցված ուղղահայացի հավասարումը:

Պատ. $x+2y-11=0$:

4. Գտնել $y=-3x+7$ և $y=2x+1$ ուղիղների կազմած սուր անկյունը:

Պատ. $\varphi=\frac{\pi}{4}$:

5. Ցույց տալ, որ $4x-6y+7=0$ և $20x-30y-11=0$ ուղիղները զուգահեռ են:

6. Ցույց տալ, որ $3x-5y+7=0$ և $10x+6y-3=0$ ուղիղները ուղղահայաց են:

7. Ցույց տալ, որ $3x-2y+1=0$ և $2x+5y-12=0$ ուղիղները հատվում են, գտնել հատման կետի կոորդինատները:

Պատ. $x=1$, $y=2$, հատվում են $(1;2)$ կետում:

8. Կազմել ուղղի հավասարումը, որն անցնում է $M(-2;5)$ կետով և զուգահեռ է $3x+4y+2=0$ ուղղին:

Պատ. $3x+4y+26=0$:

9. Կազմել ուղիղների հավասարումները, որոնք անցնում են $M(5;1)$ կետով և $2x+y-4=0$ ուղղի հետ կազմում են $\frac{\pi}{4}$ անկյուն:

Պատ. $x+3y-8=0$, $3x-y-14=0$:

10. Գտնել այն ուղիղը, որն անցնում է $3x-4y+7=0$ և $5x+2y+3=0$ ուղիղների հատման կետով և զուգահեռ է օրդինատների առանցքին:

Պատ. $x+1=0$:

11. Գտնել սուր անկյունը, որը կազմված է օրդինատների առանցքով և $A(2;\sqrt{3}), B(3;2\sqrt{3})$ կետերով անցնող ուղղով:

Պատ. $\frac{\pi}{6}$:

12. Գտնել այն ուղիղը, որն անցնում է $x+2y+3=0$ և $2x+3y+4=0$ ուղիղների հատման կետով և զուգահեռ է $5x+8y=0$ ուղղին:

Պատ. $5x+8y+11=0$:

13. Գտնել այն ուղիղը, որն անցնում է $3x-y-1=0$ և $x+3y+1=0$ ուղիղների հատման կետով և զուգահեռ է աբսցիսների առանցքին:

Պատ. $5y+2=0$:

14. Գտնել այն ուղիղը, որն անցնում է $x+2y+1=0$ և $2x+y+2=0$ ուղիղների հատման կետով և աբսցիսների առանցքի հետ կազմում է 135^0-ի անկյուն:

Պատ. $x+y+1=0$:

15. Գտնել $6x+8y+5=0$ և $2x-4y-3=0$ ուղիղների կազմած անկյունը:

Պատ. 135^0:

16. Պարզել, թե հետևյալ ուղիղներից որոնք են զուգահեռ և որոնք ուղղահայաց:

1. $3x-15y+16=0$ 2. $3x+15y-8=0$
3. $6x-30y+13=0$ 4. $30x+6y+7=0$:

Պատ. I և III ուղիղները զուգահեռ են, III և IV ուղիղներն ուղղահայաց են, I և IV ուղիղներն ուղղահայաց են:

17. Գտնել եռանկյան կողմերի երկարությունները և նրա ներքին անկյունները, եթե հայտնի է, որ կողմերն ընկած են $x-6y+5=0$, $5x-2y-3=0$, $x+y-9=0$

ուղիղների վրա:

Պատ. $AB=\sqrt{37}; BC=\sqrt{32}; AC=\sqrt{29}; tgA=\frac{28}{17}, tgB=\frac{7}{5}, tgC=\frac{7}{3}$:

18. Գտնել հետևյալ ուղիղների կազմած անկյունները.

1. $\begin{cases} y=\frac{2}{3}x-7; \\ y=5x+9; \end{cases}$ 2. $\begin{cases} y=\frac{1}{4}x-3 \\ x-4y+7=0 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} y=\frac{3}{7}x-2 \\ 7x+3y+5=0 \end{cases}$ 4. $\begin{cases} \frac{x}{4}-\frac{y}{5}=1 \\ \frac{x}{2}+\frac{y}{18}=1 \end{cases}$

Պատ. $\varphi=\frac{\pi}{4}, \varphi_2=0, \varphi_3=\frac{\pi}{2}, \varphi_4=\frac{\pi}{4}$:

19. Կազմել այն ուղիղնեի հավասարումները, որոնք անցնում են կոորդինատների սկզբնակետով, եթե հայտնի է, որ.

1. ուղիղը զուգահեռ է $2x-3y+5=0$ ուղղին,
2. ուղղահայաց է $y=3x+5$ ուղղին,
3. կազմում է 45^0-ի անկյուն $y=2x-3$ ուղղի հետ:

Պատ. 1. $2x-3y=0$, 2. $y=-\frac{1}{3}x$, 3. $y=-3x$ կամ $y=\frac{1}{3}x$:

20. $3x+5y-8=0$ և $4x-7y+3=0$ ուղիղների հատման կետով տանել ուղիղ, որը ուղղահայաց է նրանցից առաջինին, և ուղիղ , որը զուգահեռ է $2x+6y-2=0$ ուղղին:

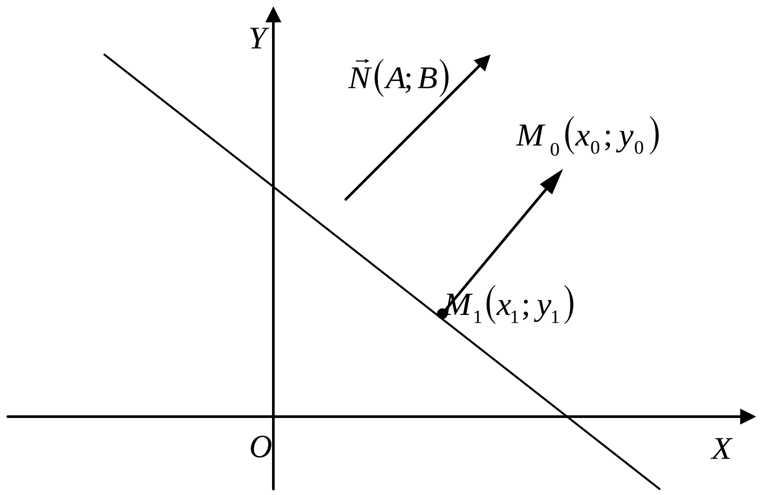
Պատ. $5x-3y-2=0$, $2x+6y-8=0$:

21. Տրված են զուգահեռագծի երկու կողմերի հավասարումները. $x-y+1=0$, $3x+2y-12=0$ և $E(6;4)$ կետը հանդիսանում է նրա անկյունագծերի հատման կետը: Գրել զուգահեռագծի մյուս երկու կողմերի հավասարումները:

Պատ. $x-y-5=0$, $3x+2y-40=0$:

Ցուցում. Գտնել տրված երկու կողմերի հատման կետը, որը հանդիսանում է զուգահեռագծի գագաթներից մեկը: Երկրորդ գագաթը կարելի է գտնել այն պայմանից, որ E կետը հատվածի միջնակետն է: Այդ գագաթներից տանել ուղիղներ, որոնք զուգահեռ են տրվածին:

§ 16. Կետի հեռավորությունն ուղղից: Ուղիղ գծի նորմալ հավասարումը



Նկար 34.

Ենթադրենք տրված է $M_0(x_0;y_0)$ կետը և $Ax+By+C=0$ ուղիղը /կետը չի գտնվում այդ ուղղի վրա/: $M_0(x_0;y_0)$ կետի հեռավորությունը ուղղից ասելով՝ մենք հասկանում ենք M_0 կետից այդ ուղղին իջեցրած ուղղահայացի երկարությունը: M_0 կետից $Ax+By+C=0$ ուղղին իջեցրած ուղղահայացի հատման կետը նշանակենք $M_1(x_1;y_1)$-ով(նկար 34):

Որոնելի d հեռավորությունը հավասար է ուղղահայացի երկարությանը, այսինքն՝ $\overrightarrow{M_1M_0}$ վեկտորի երկարությանը՝ $d=\left|\overrightarrow{M_1M_0}\right|$:

Դիտարկենք տրված ուղղի նորմալ վեկտորի $\vec{N}=\{A;B\}$ և $\overline{M_1M_0}=\{x_0-x_1,y_0-y_1\}$ վեկտորի սկալյար արտադրյալը՝

$$\overline{M_1M_0}\cdot\vec{N}=\left|\overline{M_1M_0}\right|\cdot\left|\vec{N}\right|\cdot\cos\varphi: \qquad (1)$$

Նկատի ունենալով այն հանգամանքը, որ $\overrightarrow{M_1M_0}$ և $\vec{N}$ վեկտորները կոլինար /համագիծ/ են, ապա կամ $\varphi=0$ կամ $\varphi=\pi$, այսինքն՝ $\cos\varphi=\pm1, |\overrightarrow{M_1M_0}|=d$, տեղադրելով ստացված արժեքները (1)-ի մեջ՝ կստանանք՝

$$\overline{M_1M_0}\cdot\vec{N}=\pm\left|\vec{N}\right|d: \qquad (2)$$

$\overrightarrow{M_1M_0}\cdot\vec{N}$ սկալյար արտադրյալը գրենք կոորդինատների միջոցով՝

$$\overline{M_1M_0}\cdot\overline{N}=A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)$$
$$\overline{M_1M_0}\cdot\overline{N}=Ax_0+By_0-Ax_1-By_1: \qquad (3)$$

Քանի որ $M_1(x_1;y_1)$ կետը գտնվում է $Ax+By+C=0$ ուղղի վրա, հետևաբար $Ax_1+By_1+C=0 \Rightarrow Ax_1+By_1=-C$ տեղադրելով ստացված արժեքը (3)-ի մեջ՝ կստանանք՝

$$\pm\left|\vec{N}\right|d = Ax_0+By_0+C\ ,$$

$$d=\pm\frac{Ax_0+By_0+C}{\left|\vec{N}\right|}:$$

Քանի որ $\left|\vec{N}\right|=\sqrt{A^2+B^2}$, կստանանք՝

$$d=\frac{\left|Ax_0+By_0+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}:$$

<u>Օրինակ.</u> Գտնել $M_1(-6;3)$ կետի հեռավորությունը $3x-4y+15=0$ ուղղից:

<u>Լուծում</u> . Տեղադրենք բանաձևի մեջ՝ $d=\frac{\left|3\cdot(-6)-4\cdot3+15\right|}{\sqrt{9+16}}=\frac{\left|-15\right|}{5}=3$:

Եթե ուղիղ գծի հավասարումը տրված է

$$X\cos\alpha+Y\sin\alpha-p=0 \qquad (1')$$

տեսքով, որտեղ $p>0$, ապա այն անվանում ենք ուղիղ գծի նորմալ հավասարում: Այժմ առաջին աստիճանի ընդհանուր տեսքով տրված հավասարումը բերենք նորմալ տեսքի:

Դիցուք տրված է

$$Ax+By+C=0, \qquad (2')$$

հավասարումը, ցույց տանք, որ այն կարելի է բերել նորմալ տեսքի: Տրված հավասարման երկու մասերը բազմապատկենք μ հաստատուն բազմապատկիչով այնպես, որ (2’) հավասարումն ընդունի (1’) տեսքը $\mu Ax+\mu Bx+\mu C=0$, որպեսզի վերջին հավասարումն ունենա (1’) տեսքը, պետք է ընդունել, որ

$$\mu A=\cos\alpha,\ \ \mu B=\sin\alpha,\ \ \mu C=-p: \qquad (3')$$

Վերջին հավասարումից անհրաժեշտ է գտնել μ, p և α անհայտները A, B, C գործակիցների միջոցով: Առաջին երկուսը բարձրացնելով քառակուսի՝ կստանանք՝

$$\mu^2A^2+\mu^2B^2=1 => \mu=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}:$$

Այստեղ նշանը պետք է ընտրել C ազատ անդամի նշանին հակառակ, ինչպես դա երևում է (3’) հավասարությունից: $C=0$ դեպքում կարելի է ընտրել կամայականորեն: μ արժեքները տեղադրելոով (3’)-ի մեջ՝ կստանանք՝

$$\cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}, \sin\alpha = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}};$$

$$p = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}:$$

Այսպիսով, (2') հավասարումը նորմալ տեսքի է բերվում μ բազմապատկիչով բազմապատկելու միջոցով: μ-ն կոչվում է նորմավորված բազմապատկիչ:

Որտեղ p-ն կոորդինատների սկզբնակետից ուղղին իջեցրած ուղղահայացի երկարությունն է, իսկ α-ն այդ ուղղահայացի և ox առանցքն դրական ուղղության հետ կազմած անկյունն է:

Օրինակ. Բերել կանոնական տեսքի $3x-4y+10=0$ ուղղի ընդհանուր տեսքով տրված հավասարումը:

Լուծում.Այստեղ $A=3$, $B=-4$, $C=10>0$, $\mu=\sqrt{3^2+4^2}=5$, քանի որ $C=10>0$, ապա հավասարման 2 մասերը բաժանում ենք $-\mu$ կամ –5-ի վրա:

Կստանանք ` $-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}-2=0, \quad \cos\alpha=-\frac{3}{5}, \ \sin\alpha=\frac{4}{5}, \ p=-2(\alpha\approx127):$

Խնդիրներ

1. Ուղիղների հավասարումները բերել նորմալ հավասարման տեսքի`

1) $3x-4y-20=0;$ 2) $x+y+3=0;$ 3) $y=kx+b:$

2.Գտնել $A(4;3), B(2;1)$ և $C(1;0)$ կետերի հեռավորությունները $3x+4y-10=0$ ուղղից:

Պատ. $2,8; 0:$

3. Ցույց տալ, որ $2x-3y=6$ և $4x-6y=25$ ուղիղները զուգահեռ են, և գտնել նրանց միջև հեռավորությունը:
Ցուցում. ուղիղներից մեկի վրա վերցնել որևէ կետ և գտնել նրա հեռավորությունը մյուս ուղղից:

Պատ. $\sqrt{13}/2$:

4. Գրել այն կետերի երկրաչափական տեղի հավասարումը, որոնք $4x-3y=0$ ուղղից հեռացված են $d=4$ հեռավորությամբ:

Պատ. Երկու ուղիղներ, որոնք զուգահեռ են տրվածին` $4x-3y\pm20=0:$

5. Գրել $M(x;y)$ կետի հետագծի հավասարումը, որն իր շարժման ընթացքում մնում է 3 անգամ հեռու $y=2x-4$ ուղղից, քան $y=4-2x$ ուղղից:

Պատ. $x+y=2$ կամ $4x+y-8=0:$

6. Գրել $A(2;4)$ կետով անցնող ուղղի հավասարումը, որը կոորդինատների

սկզբնակետից հեռացված է $d=2$ հեռավորությամբ:

Պատ. $3x-4y+10=0;\ x=2$:

7.Կոորդինատների սկզբնակետով տարված է ուղիղ, որը $A(2;2)$ և $B(4;0)$ կետերից գտնվում է հավասար հեռավորության վրա: Գտնել այդ հեռավորությունը:

Պատ. ուղիղները. $x+y=0$ և $x-3y=0;$
հեռավորությունները. $d_1=2\sqrt{2};\quad d_2=0{,}4\sqrt{10}$:

8.Գրել այն կետերի երկրաչափական տեղի հավասարումը, որոնք $x+2y-5=0$ ուղղից հեռացված են $\sqrt{5}$ հեռավորությամբ:

Պատ. ուղիղների զույգը. $x+2y=0$ և $x+2y=10$:

9. Գրել $M(x;y)$ կետի հետագծի հավասարումը, որը իր շարժման ընթացքում 2 անգամ հեռու է $y=x$ ուղղից, քան $y=-x$ ուղղից:

Պատ. $x+3y=0$ և $3x+y=0$:

10. Տրված է $12x-5y-65=0$ ուղղի հավասարումը, կազմել նորմալ հավասարումը:

Պատ. $\frac{12}{13}x-\frac{5}{13}y-5=0$:

11. Տրված է $(x+2\sqrt{5})/4+(y-2\sqrt{5})/2=0$ ուղիղը, գտնել նորմալ հավասարումը:

Պատ. $\frac{1}{\sqrt{5}}x+\frac{2}{\sqrt{5}}y-2=0$:

12. Որոշել $M(1;2)$ կետի հեռավորությունը $20x-21y-58=0$ ուղղից:

Պատ. $d=2\frac{22}{29}$:

13. Տրված են եռանկյան կողմերի հավասարումները.
$x+3y-7=0\,(AB);\ 4x-y-2=0\ (BC);\ 6x+8y-35=0\,(AC)$: Գտնել B կետից իջեցված բարձրության երկարությունը:

Պատ. 1,3:

14. $A(3/2;1);\ B(1;5/3);\ C(3;3)$ գագաթներով եռանկյան C գագաթից իջեցված բարձրության երկարությունը:

Պատ. 2,4:

15. Աբսցիսների առանցքի վրա գտնել կետ, որի հեռավորությունը $8x+15y+10=0$ ուղղից = է 1-ի:

Պատ. $\left(\frac{7}{8};0\right)$ և $\left(-\frac{27}{8};0\right)$:

16. Որոշել ուղղահայացի երկարությունը, որը կոորդինատների սկզբնակետից իջեցված է $x - y + 3 = 0$ ուղղին, և այն անկյունը, որը կազմված է այդ ուղղահայացով և ox առանցքով:

Պատ. $\alpha = 135^0, \quad P = \frac{3}{\sqrt{2}}$:

17. Տրված է $P(0;5), Q(-3;1)$ և $R(-1;2)$ գագաթներով եռանկյունը: Գտնել R կետից իջեցված բարձրության երկարությունը:

Պատ. $d = 5$:

18. Տրված են ուղիղների հավասարումները: Որո՞նք են դրանցից նորմալ տեսքում.

1) $5x + 7y - 9 = 0$ 2) $\frac{1}{4}x + y - 3 = 0$

3) $\frac{2}{5}x + \frac{3}{4}y - 6 = 0$ 4) $\frac{12}{13}x - \frac{5}{13y} - 7 = 0$

5) $\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 2 = 0$ 6) $\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - 4 = 0$

Պատ. 4)- ը և 5)- ը:

19. Գրել ուղղի հավասարումը, որն անցնում է $M_1(1;5)$ կետով և կոորդինատների սկզբնակետից հեռացված է 5 միավորով:
<u>Ցուցում</u>. Ուղղի հավասարումը փնտրել $y - y_1 = k(x - x_1)$ տեսքով: k-ն որոշել պայմանից, որ ուղիղը հեռացված է կոորդինատների սկզբնակետից, $d = 5$:

Պատ. $5x + 12y - 65 = 0; y - 5 = 0$:

20. Գտնել կետ, որը հավասարապես է հեռացված $M(-3;1), N(5;7)$ կետերից և հեռացված է $3x - 4y + 38 = 0$ ուղղից $d = 5$ հեռավորությամբ:

Պատ. $N(1;4), \quad M(-5;12)$:

§ 17. Երկրորդ կարգի կորեր: Շրջանագիծ, էլիպս, հիպերբոլ, պարաբոլ

Սահմանում. Հարթության վրա երկրորդ կարգի կորեր կոչվում են այն գծերը, որոնք հանրահաշվորեն ներկայացվում են երկու փոփոխականներով երկրորդ աստիճանի հավասարումներով x և y ընթացիկ կոորդինատների նկատմամբ:

Ընդհանուր դեպքում այդ հավասարումն ունի հետևյալ տեսքը`

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad (A^2 + B^2 + C^2) \neq 0: \qquad (1)$$

Այսինքն` A, B, C թվերը չեն կարող միաժամանակ 0 լինել: Կոորդինատական առանցքների համապատասխան ընտրության դեպքում երկրորդ կարգի կորերը կարելի է ներկայացնել պարզագույն տեսքով:

Երկրորդ կարգի կորերի ուսումնասիրությունը սկսենք շրջանագծից:

Շրջանագիծ- Շրջանագիծ կոչվում է կետերի այն երկրաչափական տեղը, որոնք հավասարապես են հեռացված տրված կետից, այդ կետը կոչվում է շրջանագծի կենտրոն, իսկ հեռավորությունը կոչվում է շրջանագծի շառավիղ(նկար 21):

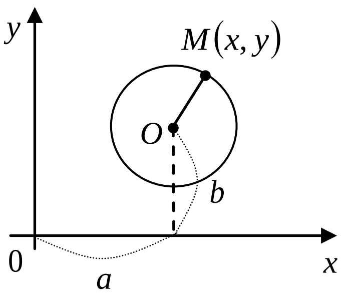
Ինչպես գիտենք, շրջանագծի վրա ցանկացած /կամայական/ $M(x;y)$ կետի կոորդինատների համար տեղի ունի $MO = R$ պայմանը:

Օգտվելով երկու կետերի միջև հեռավորության բանաձևից` կստանանք`

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R$$

կամ հավասարման երկու մասերը բարձրացնելով քառակուսի` կստանանք`

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2: \qquad (2)$$



Նկար 21.

(2) հավասարումը կոչվում է շրջանագծի կանոնական հավասարում: Մասնավոր դեպքում, երբ շրջանագծի կենտրոնը գտնվում է կոորդինատների սկզբնակետում $(a = b = 0)$ կստանանք`

$$x^2 + y^2 = R^2:$$

Այժմ պարզենք, թե ինչ պայմանների դեպքում ընդհանուր տեսքով տրված առաջին հավասարումը կհանդիսանա շրջանագծի հավասարում:

Դրա համար բացենք առաջին հավասարումը և կստանանք`

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0:$$

Որպեսզի (1)-ը և (2)-ը ներկայացնեն միևնույն կորը, դժվար չէ նկատել, որ նախ $B=0$, իսկ $A=C\neq 0$ կամ $(A^2+B^2+C^2\neq 0, B=0)$, այսինքն կստանանք՝ $Ax^2+Ay^2+Dx+Ey+F=0$:Հավասարման երկու մասերը բաժանենք $A\neq 0$ վրա և անջատենք լրիվ քառակուսին x և y փոփոխականների, կստանանք՝

$$x^2+y^2+\frac{D}{A}x+\frac{E}{A}y+\frac{F}{A}=0$$

$$x+\frac{D}{A}x+(\frac{D}{A}x)^2+y^2+\frac{E}{A}y+(\frac{E}{A}y)^2=\frac{D^2+E^2-4AF}{4A^2}$$

$$(x+\frac{D}{2A})^2+(y+\frac{E}{2A})^2=\frac{D^2+E^2-4AF}{4A^2}:$$

(3)

Համեմատելով (3) հավասարումը շրջանագծի (2) հավասարման հետ՝ կարելի է ասել, որ այն հանդիսանում է շրջանագծի հավասարում, եթե՝

1) $A=C\neq 0$ 2) $B=0$ 3) $D^2+E^2-4AF>0$

Այս պայմանների առկայության դեպքում շրջանագծի կենտրոնը գտնվում է $O(-\frac{D}{2A};-\frac{E}{2A})$ կետում, իսկ R շրջանագծի շառավիղը կլինի՝

$$R=\frac{\sqrt{D^2+E^2-4AF}}{2A}:$$

<u>Օրինակ.</u> Գտնել շրջանագծի կենտրոնի կոորդինատները և շառավիղը, որը տրված է $x^2+y^2+4x-6y+9=0$ հավասարումով:
<u>Լուծում</u> . Անջատելով երկանդամի լրիվ քառակուսին՝ կստանանք՝

$$x^2+y^2+4x-6y+9\Rightarrow(x^2+4x)+(y^2-6y)+9=0$$

$$(x^2+4x+4)+(y^2-6y+9)-4-9+9=0$$

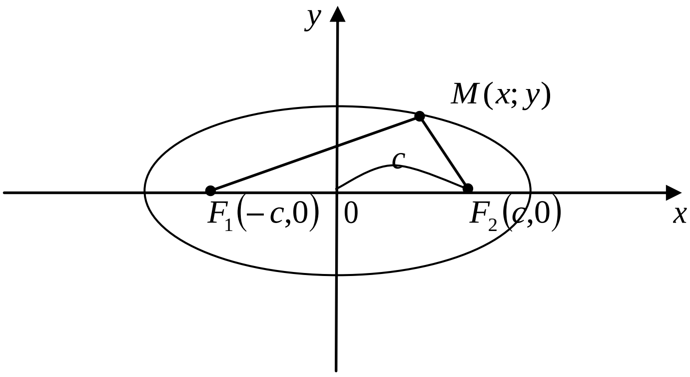
$$(x+2)^2+(y-3)^2=4, O(-2;3), R=2:$$

Այսպիսով շրջանագծի կենտրոնը գտնվում է O(-2;3) կետում, շառավղի երկարությունը հավասար է 2 – ի:

<u>Էլիպս</u> – Հարթության վրա այն կետերի երկրաչափական տեղը, որոնց հեռավորութունների գումարը տրված երկու $F_1(-c;0), F_2(c;0)$ կետերից, որոնք կոչվում են ֆոկուսներ, հաստատուն մեծություն է, իսկ այդ կետերի հեռավորությունների գումարը մեծ է ֆոկուսների հեռավորություններից, կոչվում է էլիպս(նկար 22):

Տրված կետերը կոչվում են էլիպսի կիզակետեր կամ ֆոկուսներ (F_1, F_2), օրինաչափությունը խախտած չենք լինի, եթե ենթադրենք, որ էլիպսի ֆոկուսներն ընկած են ox առանցքի վրա և սիմետրիկ են կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ(դրան միշտ կարելի է հասնել զուգահեռ տեղափոխությամբ և պտույտով):

Նշանակենք դրանք $F_1(-c;0), F_2(c;0)$: Նրանց միջև եղած հեռավորությունը՝ 2c, իսկ էլիպսի ընթացիկ կետից ֆոկուսների եղած հեռավորությունների գումարը՝ 2a: Քանի որ $F_1M + F_2M > F_1F_2$, ապա $2a > 2c$:



Նկար 22.

Ըստ էլիպսի սահմանման՝ $MF_1 + MF_2 = 2a > 2c$,

$$MF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad MF_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \qquad \text{կամ}$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a, \tag{1}$$

որն իրենից ներկայացնում է էլիպսի հավասարումը մեր ընտրած կոորդինատական համակարգում: Ձախ կողմի երկրորդ գումարելին տեղափոխելով աջ մասը և բարձրացնելով քառակուսի՝ կստանանք՝

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$
$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$
$$4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4cx$$
$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx:$$

Վերջին հավասարման երկու կողմերը բարձրացնենք քառակուսի և կատարենք նման անդամների միացում, կստանանք՝

$$a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) = a^2 - 2a^2cx + c^2x^2$$
$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2):$$

Քանի որ $a^2 - c^2 > 0$, նշանակենք $b^2 = a^2 - c^2$, կստանանք՝

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \ ,$$

բաժանելով վերջին հավասարման երկու մասերը a^2b^2-ու վրա՝ կստանանք՝

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad (2)$$

որը կանվանենք էլիպսի կանոնական հավասարում:

Այսպիսով, էլիպսի վրա գտնվող ցանկացած կետի կոորդինատները բավարարում են երկրորդ հավասարմանը:

Կարելի է ցույց տալ, որ եթե M կետի կոորդինատները բավարարում են էլիպսի հավասարմանը, ապա M կետը գտնվում է էլիպսի վրա:

Քանի որ երկրորդ հավասարումը պարունակում է ընթացիկ (x, y) կոորդինատների միայն քառակուսիները, ուստի (x, y) կետի հետ միասին էլիպսի վրա են գտնվում նաև $(\pm x;\pm y)$ կետերը:

Հետևաբար, կոորդինատական առանցքները հանդիսանում են սիմետրիայի առանցքներ:

Էլիպսի սիմետրիայի առանցքը, որի վրա գտնվում են ֆոկուսները, կոչվում է ֆոկուսային առանցք: Էլիպսի սիմետրիայի առանցքների հատման կետը կոչվում է էլիպսի կենտրոն: $\varepsilon=\frac{c}{a}$ հարաբերությունը կոչվում է էլիպսի էքսցենտրիսիտետ:

<u>Օրինակ</u>.Գտնել $4x^2+9y^2=16$ էլիպսի կիսառանցքները, ֆոկուսները և էքսցենտրիսիտետը:

<u>Լուծում</u> . Բաժանելով հավասարման երկու մասերը 16-ի վրա՝ կստանանք՝

$$\frac{x^2}{4}+\frac{9y^2}{16}=1 \text{ կամ } \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{\frac{16}{9}}=1:$$

Համեմատելով վերջին հավասարումը (2)-ի հետ՝ կստանանք՝

$$a^2=4, b^2=\frac{16}{9}, \quad a=2, b=\frac{4}{3},$$

$$c^2=a^2-b^2=4-\frac{16}{9}=\frac{20}{9}, \ c=\frac{2\sqrt{5}}{3},$$

$$\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{5}}{3}:2=\frac{\sqrt{5}}{3}:$$

Այսպիսով, $a=2, b=\frac{4}{3}$, $F_1\left(-\frac{2\sqrt{5}}{3},0\right)$, $F_2\left(\frac{2\sqrt{5}}{3},0\right)$, $\varepsilon=\frac{\sqrt{5}}{3}$:

<u>**Հիպերբոլ**</u>- Այն կետերի երկրաչափական տեղը, որոնց հեռավորությունների տարբերությունները տրված ֆիքսված երկու կետերից, որոնք կոչվում են ֆոկուսներ/կիզակետեր/, իսկ այդ հեռավորությունների տարբերությունը փոքր է ֆոկուսների միջև եղած հեռավորությունից, հաստատուն մեծություն է, կոչվում է հիպերբոլ(նկար 23):

Այդ հաստատուն մեծությունը նշանակենք 2a, միջֆոկուսային հեռավորությունը՝ 2c:

Համաձայն հիպերբոլի սահմանման ՝ $\Delta F_1MF_2, |F_1M|-|F_2M|<F_1F_2$ որտեղից, քանի որ

$$|F_1M|-|F_2M|=2a \text{ , իսկ}$$

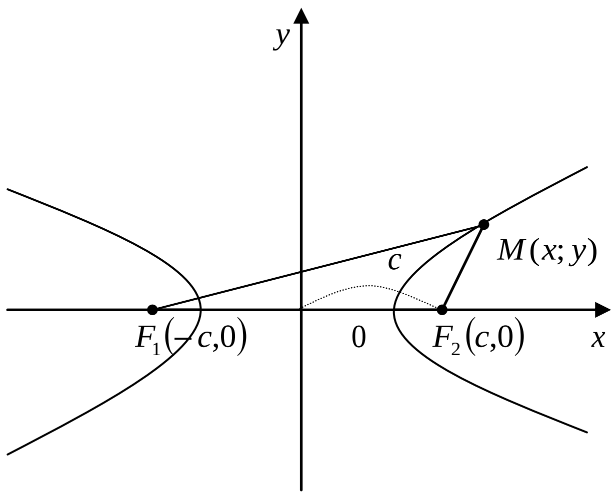
$$F_1F_2=2c \Rightarrow 2a<2c, \ a<c, F_1M-F_2M=\pm 2a:$$

Վերջին հավասարման մեջ պետք է ընտրել “+” նշանը, եթե $F_2M - F_1M > 0$ և “-“ նշանը, եթե $F_2M - F_1M < 0$:

Քանի որ $F_1M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, F_2M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ ընդհանուր հավասարման մեջ $AC < 0$, A-ն և C-ն ունեն տարբեր նշաններ՝

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a,$$

որը հանդիսանում է հիպերբոլի հավասարումը մեր ընտրած կոորդինատական համակարգում:



Նկար 23.

$$(x+c)^2 + y^2 = (x-c)^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 4a^2$$
$$4cx - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$
$$cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$
$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$$
$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$
$$c^2 - a^2 = b^2,$$
$$c = \sqrt{a^2 + b^2}:$$
$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2,$$

բաժանելով վերջին հավասարումը a^2b^2 -ու վրա՝ կստանանք՝

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a < c,$$

որը կոչվում է հիպերբոլի հավասարում:

Օրինակ. Կազմել այն հիպերբոլի հավասարումը, որը սիմետրիկ է կոորդինատային առանցքների նկատմամբ, հատում է oy առանցքը և անցնում է $A\left(24,5\sqrt{5}\right)$, $B(0,5)$ կետերով: Գտնել այդ հիպերբոլի ֆոկուսները:

Լուծում . Հիպերբոլի հավասարումը գրենք հետևյալ տեսքով՝

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1,$$

քանի որ A և B կետերը գտնվում են հիպերբոլի վրա, ապա նրանց կոորդինատները պետք է բավարարեն հիպերբոլի հավասարմանը: Տեղադրելով նրանց կոորդինատները հիպերբոլի հավասարման մեջ՝ կստանանք՝

$$\begin{cases}\dfrac{125}{b^2}-\dfrac{576}{a^2}=1\\ \dfrac{25}{b^2}=1\end{cases}:$$

Լուծելով վերջին համակարգը՝ կստանանք՝

$$a^2=144, b^2=25:$$

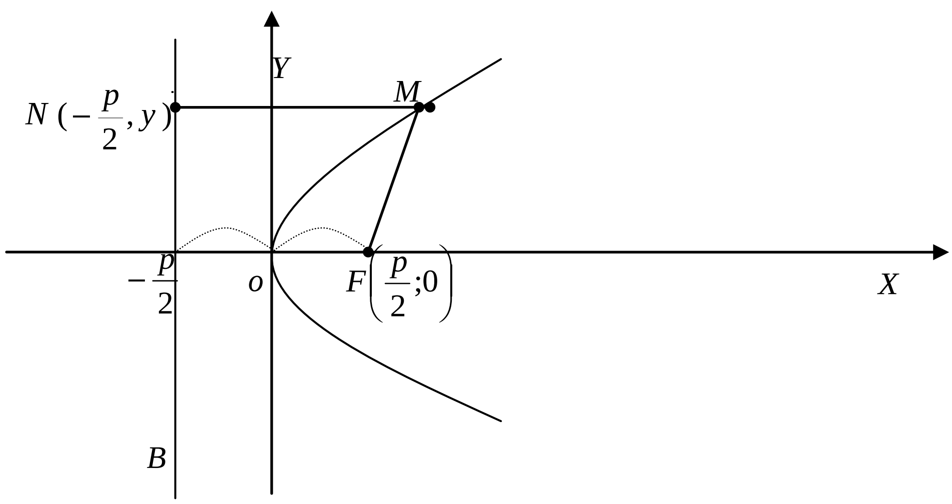
Այսպիսով, որոնելի հիպերբոլի հավասարումը կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{144}=1:$$

$$c=\sqrt{144+25}=13:$$

Հիպերբոլի ֆոկուսները գտնվում են oy առանցքի վրա՝ $F_1(0,-13)$, $F_2(0,13)$:

Պարաբոլ - Պարաբոլն այն կետերի երկրաչափական տեղն է, որոնք հավասարապես են հեռացված տրված կետից և տրված ուղղից: Այդ կետը կոչվում է պարաբոլի ֆոկուս, իսկ ուղիղը՝ դիրեկտրիս(նկար 24):



նկար 24.

Ենթադրենք p-ն ֆոկուսի հեռավորությունն է դիրեկտրիսից: Դեկարտյան կոորդինատական համակարգում ox առանցքը վերցնենք այնպես, որ նա անցնի F ֆոկուսով և ուղղահայաց լինի BN դիրեկտրիսին, որի հավասարումը՝ $x=-\frac{p}{2}$: Որպես կոորդինատների սկզբնակետ վերցնենք F ֆոկուսի և դիրեկտրիսի միջնակետը: p-ն անվանում ենք պարաբոլի պարամետր:

F ֆոկուսի կոորդինատները կլինեն՝ $(\frac{p}{2};0)$:

Պարաբոլի կամայական M կետի կոորդինատները նշանակենք $(x;y)$: M կետից դիրեկտրիսին իջեցրած ուղղահայացի N կետի կոորդինատները կլինեն՝ $N(\frac{p}{2};0)$, համաձայն պարաբոլի սահմանման՝ $MN=MF$, կիրառելով երկու կետերի միջև հեռավորության բանաձևը մեր ընտրած սիստեմում՝ կստանանք՝

$$\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+y^2}=\sqrt{(x+\frac{p}{2})^2}$$

$$(x-\frac{p}{2})^2+y^2=(x+\frac{p}{2})^2$$

$$x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2=x^2+px+\frac{p^2}{4}:$$

$r=x+\frac{p}{2}$ հանդիսանում է $M(x,y)$ կետի հեռավորությունը ֆոկուսից:

$$y^2=2px: \qquad (1)$$

Ստացված հավասարումը կոչվում է պարաբոլի կանոնական հավասարում:

Հետազոտենք պարաբոլի հավասարումը: x-ի յուրաքանչյուր արժեքին համապատասխանում է y-ի երկու արժեք, որոնք բացարձակ մեծությամբ հավասար են, բայց ունեն հակադիր նշաններ, այսինքն կորը սիմետրիկ է ox առանցքի նկատմամբ: x-ը մեծացնելիս y-ի բացարձակ արժեքը նույնպես աճում է:

Պարաբոլն ունի մեկ սիմետրիայի առանցք, որն անցնում է նրա ֆոկուսով և այն կոչվում է պարաբոլի առանցք:

Սիմետրիայի առանցքի հետ պարաբոլի հատման կետը կոչվում է պարաբոլի գագաթ:

Վերջում նկատենք, որ մեր դիտարկած բոլոր գծերը՝ շրջանագիծը, էլիպսը, հիպերբոլը և պարաբոլը, դեկարտյան կոորդինատական համակարգում կարող են ներկայացվել միայն երկրորդ աստիճանի հավասարումներով: Այստեղ անհրաժեշտ է նշել նաև, որ $y^2=-2px, x^2=2qy, x^2=-2qy$ հավասարումներից յուրաքանչյուրն իրենից ներկայացնում է պարաբոլ:

Օրինակ. Գտնել $y^2=12x$ պարաբոլի ֆոկուսի կոորդինատները և դիրեկտրիսի հավասարումը: Որոշել ֆոկուսի հեռավորությունը $M(3,6)$ կետից:

Լուծում. Համեմատենք $y^2=12x$ պարաբոլի հավասարումը (1) հավասարման հետ:

$$2p=12,\ p=6,\ \frac{p}{2}=3,$$

հետևաբար, դիրեկտրիսի հավասարումը կլինի՝ $x=-3$, իսկ ֆոկուսը գտնվում է $F(3,0)$ կետում: $M(3,6)$ կետը գտնվում է պարաբոլի վրա, քանի որ նրա կոորդինատները բավարարում են պարաբոլի հավասարմանը: $M(3,6)$ կետի հեռավորությունը ֆոկուսից որոշվում է $r = x + \frac{p}{2}$ բանաձևով, տեղադրելով $x = 3$, $p = 6$, կստանանք՝ $r = 3 + 3 = 6$: Իհարկե, r-ը կարելի է որոշել նաև երկու կետերի միջև հեռավորության բանաձևով:

Խնդիրներ

1. Կառուցել $x^2 + 4y^2 = 16$ էլիպսը, գտնել նրա ֆոկուսները, էքսցենտրիսիտետը:

Պատ. $a = 4, b = 2, c = 2\sqrt{3}, e = \frac{\sqrt{3}}{2}$:

2. Էլիպսը, որը սիմետրիկ է կոորդինատների առանցքների նկատմամբ, անցնում է $M(2;\sqrt{3})$ և $B(0;2)$ կետերով: Գրել նրա հավասարումը և գտնել M կետից ֆոկուսների եղած հեռավորությունները:

Պատ. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1; e = \frac{\sqrt{3}}{2},; r = 4 - \sqrt{3}; r_1 = 4 + \sqrt{3}$:

3. Էլիպսը, որը սիմետրիկ է կոորդինատների առանցքների նկատմամբ, որի ֆոկուսները գտնվում են ox առանցքի վրա, անցնում է $M(-4;\sqrt{21})$ կետով և ունի $e = \frac{3}{4}$ էքսցենտրիսիտետ: Գրել էլիպսի հավասարումը և գտնել M կետի ֆոկալ շառավիղ –վեկտորները:

Պատ. $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{28} = 1; r = 11; r_1 = 5$:

4. Գրել էլիպսի պարզ հավասարումը, որի ֆոկուսներից մեկի հեռավորությունները մեծ առանցքի ծայրակետերից հավասար են 5 և 1:

Պատ. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ կամ $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$:

5. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ էլիպսի վրա գտնել կետ, որի շառավիղ-վեկտորների տարբերությունը հավասար է $6{,}4$:

Պատ. $(4;1{,}8)$, $(4;-1{,}8)$, $(-4;1{,}8)$, $(-4;-1{,}8)$:

6. Առանցքներին տարված էլիպսը անցնում է $M(1;1)$ կետով և նրա էքսցենտրիսիտետը $e = \frac{3}{5}$: Կազմել էլիպսի հավասարումը:

Պատ. $16x^2 + 25y^2 = 41$:

7. $x+5=0$ ուղղի վրա գտնել կետ, որը հավասարապես է հեռացված $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{4}=1$ էլիպսի ձախ ֆոկուսից և վերին գագաթից:

Պատ. $M(-5;7)$:

8. Օգտվելով էլիպսի սահմանումից , կազմել նրա հավասարումը, եթե հայտնի է, որ $F_1(0;0)$ և $F_2(1;1)$ կետերը հանդիսանում են էլիպսի ֆոկուսներ, իսկ մեծ առանցքի երկարությունը հավասար է 2-ի:

Պատ. $3x^2+3y^2-2xy-2x-2y-1=0$:

9. Գտնել էլիպսների կանոնական հավասարումները հետևյալ տվյալներով.

1. մեծ կիսաառանցքը հավասար է 10–ի, էքսցենտրիսիտետը հավասար է 0,8-ի:
2. փոքր կիսաառանցքը հավասար է 12 –ի, էքսցենտրիսիտետը հավասար է $\frac{5}{13}$:
3. էքսցենտրիսիտետը հավասար է 0,6, ֆոկուսների միջև հեռավորությունը՝ 6:
4. կիսաառանցքների գումարը հավասար է 18, ֆոկուսների միջև հեռավորությունը՝ 12:

Պատ. 1. $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$; 2. $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$; 3. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$; 4. $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$:

10. Գրել $\frac{x^2}{125}+\frac{y^2}{100}=1$ էլիպսի դիրեկտրիսաների հավասարումները:

Պատ. $x=25$, $x=-25$:

11. Գտնել էլիպսի հավասարումը, որի ֆոկուսների միջև եղած հեռավորությունը հավասար է 8-ի, և դիրեկտրիսաների միջև եղած հեռավորությունը՝ -24:

Պատ. $\frac{x^2}{48}+\frac{y^2}{32}=1$:

12. Կազմել շրջանագծի հավասարումը, եթե՝

ա/ նրա կենտրոնը $O(0;0)$ կետն է և շառավիղը՝ $R=3$;

բ/ նրա կենտրոնը $C(2;-3)$ կետն է և շառավիղը՝ $R=7$;

գ/ նա անցնում է կոորդինատների սկզբնակետով և նրա կենտրոնը համընկնում է $C(6;-8)$ կետի հետ;

13. Գտնել $x^2+y^2-8x+6y=0$ շրջանագծի կենտրոնի կոորդինատները և շառավիղը:

Պատ. $(4;-3)$, $R=5$:

14. Գտնել $x^2+y^2-4x=0$ շրջանագծի կենտրոնի կոորդինատները և շառավիղը:

Պատ. $(2;0)$, $R=2$:

15. Կազմել այն շրջանագծի հավասարումը, որն անցնում է կոորդինատների սկզբնակետով և որի կենտրոնը գտնվում է $(6;-8)$ կետում:

Պատ. $(x-6)^2+(y+8)^2=100$:

16. Կազմել այն շրջանագծի հավասարումը, որն անցնում է $(5;1)$ կետով և որի կենտրոնը գտնվում է $(1;-2)$ կետում:

Պատ. $(x-1)^2+(y+2)^2=25$:

17. Կազմել շրջանագծի հավասարումը, եթե նրա տրամագծերից մեկի ծայրակետերն ունեն $(3;9)$ և $(7;3)$ կոորդինատները:

Պատ. $(x-5)^2+(y-6)^2=13$:

18. Կազմել շրջանագծի հավասարումը, որն անցնում է $(9;3)$, $(-3;3)$ և $(11;1)$ կետերով:

Պատ. $(x-3)^2+(y-5)^2=100$:

19. Կազմել շրջանագծի հավասարումը, եթե նրա կենտրոնը գտնվում է $(4;7)$ կետում և շոշափվում է $3x-4y+1=0$ ուղղով:

Պատ. $(x-4)^2+(y-7)^2=9$:

20. Համոզվել, որ տրված հավասարումներով որոշվում են շրջանագծեր: Գտնել դրանց շառավիղները և կենտրոնների կոորդինատները.

1/ $x^2+y^2+x=0$, 2/ $x^2+y^2+y=0$, 3/ $x^2+y^2-2x+4y-20=0$, 4/ $x^2+y^2-6x+4y-12=0$, 5/ $x^2+y^2+4x-60=0$:

2/ $x^2+y^2-x+2y=0$, $x^2+y^2+5x+2y-1=0$:

21. Որոշել տրված էլիպսի կիսառանցքները, ֆոկուսների կոորդինատները, էքսցենտրիսիտետը և դիրեկտրիսների հավասարումները.

1/ $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$, 2/ $\frac{x^2}{4}+y^2=1$, 3/ $4x^2+9y^2=25$, 4/ $x^2+25y^2=25$, 5/ $16x^2+y^2=16$,

6/ $3x^2+y^2=1$:

22.Կազմել պարաբոլի հավասարումը, որի գագաթը գտնվում է կոորդինատների սկզբնակետում, գիտենալով, որ՝

1/ պարաբոլը դասավորված է աջ կիսահարթությունում, սիմետրիկ է ox առանցքի նկատմամբ և նրա պարամետրը՝ $p = 3$,

2/ պարաբոլը դասավորված է աջ կիսահարթությունում, սիմետրիկ է ox առանցքի նկատմամբ և նրա պարամետրը՝ $p = 0{,}5$,

3/ պարաբոլը դասավորված է վերին կիսահարթությունում, սիմետրիկ է oy առանցքի նկատմամբ և նրա պարամետրը՝ $p = \frac{1}{4}$,

4/ պարաբոլը դասավորված է ներքևի կիսահարթությունում, սիմետրիկ է oy առանցքի նկատմամբ և նրա պարամետրը՝ $p = \frac{1}{4}$:

§ 18. Անալիտիկ երկրաչափությունը տարածության մեջ: Երկու կետերի միջև եղած հեռավորությունը: Հատվածի բաժանումը տրված հարաբերությամբ

<u>**Մակերևույթի հավասարումը**</u>- Մակերևույթի հավասարում մի որոշ կոորդինատական համակարգում կոչվում է երեք փոփոխականներով

$$F(x, y, z) = 0 \qquad (*)$$

հավասարումը, որին բավարարում են միայն նրան պատկանող ցանկացած կետի կոորդինատները: Այսինքն՝ x, y, z փոփոխականների միջև տրված է հավասարում, որին բավարարում են տվյալ մակերևույթի ցանկացած կետի կոորդինատները և միայն նրանք:

(*) հավասարումն անվանում ենք մակերևույթի հավասարում, իսկ x, y, z կոորդինատները՝ ընթացիկ կետի կոորդինատներ:Սահմանումից հետևում է, որ ահրաժեշտ է լուծել հետևյալ երկու խնդիրները՝

1. Տրված է մակերևույթը՝ որպես կետերի երկրաչափական տեղ: Գտնել այդ մակերևույթի հավասարումը:

2. Տրված է հավասարում x, y, z կոորդինատների միջև: Կառուցել այդ հավասարումով որոշվող մակերևույթը:

Սկզբից հաշվենք M կետի հեռավորությունը կոորդինատների սկզբնակետից: Ինչպես դժվար չէ նկատել, նա իրենից ներկայացնում է ուղղանկյուն զուգահեռանիստի անկյունագծի երկարությունը, որի չափումներն են $|x|$, $|y|$, $|z|$ (նկար 35.):

Որոնելի հեռավորությունը եթե նշանակենք d ,ապա

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,: \qquad (1)$$

Դիցուք այժմ տրված են $M_1(x_1; y_1; z_1)$ և $M_2(x_2; y_2; z_2)$ երկու կետերը: Նրանց միջև հեռավորությունը գտնելու համար կոորդինատների սկզբնակետը տեղափոխենք $M_1(x_1; y_1; z_1)$ կետը՝ պահպանելով առանցքների ուղղությունները: Նոր համակարգի նկատմամբ M կետը կունենա $M_1(0;0;0)$ կոորդինատները:

M_2 կետի կոորդինատները, օգտվելով $x = a + x_1, y = b + y_1, z = c + z_1$ բանաձևերից, կստանանք՝ $M_2(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$, ըստ (1) բանաձևի՝

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},$$

այսինքն՝ $M_1(x_1; y_1; z_1)$ և $M_2(x_2; y_2; z_2)$ երկու կետերի հեռավորության քառակուսին հավասար է այդ կետերի համանուն կոորդինատների տարբերությունների քառակուսիների գումարին:

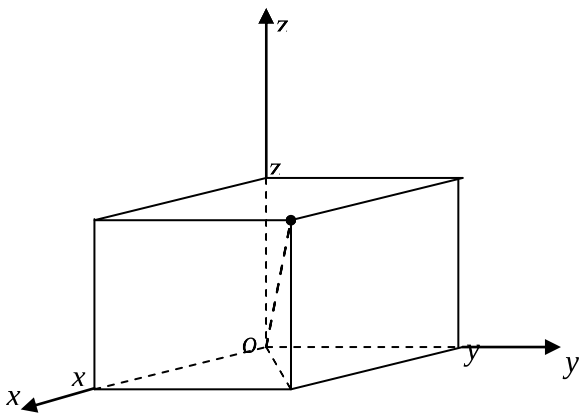
<u>Օրինակ</u>. Հաշվել $A(5,2,3)$ և $B(1,-1,3)$ կետերի հեռավորությունը:
<u>Լուծում</u>. A և B կետերի հեռավորությունը որոշվում է՝

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \text{ բանաձևով,}$$
$$AB = \sqrt{(5-1)^2 + (2+1)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5:$$

Դիցուք տրված են՝ $A(x_1; y_1; z_1)$ և $B(x_2; y_2; z_2)$ կետերը և $\lambda = \dfrac{AM}{MB}$ հարաբերությունը (որտեղ $M(x; y; z)$ մի որոշ կետ է AB հատվածի վրա): Անհրաժեշտ է գտնել M կետի x, y, z կոորդինատները: Ինչպես հարթության մեջ, նման ձևով տարածությունում՝

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda},$$

եթե ընդունենք $\lambda = 1$, կստանանք միջնակետի կոորդինատները:



Նկար 35

<u>Օրինակ.</u> Գտնել $M(x, y, z)$ կետի կոորդինատները, որը M_1M_2 հատվածը բաժանում է $M_1M : MM_2 = 2:3$: Եթե $M_1(2;4;-1)$, $M_2(1;4;-1)$, ապա՝

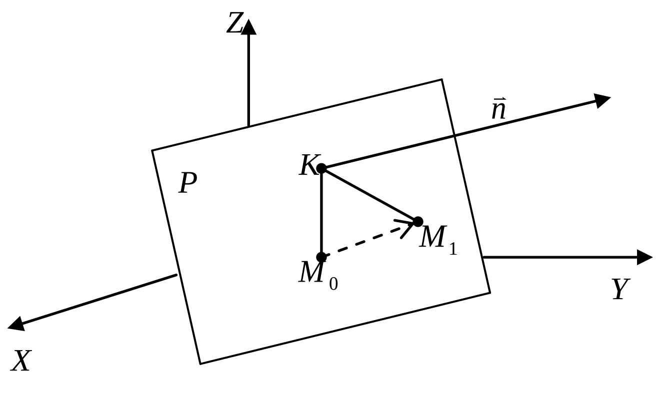
$$x=\frac{2+\frac{2}{3}\cdot 1}{1+\frac{2}{3}}=\frac{5/3}{5/3}=1,\quad y=\frac{4+\frac{2}{3}\cdot 4}{1+\frac{2}{3}}=\frac{20/3}{5/3}=\frac{20}{5}=4,$$

$$z=\frac{-1+(-1)\cdot\frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}}=\frac{-5/3}{5/3}=-1:$$

§ 19. Տրված կետով անցնող և տրված վեկտորին ուղղահայաց հարթության հավասարումը: Հարթության ընդհանուր հավասարման հետազոտումը: Հարթության հավասարումը հատվածներով

Հարթությունը տարածության մեջ կարելի է տալ տարբեր եղանակներով /երեք կետերով, մեկ կետով և այդ կետով անցնող հարթությանն ուղղահայաց վեկտորով/, կախված այն հանգամանքից, թե ինչ ձևով է տրված հարթությունը, դիտարկվում են տարբեր հավասարումներ:

Այժմ դիտարկենք հարթության հավասարումը, որն անցնում է տրված $M_0(x_0;y_0;z_0)$ կետով և ուղղահայաց է տվյալ վեկտորին(նկար 36.):



նկար 36.

Ենթադրենք տրված է $M_0(x_0;y_0;z_0)$ կետը և ոչ զրոյական $\vec{n}(A;B;C)$ վեկտորը:

Անհրաժեշտ է կազմել այն հարթության հավասարումը, որը անցնում է M_0 կետով և ուղղհայաց է $\vec{n}$ վեկտորին: ($\vec{n}$-ը կոչվում է այդ հարթության նորմալ վեկտոր):

Հարթության վրա վերցնենք կամայական M(x;y;z) կետը: Այդ դեպքում դժվար չէ նկատել, որ $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$ նույնպես կլինի հարթության վրա և ուղղահայաց է $\vec{n}$ նորմալ վեկտորին: Օգտվելով երկու վեկտորների սկալյար արտադրյալից՝ $\vec{a}\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi, \varphi=\frac{\pi}{2}$, կստանանք՝ $\vec{n}\overrightarrow{MM_0}=0$:

Ինչպես գիտենք վեկտորների սկալյար արտադրյալը կոորդինատների միջոցով արտահայտվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$\vec{a}\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2, \qquad (1)$$

օգտվելով վերջին բանաձևից՝ կստանանք որոնելի հավասարումը՝

$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ կամ $Ax-Ax_0+By-By_0+Cz-Cz_0=0$,

նշանակելով $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$, հարթության հավասարումը տարածության մեջ կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$Ax+By+Cz+D=0: \qquad (2)$$

Անհրաժեշտ է նշել, որ վերջին հավասարություններից մեջ x, y, z անհայտների գործակիցները հանդիսանում են $\vec{n}$ նորմալ վեկտորի կոորդինատները:

Այսպիսով, մենք ցույց տվեցինք, որ ցանկացած հարթություն R^3 տարածության մեջ ունի (2) հավասարման տեսքը, որտեղ A, B, C-ն միաժամանակ չեն կարող 0 լինել ($A^2+B^2+C^2\neq 0$), քանի որ $\vec{n}$-ը չի հանդիսանում զրոյական վեկտոր:

Այժմ ցույց տանք, որ ցանկացած հավասարում, որն ունի (2) հավասարման տեսքը, $A^2+B^2+C^2\neq 0$ պայմանի դեպքում հանդիսանում է հարթության հավասարում: Գտնենք (x_0,y_0,z_0) կետը, որը բավարարում է (2) հավասարմանը: Եթե $A\neq 0$ վերցնենք կամայական y_0 և z_0 և որոշենք x_0-ն $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$ հավասարումից՝

$$x_0=-\frac{By_0+Cz_0+D}{A}:$$

Այդ դեպքում տեղի կունենա՝

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$$

հավասարությունը:

(2)-ից հանելով վերջինը՝ կստանանք՝

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0, \qquad (3)$$

այսինքն՝ $(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$ վեկտորի և $(A;B;C)$ վեկտորի սկալյար արտադրյալը հավասար է 0-ի:

Եվ հետևաբար, $\vec{n}\,(A;B;C)$ վեկտորն ուղղահայաց է յուրաքանչյուր $\overrightarrow{MN}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$ վեկտորին, որը նշանակում է, որ $\vec{n}$ վեկտորը և $M_0(x_0;y_0;z_0)$ կետը որոշում են հարթություն:

(2) հավասարումը կոչվում է հարթության ընդհանուր հավասարում:

<u>Օրինակ</u>. Գտնել այն հարթության հավասարումը, որը անցնում է $M(2,1,-1)$ կետով և ուղղահայաց է $\{-1,3,2\}$ վեկտորին:

Լուծում. Օգտվելով $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ հավասարումից, որտեղ $x_0=2, y_0=1, z_0=-1$, իսկ $A=-1$, $B=3$, $C=2$, ապա ստացված արժեքները տեղադրելով հարթության հավասարման մեջ, կստանանք՝ $-1(x-2)+3(y-1)+2(z+1)=0$, $-x+3y+2z+1=0$:

Ինչպես տեսանք, առաջին աստիճանի

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (2)$$

հավասարումից դեկարտյան կոորդինատական համակարգում, որտեղ $A^2+B^2+C^2\neq 0$, որոշվում է հարթության հավասարումը տարածության մեջ:

Այժմ դիտարկենք այդ հավասարման մասնավոր դեպքեր, երբ մեկ կամ մի քանի գործակիցներ հավասարվում են զրոյի:

1) $D=0$, ապա (2) հավասարումն ընդունում է

$$Ax+By+Cz=0 \qquad (2')$$

տեսքը:

(2’) հավասարումով որոշվում է մի հարթություն, որն անցնում է կոորդինատների սկզբնակետով, քանի որ $x=0$, $y=0$, $z=0$ արժեքները բավարարում են այդ հավասարմանը:

2) $C=0$, (2) հավասարումը կունենա $Ax+By+D=0$, $\vec{n}\,(A;B;0)$ տեսքը, որն ուղղահայաց է oz առանցքին և, հետևաբար, տրված հարթությունը զուգահեռ է oz առանցքին:

3) $C=0$, $D=0$, կլինի $\mathrm{Ax}+\mathrm{By}=0$ մի հարթություն է, որն անցնում է oz առանցքով, որը հետևում է նախորդ 2 դեպքերից:

4) $B=0$, $C=0$, $Ax+D=0$, $x=a$ $(x=-\dfrac{D}{A})$, որն իրենից ներկայացնում է հարթություն, որը զուգահեռ է oyz հարթությանը, քանի որ $\vec{n}\,(A;0;0)$, որն ուղղահայաց է oy և oz առանցքներին :

Ընդհանրապես, եթե հարթության հավասարման մեջ բացակայում է z, y, x կոորդինատը, այդ նշանակում է տվյալ հարթությունը զուգահեռ է համապատասխանաբար oz, oy, ox առանցքին:

Դիտարկենք մի հարթություն, որը հատում է երեք կոորդինատական առանցքները և սկզբնակետով չի անցնում:

Դիցուք այդ հարթության հավասարումը տրված է

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (2)$$

տեսքով, որտեղ A, B, C, D գործակիցներից ոչ մեկը զրո չէ:

Կոորդինատական առանցքներից այդ հարթության կտրած հատվածների մեծությունները նշանակենք a, b, c: Քանի որ $P(a,0,0)$, $Q(0,b,0)$, $R(0,0,c)$ գտնվում են հարթության վրա, ուստի այդ կետի կոորդինատները պետք է բավարարեն (2) հավասարմանը, որտեղից կստանանք՝

$$Aa+D=0, \quad Bb+D=0, \quad Cc+D=0,$$

$$A=-\frac{D}{a}, B=-\frac{D}{b}, C=-\frac{D}{c}:$$

A, B, C գործակիցների այս արժեքները տեղադրելով հարթության մեջ՝ կստանանք՝ $-\frac{D}{a}x-\frac{D}{b}y-\frac{D}{c}z+D=0$, բաժանելով D-ի վրա կստանանք՝

$$-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}-\frac{z}{c}+1=0,$$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,$$

որը հանդիսանում է հարթության հավասարումը հատվածներով:

<u>Օրինակ</u>. Գտնել $2x-3y+8z-4=0$ հարթության կոորդինատական առանցքներից անջատած հատվածների մեծությունները:

<u>Լուծում</u>. Հարթության հավասարումը գրենք $2x-3y+8z=4$ տեսքով և երկու մասերը բաժանենք 4-վրա, կստանանք $\frac{x}{2}-\frac{3}{4}y+z=1$ կամ $\frac{x}{2}-\frac{y}{4/3}+\frac{z}{\frac{1}{2}}=1$, որտեղ $a=2$, $b=-\frac{4}{3}$

$c=\frac{1}{2}$:

Խնդիրներ

1. Գտնել հետևյալ կետերի միջև եղած հեռավորությունը.

1) A(2;0;-1) և B(-2;-5;3)
2) A(3;2;1) և B(4;-1;-2)

Պատ. 1) $\sqrt{57}$, 2) $\sqrt{19}$:

2. Աբսցիսների առանցքի վրա գտնել այն կետը, որը հավասարապես է հեռացված A(2;2;3) և B(-3;5;1) կետերից:

Պատ. $M(-1{,}8;0;0)$:

3. xoy հարթության վրա գտնել այն կետը, որը հավասարապես է հեռացված A(-2;1;3), B(0;-1;-2) և C(3;1;4) կետերից:

Պատ. $(1{,}2\,;3{,}45\,;0)$:

4. oz առանցքի վրա գտնել այն կետը, որը հավասարապես է հեռացված A(4;-1;2) և B(0;2;-1) կետերից:

Պատ. $M\left(0;0;\frac{8}{3}\right)$:

5. Տրված են AB հատվածը երեք հավասար մասերի բաժանող կետերի

կոորդինատները՝ $C(3;-2;-1)$ և $D(1;1;6)$: Գտնել A և B կետերի կոորդինատները:

Պատ. $A(5;-5;-8)$, $B(-1;4;13)$:

6. Ինչ հարաբերությամբ է բաժանում $M(1;2;0)$ կետը $A(-1;0;0)$ և $B(4;5;0)$ ծայրակետերով հատվածը:

Պատ. $\lambda=\frac{2}{3}$ կամ $AM:MB=2:3$:

7. Գտնել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է $A(-1;6;3), B(3;-2;5)$ և $C(10;4;1)$ կետերով:

Պատ. $2x+3y+8z-40=0$:

8. Գրել $M(-1;2;3)$ կետով անցնող և $\overrightarrow{OM}$ վեկտորին ուղղահայաց հարթության հավասարումը:

Պատ. $x-2y-3z+14=0$:

9. Տրված են $M_1(0;-1;3)$ և $M_2(1;3;5)$ կետերը: Գրել հարթության հավասարումը, որն անցնում է M_1 կետով և ուղղահայաց է $N=\overrightarrow{M_1M_2}$ վեկտորին:

Պատ. $x+4y-2z=2$:

10. Գրել կետերի երկրաչափական տեղի հավասարումը, որոնք հավասարապես են հեռացված $A(a;-a/2;a)$ և $B(0;a/2;0)$ կետերից:

Պատ. $x-y+z=a$

11. Գրել հարթության հավասարումը, որը զուգահեռ է ox առանցքին և անցնում է $M_1(0;1;3)$ և $M_2(2;4;5)$ կետերով:

Պատ. $2y-3z+7=0$:

12. Գրել հարթության հավասարումը, որն անցնում է oz առանցքով և $M_1(2;-4;3)$ կետով:

Պատ. $2x+y=0$:

13. Գրել հարթության հավասարումը, որը զուգահեռ է oz առանցքին և անցնում է $M_1(2;2;0)$ և $M_2(4;0;0)$ կետերով:

Պատ. $x+y=4$:

14. Կազմել հարթության հավասարումը, որն անցնում է $M(2;3;5)$ կետով և ուղղահայաց է $N=4i+3j+2k$ վեկտորին:

Պատ. $4x+3y+2z-27=0$:

15. Գտնել հարթության հավասարումը, որն անցնում է կոորդինատների սկզբնակետով և $P(4;-2;1)$ և $Q(2;4;-3)$ կետերով:

Պատ. $x+7y+10z=0$:

16. Գտնել հարթության հավասարումը, որն անցնում է $2x+2y+z-7=0$, $2x-y+3z-3=0$, $4x+5y-2z-12=0$ հարթությունների հատման կետով և $M(0;3;0)$ և $N(1;1;1)$ կետերով:

Պատ. $x-z=0$:

17. Կազմել հարթության հավասարումը, որն ուղղահայաց է $\vec{n}=\{2;-1;4\}$ վեկտորին և անցնում է $M_0(5;2;-3)$ կետով: Պատկանու՞մ են արդյոք այդ հարթությանը $P(1;2;-1), Q(4;5;1)$ և $R(-6;2;-3)$ կետերը:

Պատ. $2x-y+4z+4=0$, P-ն պատկանում է տրված հարթությանը, իսկ Q-ն և R-ը չեն պատկանում:

18. Կազմել հարթությունների հավասարումներն ըստ հետևյալ տվյալների`

1)Յարթությունն ուղղահայաց է oz առանցքին և անցնում է $P(1;-2;3)$ կետով:
2) Յարթությունն անցնում է oy առանցքով և $Q(4;2;-5)$ կետով:
3)Յարթությունը զուգահեռ է ox առանցքին և անցնում է $R(1;1;2)$ և $S(5;3;-2)$ կետերով:

Պատ. 1) $z=3$; 2) $5x+4z=0$; 3) $2y+z-4=0$:

19. Կազմել հարթության հավասարումը, որն անցնում է $M(2;-1;-4)$ կետով և ուղղահայաց է $\vec{n}=\{3;-6;1\}$ վեկտորին, վեկտորական և կոորդինատային ձևերով:

Պատ. $\vec{n}\vec{r}-8=0$; $3x-6y+z-8=0$:

20. Գրել հարթության հավասարումը հետևյալ դեպքերում`
1)Յարթությունն ուղղահայաց է ox առանցքին և անցնում է $P(4;-7;6)$ կետով:
2)Յարթությունը զուգահեռ է oy առանցքին և անցնում է $Q(1;2;-1), R(2;-3;-4)$ կետերով:
3)Յարթությունն անցնում է $S(6;-7;5)$ կետով և OZ առանցքով:

Պատ . 1) $x-4=0$
2) $3x+z-2=0$
3) $7x+6y=0$:

21. Գրել հարթության հավասարումը, որն անցնում է հետևյալ երեք կետերով` $L(-2;4;1)$, $M(0;2;-1)$, $N(2;0;-1)$:

Պատ. $x+y-2=0$:

22. Գտնել հարթության հավասարումը, որի կետերը հավասարապես են հեռացված

P(1;-4;2) և Q(7;1;-5) կետերից:

Պատ. $6x + 5y - 7z - 27 = 0$:

23. Գտնել $4x - 2y + 5z - 12 = 0$ հարթությանը $M_0(2;3;-5)$ կետից իջեցված ուղղահայացի երկարությունը:

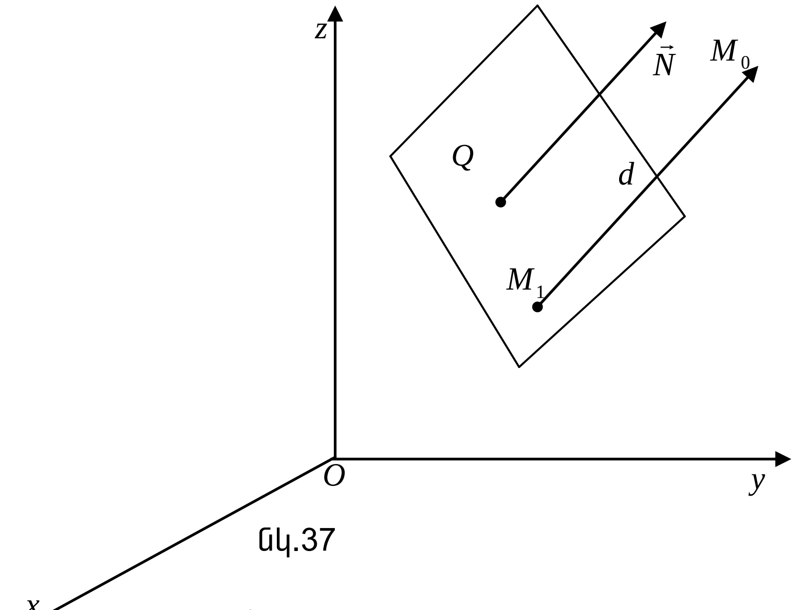
Պատ. $d = \frac{7\sqrt{5}}{3}$:

§ 20. Կետի հեռավորությունը հարթությունից: Հարթության նորմալ հավասարումը

Դիտարկենք $M_0(x_0, y_0, z_0)$ կետը և Q հարթությունը, որի հավասարումն է`

$$Ax + By + Cz + D = 0:$$

Գտնենք M_0 կետի d հեռավորությունը Q հարթությունից(նկար 37):



նկ.37

M_0 կետից Q հարթությանը տարված ուղղահայացի հիմքը նշանակենք $M_1(x_1, y_1, z_1)$: Ունենք $d = \left|\overline{M_1M_0}\right|$, իսկ $\overrightarrow{M_1M_0} = \{x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1\}$: Քանի որ $\overrightarrow{M_1M_0}$ և $\vec{N}$ վեկտորները համագիծ են, ուստի նրանց կազմած φ անկյունը հավասար է 0 կամ π, հետևաբար, $\cos\varphi = \pm 1$:

Մի կողմից` $\vec{N} \cdot \overrightarrow{M_1M_0} = \left|\vec{N}\right|\left|\overline{M_1M_0}\right| \cdot \cos\varphi = \pm d \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \quad \left(\vec{N} = \{A; B; C\}\right)$:

Մյուս կողմից`

$$\vec{N} \cdot \overrightarrow{M_1M_0} = A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1) =$$
$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 - (Ax_1 + By_1 + Cz_1) = Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D, \quad -(Ax_1 + By_1 + Cz_1) = D,$$

(քանի որ M_1 կետը պատկանում է Q հարթությանը):

Համեմատելով վերջին երկու հավասարությունները՝ կունենանք՝

$$\pm d\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}=Ax_0+By_0+Cz_0+D,$$ որտեղից՝

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}:$$

Օրինակ 1. Գտնել $M_0(2;-1;3)$ կետի d հեռավորությունը $2x-y+2z-5=0$ հարթությունից:
Լուծում. Ըստ վերջին բանաձևի՝ կունենանք՝

$$d=\frac{|2\cdot 2-1\cdot(-1)+2\cdot 3-5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=\frac{6}{3}=2:$$

Օրինակ 2. Ապացուցել, որ $M(5;1;0)$ կետը գտնվում է $2x-y+2z-9=0$ հարթության վրա:
Լուծում. Օգտվենք կետի հեռավորության բանաձևից՝

$$d=\frac{|2\cdot 5-1+2\cdot 0-9|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=\frac{0}{3}=0:$$

Հետևաբար, M կետը գտնվում է տրված հարթության վրա:

Եթե հարթության ընդհանուր հավասարման երկու կողմը բազմապատկենք $\mu=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ թվով (որը կանվանենք նորմավորող բազմապատկիչ), ընդ որում նշանը կընտրենք այնպես, որ $\mu\cdot D<0$, ապա կստանանք՝

$$x\cdot\cos\alpha+y\cdot\cos\beta+z\cdot\cos\gamma-p=0:$$

Այս հավասարումը կանվանենք հարթության նորմալ հավասարում: Այստեղ p-ն սկզբնակետից հարթությանը իջեցրած ուղղահայացի երկարությունն է, իսկ α,β,γ անկյուններն այդ ուղղահայացի ուղղորդ կոսինուսներն են՝

$$\cos\alpha=\pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\ \cos\beta=\pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\ \cos\gamma=\pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

որտեղից հետևում է հետևյալ նույնությունը՝

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1:$$

Օրինակ3. Տրված է $10x-2y-11z+45=0$ հարթության հավասարումը: Կազմել հարթության նորմալ հավասարումը, գտնել ուղղորդ կոսինուսները և սկզբնակետից իջեցրած ուղղահայացի երկարությունը:

Լուծում. Հարթության հավասարումը նորմալ տեսքի բերելու համար գտնենք նորմավորող բազմապատկիչը, որտեղ $A=10$, $B=-2$, $C=-11$, $D=45$: Քանի որ $D>0$, ապա $\mu=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ բանաձևի մեջ նշանը պետք է վերցնել բացասական՝

$$\mu=-\frac{1}{\sqrt{10^2+(-2)^2+(-11)^2}}=-\frac{1}{15}:$$

Հարթության հավասարումը բազմապատկենք նորմավորող μ բազմապատկիչով, կստանանք հարթության նորմալ հավասարումը՝

$$-\frac{10}{15}x+\frac{2}{15}y+\frac{11}{15}z-\frac{45}{15}=0$$

$$-\frac{2}{3}x+\frac{2}{15}y+\frac{11}{15}z-3=0:$$

Համեմատելով վերջին հավասարումը հարթության նորմալ հավասարման հետ, կստանանք՝

$$\cos\alpha=-\frac{2}{3},\ \cos\beta=\frac{2}{15},\ \cos\gamma=\frac{11}{15},\ p=3:$$

§ 21. Երկու հարթությունների փոխադարձ դիրքը: Երկու հարթությունների զուգահեռության և ուղղահայացության պայմանները

Դիցուք տրված են

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_2=0$$
$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

հարթությունները: Երկու հարթություններով կազմած անկյուն ասելով մենք հասկանում ենք այդ հարթություններով կազմված երկու հարևան երկնիստ անկյուններից ցանկացածը:

Երկու հարթությունների կազմած անկյունը հավասար է նրանց $\vec{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$ և $\vec{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$ նորմալ վեկտորներով կազմած φ անկյանը:

Օգտվելով երկու վեկտորների սկալյար արտադրյալի բանաձևից՝ կստանանք՝

$$\cos\varphi=\frac{\vec{n}_1\vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}: \quad (1)$$

Օրինակ. Գտնել $x+2y-3z+4=0$ և $2x+3y+z+8=0$ հարթությունների կազմած անկյունը:

Լուծում. Օգտվելով (1) բանաձևից՝ կստանանք՝

$$\cos\varphi = \frac{1\cdot 2 + 2\cdot 3 + (-3)\cdot 1}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2}\sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{5}{14},$$

$$\varphi = \arccos\frac{5}{14} \approx 69^0 05' :$$

Այսպիսով, երկնիստ անկյուններից մեկը հավասար է $\arccos\frac{5}{14}$:

Եթե երկու հարթություններ ուղղահայաց են, ապա նրանցով կազմված անկյունը հավասար է 90^0, հետևաբար cos 90^0 =0: Ըստ այս պայմանի` (1) բանաձևից կստանանք`

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0, \qquad (ա)$$

որը և կհանդիսանա երկու հարթությունների ուղղահայացության պայմանը:

Այսպիսով, երկու վեկտորներ ուղղահայաց են մեկը մյուսին այն և միայն այն ժամանակ, երբ նույնանուն կոորդինատների արտադրյալների գումարը հավասար է 0-ի:

Օրինակ. Կազմել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է $M_1(-2;3;6)$ կետով և ուղղահայաց է $2x+3y-2z-4=0$ և $3x+5y+z=0$ հարթություններին:

Լուծում. Գրենք հարթության հավասարումը, որն անցնում է M_1 կետով`

$$A(x+2)+B(y-3)+C(z-6)=0: \qquad (*)$$

Օգտվելով երկու հարթությունների ուղղահայացության պայմանից, գտնենք A, B, C գործակիցները:

Քանի որ որոնելի ուղիղը ուղղահայաց է $2x+3y-2z-4=0$ հարթությանը, ապա

$$\begin{cases} 2A+3B-2C=0 \\ 3A+5B+C=0 \end{cases}:$$

Քանի որ համակարգն ունի անթիվ բազմությամբ լուծումներ, ապա անհայտներից մեկին տալով կամայական (հարմար) արժեք` $B=1$, կստացվի`

$$\begin{cases} 2A-2C=-3 \\ 3A+C=-5 \end{cases} \begin{vmatrix} \\ 2 \end{vmatrix}$$

$$8A=-13$$

$$A=-\frac{13}{8}$$

$$C=-\frac{1}{8}:$$

Տեղադրելով ստացված արժեքները (*) հավասարման մեջ` կստանանք`

$$-\frac{13}{8}(x+2)+y-3-\frac{1}{8}(z-6)=0$$

$$-13x-26+8y-24-z+6=0$$

$$13x-8y+z+44=0,$$

որը և կլինի որոնելի հարթության հավասարումը:

Եթե հարթությունները II են, ապա $\vec{n}_1$ և $\vec{n}_2$ վեկտորները կոլենեար են, որը վեկտորական տեսքով կարելի է գրել $\vec{n}_1 = \lambda\vec{n}_2$, որտեղ $\vec{n}_1$ և $\vec{n}_2$ տվյալ հարթություններին ուղղահայաց վեկտորներ են: Անցնելով նրանց պրոյեկցիաներին՝ կստանանք՝

$$A_1 = \lambda A_2, B_1 = \lambda B_2, C_1 = \lambda C_2$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}: \qquad (բ)$$

Այսպիսով, երկու հարթություններ միմյանց զուգահեռ են այն և միայն այն ժամանակ, եթե նրանց համապատասխան գործակիցները համեմատական են:

Օրինակ. m-ի և l-ի ո՞ր արժեքների դեպքում $2x - 3y + lz - 4 = 0$ և $mx + 5y + 2z + 1 = 0$ հարթությունները կլինեն զուգահեռ:
Լուծում. Օգտվելով զուգահեռության (բ) պայմանից՝ կունենանք՝

$$\frac{2}{m} = \frac{-3}{5} = \frac{l}{2},$$

$$m = -\frac{10}{5},\ l = -\frac{6}{5}:$$

Խնդիրներ

1. Գրել հարթության հավասարումը, որն անցնում է $M(2;-1;3)$կետով և կոորդինատների առանցքներից անջատում է հավասար հատվածներ:

Պատ. $x + y + z = 4$:

2. Գրել հարթության հավասարումը, որն անցնում է $M_1(-4;0;4)$ կետով և ox և oy առանցքներից անջատում է $a = 4$ և $b = 3$ հատվածներ:

Պատ. $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1$:

3. Գրել հարթության հավասարումը, որն անցնում է $(-1;-1;2)$ կետով և ուղղահայաց է $x + 2y - 2z + 4 = 0$ հարթությանը:

Պատ. $2x+3y+4z=3$:

4. oz առանցքով տանել հարթություն, որը $2x+y-\sqrt{5}z=0$ հարթության հետ կազմում է 60^0-ի անկյուն:

Պատ. $3x-y=0, \quad x+3y=0$:

5. Գտնել $(5;1;-1)$ կետի հեռավորությունը $x-2y-2z+4=0$ հարթությունից:

Պատ. 3:

6. Գտնել $4x+3y-5z-8=0$ և $4x+3y-5z+12=0$ զուգահեռ հարթությունների միջև եղած հեռավորությունը:

Ցուցում. Վերցնել I հարթության վրա կամայական կետ, օրինակ $(2;0;0)$, և գտնել կետի հեռավորությունը մյուս հարթությունից:

Պատ. $2\sqrt{2}$:

7. Գրել հարթությունների հավասարումները, որոնք զուգահեռ են $x-2y+2z-5=0$ հարթությանը և նրանից հեռացված են 2 միավոր հեռավորությամբ:

Պատ. $x-2y+2z=11, \quad x-2y+2z=-1$:

8. Գտնել $2x-y+3z-9=0, x+2y+2z-3=0$ և $3x+y-4z+6=0$ հարթությունների հատման կետը:

Պատ. $(1;-1;2)$:

9. Գրել հարթության հավասարումը, որն անցնում է $(0;-5;0)$ և $(0;0;2)$ կետերով և ուղղահայաց է $x+5y+2z-10=0$ հարթությանը:

Պատ. $2y-5z+10=0$:

10. Գրել հարթության հավասարումը, որն անցնում է ox առանցքով և $x=y$ հարթության հետ կազմում է 60^0-ի անկյուն:

Պատ. $y=\pm z$:

11. $2x+3y-6z+21=0$ հարթության հավասարումը բերել նորմալ տեսքի:

Պատ. $-\frac{2}{7}x-\frac{3}{7}y+\frac{6}{7}z-3=0$:

12. Գտնել $M_0(3;5;-8)$ կետի հեռավորությունը $6x-3y+2z-28=0$ հարթությունից:

Պատ. $d=\frac{41}{7}$:

13. Գտնել հարթության հավասարումը, որն անցնում է $M(2;3;-1)$ կետով և զուգահեռ է

$5x-3y+2z-10=0$ հարթությանը:

Պատ. $5x-3y+2z+1=0$:

14. Կազմել հարթության հավասարումը, որն անցնում է $A(5;4;3)$ կետով և կոորդինատների առանցքներից անջատում է հավասար հատվածներ:

Պատ. $x+y+z-12=0$:

15. Գտնել $M_0(1;3;-2)$ կետի հեռավորությունը $2x-3y-4z+12=0$ հարթությունից:

Պատ. $d=\frac{13}{\sqrt{29}}$:

16. Գտնել հարթության հավասարումը, որն անցնում է $P(2;0;-1)$ և $Q(1;-1;3)$ կետերով և ուղղահայաց է $3x+2y-z+5=0$ հարթությանը:

Պատ. $7x-11y-z-15=0$:

17. $2x-5y+2z+5=0$ հարթության վրա գտնել M կետն այնպես, որ OM ուղիղը կոորդինատների առանցքների հետ կազմի հավասար անկյուններ:

Պատ. $M(5;5;5)$:

18. Գտնել հարթությունների հավասարումները, որոնք անցնում են կոորդինատների առանցքով, որն ուղղահայաց է $3x-4y+5z-12=0$ հարթությանը:

Պատ. $5y+4z=0;\ 5x-3z=0;\ 4x+3y=0$:

19. Գտնել հարթության հավասարումը, որն անցնում է $P(0;2;0)$ և $Q(2;0;0)$ կետերով և $x=0$ հարթության հետ կազմում է 60^0 անկյուն:

Պատ. $x/2+y/2+z/(\pm\sqrt{2})=1$:

20. Կազմել հարթության հավասարումը, որն անցնում է $x+5y+9z-13=0, 3x-y-5z+1=0$ հարթությունների հատման գծով և $M(0;2;1)$ կետով:

Պատ. $x+y+z-3=0$:

21. Կազմել հարթության հավասարումը, որն անցնում է $x+2y+3z-5=0$ և $3x-2y-z+1=0$ հարթությունների հատման գծով և ox ու oz առանցքներից անջատում է հավասար հատվածներ:

Պատ. $5x+2y+5z-9=0$:

22. Կազմել հարթության հավասարումը, որն անցնում է $(1+\sqrt{2})x+2y+2z-4=0$,

$x+y+z+1=0$ հարթությունների հատման գծով և xoy հարթության հետ կազմում է 60^0-ի անկյուն:

Պատ. $\sqrt{2}x+y+z-5=0$:

23. Կազմել հարթության հավասարումը, որն անցնում է $M(0;2;1)$ կետով և զուգահեռ է $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ և $\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ վեկտորներին:

Պատ. $x-y+2=0$:

24. Ինչպիսի՞ անկյուն է կազմում $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$ վեկտորը $x+y+2z-4=0$ հարթության հետ:

Պատ. $\arcsin(5/6)$:

25.Գտնել $10x-2y-11z+45=0$ հարթության վրա կոորդինատների սկզբնակետից իջեցված ուղղահայացի ուղղորդ կոսինուսները և երկարությունը:

Պատ. $\cos\alpha=-\frac{2}{3}; \cos\beta=\frac{2}{15};$

$\cos\gamma=\frac{11}{15}; \quad P=3$:

26. ox առանցքի վրա գտնել կետ, որը հավասարապես է հեռացված $A(9;-2;2)$ կետից և $3x-6y+2z-3=0$ հարթությունից:

Պատ. $M_1(8;0;0)$ և $M_2(13,6;0;0)$:

27. Գտնել $2x-3y-6z-14=0$ հարթության վրա կոորդինատների սկզբնակետից իջեցված ուղղահայացի երկարությունը և ուղղորդ կոսինուսները:

Պատ. $\cos\alpha=\frac{2}{7}; \cos\beta=-\frac{3}{7}; \quad \cos\gamma=-\frac{6}{7}; \quad P=2$:

28. Որոշել $P(4;3;-2), Q(0;6;0)$ և $R(15;0;0)$ կետերի հեռավորությունները $2x+10y-11z-15=0$ հարթությունից:

Պատ. $d_1=3; d_2=3; d_3=1$:

29. oy առանցքի վրա գտնել կետ, որը հավասարապես է հեռացված երկու հարթություններից՝

$x+y-z+1=0, \; x-y+z-5=0$:

Պատ. $M(0;-3;0)$

30. Գրել հարթության հավասարումը, որն անցնում է $P(5;2;0)$ կետով, $Q(0;6;0)$ կետից հեռացված է 1 միավորով և $R(0;5;4)$ կետից 3 միավորով:

Պատ. $x+2y+2z-9=0; y-2=0$:

31. Գտնել երկու հարթությունների կազմած անկյունը:

1) $4x-10y+z-3=0; \quad -11x+8y+7z+5=0;$
2) $2x+6y+5z-9=0; \quad 4x-3y+2z+7=0;$
3) $x+2y-3z-6=0; \quad 3x+6y-9z-2=0;$
4) $2x-3y+6z+8=0; \quad x+2y+2z-4=0$:

Պատ. $\varphi_1=135^0; \quad \varphi_2=90^0; \quad \varphi_3=0^0; \quad \varphi_4=78^0 28'$:

32. Կազմել հարթության հավասարումը, որն անցնում է $K(1;5;2)$ կետով և զուգահեռ է $L(4;-3;1)$, $M(3;4;0)$, $N(-1;-1;5)$ կետերով անցնող հարթությանը:

Պատ. $10x+3y+11z-47=0$:

33. Կազմել հարթության հավասարումը, որն անցնում է $P(1;-1;2)$; $Q(3;1;2)$ կետերով և ուղղահայաց է $4x-5y+3z-2=0$ հարթությանը:

Պատ. $7x+11y+9z-14=0$:

34.Գրել հարթության հավասարումը, որն անցնում է $P(2;1;-3)$ կետով և ուղղահայաց է $2x-3y+z-5=0$, $x+4y-2z+3=0$ հարթություններին:

Պատ. $2x+5y+11z+24=0$:

35. Գրել հարթության հավասարումը, որը զուգահեռ է $x-2y+2z-7=0$ հարթությանը և $P(4;1;-3)$ կետից գտնվում է $d=2$ հեռավորության վրա:

Պատ. $x-2y+2z+10=0$; $x-2y+2z-2=0$:

36. m-ի ո՞ր արժեքների դեպքում $2x+my-3z-1=0$ և $5x+y+3z+1=0$ հարթությունները կլինեն ուղղահայաց:

Պատ. $m=-1$:

37. Կազմել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է ox առանցքով և ուղղահայաց է $3x-4y+5z-12=0$ հարթությանը:

Պատ. $5y+4z=0$:

38. Կազմել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է oy առանցքով և ուղղահայաց է $x+2y-3z+6=0$ հարթությանը:

Պատ. $3x+z=0$:

39. Կազմել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է oz առանցքով և ուղղահայաց է $2x+3y-2z-7=0$ հարթությանը:

Պատ. $3x - 2y = 0$:

40. Կազմել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է $A(7;2;-3)$ և $B(5;6;-4)$ կետերով և զուգահեռ է ox առանցքին:

Պատ. $y + 4z + 10 = 0$:

41. Կազմել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է $A(2;-1;1)$ և $B(3;1;2)$ կետերով և զուգահեռ է oy առանցքին:

Պատ. $x - z - 1 = 0$:

42. Կազմել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է $A(3;-2;5)$ և $B(2;3;1)$ կետերով և զուգահեռ է oz առանցքին:

Պատ. $5x + y - 13 = 0$:

43. Կազմել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է $A(3;-2;5)$ և $B(2;3;1)$ կետերով և ուղղահայաց է $x + y + 2z - 3 = 0$ հարթությանը:

Պատ. $11x - 7y - 2z - 21 = 0$:

44. Կազմել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է $M_1(1;-1;-2)$ և $M_2(3;1;1)$ կետերով և ուղղահայաց է $x - 2y + 3z - 5 = 0$ հարթությանը:

Պատ. $4x - y - 2z - 9 = 0$:

45. Կազմել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է կոորդինատների սկզբնակետով և $P(4;-2;1)$ և $Q(2;4;-3)$ կետերով:

Պատ. $x + 7y + 10z = 0$:

46. Կազմել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է $M(2;-1;1)$ կետով և ուղղահայաց է $2x - z + 1 = 0$ և $y = 0$ հարթություններին:

Պատ. $x + 2z - 4 = 0$:

47. Կազմել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է $M(3;-1;-5)$ կետով և ուղղահայաց է $3x - 2y + 2z + 7 = 0$ և $5x - 4y + 3z + 1 = 0$ հարթություններին:

Պատ. $2x + y - 2z - 15 = 0$:

48. Կազմել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է $P(2;0;-1)$ և $Q(1;-1;3)$
կետերով և ուղղահայաց է $3x+2y-z+5=0$ հարթությանը:

Պատ. $7x-11y-z-15=0$:

49. Կազմել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է կոորդինատների սկզբնակետով և ուղղահայաց է $2x-y+3z-1=0$ և $x+2y+z=0$ հարթություններին:

Պատ. $7x-y-5z=0$:

50. Կազմել այն հարթության հավասարումը, որը ox և oy առանցքներից կտրում է համապատասխանաբար $a=3, b=-2$ հատվածներ և զուգահեռ է $\vec{a}=\{2;1;-1\}$ վեկտորին:

Պատ. $2x-3y+z-6=0$:

51. Կազմել այն հարթության հավասարումը, որը ox և oy առանցքներից կտրում է համապատասխանաբար $a=-2, b=\frac{2}{3}$ հատվածներ և ուղղահայաց է $2x-2y+4z-5=0$ հարթությանը:

Պատ. $x-3y-2z+2=0$:

52. Կազմել այն հարթության հավասարումը, որը oz առանցքից կտրում է $c=-5$ հատված և ուղղահայաց է $\vec{N}=\{-2;1;3\}$ վեկտորին:

Պատ. $2x-y-3z-15=0$:

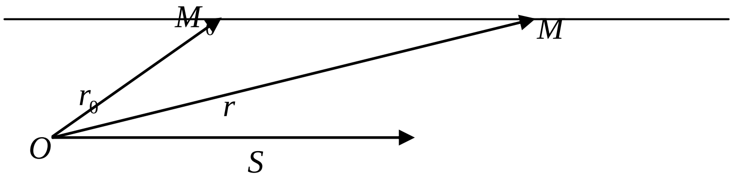
53. Կազմել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է $M(0;2;1)$ կետով և զուգահեռ է $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ և $\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ վեկտորներին:

Պատ. $x-y+2=0$:

§ 22. Ուղիղ գծի հավասարումները տարածության մեջ: Ուղղի պարամետրական հավասարումը: Ուղղի կանոնական հավասարումը: Երկու կետով անցնող ուղղի հավասարումը

Ուղիղ գծի դիրքը տարածության մեջ լիովին կորոշվի, եթե տրված լինի մի M_0 կետ ուղղի վրա, իր r_0 շառավիղ վեկտորի միջոցով և մի $\vec{S}$ վեկտոր, որին ուղիղը զուգահեռ է: Այդ $\vec{S}$ վեկտորը կանվանենք ուղղի ուղղորդ վեկտոր:

Ուղիղ գծի M փոփոխական կետին համապատասխանում է նրա $\overrightarrow{DM} = \vec{r}$ փոփոխական շառավիղ վեկտորը: Գծագրից երևում է, որ $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + \overrightarrow{M_0M}$ (նկար 38.):



Նկար 38.

Քանի որ $\overrightarrow{MM_0}$ զուգահեռ է $\vec{S}$ վեկտորին, մենք այն կարտահայտենք հետևյալ տեսքով՝

$$\overline{M_0M} = \vec{S}t$$

$$\vec{r} = \overline{r_0} + \vec{S}t,$$

(1)

որտեղ t-ն փոփոխական պարամետրի դեր է կատարում: (1) հավասարումը կանվանենք ուղիղ գծի վեկտորական հավասարում:

(1) վեկտորական հավասարումը փոխարինենք իրեն համարժեք կոորդինատային հավասարումով:

Դժվար չէ նկատել, որ

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = (x, y, z), \vec{r}_0 = \overrightarrow{OM_0} = (x_0, y_0, z_0), \vec{S} = (m; n; p):$$

(1) հավասարության մեջ վեկտորական հավասարությունից անցնենք կոորդինատական հավասարության՝

$$x = x_0 + mt, y = y_0 + nt, z = z_0 + pt, \qquad (2)$$

որը կոչվում է ուղղի պարամետրական հավասարում:

<u>Օրինակ1</u>. Կազմել ուղղի պարամետրական հավասարումը, որն անցնում է $M_0(2,-4,6)$ կետով և զուգահեռ է $\vec{a} = \{1,2,-5\}$ վեկտորին: Գտնել ուղղի վրա P կետը, եթե $t = 2$:

<u>Լուծում</u>. Օգտվելով ուղղի $x = x_0 + mt, y = y_0 + nt, z = z_0 + pt$ պարամետրական հավասարումից, որտեղ՝ $x_0 = 2, y_0 = -4, z_0 = 6$, $m = 1, n = 2, p = -5$, կստանանք՝ $x = 2 + t$,

$y=-4+2t$, $z=6-5t$: $t=2$ դեպքում՝ $x=2+2=4$, $y=-4+4=0$, $z=6-10=-4$: Ուղղի վրա կունենանք $P(4,0,-4)$ կետը:

Օրինակ2. Ենթադրենք, մասնավորապես, $m=0$ և տրված է ուղղի պարամետրական հավասարումը հետևյալ տեսքով՝

$$\frac{x-2}{0}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+5}{1}:$$

Լուծում. Վերը նշված ուղիղը զուգահեռ է $(0,2,1)$ կոորդինատներով որոշվող վեկտորին, հետևաբար՝ oyz հարթությանը:

(2) հավասարումներից որոշենք t -ն՝

$$t=\frac{x-x_0}{m}, t=\frac{y-y_0}{n}, t=\frac{z-z_0}{p},$$ որտեղից՝

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}, \qquad (3)$$

որը կոչվում է ուղղի կանոնական հավասարում:

Օրինակ3. Կազմել ուղղի կանոնական հավասարումը, որն անցնում է $M_0(3,1,-3)$ կետով և զուգահեռ է $\vec{a}=\{4,-5,7\}$ վեկտորին: Այդ ուղղի վրա գտնվու՞մ է արդյոք $P(2,1,-3)$ կետը:

Լուծում. Օգտվելով (2) բանաձևերից, որտեղ $x_0=3, y_0=1, z_0=-3$, $m=4, n=-5, p=7$ կանոնական հավասարումը կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$\frac{x-3}{4}=\frac{y-1}{-5}=\frac{z+3}{7},$$

տեղադրելով վերջին հավասարման մեջ P կետի կոորդինատները, կստանանք՝

$$\frac{2-3}{4}\neq\frac{0}{-5}=\frac{0}{7},$$

հետևաբար, P կետը չի գտնվում ուղղի վրա:

Ենթադրենք տրված են իրարից տարբեր $M_1(x_1,y_1,z_1)$ և $M_2(x_2,y_2,z_2)$ կետերը: Որպես ուղղորդ վեկտոր վերցնենք՝

$$\vec{S}=\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1):$$

Քանի որ այդ ուղիղն անցնում է $M_1(x_1,y_1,z_1)$ կետով, ապա

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}, \qquad (4)$$

որը հանդիսանում է երկու կետերով անցնող ուղղի հավասարումը:

Օրինակ4. Տրված են $M_1(1,2,3)$ և $M_2(4,-5,-6)$ կետերը: Կազմել դրանցով անցնող ուղղի հավասարումը:

Լուծում. Տեղադրելով $x_1=1, y_1=2, z_1=3$, $x_2=4, y_2=-5, z_2=-6$ արժեքները (4)-ի մեջ, կստանանք՝

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{-7}=\frac{z-3}{-9}:$$

§ 23. Երկու ուղիղներով կազմված անկյունը: Երկու ուղիղների զուգահեռության և ուղղահայացության պայմանները

Ենթադրենք տրված են՝

$$x=x_1+m_1t, y=y_1+n_1t, z=z_1+p_1t$$
$$x=x_2+m_2t, y=y_2+n_2t, z=z_2+p_2t,$$

որոնցից առաջինն անցնում է $M_1(x_1,y_1,z_1)$ կետով, երկրորդը՝ $M_2(x_2,y_2,z_2)$-ով և ունենք $\vec{S}_1=(m_1,n_1,p_1)$ և $\vec{S}_2=(m_2,n_2,p_2)$ ուղղորդ վեկտորները:

Ակնհայտ է, որ նրանցով կազմած φ անկյունը կարելի է համարել նրանց $\vec{S}_1$ և $\vec{S}_2$ ուղղորդ վեկտորներով կազմված անկյունը, կամ լրացուցիչ անկյունը, հետևաբար,

$$\cos\varphi=\frac{\vec{S}_1\vec{S}_2}{\left|\vec{S}_1\right|\left|\vec{S}_2\right|}=\pm\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}: \qquad (5)$$

Օրինակ. Գտնել

$$\frac{x-5}{7}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-6}{-8} \text{ և } \frac{x-2}{11}=\frac{y-4}{-8}=\frac{z+1}{-7}$$

ուղիղների կազմած անկյունը:

Լուծում. Առաջին հավասարման ուղղորդ վեկտորը՝ $\vec{a}_1=\{7,2,-8\}$, երկրորդինը՝ $\vec{a}_2=\{11,-8,-7\}$: Օգտվելով (5) բանաձևից՝ կստանանք՝

$$\cos\varphi=\frac{7\cdot 11+2\cdot(-8)+(-8)\cdot(-7)}{\sqrt{49+4+64}\sqrt{121+64+49}}=\frac{117}{\sqrt{117}\sqrt{234}}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\varphi=45^0:$$

Երկու ուղիղների ուղղահայացության դեպքում $\cos\varphi=0$ և (5) բանաձևից ստանում ենք երկու ուղիղների ուղղահայացության պայմանը՝

$$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0:$$

Օրինակ. Կազմել այն ուղղի հավասարումը, որն անցնում է $M_0(2,-3,5)$ կետով և ուղղահայաց է հետևյալ ուղիղներին՝

$$\frac{x-4}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+2}{2}$$
$$\frac{x-1}{6}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+4}{-2}:$$

Լուծում. Քանի որ ուղիղն անցնում է $M_0(2,-3,5)$ կետով, ապա նրա կանոնական հավասարումը կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$\frac{x-2}{m}=\frac{y+3}{n}=\frac{z-5}{p}:$$

m,n,p գործակիցները որոշվում են հաստատուն բազմապատկիչի ճշտությամբ՝ օգտվելով ուղիղների ուղղահայացության պայմանից:
m,n,p պետք է բավարարեն հետևյալ համակարգին՝

$$\begin{cases}(-1)m+2n+2p=0\\ 6m+3n-2p=0:\end{cases}$$

Գումարելով և հանելով այս հավասարումները (բազմապատկելով 3-ով և 2-ով)՝ կստանանք՝

$$\begin{cases}5m+5n=0\\ 3m-2p=0,\end{cases}$$

որտեղից՝ $m=-n$, $m=\frac{2}{3}p$, ընդունելով $p=3$, կստանանք՝ $m=2, n=-2, p=3$:

Հետևաբար, ուղղի հավասարումը կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-5}{3}:$$

Ի նկատի ունենալով, որ զուգահեռ ուղիղների դեպքում $m_1=\lambda m_2, n_1=\lambda n_2, p_1=\lambda p_2$, որտեղից հետևում է, որ երկու ուղիղների զուգահեռության դեպքում տեղի ունի

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}:$$

պայմանը:
Օրինակ. Կազմել այն ուղղի հավասարումը, որն անցնում է $M_0(1,-1,2)$ կետով և զուգահեռ է՝

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+4}{3}=\frac{z+5}{2}$$ ուղղին:

Լուծում. $M_0(1,-1,2)$ կետով անցնող ուղղի հավասարումը կլինի՝

$$\frac{x-1}{m}=\frac{y+1}{n}=\frac{z-2}{p}:$$

Քանի որ որոնելի ուղիղը զուգահեռ է տրված ուղղին, ապա

$$\frac{m}{2}=\frac{n}{3}=\frac{p}{2},$$

որտեղից հետևում է, որ

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{2}:$$

§ 24. Ուղղի և հարթության կազմած անկյունը: Ուղղի և հարթության զուգահեռության և ուղղահայացության պայմանները: Ուղղի և հարթության փոխադարձ դիրքը տարածության մեջ

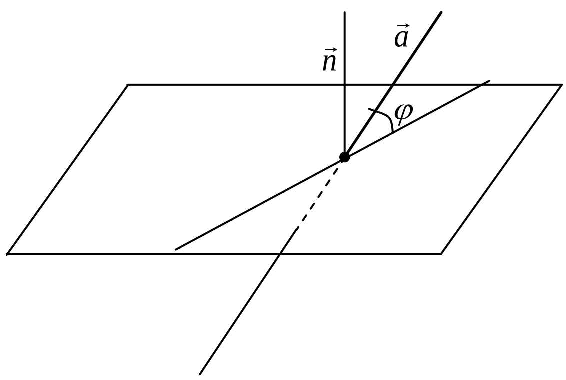
Դիցուք տրված է

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p} \qquad (1)$$

ուղիղը և

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (2)$$

հարթությունը (նկար 39.):



Նկար 39.

Ուղղի և հարթության φ անկյուն ասելով հասկանում ենք ուղղով և հարթության վրա իր պրոյեկցիայով կազմված երկու կից անկյուններից մեկը:

Քանի որ $\vec{n}=(A,B,C)$ վեկտորը ուղղահայաց է հարթությանը, իսկ $\vec{a}=(m,n,p)$ ուղղորդ վեկտորը զուգահեռ է տրված ուղղին, ապա ուղղորդ վեկտորը նորմալի հետ կազմում է $\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)$ անկյունը, ի նկատի ունենալով, որ $\cos(\frac{\pi}{2}-\varphi)=\sin\varphi$, երկու վեկտորների կազմած անկյան բանաձևից օգտվելով՝ կստանանք՝

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}: \qquad (3)$$

Այստեղ համարիչը վերցվում է բացարձակ մեծությամբ, քանի որ $\sin\varphi\geq 0$:

Զուգահեռության դեպքում $\sin\varphi=0$, վերջին (3) բանաձևից՝ $Am+Bn+Cp=0$:

Ուղղի և հարթության ուղղահայացության պայմանը համընկնում է ուղղի և հարթությանն ուղղահայացի զուգահեռության պայմանի հետ ՝

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}:$$

Դիտարկենք որևէ ուղիղ, որը տրված է պարամետրական տեսքով՝

$$x=a+mt,\ y=b+nt,\ z=c+pt, \qquad (4)$$

իսկ հարթությունը տրված է ընդհանուր տեսքով՝

$$Ax+By+Cz+D=0: \qquad (5)$$

Որպեսզի գտնենք հարթության և ուղղի հատման կետը, անհրաժեշտ է լուծել (4) և (5) հավասարումները՝ որպես համակարգ: Տեղադրելով (4)-ի x,y,z-ի արժեքները (5)-ի մեջ, կստանանք՝

$$A(a+mt)+B(b+nt)+C(c+pt)+D=0$$
$$\mathrm{Aa+Bb+Cc+D+t(Am+bn+cp)=0}$$

$$t=-\frac{Aa+Bb+Cc+D}{Am+Bn+Cp}: \qquad (6)$$

t-ի վերջին արժեքը տեղադրելով ուղղի հավասարման մեջ՝ կստանանք հարթության և ուղղի հատման կետի կոորդինատները:

Եթե $\mathrm{Am+Bn+Cp}\neq 0$ (6) բանաձևով որոշվող t-ն ունի որոշակի արժեք, հետևաբար, այս դեպքում ուղիղը հարթյությունը հատում է մեկ կետում:

Եթե $\mathrm{Am+Bn+Cp}=0$,իսկ $Aa+Bb+Cc+D\neq 0$,ապա ուղիղը զուգահեռ է հարթությանը:

Եթե $\mathrm{Am+Bn+Cp}=0$ և $Aa+Bb+Cc+D=0$, ապա ուղիղը զուգահեռ է հարթությանը և անցնում է (a,b,c) կետերով,որը գտնվում է տրված հարթության վրա:

Օրինակ. Գտնել $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-5}{2}$ ուղղի և $2x+3y-2z+2=0$ հարթության հատման կետը:

Լուծում. Ուղղի հավասարումը գրենք պարամետրական տեսքով`

$$\begin{cases} x=2t+1 \\ y=3t-1 \\ z=2t+5: \end{cases}$$

x,y,z արժեքները տեղադրենք հարթության հավասարման մեջ`

$$2(2t+1)+3(3t-1)-2(2t+5)+2=0$$
$$4t+2+9t-3-4t-10+2=0$$
$$9t=9,$$
$$t=1:$$

Տեղադրելով $t=1$ արժեքը ուղղի պարամետրական հավասարման մեջ, կստանանք`

$$x=2\cdot1+1=3,\ y=3\cdot1-1=2,\ z=2\cdot1+5=7:$$

Այսպիսով, $M(3,2,7)$ հանդիսանում է ուղղի և հարթության հատման կետը:

Խնդիրներ

1. Գտնել ուղիղների հետքերը xoy հարթության և xoz հարթության վրա:

1) $\mathrm{x}=\mathrm{z}+5,\quad \mathrm{y}=4-2\mathrm{z}$

2) $\frac{x-3}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{1}:$

Ցուցում. ուղղի հավասարումների մեջ տեղադրել` 1) $\mathrm{z}=0$; 2) $\mathrm{y}=0$:

Պատ. 1) $(5;4;0)$ և $(7;0;2)$
2) $(0;-4;0)$ և $(2;0;2)$:

2. Գրել ուղղի հավասարումը, որն անցնում է $\mathrm{A}(4;3;0)$ կետով և զուգահեռ է $P\{-1;1;1\}$ վեկտորին: Գտնել ուղղի հետքը yoz հարթության վրա:

Պատ. $\frac{x-4}{-1}=\frac{y-z}{1}=\frac{z}{1}:$

Յետքը yoz-ի վրա` $(0;8;4)$:

3. Կառուցել $\mathrm{x}=4, \mathrm{y}=3$ ուղիղները և գտնել նրանց ուղղորդ վեկտորը:

Պատ. $\mathrm{P}(0;0;1)$:

4. Գրել ուղղի հավասարումը, որն անցնում է $\mathrm{A}(-1;2;3)$ և $\mathrm{B}(2;6;-2)$ կետերով և

գտնում նրա ուղղորդ կոսինուսները:

Պատ. $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{-5}$:

5. Գրել ուղղի պարամետրական հավասարումը.
1) որն անցնում է $(-2;1;-1)$ կետով և զուգահեռ է $P\{1;-2;3\}$ վեկտորին:
2) որն անցնում է $\mathrm{A}(3,-1,4)$ և $\mathrm{B}(1,1,2)$ կետերով:

Պատ. 1) $\mathrm{x}=-2+\mathrm{t}, \mathrm{y}=1-2\mathrm{t}, \mathrm{z}=-1+3\mathrm{t}$
2) $\mathrm{x}=1+\mathrm{t}, \mathrm{y}=1-\mathrm{t}, \mathrm{z}=2+\mathrm{t}$:

6. Գտնել $\mathrm{x}=2\mathrm{z}-1, \mathrm{y}=-2\mathrm{z}+1$ ուղղի կազմած անկյունը այն ուղղի հետ, որն անցնում է կոորդինատների սկզբնակետով և $(1;-1;-1)$ կետով:

Պատ. $\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{3}}$:

7. Ցույց տալ, որ $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{1}$ ուղիղն ուղղահայաց է $\mathrm{x}=\mathrm{z}+1, \mathrm{y}=1-\mathrm{z}$ ուղղին:

8. Գրել այն ուղղահայացի հավասարումը, որն իջեցված է oz առանցքի վրա $(2;-3;4)$ կետից:

<u>Ցուցում.</u> այդ ուղիղն անցնում է $(0;0;4)$ կետով:

Պատ. $3\mathrm{x}+2\mathrm{y}=0,\ \mathrm{z}=4$:

9. Գտնել զուգահեռ ուղիղների միջև հեռավորությունը.

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+3}{2} \text{ և } \frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{2}:$$

Պատ. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$:

10. $2\mathrm{x}+\mathrm{y}+8\mathrm{z}-16=0,\ \mathrm{x}-2\mathrm{y}-\mathrm{z}+2=0$ ուղղի հավասարումը գրել 1)պրոյեկցիաներով, 2)կանոնական տեսքով: Գտնել ուղղի հետքերը կոորդինատային հարթությունների վրա:

Պատ`. $\mathrm{x}=6-3\mathrm{z},\ \mathrm{y}=-2\mathrm{z}+4,$

$$\frac{x-6}{-3}=\frac{y-4}{-2}=\frac{z}{1}:$$

Հետքերը` $(6,4,0),\ (0,0,2)$:

11. Գրել ուղղի հավասարումը, որն անցնում է $\mathrm{A}(0;-4;0)$ կետով և զուգահեռ է $\vec{P}\{1;2;3\}$ վեկտորին, գտնել ուղղի հետքը xoz հարթության վրա և կառուցել ուղիղը:

Պատ. $\frac{x}{1}=\frac{y+4}{2}=\frac{z}{3}$:

12. Գրել ուղղահայացի հավասարումը, որն իջեցված է $(2;-3;4)$ կետից oy առանցքի վրա:

Պատ. $y=-3,\ 2x-z=0$:

13. Գտնել $2x-y-7=0,\ 2x-z+5=0$ և $3x-2y+8=0, z=3x$ ուղիղների կազմած անկյունը:

Պատ. Բերենք հավասարումը կանոնական տեսքի՝ $\frac{x}{1}=\frac{y+7}{2}=\frac{z-5}{2}$ և $\frac{x}{2}=\frac{y-4}{3}=\frac{z}{6}$;

$$\cos\varphi=\frac{20}{21}\approx 0{,}952;$$
$$\varphi=17^0 48':$$

14. $2x-y+3z-1$ և $5x+4y-z-1=0$ ուղիղների հավասարումները բերել կանոնական տեսքի:

Պատ. $\frac{x}{-11}=\frac{y-2}{17}=\frac{z-1}{13}$:

15. Կոորդինատների սկզբնակետից իջեցնել ուղղահայաց հետևյալ ուղղին՝ $(x-2)/2=(y-1)/3=(z-3)/1$:

Պատ. $\frac{x}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{4}$:

16. $\frac{x}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z}{n}$ ուղղի հավասարման մեջ որոշել n պարամետրը այնպես, որ այդ ուղիղը հատվի $\frac{x+1}{3}=\frac{y+5}{2}=\frac{z}{1}$ ուղղի հետ և գտնել նրանց հատման կետը:

Պատ. $n=1,\ M(2;-3;1)$ կետում են հատվում:

17. Կազմել ուղղի հավասարումը, որն անցնում է $M(3;2;-1)$ կետով և ox առանցքը հատում է ուղիղ անկյան տակ:

Պատ. $\frac{x-3}{0}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+1}{1}$

18. Տրված է $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{-1}$ ուղիղը: Գտնել N կետը, որը սիմետրիկ է M կետին տրված ուղղի նկատմամբ:

Պատ. $N(9/7;-4/7;-22/7)$:

19. Կոորդինատային հարթությունների վրա գտնել ուղղի պրոյեկցիաների հավասարումները:

$$\begin{cases} x+2y+3z-26=0 \\ 3x+y+4z-14=0 \end{cases}$$

Պատ. $5y+5z-64=0,\ x=0\,(YOZ);$
$5x+5z-2=0,\ \ y=0\ (XOZ);$
$5x-5y+62=0,\ z=0\,(XOY):$

20. Ուղղի հավասարումները բերել կանոնական տեսքի.

$$\begin{cases} 2x+3y-16z-7=0 \\ 3x+y-17z=0 \end{cases}$$

Պատ. $\frac{(x+1)}{5}=\frac{y-3}{2}=\frac{z}{1}:$

21. Գտնել ուղղի հավասարումը, որն անցնում է $M(1;-2;3)$ կետով և ox և oy առանցքների հետ կազմում է 45^0 և 60^0-ի անկյուններ համապատասխանաբար:

Պատ. $(x-1)\big/\sqrt{2}=(y+2)\big/1=(z-3)\big/(\pm1):$

22. Գտնել ուղղի հավասարումը, որն անցնում է $N(5;-1;-3)$ կետով և զուգահեռ է

$$\begin{cases} 2x+3y+z-6=0 \\ 4x-5y-z+2=0 \end{cases}$$ ուղղին:

Պատ. $\frac{(x-5)}{1}=\frac{(y+1)}{3}=\frac{z+3}{-11}:$

23. Գտնել $-\frac{(x-1)}{1}=\frac{y-2}{5}=\frac{z+4}{2}$ և $\frac{x-2}{2}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z-1}{3}$ ուղիղների հատման կետը:

Պատ. $M(0;7;-2):$

24. Տրված են զուգահեռագծի 3 հաջորդական գագաթները՝ $A(3;0;-1); B(1;2;-4)$ և $C(0;7;-2)$: Գտնել AD և CD կողմերի հավասարումները:

Պատ՝. $\frac{x-3}{-1}=\frac{y}{5}=\frac{z+1}{2};$

$\frac{x}{2}=\frac{y-7}{-2}=\frac{z+2}{3}:$

25. Գտնել ուղղի պարամետրական հավասարումը, որն անցնում է $M(2;-5;1)$ և $N(-1;1;2)$ կետերով:

Պատ. $x = -3t - 1;\quad y = 6t + 1;\quad z = t + 2$:

26. Տրված են $A(-1;2;3)$ և $B(2;-3;1)$ կետերը: Կազմել ուղղի հավասարումը, որն անցնում է $M(3;-1;2)$ կետով և զուգահեռ է $\overrightarrow{AB}$ վեկտորին:

Պատ. $\frac{x-3}{3} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z-2}{-2}$:

27. Գտնել $\begin{cases} 4x - y - z + 12 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases}$ և $\begin{cases} 3x - 2y + 16 = 0 \\ 3x - z = 0 \end{cases}$ ուղիղների կազմած անկյունը:

Պատ. $\cos\varphi = \frac{20}{21}$:

28. Տրված է $ABCD$ զուգահեռագծի երկու գագաթները՝ $C(-2;3;-5)$ և $D(0;4;-7)$ և անկյունագծերի հատման կետը՝ $M(1;2;-3{,}5)$: Գտնել AB կողմի հավասարումը:

Պատ. $\frac{x-4}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{-2}$:

29. Կազմել այն ուղիղների պարամետրական հավասարումները, որոնք անցնում են $M_0(5;-3;8)$ կետով և բավարարում են հետևյալ պայմաններին.

1) ուղիղը զուգահեռ է $x = 1 - 3t;\ y = 4 + 2t;\ z = 5 - 6t$ ուղիղներին,
2) ուղիղը զուգահեռ է OY առանցքին,
3) ուղիղը զուգահեռ է OZ առանցքին,
4) ուղիղն ուղղահայաց է $4x + 7y - 8z - 3 = 0$ ուղղին:

Պատ՝. 1) $x = 5 - 3t;\ y = -3 + 2t;\ z = 8 - 6t;$
2) $x = 5;\ y = -3 + t;\ z = 8;$
3) $x = 5;\ y = -3;\ z = 8 + t;$
4) $x = 5 + 4t;\ y = -3 + 7t;\ z = 8 - 8t$:

30. Գտնել $P(2;3;-1)$ կետի հեռավորությունը $\frac{x-5}{5} = \frac{y}{2} = \frac{z+25}{-2}$ ուղղից:

Պատ. 21:

31. Գտնել $\begin{cases} x - y - 4z - 5 = 0 \\ 2x + y - 2z - 4 = 0 \end{cases}$ և $\frac{x-3}{-6} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z}{2}$ ուղիղների կազմած անկյունը:

Պատ. $\cos\varphi = \frac{4}{21};$

32. Կազմել ուղիղների պարամետրական հավասարումները.

1) $\begin{cases} x+y-6z-4=0 \\ 3x-y-5z-8=0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x-y+3z-7=0 \\ 4x+5y-6z-10=0 \end{cases}$

Պատ. 1) $x=3+11t;\ y=1+13t;\ z=4t$
2) $x=-9t;\ y=8;\ z=5+14t$:

33. Տրված են $A(1;1;1);\ B(2;3;3)$ և $C(3;3;2)$: Կազմել ուղղի հավասարումը, որն անցնում է A կետով և ուղղահայաց է $\overrightarrow{AB}$ և $\overrightarrow{AC}$ վեկտորներին:

Պատ. $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-1}{2}$:

34. Կազմել ուղղի հավասարումը, որն անցնում է $M(0;2;1)$ կետով և $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{b}=3\vec{j}$, $\vec{c}=3\vec{k}$ վեկտորների հետ կազմում է հավասար անկյուններ:

Պատ. $\frac{x}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{-1}$:

35. Գտնել հարթության հավասարումը, որն անցնում է $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{4}$ ուղղով և ուղղահայաց է $3x+y-z+2=0$ հարթությանը:

Պատ. $x-5y-2z+11=0$:

36. Գտնել $\frac{x}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-2}{-2}$ ուղղի պրոյեկցիաների հավասարումները $2x+3y-z-5=0$ հարթության վրա:

Պատ. $\frac{x}{-10}=\frac{y-3{,}4}{13}=\frac{z-5{,}2}{19}$:

37. Գտնել ուղիղների ուղղորդ կոսինուսները.

1) $\frac{x-5}{6}=\frac{y+4}{-2}=\frac{z-1}{3}$ 2) $\begin{cases} 2x-2z+3=0 \\ 10x-12y+4z-5=0 \end{cases}$

Պատ. 1) $\cos\alpha=\frac{6}{7}$ 2) $\cos\alpha=\frac{6}{11}$
$\cos\beta=-\frac{2}{7}$ $\cos\beta=\frac{7}{11}$
$\cos\gamma=\frac{3}{7}$ $\cos\gamma=\frac{6}{11}$:

38. Գտնել երկու ուղիղների կազմած անկյունը հետևյալ դեպքերում.

1) $\frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{-10}=\frac{z-7}{1}$ և $\frac{x-4}{-11}=\frac{y+5}{8}=\frac{z-6}{7}$

2) $\begin{cases} x+y-4=0 \\ \sqrt{2}y-z-1=0 \end{cases}$ և $\begin{cases} x-y=0 \\ \sqrt{2}y-z-\sqrt{2}=0 \end{cases}$

Պատ. 1) $\varphi=135^0$, 2) $\varphi=60^0$:

39. Գտնել $M_0(7;-2;3)$ կետի հեռավորությունը հետևյալ ուղիղներից.

1) $x=3-t;\ y=-5-2t;\ z=1+2t;$

2) $x=6+10t;\ y=-3+11t;\ z=2+2t:$

Պատ. 1) $d=5;$ 2) $d=\frac{\sqrt{86}}{15}$:

40. Գտնել զուգահեռ ուղիղների միջև եղած հեռավորությունը.

1) $x=5-4t;\ y=2+7t;\ t=1+4t$ և $x=8t$

$y=3-14t;\ z=4-8t:$

2) $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{2}$ և $\frac{x-7}{3}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-3}{2}$:

Պատ. 1) $\frac{1}{3}\sqrt{146}$ 2) 3:

41. Կազմել $M_0(4;7;-5)$ կետով անցնող ուղղի հավասարումը, որը ուղղահայաց է հետևյալ երկու ուղիղներին՝

$x=3+2t;\ y=8-t;\ z=-1+4t$ և $x=1+3t;$

$y=-5+t;\ z=6+t:$

Պատ. $\frac{x-4}{-1}=\frac{y-7}{2}=\frac{z+5}{1}$:

42. Գտնել $x=8-2t;\ y=7-2t;\ z=9+4t$ ուղղի և $6x-3y-3z+1=0$ հարթության կազմած անկյունը:

Պատ. $\varphi=30^0$:

43. Գտնել $P(1;2;-3)$ կետի պրոյեկցիան $6x-y+3z-41=0$ հարթության վրա:

Պատ. $Q(7;1;0)$:

44. Գտնել $P(2;-4;5)$ կետին սիմետրիկ կետը x=1-3t, y=-3+t, z=3-4t ուղղի նկատմամբ:

Պատ. Q$\left(\frac{36}{13};\frac{-38}{13};\frac{61}{13}\right)$:

45. x+y+z-1=0 հարթության և y=1; z+1=0 ուղղի հատման կետով տանել ուղիղ, որն ընկած է տրված հարթության մեջ և ուղղահայաց է տրված ուղղին:

Պատ. x+y+z-1=0; x-1=0:

46. ℓ-ի ի՞նչ արժեքի դեպքում $\frac{x-3}{\ell}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-5}{6}$ ուղիղը զուգահեռ է $2x-5y+3z-7=0$ հարթությանը:

Պատ. $\ell=1$:

47. n–ի ո՞ր արժեքի դեպքում $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{n}=\frac{z+3}{-2}$ ուղիղը կլինի զուգահեռ հարթությանը:

Պատ. $n=-3$:

48. m–ի ո՞ր արժեքի դեպքում $\frac{x}{m}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{-5}$ ուղիղը կլինի զուգահեռ $3x-2y+z-1=0$ հարթությանը:

Պատ. $m=3$:

49. P–ի ո՞ր արժեքի դեպքում $\frac{x+3}{-1}=\frac{y}{3}=\frac{z-1}{p}$ ուղիղը կլինի զուգահեռ $2x-3y+z+2=0$ հարթությանը:

Պատ. P=11:

50. m–ի և C-ի ո՞ր արժեքների դեպքում $\frac{x-2}{m}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-5}{-3}$ ուղիղը կլինի ուղղահայաց $3x-2y+Cz+1=0$ հարթությանը:

Պատ. $m=-6$; $C=\frac{3}{2}$:

51. A–ի և n-ի ո՞ր արժեքների դեպքում $Ax-3y+2z-1=0$ հարթությունը կլինի ուղղահայաց $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{n}=\frac{z+2}{4}$ ուղղին:

Պատ. $A=1$, $n=-6$:

§ 25. Երկրորդ կարգի մակերևույթների հավասարումների կանոնական տեսքերը: Երկրորդ կարգի մակերևույթների ուսումնասիրումը հատույթների մեթոդով

Կասենք, որ S մակերևույթը $oxyz$ կոորդինատային համակարգում ունի

$$F(x;y;z)=0 \qquad (1)$$

տեսքի հավասարում, եթե տեղի ունի հետևյալ պայմանը՝ $M(x;y;z)$ կետը պատկանում է S մակերևույթին այն և միայն այն դեպքում, երբ նրա x, y և z կոորդինատները բավարարում են (1) հավասարմանը: Մասնավորապես, եթե $F(x;y;z) = f(x;y) - z$, ապա (1) հավասարումը կարելի է գրել $z = f(x;y)$ տեսքով և այս դեպքում S մակերեևույթը համընկնում է երկու փոփոխականների $f(x;y)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի հետ:

Երկրորդ կարգի մակերևույթի ընդհանուր հավասարումը

Երկրորդ կարգի մակերևույթ ասելով կհասկանանք այն S մակերեևույթը, որի հավսարումն ուղղանկյուն դեկարտյան կոորդինատային համակարգում ունի հետեևյալ տեսքը՝

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2fyz + gx + Hy + Iz + k = 0 , \qquad (2)$$

որտեղ A, B, C գործակիցները միաժամանակ զրո չեն:

Ընդհանուր դեպքում (2) հավասարումը կարող է վերածվել, այսպես կոչված, վերասերվող մակերևույթի (հարթությունների զույգ, ուղիղ, կետ, դատարկ բազմություն):

Եթե երկրորդ կարգի S մակերևույթը վերասերված չէ, ապա նրա համար կգտնվի այնպիսի ուղղանկյուն դեկարտյան կոորդինատային համակարգ, որում դիտարկվող մակերևույթի հավասարումն ունի հետևյալ կանոնական տեսքերից որևէ մեկը/ նկար 1,2,3,4,5,6,7,8,9/:

Եթե (2) հավասարումով որոշվող երկրորդ կարգի մակերևույթը վերասերվող է, ապա կգտնվի մի այնպիսի ուղղանկյուն դեկարտյան կոորդինատային համակարգ, որում դիտարկվող մակերևույթի հավասարումն ունի հետևյալ տեսքերից որևէ մեկը՝

$a^2x^2 - b^2y^2 = 0,$ /հատվող հարթությունների զույգի հավասարում/

$x^2 - a^2 = 0,\ z^2 = 0,$ /համընկնող կամ զուգահեռ հարթությունների զույգի հավասարում/

$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = -d^2,$ /կետերի դատարկ բազմություն/:

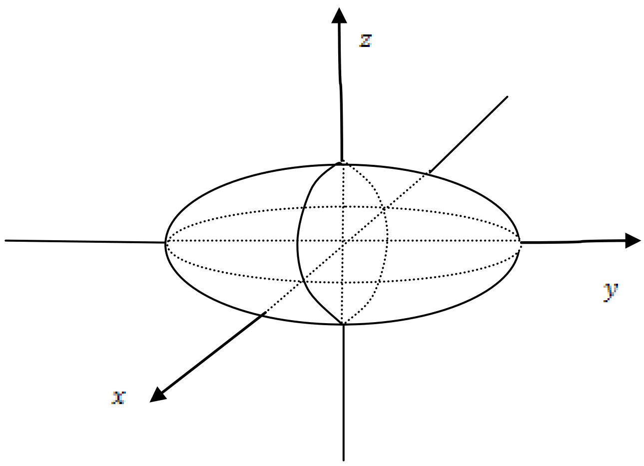
Այժմ մեր նպատակն է երկրորդ կարգի չվերասերվող մակերևույթների ուսումնասիրությունը նրանց կանոնական հավասարումների օգնությամբ: Այդպիսի ուսումնասիրության հիմնական մեթոդը հատույթների մեթոդն է:

Էլիպսոիդ. Էլպսոիդի կանոնական հավասարումն ունի նկար1-ի տեսքը: a, b, c թվերը կոչվում են էլիպսոիդի կիսաառանցքներ: Եթե $a = b = c$, ապա էլիպսոիդի հավասարումը կընդունի՝

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

տեսքը, որը a շառավղով և կոորդինատների սկզբնակետի հետ համընկնող կենտրոն ունեցող սֆերայի հավասարում է: Եթե էլիպսոիդի հավասարման մեջ փոխարինենք x–ը $(-x)$–ով, y-ը $(-y)$–ով, իսկ z–ը $(-z)$–ով, դրանից հավասարումը չի խախտվի: Հետևաբար, էլիպսոիդը սիմետրիկ է կոորդինատային$x = 0, y = 0,$ և $z = 0$ հարթությունների և կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ: Այդ պատճառով բավական է այն ուսումնասիրել առաջին օկտանտում, այսինքն երբ$x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$: Էլիպսի այն մասը, որը գտնվում է առաջին օկտանտում նկարագրվում է բացահայտ հավասարումներով՝

$$z = c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}, \qquad x \geq 0, y \geq 0, \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leq 1:$$



Նկար 1. Էլիպսոիդ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Էլիպսոիդի մասին ավելի ճշգրիտ պատկերացում ունենալու համար այն հատենք կոորդինատային հարթություններին զուգահեռ հարթություններով: Օրինակ, եթե էլիպսոիդը հատենք $z = h$ հարթություններով $(-c \leq h \leq c)$, ապա հատույթներում կստանանք էլիպսներ, որոնց հավասարումներն են՝

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2},$$

իսկ կիսաառանցքները՝

$$a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}, \qquad b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}:$$

Այստեղից երևում է, որ ամենամեծ էլիպսը կստացվի էլիպսոիդի $z = 0$ հատույթի վրա: Նման պատկեր կլինի, երբ էլիպսոիդը հատենք $x = h, (-a \leq h \leq a)$ և $y = h, (-b \leq h \leq b)$ հարթություններով:

Եթե էլիպսոիդի որևէ երկու կիսաառանցքներ հավասար են /օրինակ $a = c$/, ապա էլիպսոիդը կլինի պտտման էլիպսոիդ, այսինքն տվյալ դեպքում կստացվի՝ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ էլիպսի oy առանցքի շուրջը պտտելով:

Միախոռոչ հիպերբոլոիդ. Միախոռոչ հիպերբոլոիդի կանոնական հավասարումն ունի նկար 2-ի տեսքը: a, b, c թվերը կոչվում են միախոռոչ հիպերբոլոիդի կիսաառանցքներ: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ հավասարման տեսքից հետևում է, որ միախոռոչ հիպերբոլոիդը սիմետրիկ է կոորդինատային հարթությունների և կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ: Միախոռոչ հիպերբոլոիդի գագաթներ կոչվում են նրա վրա գտնվող $(\pm a; 0; 0)$ և $(0; \pm b; 0)$ կետերը:

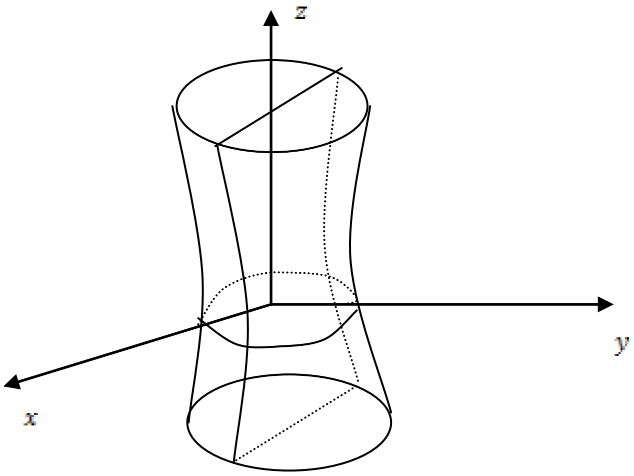
Նկար 2-ի մակերևույթը հատենք $z = h$ հարթությունով: Այդ դեպքում հատույթում կստանանք էլիպս՝

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2},$$

որի կիսաառանցքներն են՝

$$a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}, \qquad b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}:$$

Այստեղից հետևում է, որ ամենափոքր էլիպսը կստանանք $z = 0$ հատույթի վրա: Իսկ երբ h -ը փոփոխվում է $(-\infty)$-ից մինչև $(+\infty)$, ստացված էլիպսը պատկերում է նկար 2-ում պատկերված մակերևույթը:



Նկար 2. Միախոռոչ հիպերբոլոիդ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

Այժմ, եթե նշված մակերևույթը հատենք $x = h$ /կամ $y = h$ / հարթությամբ, ապա հատույթում կստանանք հիպերբոլ՝

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{h^2}{a^2},\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{h^2}{b^2}\right):$$

Եթե $h=\pm a$, ապա առաջին հիպերբոլը տրոհվում է երկու ուղիղների՝ $y=\pm\frac{b}{c}z$:

Եթե $|h|\leq a$, ապա համապատասխան հիպերբոլի իրական առանցքը զուգահեռ է oy առանցքին, իսկ $|h|>a$ դեպքում՝ oz առանցքին:

Եթե $a=b$, ապա նշված մակերևույթի հատույթը $z=h$ հարթությամբ կլինի շրջանագիծ, որի շառավիղն է՝ $a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$: Այդ դեպքում նկար 2-ի մակերևույթը ստացվում է $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ հիպերբոլի պտույտով oz առանցքի շուրջը:

<u>Երկխոռոչ հիպերբոլոիդ</u>. Երկխոռոչ հիպերբոլոիդի կանոնական հավասարումն ունի նկար 3-ի տեսքը: a,b,c թվերը կոչվում են երկխոռոչ հիպերբոլոիդի կիսաառանցքներ: Նկար 3-ի հավասարումից հետևում է, որ երկխոռոչ հիպերբոլոիդը սիմետրիկ է կոորդինատային հարթությունների և կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ:

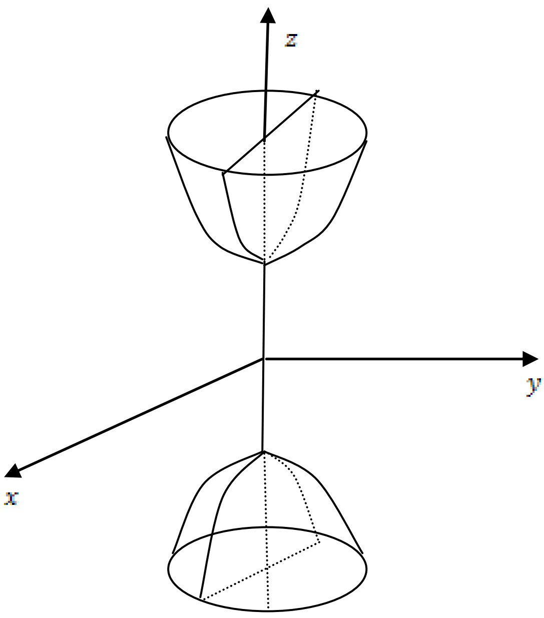
Եթե նկար 3-ի մակերևույթը հատենք $z=h(|h|\geq c)$ հարթություններով, ապա հատույթում կստանանք էլիպս՝

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2},$$

որի կիսաառանցքներն են՝

$$a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}\ ,\ b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}\ :$$

Եթե $|h|<c$, ապա $\frac{h^2}{c^2}-1<0$, հետևաբար, $z=h$ հարթությունը և նկար 3-ի մակերևույթը հատման կետեր չունեն:



Նկար 3. Երկխոռոչ հիպերբոլոիդ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

Երբ նկար 3-ի մակերևույթը հատվում է $x = h$ կամ $y = h$ հարթություններով, ապա հատույթում ստացվում է հիպերբոլ՝

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{a^2} \text{ կամ } \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{h^2}{b^2}:$$

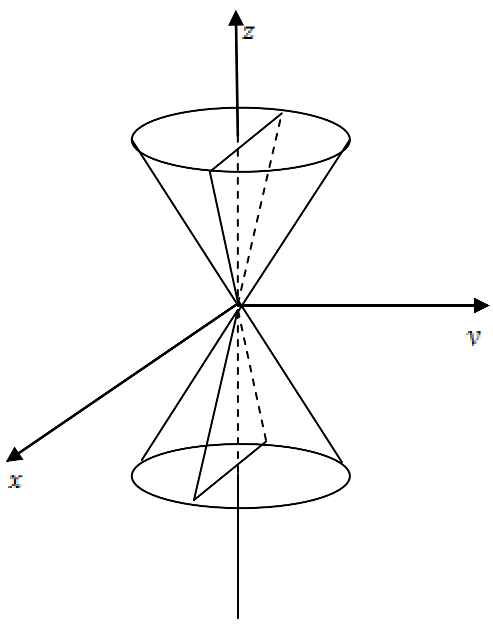
$(\pm a; 0; 0)$ կետերը գտնվում են երկխոռոչ հիպերբոլոիդի վրա և կոչվում են նրա գագաթներ:

<u>**Երկրորդ կարգի կոն**</u>. Երկրորդ կարգի կոնի հավասարումն ունի նկար 4-ի տեսքը: Պարզ է, որ այս մակերևույթը սիմետրիկ է $x = 0, y = 0, z = 0$ հարթությունների և կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ:

Եթե նկար 4-ի մակերևույթը հատենք $z = h$ հարթություններով, ապա յուրաքանչյուր հատույթում կստացվի էլիպս՝

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2},$$

որի կիսաառանցքներն են՝ $\frac{a|h|}{c}, \frac{b|h|}{c}$:



Նկար 4. Երկրորդ կարգի կոն

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Եթե դիտարկվող մակերևույթը հատենք $x = h$ կամ $y = h$ հարթություններով, ապա հատույթում կստանանք հիպերբոլներ՝

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{a^2} \quad \text{կամ} \quad \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{h^2}{b^2}\,:$$

Եթե այժմ երկրորդ կարգի կոնը հատենք $y = h$ հարթություններով, ապա հատույթում կստանանք հատվող ուղիղների զույգ, որոնց հավասարումներն են՝

$$z = \pm cx\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{h^2}{b^2}}:$$

<u>**Էլիպտական պարաբոլոիդ**</u>. Էլիպտական պարաբոլոիդի հավասարումն ունի նկար 5-ի տեսք: Քանի որ նրա հավասարման մեջ մասնակցում են x և y փոփոխականների քառակուսիները, ապա տվյալ մակերևույթը սիմետրիկ է $x = 0$ և $y = 0$ կոորդինատային հարթությունների նկատմամբ: Պարզ է նաև, որ էլիպտական պարաբոլոիդը տեղադրված է $z \geq 0$ կիսատարածության մեջ:

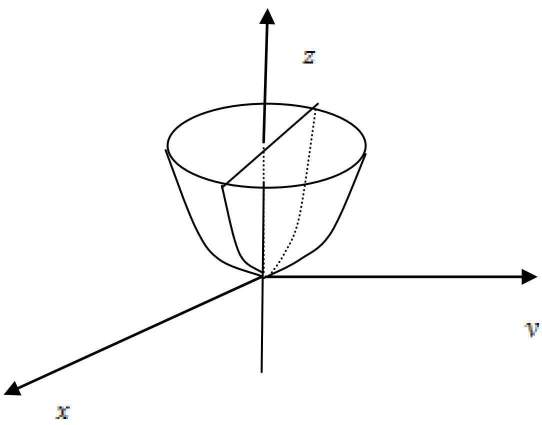
Հատելով դիտարկվող մակերևույթը $z = h(h \geq 0)$ հարթություններով, հատույթում կստանանք էլիպսներ՝

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2h,$$

որոնց կիսաառանցքներն են՝

$$a\sqrt{2h} \text{ և } b\sqrt{2h}:$$

Երբ h-ը փոփոխվում է 0-ից մինչև $(+\infty)$ տվյալ էլիպսները նկարագրում են նկար 5-ի մակերևույթը:



Նկար 5. Էլիպտական պարաբոլոիդ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

Հատելով էլիպտական պարաբոլոիդը $x = h$ կամ $y = h$ հարթություններով, հատույթներում կստանանք պարաբոլներ՝

$$y^2 = 2b^2\left(z - \frac{h^2}{2a^2}\right) \text{ կամ } x^2 = 2b^2\left(z - \frac{h^2}{2b^2}\right)$$

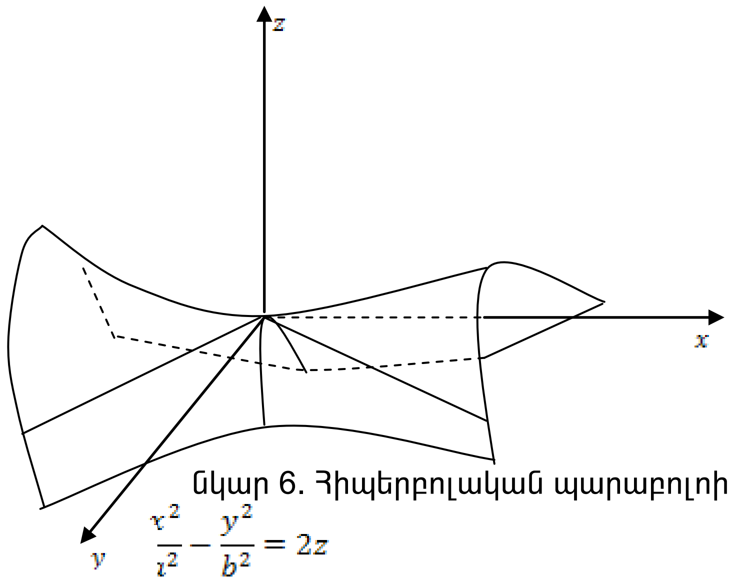
որոնց գագաթները գտնվում են, համապատասխանաբար,

$$z=\frac{h^2}{2a^2} \text{ և } z=\frac{h^2}{2b^2} \text{ կետերում:}$$

$O(0;0;0)$ կետը գտնվում է դիտարկվող մակերևույթի վրա և կոչվում է էլիպտական պարաբոլոիդի գագաթ:

Եթե $a^2=b^2$ ապա, նկար 5-ի մակերևույթը կլինի պտտման մակերևույթ, որը ստացվում է $x^2=2a^2z$ պարաբոլի պտույտով oz առանցքի շուրջը: Այս դեպքում դիտարկվող մակերևույթն անվանում են պտտման պարաբոլոիդ:

<u>Հիպերբոլական պարաբոլոիդ</u>. Հիպերբոլական պարաբոլոիդի կանոնական հավասարումն ունի նկար 6-ի տեսքը: Այդ մակերևույթի հավասարման տեսքից հետևում է, որ նա սիմետրիկ է $x=0$ և $y=0$ հարթությունների նկատմամբ:



Նկար 6. Հիպերբոլական պարաբոլոիդ

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$$

Հատելով դիտարկվող մակերևույթը $z=h$ $(h\neq 0)$ հարթություններով, մենք հատույթներում կստանանք հիպերբոլներ՝

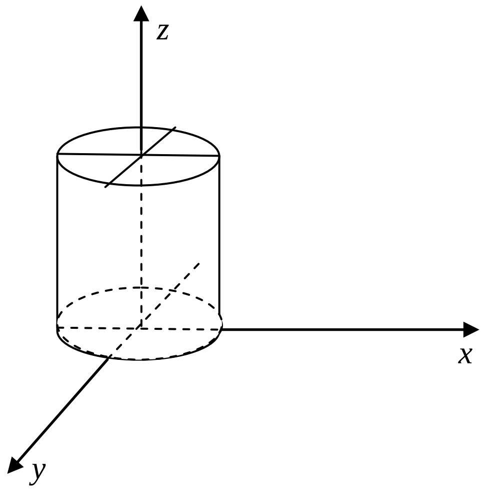
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2h:$$

Ընդ որում $h>0$ դեպքում հիպերբոլի իրական առանցքը զուգահեռ է ox առանցքին, իսկ $h<0$ դեպքում՝ oy առանցքին: Երբ $h=0$, հատույթում կստանանք երկու հատվող ուղիղներ:

Եթե հիպերբոլական պարաբոլոիդը հատենք $x=h$ կամ $y=h$ հարթություններով, ապա կստանանք պարաբոլներ, որոնց ճյուղերը ուղղված են համապատասխանաբար դեպի ներքև և դեպի վերև՝

$$\frac{y^2}{b^2}=2z-\frac{h^2}{a^2}, \quad \frac{x^2}{a^2}=2z+\frac{h^2}{b^2}:$$

<u>Երկրորդ կարգի էլիպտական գլան</u>. Էլիպտական գլանի կանոնական հավասարումն ունի նկար 7-ի տեսքը: Այդ հավասարումը չի պարունակում z փոփոխականը: oxy հարթության վրա նկար 7-ի հավասարումը որոշում է էլիպս, a և b կիսաառանցքներով: Եթե $(x;y)$ կետը գտնվում է այդ էլիպսի վրա, ապա $(x;y;z)$ կետը պատկանում է դիտարկվող մակերևույթին: Այսպիսով, էլիպտական գլանի կետերը գտնվում են այն ուղիղների վրա, որոնք զուգահեռ են oz առանցքին և հատում են oxy հարթության մեջ գտնվող $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ էլիպսը:



Նկար 7. Էլիպտական երկրորդ կարգի գլան

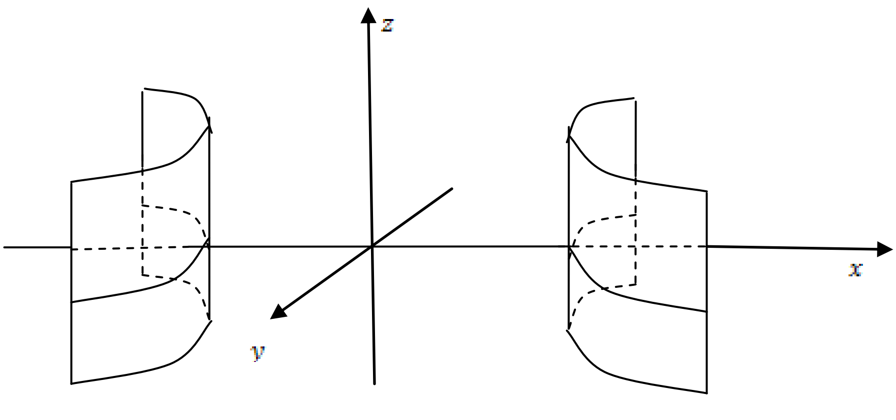
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Ստացված էլիպսը կոչվում է դիտարկվող մակերևույթի ուղղորդ գիծ, իսկ շարժվող ուղղի բոլոր հնարավոր դիրքերը՝ ծնիչներ:

Ընդհանրապես, բոլոր այն կետերի երկրաչափական տեղը, որոնք գտնվում են տրված առանցքին զուգահեռ և տրված Γ կորը հատող ուղիղների վրա, կոչվում է գլանային մակերևույթ:

Հիպերբոլական գլան. Հիպերբոլական գլանի կանոնական հավասարումն ունի նկար 8-ի տեսքը:

Այս մակերևույթին ուղղորդ գիծ է հանդիսանում oxy հարթության վրա գտնվող $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ հիպերբոլները, իսկ ծնիչներն իրենցից ներկայացնում են oz առանցքին զուգահեռ ուղիղներ:

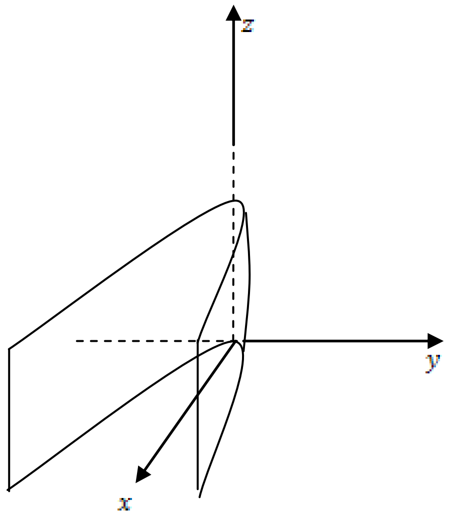


Նկար 8. Հիպերբոլական երկրորդ կարգի գլան

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Պարաբոլական գլան. Պարաբոլական գլանի կանոնական հավասարումն ունի նկար 9-ի տեսքը:

Այս մակերևույթի ուղղորդ գիծ է հանդիսանում oxy հարթության վրա գտնվող $y^2 = 2px$ պարաբոլը, իսկ ծնիչները oz առանցքին զուգահեռ ուղիղ գծեր են:



Նկար 9. Պարաբոլական երկրորդ կարգի գլան
$y^2 = 2px, \quad p > 0$:

Օրինակ 1. Հարթությունների մեթոդով պարզել հետևյալ մակերևույթի տեսքը՝

$z = 2\left(1 - \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25}\right)$: Գտնել նրա կանոնական հավասարումը:

Լուծում. Եթե դիտարկվող մակերևույթը հատենք $z = h$ հարթությամբ, ապա հատույթում կստանանք Γ կոր, որի հավասարումն է՝

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 2 - h:$$

Եթե $h > 2$, ապա ստացված հավասարումը լուծում չունի: Դա նշանակում է, որ ուսումնասիրվող մակերևույթն ամբողջովին գտնվում է $z = 2$ հարթությունից ներքև: Եթե $h < 2$, ապա Γ կորն իրենից ներկայացնում է էլիպս, որի կիսաառանցքներն են՝ $a = 4\sqrt{2-h}$, $b = 5\sqrt{2-h}$: Իսկ եթե $h = 2$, ապա Γ կորը վերասերվում է $x = y = 0$ կետի:

Նկատենք, որ եթե h-ը նվազում է, ապա Γ էլիպսի կիսաառանցքներն անվերջ աճում են:

Այժմ եթե դիտարկվող մակերևույթը հատենք oxz հարթությամբ $(y = 0)$, ապա հատույթում կստանանք $x^2 = 16(2 - z)$ կորը, որը պարաբոլ է $p = 8$ պարամետրով, նրա գագաթը գտնվում է $x = 0$, $z = 2$ կետում և ճյուղերով ուղղված է z-ի արժեքների նվազման կողմը:

Իսկ եթե մակերևույթը հատենք oyz հարթությամբ $(x = 0)$, ապա հատույթում նույնպես կստանանք պարաբոլ՝ $y^2 = 25(2 - z)$, որի պարամետրն է՝ $p = \frac{25}{2}$, գագաթը գտնվում է $y = 0$, $z = 2$ կետում, ճյուղերն ուղղված են z-ի արժեքների նվազման կողմը:

Այսպիսով, դիտարկվող մակերևույթն էլիպտական պարաբոլոիդ է:

Այժմ եթե կատարենք կոորդինատների $x' = x$, $y' = y$, $z' = 2 - z$ ձևափոխություն, ապա դիտարկվող մակերևույթի հավասարումը կբերվի կանոնական տեսքի՝

$$\frac{(x')^2}{16} + \frac{(y')^2}{25} = z':$$

<u>Օրինակ 2</u>. Գտնել $3x - y + 6z - 14 = 0$ հարթության և $2x^2 + y^2 = 12z$ մակերևույթի հատման գիծը:

<u>Լուծում</u>. Եթե մակերևույթի հավասարումից արտաքսենք z փոփոխականը հարթության հավասարման օգնությամբ, ապա կստանանք՝ $2x^2 + y^2 + 6x - 2y = 28$: Ստացված հավասարման մեջ անջատենք լրիվ քառակուսիներ, կունենանք՝

$$2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 = \frac{59}{2},$$

կամ որ նույնն է՝

$$\frac{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{59}{4}} + \frac{(y - 1)^2}{\frac{59}{2}} = 1:$$

Այսպիսով, դիտարկվող մակերևույթի և հարթության հատման գիծն էլիպս է:

Խնդիրներ

Պարզել հետևյալ մակերևույթների տեսքը.

1/ $x^2 + 4y^2 - \frac{4}{9}z^2 = 16$, 2/ $x^2 + y^2 = 2z$,

3/ $2z = x^2 + \frac{y^2}{2}$, 4/ $x^2 - y^2 + z^2 + 4 = 0$,

5/ $x^2 + z^2 - 4z - 4x + 4 = 0$, 6/ $x^2 + y^2 - z^2 - 2y + 2z = 0$,

7/ $x^2 + y^2 - z^2 - 2x - 2y + 2z + 2 = 0$, 7/ $9x^2 - z^2 - 18x - 18y - 6z = 0$:

Խառը խնդիրներ անալիտիկ երկրաչափության վերաբերյալ

1. Հաշվել $4\vec{a} - \vec{b}$ և $2\vec{a} + 3\vec{b}$ վեկտորների սկալյար արտադրյալը, եթե $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, իսկ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորներով կազմված անկյունը հավասար է 120^0-ի: Պատ. -25:

2. Հաշվել $\vec{a}+2\vec{b}$ և $2\vec{a}-\vec{b}$ վեկտորների սկալյար արտադրյալը, եթե $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$, իսկ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորներով կազմված անկյունը հավասար է 120^0-ի: Պատ. 1:
3. $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորներով կազմված անկյունը հավասար է 120^0-ի: $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$: Հաշվել $(\vec{a}+\vec{b})^2$: Պատ. 7:
4. $\vec{e}_1$ և $\vec{e}_2$ միավոր վեկտորներով կազմված անկյունը հավասար է 60^0: Հաշվել $6\vec{e}_1+\vec{e}_2$ և $\vec{e}_1-2\vec{e}_2$ վեկտորների սկալյար արտադրյալը: Պատ. $-\frac{3}{2}$:
5. Գտնել $\vec{a}+\vec{b}$ վեկտորի երկարությունը, եթե $|\vec{a}|=11$, $|\vec{b}|=23$ և $|\vec{a}-\vec{b}|=30$: Պատ. 20:
6. Գտնել $\vec{b}$ վեկտորի երկարությունը, եթե $|\vec{a}|=6$, $|\vec{a}+\vec{b}|=11$ և $|\vec{a}-\vec{b}|=7$: Պատ. 7:
7. Գտնել $\vec{a}-\vec{b}$ վեկտորի երկարությունը, եթե $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$ և $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{34}$: Պատ. 4:
8. Գտնել $\vec{a}+\vec{b}$ վեկտորի երկարությունը, եթե $|\vec{a}|=13$, $|\vec{b}|=19$ և $|\vec{a}-\vec{b}|=22$: Պատ. 24:
9. Գտնել $\vec{a}+\vec{b}$ վեկտորի երկարությունը, եթե $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=5$ և $|\vec{a}-\vec{b}|=3$: Պատ. 7:
10. Գտնել $\vec{a}-\vec{b}$ վեկտորի երկարությունը, եթե $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=3$ և $|\vec{a}+\vec{b}|=4$: Պատ. 2:
11. Գտնել $\vec{a}$ վեկտորի երկարությունը, եթե $|\vec{b}|=2$, $|\vec{a}+\vec{b}|=12$ և $|\vec{a}-\vec{b}|=8$: Պատ. 10:
12. $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները կազմում են $\varphi=60^0$ անկյուն, ընդ որում $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=8$: Որոշել $\vec{a}+\vec{b}$ և $\vec{a}-\vec{b}$ վեկտորների երկարությունները: Պատ. $\sqrt{129}$; 7:
13. $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները կազմում են $\varphi=120^0$ անկյուն, ընդ որում $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=5$: Որոշել $\vec{a}+\vec{b}$ և $\vec{a}-\vec{b}$ վեկտորների երկարությունները: Պատ. $\sqrt{19}$; 7:
14. Տրված են $\vec{a}=\{2;-3\}$, $\vec{b}=\{1;2\}$ և $\vec{c}=\{9;4\}$ վեկտորները: $\vec{c}$ վեկտորը ներկայացնել $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների գծային կոմբինացիայով: Պատ. $\vec{c}=2\vec{a}+5\vec{b}$:
15. Տրված են $\vec{a}=\{5;4\}$, $\vec{b}=\{-3;0\}$ և $\vec{c}=\{1;8\}$ վեկտորները: $\vec{c}$ վեկտորը ներկայացնել $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների գծային կոմբինացիայով: Պատ. $\vec{c}=2\vec{a}+3\vec{b}$:
16. Տրված են $\vec{a}=\{3;1\}$, $\vec{b}=\{2;-3\}$ և $\vec{c}=\{7;-5\}$ վեկտորները: $\vec{c}$ վեկտորը ներկայացնել $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների գծային կոմբինացիայով: Պատ. $\vec{c}=\vec{a}+2\vec{b}$:
17. Տրված են $\vec{a}=4\vec{i}+6\vec{j}$, $\vec{b}=-3\vec{i}+3\vec{j}$ և $\vec{c}=4\vec{i}+\vec{j}$ վեկտորները: $\vec{c}$ վեկտորը ներկայացնել $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների գծային կոմբինացիայով: Պատ. $\vec{c}=\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}$:
18. Տրված են $\vec{a}=8\vec{i}+4\vec{j}$ և $\vec{b}=4\vec{i}+\vec{j}$ վեկտորները: Գտնել $\vec{a}+\vec{b}$ և $\vec{a}-\vec{b}$ վեկտորներով կազմված անկյունը: Պատ. $\arccos\frac{63}{65}$:
19. Գտնել $\vec{a}=\{1;2\}$ և $\vec{b}=\{2;-1\}$ վեկտորների վրա կառուցված զուգահեռագծի անկյունագծերով կազմած անկյունը: Պատ. 90^0:
20. Գտնել $5\vec{a}+\vec{b}$ և $\vec{a}-3\vec{b}$ վեկտորների վրա կառուցված զուգահեռագծի անկյունագծերի երկարությունները, եթե $|\vec{a}|=2\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=3$, իսկ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորներով կազմված անկյունը հավասար է 45^0: Պատ. 15; $\sqrt{593}$:
21. $2\vec{a}+\vec{b}$ և $\vec{a}-3\vec{b}$ վեկտորները փոխուղղահայաց են: Գտնել $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորներով կազմված անկյունը, եթե $|\vec{a}|=2|\vec{b}|$: Պատ. 60^0:

22. $\vec{b}$ վեկտորը գտնվում է xOy հարթության վրա, ուղղահայաց է $\vec{a}=-2\vec{i}+\vec{j}$ վեկտորին և $\left|\vec{b}\right|=5$: Գտնել $\vec{b}$ վեկտորի կոորդինատները: Պատ. $\vec{b}=\{1;2\}$; $\vec{b}=\{-1;-2\}$:
23. Տրված են $\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}$ և $\vec{b}=-\vec{i}+\vec{j}$: Գտնել $\vec{c}$ վեկտորի կոորդինատները, եթե այն բավարարում է $\vec{c}\cdot\vec{a}=13$ և $\vec{c}\cdot\vec{b}=-3$ պայմաններին: Պատ. $\vec{c}=\{5;2\}$:
24. Կազմել $M(-2;-5)$ կետով անցնող և $3x+4y+2=0$ ուղղին զուգահեռ ուղղի հավասարումը: Պատ. $3x+4y+26=0$:
25. Կազմել կոորդինատների սկզբնակետով անցնող և $y=4x-7$ ուղղին զուգահեռ ուղղի հավասարումը: Պատ. $y=4x$:
26. Կազմել $M(2;-3)$ կետով անցնող և $\frac{x}{3}+\frac{y}{5}=1$ ուղղին զուգահեռ ուղղի հավասարումը: Պատ. $5x+3y-1=0$:
27. Կազմել $3x-5y-11=0$ և $4x+y-7=0$ ուղիղների հատման կետով և $\left(\frac{2}{3};\frac{8}{3}\right)$ կետով անցնող ուղղի հավասարումը: Պատ. $11x+4y-18=0$:
28. Կազմել $x-2y-1=0$ և $3x+y-10=0$ ուղիղների հատման կետով և կոորդինատների սկզբնակետով անցնող ուղղի հավասարումը: Պատ. $y=\frac{1}{3}x$:
29. m-ի ո՞ր արժեքի դեպքում $y=mx+3$ ուղիղը կանցնի $y=x+5$ և $2x-y+1=0$ ուղիղների հատման կետով: Պատ. $m=\frac{3}{2}$:
30. Կազմել $M(2;1)$ կետով անցնող և $2x+3y+4=0$ ուղղին ուղղահայաց ուղղի հավասարումը: Պատ. $3x-2y-4=0$:
31. Կազմել կոորդինատների սկզբնակետով անցնող և $3x+5y-2=0$ ուղղին ուղղահայաց ուղղի հավասարումը: Պատ. $y=\frac{5}{3}x$:
32. Կազմել $M(-3;4)$ կետով անցնող և $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{3}$ ուղղին ուղղահայաց ուղղի հավասարումը: Պատ. $2x+3y-6=0$:
33. Կազմել $M(3;-2)$ կետով անցնող և $\frac{x}{2}-\frac{y}{3}=1$ ուղղին ուղղահայաց ուղղի հավասարումը: Պատ. $2x+3y=0$:
34. Գտնել $3x-y+5=0$ և $2x+y-7=0$ կազմված անկյունը: Պատ. 45^0:
35. Գտնել $2x-y-3=0$ և $3x+y-2=0$ կազմված անկյունը: Պատ. 45^0:
36. Կազմել այն ուղղի հավասարումը, որն անցնում է $(2;-3)$ կետով և զուգահեռ է $(1;2)$ և $(-1;5)$ կետերը միացնող ուղղին: Պատ. $7x-2y-20=0$:
37. Կազմել այն ուղղի հավասարումը, որն անցնում է $(1;2)$ կետով ուղղահայաց է $(4;3)$ և $(-2;1)$ կետերը միացնող ուղղին: Պատ. $3x+y-5=0$:
38. Կազմել այն ուղղի հավասարումը, որն անցնում է $(-1;-1)$ կետով և զուգահեռ է $(-2;-6)$ և $(2;1)$ կետերով անցնող ուղղին: Պատ. $5x+4y+9=0$:
39. Կազմել այն ուղղի հավասարումը, որն անցնում է $x-3y+2=0$ և $5x+6y-4=0$ ուղիղների հատման կետով և զուգահեռ է $4x+y+7=0$ ուղղին: Պատ. $12x+3y-2=0$:

40. Կազմել այն ուղղի հավասարումը, որն անցնում է $3x-y+4=0$ և $4x-6y+3=0$ ուղիղների հատման կետով և ուղղահայաց է $5x+2y+6=0$ ուղղին: Պատ. $4x-10y+1=0$:

41. Տրված են եռանկյան գագաթները՝ $A(2;2)$, $B(-2;-8)$ և $C(-6;-2)$: Կազմել A գագաթից տարված միջնագծի հավասարումը: Պատ. $7x-6y-2=0$:

42. Տրված են եռանկյան գագաթները՝ $A(0;1)$, $B(6;5)$ և $C(12;-1)$: Կազմել C գագաթից տարված տարված բարձրության հավասարումը: Պատ. $3x+2y-34=0$:

43. Տրված են եռանկյան կողմերի հավասարումները՝ $x+3y-7=0$ (AB), $4x-y-2=0$ (BC), $6x+8y-35=0$ (AC): Գտնել B գագաթից տարված բարձրության երկարությունը: Պատ. 1,3:

44. Գտնել $(-1;2)$ կետից $3x-5y-21=0$ ուղղին տարված ուղղահայացի և տրված ուղղի հետ հատման կետի կոորդինատները: Պատ. $(2;-3)$:

45. Տրված են $A(-5;-1)$ և $B(-3;4)$ կետերը: Կազմել AB հատվածի միջնուղղահայացի հավասարումը: Պատ. $4x+10y+1=0$:

46. Տրված են եռանկյան գագաթները՝ $A(3;3)$, $B(5;-3)$ և $C(0;-1)$: Կազմել C գագաթից տարված տարված բարձրության հավասարումը: Պատ. $x-3y-3=0$:

47. Տրված են եռանկյան գագաթները՝ $A(5;-3)$, $B(0;-1)$ և $C(3;3)$: Գտնել A գագաթից տարված բարձրության երկարությունը: Պատ. 5,2:

48. Տրված են քառակուսու երկու հակադիր գագաթները՝ $A(-2;7)$ և $C(5;4)$: Կազմել նրա անկյունագծերի հավասարումները: Պատ. $3x+7y-43=0$; $7x-3y+6=0$:

49. Գտնել $5x-y+1=0$ ուղղին՝ կոորդինատական առանցքների հետ նրա հատման կետերում տարված ուղղահայացների հավասարումները:
Պատ. $5x+25y+1=0$; $x+5y-5=0$:

50. xOy հարթության վրա գտնել այն կետի կոորդինատները, որը հավասարապես է հեռացված $(2;3)$, $(4;2)$ և $(-1;0)$ կետերից: Պատ. $\left(\frac{11}{6};\frac{1}{6}\right)$:

51. Տրված են ABC եռանկյան երկու բարձրությունների հավասարումները՝ $5x+3y-4=0$, $3x+8y+13=0$ և $B(-4;-5)$ գագաթը: Կազմել AB և BC կողմերի հավասարումները:
Պատ. $3x-5y-13=0$; $8x-3y+17=0$:

52. Տրված են ուղղանկյան երկու կողմերի հավասարումները՝ $4x+y+6=0$ և $x-4y+10=0$, ինչպես նաև գագաթներից մեկը՝ $C(3;-3)$: Կազմել C գագաթով անցնող անկյունագծի հավասարումը: Պատ. $x+y=0$:

53. Տրված են զուգահեռագծի երկու կողմերի հավասարումները՝ $x-4y=0$, $x+y+5=0$, ինչպես նաև անկյունագծերի հատման կետը՝ $(2;-2)$: Կազմել մյուս կողմերի հավասարումները: Պատ. $x+y-5=0$; $x-4y-20=0$:

54. Գտնել $3x+y-3\sqrt{10}=0$ և $6x+2y+5\sqrt{10}=0$ զուգահեռ ուղիղների միջև եղած հեռավորությունը: Պատ. 5,5:

55. Գտնել $5x-12y+28=0$ և $5x-12y+15=0$ զուգահեռ ուղիղների միջև եղած հեռավորությունը: Պատ. 1:

56. Տրված են սեղանի հիմքերի հավասարումները՝ $2x+y-5=0$ և $4x+2y-7=0$: Գտնել սեղանի բարձրության երկարությունը: Պատ. $0{,}3\sqrt{5}$:

57. $2x+3y-6=0$ ուղղի վրա գտնել կետ, որը հավասարապես է հեռացված $(4;4)$ և $(6;1)$ կետերից: Պատ. $\left(\frac{17}{8};\frac{7}{12}\right)$:

58. $4x+3y-12=0$ ուղղի վրա գտնել կետ, որը հավասարապես է հեռացված $(-1;-2)$ և $(1;4)$ կետերից: Պատ. $(3;0)$

59. Կազմել այն ուղիղների հավասարումները, որոնք անցնում են $M(5;1)$ կետով և $2x+y-4=0$ ուղղի հետ կազմում են 45^0 անկյուն: Պատ. $x+3y-8=0$:

60. Կազմել այն ուղղի հավասարումը, որը զուգահեռ է $5x+12y+2=0$ ուղղին և գտնվում է նրանից 3 միավոր հեռավորության վրա: Պատ. $5x+12y-37=0$; $5x+12y+41=0$:

61. Կազմել $x+y-5=0$ և $7x-y-19=0$ ուղիղներով կազմված անկյունների կիսորդների հավասարումները: Պատ. $3x+y-11=0$; $x-3y+3=0$:

62. Կազմել $3x+4y-9=0$ և $12x+9y-8=0$ ուղիղներով կազմված անկյունների կիսորդների հավասարումները: Պատ. $3x-3y+19=0$; $3x+3y-5=0$:

63. Տրված են եռանկյան գագաթները՝ $A(1;1)$, $B(10;13)$, $C(13;6)$: Կազմել A գագաթից տարված կիսորդի հավասարումը: Պատ. $7x-9y+2=0$:

64. Կազմել $x^2+y^2=R^2$ շրջանագծին նրա $(x_0;y_0)$ կետում տարված շոշափողի հավասարումը: Պատ. $x_0x+y_0y=R^2$:

65. Կազմել $(-5;-5)$ կետով անցնող և $x^2+y^2=10$ շրջանագծին շոշափող ուղիղների հավասարումը: Պատ. $x-3y-10=0$; $3x-y+10=0$:

66. Կազմել $x^2+y^2=13$ շրջանագծին տարված այն շոշափողների հավասարումը, որը զուգահեռ է $4x+6y-5=0$ ուղղին: Պատ. $2x+3y\pm 13=0$:

67. Կազմել $x^2+y^2+5x=0$ շրջանագծին տարված այն շոշափողների հավասարումը, որն ուղղահայաց է $4x-3y+7=0$ ուղղին: Պատ. $3x+4y+20=0$; $3x+4y-5=0$:

68. Կազմել շրջանագծի հավասարումը, որն անցնում է $(7;7)$ և $(-2;4)$ կետերով և որի կենտրոնը գտնվում է $2x-y-2=0$ ուղղի վրա: Պատ. $(x-3)^2+(y-4)^2=25$:

69. Կազմել շրջանագծի հավասարումը, որն անցնում է $(5;0)$ և $(1;4)$ կետերով և որի կենտրոնը գտնվում է $x+y-3=0$ ուղղի վրա: Պատ. $(x-2)^2+(y-1)^2=10$:

70. Կազմել այն շրջանագծի հավասարումը, որը համաչափ է $x^2+y^2=2x+4y-4$ շրջանագծին $x-y-3=0$ ուղղի նկատմամբ: Պատ. $(x-5)^2+(y+2)^2=1$:

71. Կազմել էլիպսի կանոնական հավասարումը, որն անցնում է $M\left(\frac{5}{2};\frac{\sqrt{6}}{4}\right)$ և $N\left(-2;\frac{\sqrt{15}}{5}\right)$ կետերով: Պատ. $\frac{x^2}{10}+y^2=1$:

72. Կազմել այն ուղղի հավասարումը, որն անցնում է $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ էլիպսի ձախ ֆոկուսով և ներքևի գագաթով: Պատ. $4x+3y+12=0$:

73. $x+5=0$ ուղղի վրա գտնել կետ, որը հավասարապես հեռացված լինի $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{4}=1$ էլիպսի ձախ ֆոկուսից և վերևի գագաթից: Պատ. $(-5;7)$:

74. Կազմել հիպերբոլի հավասարումը, որն անցնում է $M(\sqrt{3};\sqrt{2})$ կետով և

էքսցենտրիսիտետը հավասար է $\sqrt{2}$-ի: Պատ. $x^2-y^2=1$:

75. Կազմել $M(9;8)$ կետով անցնող հիպերբոլի հավասարումը, եթե հայտնի են նրա ասիմպտոտների հավասարումները՝ $y=\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}x$: Պատ. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{8}=1$:

76. Կազմել հիպերբոլի հավասարումը, եթե նրա ֆոկուսների միջև եղած հեռավորություն հավասար է 10-ի և տրված են ասիմպտոտների հավասարումները՝ $y=\pm\frac{1}{4}x$: Պատ. $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$:

77. Կազմել այն հիպերբոլի հավասարումը, որի գագաթները և ֆոկուսները գտնվում են համապատասխանաբար $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{5}=1$ էլիպսի ֆոկուսներում և գագաթներում:

Պատ. $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{5}=1$:

78. Կազմել այն պարաբոլի հավասարումը, որի ֆոկուսը գտնվում է Ox առանցքի և $4x-3y-4=0$ ուղղի հատման կետում: Պատ. $y^2=4x$:

79. $y^2=8x$ պարաբոլի վրա գտնել կետ, որի հեռավորությունը պարաբոլի դիրեկտրիսայից հավասար լինի 4-ի: Պատ. $M_1(2;4)$; $M_2(2;-4)$:

80. Կազմել պարաբոլի հավասարումը, եթե հայտնի է, որ նրա գագաթը գտնվում է կոորդինատների սկզբնակետում, սիմետրիկ է Ox առանցքի նկատմամբ և $y=x$ ուղղից կտրում է $4\sqrt{2}$ երկարությամբ լար: Պատ. $y^2=4x$; $y^2=-4x$:

81. $y^2=2x$ պարաբոլը կոորդինատների սկզբնակետով անցնող ուղղից կտրում է $\frac{3}{4}$ երկարությամբ լար: Գտնել այդ ուղղի հավասարումը: Պատ. $y=\pm 2\sqrt{2x}$:

82. $y^2=32x$ պարաբոլի վրա գտնել կետ, որի հեռավորությունը $4x+3y+10=0$ ուղղից հավասար լինի 2-ի: Պատ. $M_1(0;0)$, $M_2(18;-24)$:

83. Տրված են $\vec{a}\{3;-5;8\}$ և $\vec{b}\{-1;1;4\}$ վեկտորները: Գտնել $\vec{a}+\vec{b}$ վեկտորի երկարությունը: Պատ. 6:

84. Տրված են $\vec{a}=3\vec{i}-5\vec{j}+8\vec{k}$ և $\vec{b}=-\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k}$ վեկտորները: Գտնել $\vec{a}-\vec{b}$ վեկտորի երկարությունը: Պատ. 14:

85. Տրված են $A(7;4;-2)$ և $B(1;2;1)$ կետերը: Գտնել $\overline{AB}$ վեկտորով ուղղված $\overline{AB}^0$ միավոր վեկտորը: Պատ. $\overrightarrow{AB}^0\left\{\frac{6}{7};\frac{2}{7};-\frac{3}{7}\right\}$:

86. Գտնել $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$ վեկտորով ուղղված $\vec{a}^0$ միավոր վեկտորը:

Պատ. $\vec{a}^0=\frac{1}{3}\vec{i}+\frac{2}{3}\vec{j}+\frac{2}{3}\vec{k}$:

87. x-ի և y-ի ո՞ր արժեքների դեպքում $\vec{a}\{x;-2;5\}$ և $\vec{b}\{1;y;-4\}$ վեկտորները կլինեն համագիծ:

Պատ. $x=-\frac{5}{4}$; $y=\frac{8}{5}$:

88. m-ի և n-ի ո՞ր արժեքների դեպքում $\vec{a}=3\vec{i}-2\vec{j}+m\vec{k}$ և $\vec{b}=n\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$ վեկտորները կլինեն համագիծ: Պատ. $m=4$; $n=-\frac{3}{2}$:

89. α-ի և β-ի ո՞ր արժեքների դեպքում $\vec{a}\{3;-1;\alpha\}$ և $\vec{b}\{2;\beta;1\}$ վեկտորները կլինեն փոխուղղահայաց, եթե $|\vec{b}|=3$: Պատ. $\alpha=-4$; $\beta=2$ կամ $\alpha=-8$; $\beta=-2$:

90. m-ի ո՞ր արժեքի դեպքում $\vec{a}\{m;7;-2\}$ և $\vec{b}\{-3;m;2\}$ վեկտորները կլինեն փոխուղղահայաց:
Պատ. $m=1$:

91. m-ի ո՞ր արժեքի դեպքում $\vec{a}=m\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}$ և $\vec{b}=4\vec{i}+m\vec{j}-7\vec{k}$ վեկտորները կլինեն փոխուղղահայաց: Պատ. $m=4$:

92. α-ի ո՞ր արժեքի դեպքում $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}+3\alpha\vec{k}$ և $\vec{b}=\alpha^2\vec{i}+4\vec{j}-3\vec{k}$ վեկտորները կլինեն փոխուղղահայաց: Պատ. $\alpha=4$; $\alpha=\frac{1}{2}$:

93. Տրված են $A(-5;7;-8)$, $B(-7;9;-9)$ կետերը, $\vec{a}\{1;-3;1\}$ վեկտորը: Գտնել $\overline{AB}$ և $\vec{a}$ վեկտորներով կազմված անկյունը: Պատ. $\arccos\left(-\frac{3}{\sqrt{11}}\right)$:

94. Գտնել $\vec{b}$ վեկտորի կոորդինատները, եթե այն համագիծ է $\vec{a}=2\sqrt{2}\vec{i}-\vec{j}+4\vec{k}$ վեկտորին, Oy առանցքի հետ կազմում է բութ անկյուն և $|\vec{b}|=10$: Պատ. $\vec{b}=\{4\sqrt{2};-4;8\}$:

95. Գտնել $\vec{b}$ վեկտորի կոորդինատները, եթե այն համագիծ է $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}+\sqrt{3}\vec{k}$ վեկտորին, Oz առանցքի հետ կազմում է բութ անկյուն և $|\vec{b}|=8$: Պատ. $\vec{b}=\{-4;6;2\sqrt{3}\}$:

96. Գտնել $\vec{b}$ վեկտորի կոորդինատները, եթե այն համագիծ է $\vec{a}=3\vec{i}-4\vec{j}-12\vec{k}$ վեկտորին, Ox առանցքի հետ կազմում է բութ անկյուն և $|\vec{b}|=26$: Պատ. $\vec{b}=\{-6;8;24\}$

97. Գտնել $\vec{b}$ վեկտորի կոորդինատները, եթե այն համագիծ է $\vec{a}=\vec{i}-\vec{j}-\frac{1}{2}\vec{k}$ վեկտորին, Oz առանցքի հետ կազմում է բութ անկյուն և $|\vec{b}|=3$: Պատ. $\{2;-2;-1\}$:

98. Գտնել ABC եռանկյան AM միջնագծի երկարությունը, եթե $\overrightarrow{AB}=-3\vec{i}+4\vec{k}$, $\overrightarrow{AC}=5\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$: Պատ. $\sqrt{18}$:

99. Միևնույն կետից տարված են $\vec{a}=\{4;0;3\}$ և $\vec{b}=\{4;\sqrt{5};-2\}$ վեկտորները: Գտնել $\vec{c}^{\,0}$ միավոր վեկտորը, որն ուղղված է $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորներով կազմված անկյան կիսորդով:
Պատ. $\vec{c}^{\,0}=\left\{\frac{8}{\sqrt{70}};\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{70}};\frac{1}{\sqrt{70}}\right\}$:

100. Միևնույն կետից տարված են $\vec{a}=\{-3;0;4\}$ և $\vec{b}=\{5;2;-14\}$ վեկտորները: Գտնել $\vec{c}^{\,0}$ միավոր վեկտորը, որն ուղղված է $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորներով կազմված անկյան կիսորդով:
Պատ. $\vec{c}^{\,0}=\left\{-\frac{2}{\sqrt{6}};-\frac{1}{\sqrt{6}};-\frac{1}{\sqrt{6}}\right\}$:

101. Միևնույն կետից տարված են $\vec{a}=\{2;-3;6\}$ և $\vec{b}=\{-1;2;-2\}$ վեկտորները: Գտնել $\vec{c}$ վեկտորը, որն ուղղված է $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորներով կազմված անկյան կիսորդով և $|\vec{c}|=3\sqrt{42}$:
Պատ. $\vec{c}=\{-3;15;12\}$:

102. Միևնույն կետից տարված են $\vec{a}=\{-4;0;3\}$ և $\vec{b}=\{14;2;-5\}$ վեկտորները: Գտնել $\vec{c}$ վեկտորը, որն ուղղված է $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորներով կազմված անկյան կիսորդով և $|\vec{c}|=\sqrt{6}$:

Պատ. $\vec{c}=\{1;1;2\}$:

103. Միևնույն կետից տարված են $\vec{a}=\{0;8;-6\}$ և $\vec{b}=\{\sqrt{2};-7;7\}$ վեկտորները: Գտնել $\vec{c}$ վեկտորը, որն ուղղված է $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորներով կազմված անկյան կիսորդով և $|\vec{c}|=4$:

Պատ. $\vec{c}=\{2\sqrt{2};2;2\}$

104. m-ի ո՞ր արժեքների դեպքում $\vec{a}=m\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}$ և $\vec{b}=4\vec{i}+n\vec{j}-7\vec{k}$ վեկտորները կլինեն փոխուղղահայաց: Պատ. $m=4$:

105. Տրված են $A(0;1;-1)$, $B(3;1;-5)$ և $C(1;3;-3)$ կետերը: Գտնել $\overrightarrow{AB}$ և $\overrightarrow{AC}$ վեկտորներով կազմված անկյունը: Պատ. $\arccos\frac{11}{15}$:

106. $\vec{b}$ վեկտորը գտնվում է xOy հարթության վրա, ուղղահայաց է $\vec{a}=\vec{i}-2\vec{j}+5\vec{k}$ վեկտորին և $|\vec{b}|=2\sqrt{5}$: Գտնել $\vec{b}$ վեկտորի կոորդինատները: Պատ. $\vec{b}=\{-4;-2\}$; $\vec{b}=\{4;2\}$:

107. Գտնել m-ը և n-ը, եթե $\vec{a}=\{3;m;-1\}$ վեկտորն ուղղահայաց է $\vec{b}=\{2;1;n\}$ վեկտորին և $|\vec{a}|=|\vec{b}|$: Պատ. $m=-\frac{31}{12}$; $n=\frac{41}{12}$:

108. Գտնել $\vec{b}$ վեկտորի կոորդինատները, եթե այն համագիծ է $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ վեկտորին և բավարարում է $\vec{a}\cdot\vec{b}=3$ պայմանին: Պատ.$\vec{b}=\left\{1;\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right\}$:

109. Գտնել $\vec{b}$ վեկտորի կոորդինատները, եթե այն համագիծ է $\vec{a}=2\vec{i}-2\vec{j}+5\vec{k}$ վեկտորին և բավարարում է $\vec{a}\cdot\vec{b}=11$ պայմանին: Պատ. $\vec{b}=\left\{\frac{2}{3};-\frac{2}{3};\frac{5}{3}\right\}$:

110. Գտնել $\vec{b}$ վեկտորի կոորդինատները, եթե այն համագիծ է $\vec{a}=-\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$ վեկտորին և բավարարում է $\vec{a}\cdot\vec{b}=12$ պայմանին: Պատ. $\vec{b}=\{-2;2;-4\}$:

111. Տրված են $\vec{a}=-2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+5\vec{j}$ և $\vec{c}=4\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k}$ վեկտորները: Հաշվել $3\vec{a}-2\vec{b}$ վեկտորի պրոյեկցիան $\vec{c}$ վեկտորի ուղղության վրա: Պատ. -11:

112. Տրված են $\vec{a}=\{1;-3;4\}$, $\vec{b}=\{3;-4;2\}$ և $\vec{c}=\{-1;1;4\}$ վեկտորները: Հաշվել $\vec{a}$ վեկտորի պրոյեկցիան $\vec{b}+\vec{c}$ վեկտորի ուղղության վրա: Պատ. 5:

113. Տրված են $M(-5;7;-6)$ և $N(7;-9;9)$ կետերը: Հաշվել $\vec{a}=\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$ վեկտորի պրոյեկցիան $\overrightarrow{MN}$ վեկտորի ուղղության վրա: Պատ. 3:

114. Կազմել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է $M(2;3;-1)$ կետով, զուգահեռ է $5x-3y+2z-10=0$ հարթությանը: Պատ. $5x-3y+2z+1=0$:

115. Գտնել m-ի ո՞ր արժեքների դեպքում $2x+my-3z-1=0$ և $5x+y+3z+1=0$ հարթությունները կլինեն փոխուղղահայաց: Պատ. $m=-1$:

116. Գտնել $x+4y-z+1=0$ և $x+y-z-3=0$ հարթություններով կազմված անկյունը: Պատ $\arccos\frac{\sqrt{6}}{3}$:

117. Գտնել $x+2y-z-1=0$ և $3x-5y-7z=0$ հարթություններով կազմված անկյունը: Պատ. 90^0:

118. Գտնել $M(1;-2;3)$ կետի հեռավորությունը $\frac{x}{2}+\frac{y}{2}-\frac{z}{4}=1$ հարթությունից: Պատ. 3:

119. Ox առանցքի վրա գտնել կետ, որի հեռավորությունը $6x-7y+6z-1=0$

հարթությունից հավասար լինի 1-ի: Պատ. $(2;0;0)$ և $\left(-\frac{5}{3};0;0\right)$:

120. Oy առանցքի վրա գտնել կետ, որի հեռավորությունը $x+2y-2z-2=0$ հարթությունից հավասար լինի 4-ի: Պատ. $(0;7;0)$ և $(0;-5;0)$:

121. Oz առանցքի վրա գտնել կետ, որի հեռավորությունը $2x-y+2z-3=0$ հարթությունից հավասար լինի 5-ի: Պատ. $(0;0;9)$ և $(0;0;-6)$:

122. Տրված են $A(2;-1;-2)$ և $B(8;-7;5)$ կետերը: Կազմել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է B կետով և ուղղահայաց է AB հատվածին: Պատ. $6x-6y+7z-125=0$:

123. Տրված են $A(-7;2;-1)$ և $B(3;4;10)$ կետերը: Կազմել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է B կետով և ուղղահայաց է AB հատվածին: Պատ. $10x+2y+11z-148=0$:

124. Գտնել $3x+2y-6z-35=0$ և $3x+2y-6z-56=0$ զուգահեռ հարթությունների միջև եղած հեռավորությունը: Պատ. 3:

125.Գտնել $3x-4y+12z+26=0$ և $3x-4y+12z-39=0$ զուգահեռ հարթությունների միջև եղած հեռավորությունը: Պատ. 5:

126. Տրված են $A(1;0;-2)$, $B(2;-1;3)$ և $C(0;-3;2)$ կետերը: Կազմել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է A կետով և ուղղահայաց է $\overrightarrow{BC}$ վեկտորին: Պատ. $2x+2y+z=0$:

127. Կազմել այն հարթության հավասարումը, որի կետերը հավասարապես են հեռացված $P(1;-4;2)$ և $Q(7;1;-5)$ կետերից: Պատ. $6x+5y-7z-27=0$:

128. Տրված են $A(1;2;-4)$ և $B(3;-4;2)$ կետերը: Կազմել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է AB հատվածի միջնակետով և ուղղահայաց է AB հատվածին: Պատ. $x-3y+3z-2=0$:

129. Կազմել $M(1;-1;-1)$ կետով անցնող և $\frac{x+3}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+2}{4}$ ուղղին ուղղահայաց հարթության հավասարումը: Պատ. $2x-3y+4z-1=0$:

130. Կազմել $M(2;1;-1)$ կետով անցնող և $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+2}{-3}$ ուղղին ուղղահայաց հարթության հավասարումը: Պատ. $2x-y-3z-6=0$:

131. n-ի ո՞ր արժեքի դեպքում $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{n}=\frac{z+3}{-2}$ ուղիղը կլինի զուգահեռ $x-3y+6z+7=0$ հարթությանը: Պատ. $n=-3$:

132. m-ի ո՞ր արժեքի դեպքում $\frac{x}{m}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{-5}$ ուղիղը կլինի զուգահեռ $3x-2y+z-1=0$ հարթությանը: Պատ. $m=3$:

133. p-ի ո՞ր արժեքի դեպքում $\frac{x+3}{-1}=\frac{y}{3}=\frac{z-1}{p}$ ուղիղը կլինի զուգահեռ $2x-3y+z+2=0$ հարթությանը: Պատ. $p=11$:

134. m-ի և C-ի ո՞ր արժեքների դեպքում $\frac{x-2}{m}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-5}{-3}$ ուղիղը կլինի ուղղահայաց $3x-2y+Cz+1=0$ հարթությանը: Պատ. $m=-6$; $C=\frac{3}{2}$:

135. A-ի և n-ի ո՞ր արժեքների դեպքում $Ax-3y+2z-1=0$ հարթությունը կլինի ուղղահայաց $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{n}=\frac{z+2}{4}$ ուղղին: Պատ. $A=1$; $n=-6$:

136. A-ի և D-ի ո՞ր արժեքների դեպքում $x=3+4t$, $y=1-4t$, $z=-3+t$ ուղիղն ընկած է $Ax+2y-4z+D=0$ հարթության մեջ: Պատ. $A=3$; $D=-23$:

137. Գտնել $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{6}$ ուղղի և $2x+3y+z-1=0$ հարթության հատման կետը: Պատ. $(2;-3;6)$:

138. Գտնել $\frac{x-3}{5}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-5}{7}$ ուղղի և $x+y-z+3=0$ հարթության հատման կետը: Պատ. $(18;5;26)$:

139. Գտնել $P(5;2;-1)$ կետի պրոյեկցիան $2x-y+3z+23=0$ հարթության վրա: Պատ. $(1;4;-7)$:

140. Գտնել $P(3;0;4)$ կետի պրոյեկցիան $2x+y+z-4=0$ հարթության վրա: Պատ. $(1;-1;3)$:

141. Տրված է $x+y-2z-6=0$ հարթությունը և $M(1;1;1)$ կետը: Գտնել տրված հարթության նկատմամբ M կետի համաչափ N կետի կոորդինատները: Պատ. $N(3;3;-2)$:

142. A կետը գտնվում է $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{1}$ ուղղի վրա, և նրա հեռավորությունը $x+y+z+3=0$ հարթությունից հավասար է $\sqrt{3}$-ի: Գտնել A կետի կոորդինատները: Պատ. $A(1;0;-1)$, $A(-1;-3;-2)$:

143. Տրված է $\frac{x+2}{1}=\frac{y+17}{3}=\frac{z+8}{2}$ ուղիղը և $M(2;-5;7)$ կետը: Գտնել տրված ուղղի նկատմամբ M կետի համաչափ N կետի կոորդինատները: Պատ. $N(4;1;-3)$

144. Գտնել $P(1;-1;-2)$ կետի հեռավորությունը $\frac{x+3}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-8}{-2}$ ուղղից: Պատ. 7:

145. Տրված է $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{-1}$ ուղիղը և $M(1;1;1)$ կետը: Գտնել տրված ուղղի նկատմամբ M կետի համաչափ N կետի կոորդինատները: Պատ. $N\left(\frac{9}{7};-\frac{4}{7};-\frac{22}{7}\right)$

146. Գտնել $P(2;3;-1)$ կետի հեռավորությունը $\frac{x-5}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z+25}{-2}$ ուղղից: Պատ. 21:

Գլուխ 2. Գծային հանրահաշվի տարրերը

§ 1. Գծային /վեկտորական/ n չափանի տարածություններ

<u>**Սահմանում**</u>. Գծային տարածություն կանվանենք այն R բազմությունը, որի $x, y, z, \ldots$ տարրերի համար սահմանված է գումարման և տարրն իրական թվով բազմապատկման գործողությունը:

Ընդ որում $\forall x \in R$ և $y \in R \Rightarrow x + y \in R$ և $\forall \lambda$ իրական թվի և $\forall x \in R \Rightarrow \lambda x \in R$:

Այդ գումարման և իրական թվով բազմապատկման գործողությունները պետք է բավարարեն հետևյալ աքսիոմներին.

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. $\exists 0 \in R$ /զրոյական տարր/, որի համար $x + 0 = x$, $\forall x \in R$
4. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$
5. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$
6. $\lambda(\mu \cdot x) = (\lambda \mu)x$
7. $1 \cdot x = x$
8. $\forall x \in R$ $\exists y \in R$, որի համար $x + y = 0$:

Գծային տարածությունը կոչվում է զրոյական, եթե նա պարունակում է միայն զրոյական տարրը:

<u>Սահմանում</u>. n-չափանի վեկտոր կոչվում է մաթեմատիկական օբյեկտը, որը կազմված է կարգավորված n իրական թվերից՝ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ որը գրվում է հետևյալ տեսքով՝ $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$:

Սահմանված n-չափանի վեկտորը, երբ $n = 2$ կամ $n = 3$, կարելի է մեկնաբանել որպես հարթության կամ տարածության վեկտորի կոորդինատներ: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ կոչվում են վեկտորի կոորդինատներ:

<u>Սահմանում</u>. Երկու n-չափանի վեկտորները $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ և $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ կոչվում են հավասար, եթե հավասար են նրանց համապատասխան կոորդինատները՝ $x_i = y_i$, որտեղ $i = 1, 2, \ldots, n$:

Եթե n-չափանի վեկտորների համար սահմանված են գումարման և թվով բազմապատկման գործողությունները, որոնք բավարարում են նշված ութ աքսիոմներին, այդ դեպքում n-չափանի վեկտորների բազմությունը կոչվում է գծային -վեկտորական տարածություն կամ, պարզապես, n-չափանի վեկտորական տարածություն:

Անհրաժեշտություն է առաջանում ճշտելու այն հարցը, թե ինչպես է կատարվելու n-չափանի վեկտորների գումարման և թվով բազմապատկման գործողությունները: Այսինքն սահմանենք n-չափանի վեկտորների գումարման և թվով բազմապատկման գործողությունները:

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ և $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ վեկտորների $z = x + y$ գումար կանվանենք այն $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$ վեկտորը, որը հավասար է գումարելի վեկտորների համապատասխան կոորդինատների գումարին:

x վեկտորի և k իրական թվի արտադրյալ կանվանենք $y = kx$ վեկտորը, որը հավասար է $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (kx_1, kx_2, \ldots, kx_n)$ վեկտորին:

$x = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ և $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ n-չափանի վեկտորների զույգի համար համապատասխանության մեջ դնենք հետևյալ թիվը՝

$$\left(\vec{x}\cdot\vec{y}\right)=x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n,$$

որը կանվանենք այդ վեկտորների սկալյար արտադրյալ: Այս կերպ սահմանված սկալյար արտադրյալը օժտված է հարթության վրա և տարածության մեջ սահմանված վեկտորների սկալյար արտադրյալի հատկություններով.

1. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$
2. $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$
3. $\lambda\cdot\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=\left(\lambda\vec{a}\right)\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\left(\lambda\vec{b}\right)$
4. $\left(\vec{a}\cdot\vec{a}\right)\geq 0$:

<u>Սահմանում</u>. Եթե x և y վեկտորների սկալյար արտադրյալը հավասար է զրոյի, ապա այդ վեկտորները կոչվում են օրթոգոնալ:

n-չափանի վեկտորական տարածության, որի մեջ սահմանված է սկալյար արտադրյալի գործողությունը, որը բավարարում է 1-4 պայմաններին, կոչվում է n-չափանի էվկլիդյան տարածություն:

Մասնավորապես, $\left(x\cdot x\right)=x_1\cdot x_1+x_2\cdot x_2+\ldots+x_n\cdot x_n=x_1^2+x_2^2+\ldots x_n^2$,

$$\left|\vec{x}\right|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots.+x_n^2},$$

այս թիվը կոչվում է x n-չափանի վեկտորի երկարություն կամ մոդուլ:

<u>Սահմանում</u>. x և y վեկտորների կազմած անկյուն էվկլիդյան տարածության մեջ կոչվում է այն φ թիվը, որը որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$\cos\varphi=\frac{\left(x\cdot y\right)}{|x||y|},\ 0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}:$$

<u>Սահմանում.</u> Կասենք x n-չափանի վեկտորն հանդիսանում է $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots\vec{a}_k$ վեկտորների գծային կոմբինացիա, եթե գոյություն ունեն $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k$ իրական թվեր, որոնց համար տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը.

$$x=\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\ldots.+\lambda_k\vec{a}_k:$$

<u>Սահմանում .</u> R տարածության մեջ $a_1,a_2,\ldots a_k$ վեկտորները կանվանենք գծորեն կախված, եթե գոյություն ունեն $\lambda_1,\lambda_2,\ldots.,\lambda_k$ թվեր, որոնցից գոնե մեկը հավասար չէ զրոյի, որոնց համար տեղի ունի՝

$$\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\ldots.+\lambda_k\vec{a}_k=0, \qquad (1)$$

Եթե վեկտորները գծորեն կախյալ են, ապա նրանցից գոնե մեկը կհանդիսանա մյուսների գծային կոմբինացիա: Դեշտ է նկատել, որ հարթության մեջ կամայական երեք, իսկ տարածության մեջ կամայական չորս վեկտորներ գծորեն կախված են:

<u>Սահմանում .</u> $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots\vec{a}_k$ վեկտորները կանվանենք գծորեն անկախ , եթե (1) հավասարությունը տեղի ունի միայն և միայն այն դեպքում, երբ $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_k=0$:

Ենթադրենք (1) հավասարության մեջ $\lambda_1 \neq 0$, կունենանք՝

$$\vec{a}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\vec{a}_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1}\vec{a}_3 - ...... - \frac{\lambda_k}{\lambda_1}\vec{a}_k :$$

Ընդունելով՝

$$-\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \mu_2, -\frac{\lambda_3}{\lambda_1} = \mu_3, -, ..., -\frac{\lambda_k}{\lambda_1} = \mu_k,$$

կունենանք՝

$$\vec{a}_1 = \mu_2\vec{a}_2 + \mu_3\vec{a}_3 + ... + \mu_k\vec{a}_k : \tag{2}$$

(2) հավասարության մեջ $\vec{a}_1$ վեկտորը արտահայտվում է $\vec{a}_2, \vec{a}_3, ..., \vec{a}_k$ վեկտորների միջոցով, այսինքն $\vec{a}_1$-ը հանդիսանում է $\vec{a}_2, \vec{a}_3, ..., \vec{a}_k$ վեկտորների գծային կոմբինացիան:

Գծային կախվածության հատկությունները

1. Եթե վեկտորների համակարգը կազմված է մեկ վեկտորից $(\vec{a} \neq 0)$, ապա նա գծորեն անկախ է:
   Իրոք, $\lambda a = 0$ և $a \neq 0$, հետևում է, որ համակարգը գծորեն անկախ է: Համակարգը կլինի գծորեն կախված, եթե $a = 0$:
2. Եթե վեկտորների համակարգի վեկտորներից մեկը հանդիսանում է որևէ ենթախմբի գծային կոմբինացիա, ապա համակարգը գծորեն կախված է:
   Ենթադրենք տրված են $x, a_1, a_2, \ldots, a_n$ վեկտորները, ընդ որում՝

$$\vec{x} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_k\vec{a}_k, \text{ որտեղ } k \leq n:$$

Վերջին հավասարությունը գրենք հետևյալ տեսքով՝

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_k\vec{a}_k + 0\cdot\vec{a}_{k+1} + \ldots + 0\cdot\vec{a}_n + (-1)\cdot\vec{x} = 0,$$

որտեղ գործակիցներից ոչ բոլորն են հավասար զրոյի:
Այսինքն՝ $x, a_1, a_2, \ldots, a_n$ գծորեն կախված են:

3. Եթե $a_1, a_2, \ldots, a_n$ վեկտորների համակարգի մեջ գոյություն ունի զրոյական վեկտոր, ապա համակարգը գծորեն կախված է:
   Ենթադրենք a_1-ը հանդիսանում է զրոյական վեկտոր, այդ դեպքում (1) հավասարությունը տեղի ունի $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = ... = \lambda_k = 0$, որտեղից ըստ գծային կախվածության սահմանման հետևում է, որ համակարգը գծորեն կախված է:

Եթե R գծային տարածության մեջ գոյություն ունի n հատ գծորեն անկախ վեկտորներ, իսկ ցանկացած $n+1$ վեկտորներ գծորեն կախված են, ապա R-ը կոչվում է n-չափանի գծային տարածություն:

Այլ կերպ ասած, տարածության չափողականությունը դա նրա մեջ մտնող գծորեն անկախ վեկտորների առավելագույն թիվն է:

n հատ գծորեն անկախ վեկտորների համախմբությունը n-չափանի գծային տարածության մեջ կանվանենք բազիս: Տեղի ունի հետևյալ թեորեմը:

<u>Թեորեմ1</u>. Յուրաքանչյուր վեկտոր n-չափանի գծային տարածության մեջ միարժեք ձևով է ներկայացվում բազիսային վեկտորների գծային կոմբինացիայով:

x վեկտորի համար գոյություն կունենան այնպիսի $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \lambda$ թվեր, որ

$$\lambda_1\vec{e}_1+\lambda_2\vec{e}_2+\ldots+\lambda_n\vec{e}_n+\lambda\vec{x}=0, \tag{3}$$

ընդ որում $\lambda \neq 0$, հակառակ դեպքում, եթե $\lambda = 0$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ թվերից որևէ մեկը պետք է զրոյից տարբեր լիներ, այդ դեպքում $e_1, e_2, \ldots, e_n$ վեկտորները կլինեն գծորեն կախված և չեն հանդիսանա բազիս: Հետևաբար,

$$\vec{x}=-\frac{\lambda_1}{\lambda}\vec{e}_1-\frac{\lambda_2}{\lambda}\vec{e}_2-\ldots-\frac{\lambda_n}{\lambda}\vec{e}_n$$

կամ

$$\vec{x}=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+\ldots+x_n\vec{e}_n, \tag{4}$$

որտեղ՝ $x_i=-\frac{\lambda_i}{\lambda}, i=1,2,\cdots,n$:

(4) հավասարության մեջ x-ը միարժեք ձևով է արտահայտվում $e_1, e_2, \ldots, e_n$ վեկտորների միջոցով, ենթադրենք գոյություն ունի մեկ այլ

$$\vec{x}=y_1\vec{e}_1+y_2\vec{e}_2+\ldots+y_n\vec{e}_n \tag{5}$$

հավասարություն:
(5)-ից հանելով (4)-ը, կստանանք՝

$$(y_1-x_1)\vec{e}_1+(y_2-x_2)\vec{e}_2+\ldots+(y_n-x_n)\vec{e}_n=0,$$

$e_1, e_2, \ldots, e_n$ վեկտորների գծային անկախությունից հետևում է, որ

$$y_1-x_1=y_2-x_2=\ldots=y_n-x_n=0$$

կամ

$$y_1=x_1, y_2=x_2, \ldots, y_n=x_n:$$

§ 2. Մատրիցներ: Նախնական տեղեկություններ մատրիցների մասին

Մատրիցի հասկացողությանը և նրա հետ կապված մաթեմատիկային վերաբերող այն բաժինը, որը զբաղվում է մատրիցների ուսումնասիրությամբ, կոչվում է մատրիցային հանրահաշիվ և շատ կարևոր կիրառություն ունի տնտեսագիտության մեջ:

Այս հանգամանքը բացատրվում է նրանով, որ տնտեսագիտական օբյեկտների մաթեմատիկական մոդելները շատ հեշտությամբ և պարզ ներկայացվում են մատրիցների միջոցով:

$m \times n$ չափանի մատրից է կոչվում ուղղանկյուն աղյուսակը, որն ունի m տողեր և n սյուներ:

Այն թվերը, որոնցից կազմված է մատրիցը, կոչվում են մատրիցի էլեմենտներ կամ տարրեր:Մատրիցները նշանակվում են լատինական այբուբենի մեծատառերով A,B,C, իսկ

մատրիցի էլեմենտները նշանակվում են փոքրատառերով՝ կրկնակի ինդեքսով՝ a_{ij} , որտեղ i-ն տողի համարն է, իսկ j-ն՝ սյան:
Օրինակ՝

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1j} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2j} & a_{2n} \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{ij} & a_{in} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mj} & a_{mn} \end{pmatrix}$$

կամ կարճ գրության ձևով $A=\left(a_{ij}\right),\ i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n$:

Օրինակ՝ $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$:

Մատրիցների նշանակման համար օգտագործվում են նաև այլ նշանակումներ $[\ ]$:
A և B մատրիցները, որոնք ունեն նույն չափողականությունը, կոչվում են հավասար, եթե հավասար են նրանց համապատասխան էլեմենտները՝ $a_{ij}=l_{ij}$, ցանկացած i=1,2,…,m և j=1,2,…,n համար:
Օրինակի համար, մատրիցների օգնությամբ շատ պարզ ձևով կներկայացվի հետևյալ տնտեսագիտական կապը: Ռեսուրսների բաշխման աղյուսակը տնտեսագիտական տարբեր ճյուղերի հետ.

	տնտ.	ճյուղեր
Ռեսուրս	Արտադրություն	Գյուղատնտեսություն
էներգիա.	5,7	3,1
ջուր	2,8	3,4
աշխատանք	3,8	4,1

Տվյալ աղյուսակը կոմպակտ ձևով կներկայացվի հետևյալ կերպ.

$$A=\begin{pmatrix} 5{,}7 & 3{,}1 \\ 2{,}8 & 3{,}4 \\ 3{,}8 & 4{,}1 \end{pmatrix}:$$

Այս գրության ձևում $a_{11}=5{,}7$ ցույց է տալիս, որ 5,7 հանդիսանում է արտադրության ծախսած էներգիայի քանակը, իսկ $a_{22}=3{,}4$ գյուղատնտեսության մեջ օգտագործված ջրային ռեսուրսների քանակը:
<u>Մատրիցների տեսքերը</u>. Մատրիցը, որը կազմված է մեկ տողից, կոչվում է տող մատրից, որը կազմված է մեկ սյունից կոչվում է սյուն մատրից՝

$$A=(a_{11},a_{12},...,a_{1n}),\quad B=\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{m1} \end{pmatrix}:$$

Մատրիցը կոչվում է քառակուսային, եթե m=n, զրոյական, եթե նրա բոլոր տարրերը հավասար են 0-ի՝ $a_{ij}=0$ $(i=\overline{1,m},\quad j=\overline{1,n}$):

a_{ij} էլեմենտները, որոնց համար տեղի ունի $i=j$ պայմանը, կոչվում են անկյունագծային և կազմում են մատրիցի գլխավոր անկյունագիծը:
Քառակուսային մատրիցը կոչվում է միավոր մատրից, եթե նրա գլխավոր անկյունագծի բոլոր տարրերը հավասար են մեկի, իսկ մնացածները՝ 0-ի:

$$E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}:$$

§ 3. Գործողություններ մատրիցների հետ

Մատրիցների հետ, ինչպես և թվերի հետ, կարելի է կատարել մի շարք գործողություններ, որոնց մի մասը նման է թվերի հետ կատարվող գործողություններին, իսկ մյուս մասն ունի որոշակի առանձնահատկություն:

1. Մատրիցի բազմապատկումը թվով.

A մատրիցի բազմապատկումը λ թվով կոչվում է $B=\lambda A$ մատրիցը, որի էլեմենտները՝ $b_{ij}=\lambda a_{ij}$, որտեղ $i=\overline{1,m},\quad j=\overline{1,n}$:

Օրինակ. Եթե $A=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 6 & 5\end{pmatrix}$, ապա $5A=\begin{pmatrix}15 & 20\\ 30 & 25\end{pmatrix}$,

հետևաբար, ընդհանուր արտադրիչը մատրիցի բոլոր էլեմենտներից կարելի է դուրս հանել, այսինքն՝ ընդհանուր արտադրիչը դուրս հանել մատրիցի նշանի տակից, օրինակ

$$\begin{pmatrix}6 & 4 & 8\\ 12 & 2 & 0\end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix}3 & 2 & 4\\ 6 & 1 & 0\end{pmatrix}:$$

Մասնավորապես, A մատրիցի բազմապատկումը 0-ով հանդիսանում է 0-ական մատրից՝

$$0\cdot A=0:$$

2.Մատրիցների գումարումը.

Երկու նույն $m\times n$ չափանի A և B մատրիցների գումար կոչվում է այն $C=A+B$ մատրիցը, որի էլեմենտներն են՝ $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$, $i=\overline{1,m},\quad j=\overline{1,n}$:

Օրինակ. $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0, & 1 & 2\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $C=A+B=$ $\begin{pmatrix}2 & 4 & 6\\ 3 & 3 & 5\end{pmatrix}$:
Մասնավոր դեպքում՝

$$A+0=A:$$

3. Մատրիցների հանումը.

Նույն $m\times n$ չափանի A և B մատրիցների տարբերությունը որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝ $A-B=A+(-1)B$ կամ $c_{ij}=a_{ij}-b_{ij}$:

4. <u>Մատրիցների բազմապատկումը.</u>

Երկու $m\times k$ չափանի A մատրիցի և $k\times n$ չափանի B մատրիցի արտադրյալ կոչվում է $m\times n$ չափանի C մատրիցը, որի յուրաքանչյուր c_{ij} էլեմենտը հավասար է A մատրիցի i-րդ տողի և B մատրիցի j-րդ սյան համապատասխան էլեմենտների արտադրյալների գումարին՝

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{ik}b_{kj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj},$$

$$A_{m\times k}\cdot B_{k\times n}=C_{m\times n}:$$

A և B մատրիցների արտադրյալը գոյություն ունի, եթե նրանք համաձայնեցված են, A մատրիցի սյուների քանակը հավասար է B մատրիցի տողերի քանակին:

Այստեղ կարևոր է նշել, որ A և B մատրիցների համաձայնեցվածությունից չի բխում B և A մատրիցների համաձայնեցվածությունը: Սակայն, եթե A և B մատրիցները քառակուսային են, ապա նրանք փոխադարձ համաձայնեցված են: Օրինակ՝

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}&c_{13}\\c_{21}&c_{22}&c_{23}\\c_{31}&c_{32}&c_{33}\end{pmatrix}:$$

Այստեղ A մատրիցը համաձայնեցված է B մատրիցի հետ, իսկ B-ն A-ի հետ համաձայնեցված չէ, սակայն B-ն և C-ն փոխհամաձայնեցված են:

Այսպիսով, A և B մատրիցների արտադրյալ կոչվում է C մատրիցը, որի յուրաքանչյուր c_{ij} էլեմենտը հավասար է A մատրիցի i-րդ տողի և B մատրիցի j-րդ սյան էլեմենտների արտադրյալների գումարին:

<u>Օրինակ.</u> Հաշվել $A\cdot B$ արտադրյալը, որտեղ

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2\\3&1&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1&0&1\\5&1&4\\-2&0&1\end{pmatrix},\quad A\bullet B=C:$$

Հաշվենք՝ $C=\begin{pmatrix}1(-1)+0\cdot5+2(-2),1\cdot0+0\cdot1+0,2,1\cdot1+0\cdot4+2\cdot1\\3(-1)+5\cdot1+0(-2)3\cdot0+1\cdot1+0,0,3\cdot1+1\cdot4+0\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&0&3\\2&1&7\end{pmatrix}:$

Սահմանումներից հետևում է, որ A և B մատրիցները կարելի է իրար հետ գումարել միայն այն դեպքում, երբ նրանք ունեն միևնույն չափողականությունը, իսկ արտադրյալը գոյություն կունենա միայն այն դեպքում, երբ A-ի սյուների քանակը հավասար լինի B-ի տողերի քանակին:

Թվերի գումարման և բազմապատկման շատ հատկություններ ճիշտ են նաև մատրիցների համար.

1) $A+B=B+A$
2) $(A+B)+C=A+(B+C)$
3) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$
4) $A(B+C)=AB+AC$
5) $(A+B)C=AC+BC$
6) $\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B)$
7) $A(BC)=(AB)C$ ։

Սակայն գոյություն ունեն մատրիցի որոշ հատկություններ, որոնք առանձնահատուկ են.
1. եթե A և B մատրիցների $A\cdot B$ արտադրյալը գոյություն ունի, ապա $B\cdot A$ արտադրյալը կարող է գոյություն չունենալ: Իրոք, եթե $A\cdot B$ տեղի ունի, ապա $B\cdot A$ գոյություն չունի, քանի որ առաջին մատրիցի սյուների քանակը հավասար չէ երկրորդ մատրիցի տողերի քանակին:
2. երկրորդ առանձնահատկությունը կայանում է նրանում, որ $A\cdot B$ և $B\cdot A$ արտադրյալները գոյություն ունեն, ապա նրանք կարող են իրար հավասար չլինեն՝ $AB\neq BA$ կամ տարբեր չափի մատրիցներ լինեն:
Մասնավոր դեպքում, կոմուտատիվության(տեղափոխելիության) հատկությամբ օժտված է քառակուսային A մատրիցի արտադրյալը միավոր մատրիցի հետ՝

$$AE=EA=A:$$

Այսպիսով, միավոր մատրիցը բազմապատկման ժամանակ կատարում է նույն դերը, ինչ որ 1 թիվը բազմապատկման ժամանակ:
3. երկու ոչ զրոյական A և B մատրիցների արտադրյալը կարող է հավասար լինել զրոյի՝ $A\cdot B=0$, որտեղից չի հետևում, որ կամ $A=0$ կամ $B=0$, օրինակ՝

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\neq 0 \quad B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\neq 0 => AB=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=0:$$

<u>Մատրիցների աստիճան բարձրացնելը.</u>

A քառակուսային մատրիցը բարձրացնել ամբողջ դրական աստիճան, նշանակում է՝ $A^m=\underbrace{A\cdot A\cdot\dots\cdot A}_{m}$:

Նշենք, որ աստիճան բարձրացնելու գործողությունը սահմանված է միայն քառակուսային մատրիցների համար:

Ըստ սահմանման՝ $A^0=E, A^1=A$: Դժվար չէ ցույց տալ, որ

$$A^m\cdot A^k=A^{m+k}, (A^m)^k=A^{mk}:$$

Անհրաժեշտ է նկատել, որ $A^m=0$ հավասարությունից չի հետևում, թե A մատրիցը հավասար է 0-ի:

<u>Տրանսպոնացված /շրջված/մատրից.</u>

A մատրիցի շրջված մատրից է կոչվում A^T կամ A' մատրիցը, որի մեջ փոխված է տողերի և սյուների տեղերը: Օրինակ՝

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{pmatrix} \quad A^T = A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{m2} \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{mn} \end{pmatrix}:$$

Սահմանումից հետևում է, որ եթե A մատրիցն ունի $m \times n$ չափողականություն, ապա A^T ունի $n \times m$ չափողականություն:

Դժվար չէ ստուգել`

$$(A^T)^T = A,\ (A+B)^T = A^T + B^T,\ (\lambda A)^T = \lambda A^T, (AB)^T = B^T A^T:$$

Եթե A քառակուսային մատրիցի համար $A^T = A$, ապա A մատրիցը կոչվում է համաչափ և նրա համար տեղի ունի $a_{ij} = a_{ji}$:

Խնդիրներ

1. Գտնել մատրիցների գումարը.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}:$$

Պատ. $A + B = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 11 \\ 4 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}:$

2. Գտնել $2A + 5B$ մատրիցը, եթե

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Պատ. $2A + 5B = \begin{pmatrix} 16 & 25 \\ 13 & -8 \end{pmatrix}:$

3. Տրված է $A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 7 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ մատրիցը: Ինչպիսի B մատրից պետք է գումարել A մատրիցին, որպեսզի ստանանք միավոր մատրից:

Պատ. $B = \begin{pmatrix} -4 & -8 & -4 \\ -3 & -1 & -5 \\ -7 & -6 & 1 \end{pmatrix}:$

4. Տրված են երեք մատրիցներ:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & -4 & 5\\ 2 & 1 & -3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 3 & 4\\ 1 & -5 & 6\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}3 & 4 & 5\\ 1 & -3 & 2\\ 8 & 6 & -7\end{pmatrix}$$

Գտնել $3A+4B-2C$ մատրիցը:

Պատ. $\begin{pmatrix}1 & -12 & -4\\ 15 & 6 & 27\\ -6 & -29 & 29\end{pmatrix}$:

5. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -3\\ 4 & -2 & 1\\ 5 & 6 & -7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & 1 & -4\\ 2 & 5 & 6\end{pmatrix}$

Գտնել $3A+2B$:

Պատ. $\begin{pmatrix}8 & 3 & -5\\ 18 & -4 & -5\\ 19 & 28 & -9\end{pmatrix}$:

6. Գտնել AB և BA արտադրյալները, եթե

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 2 & 0 & 4\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 2\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

Պատ. $AB=\begin{pmatrix}8 & 0 & 7\\ 16 & 10 & 4\\ 13 & 5 & 7\end{pmatrix}$;

$BA=\begin{pmatrix}4 & 6 & 6\\ 1 & 7 & 3\\ 8 & 11 & 14\end{pmatrix}$:

7. Գտնել A^3, եթե $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$:

Պատ. $A^3=\begin{pmatrix}47 & 78\\ 39 & 86\end{pmatrix}$

8. Գտնել $2A^2+3A+5E$ մատրիցային բազմանդամի արժեքը, եթե

$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 1\\ 4 & 1 & 1\end{pmatrix}$, իսկ E-ն երրորդ կարգի միավոր մատրից է:

Պատ. $\begin{pmatrix}28 & 15 & 16\\ 19 & 36 & 15\\ 30 & 19 & 28\end{pmatrix}$:

9. Տրված է $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$ մատրիցը: Գտնել A^2+A+E մատրիցների գումարը:

Պատ. $\begin{pmatrix}9 & 6 & 6\\ 6 & 9 & 6\\ 6 & 6 & 9\end{pmatrix}$:

10. Գտնել AB արտադրյալը, եթե

$$A=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 6 & -1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -3 & 2\end{pmatrix};$$

Պատ. $AB=\begin{pmatrix}-9 & 13\\ 15 & 4\end{pmatrix}$:

11. Գտնել AB արտադրյալը, եթե

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}:$$

Պատ. $AB=\begin{pmatrix}-2 & -1 & -1\\ 4 & 5 & 2\end{pmatrix}$:

12. Գտնել AB արտադրյալը, եթե

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}:$$

Պատ. $AB=\begin{pmatrix}9 & 3\\ 10 & 3\end{pmatrix}$:

13. Գտնել A և B մատրիցների AB և BA արտադրյալները.

$$A=\begin{pmatrix}5 & 3 & -7\\ -1 & 6 & -3\\ 2 & -4 & 1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}4 & -1 & 3\\ 4 & -2 & -6\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix}:$$

Պատ. $AB=\begin{pmatrix}18 & -11 & -24\\ 14 & -11 & -48\\ -6 & 6 & 33\end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix}27 & -6 & -22\\ 10 & 24 & -28\\ 16 & -6 & -11\end{pmatrix}$:

14. Գտնել A և B մատրիցների AB և BA արտադրյալները:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & -1\\ 3 & 1 & 0 & 2\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\\ 3 & -2\\ 4 & -1\end{pmatrix}:$$

Պատ. $AB=\begin{pmatrix}4 & -2\\ 15 & 1\end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix}5 & 1 & 4 & 0\\ 1 & 0 & 2 & -1\\ -3 & -2 & 6 & -7\\ 1 & -1 & 8 & -6\end{pmatrix}$:

15. Գտնել A և B մատրիցների AB և BA արտադրյալները.

$$A=\begin{pmatrix}4 & -3\\ 2 & 5\end{pmatrix} \quad \text{և} \quad B=\begin{pmatrix}6 & 1\\ 7 & -2\end{pmatrix}:$$

Պատ. $AB=\begin{pmatrix}3 & 10\\ 47 & -8\end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix}26 & -13\\ 24 & -31\end{pmatrix}$:

16. Գտնել A և B մատրիցների AB արտադրյալը.

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}:$$

Պատ. $AB=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$:

17. Գտնել A և B մատրիցների AB արտադրյալը.

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2 & -1\\ 2 & 0 & -1 & 1\\ 1 & -3 & 0 & 4\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 0\\ 1 & -3\\ 4 & -1\end{pmatrix}:$$

Պատ. $AB=\begin{pmatrix}3 & 7\\ 5 & 10\\ 11 & 0\end{pmatrix}$:

§ 4. Հակադարձ մատրիցի որոշումը հանրահաշվական լրացումների միջոցով

Յուրաքանչյուր $a\neq 0$ թվի համար գոյություն ունի a^{-1} հակադարձ թիվը, որի համար տեղի ունի $aa^{-1}=1$:

Քառակուսային մատրիցների համար սահմանենք հակադարձ մատրիցի գաղափարը:

A քառակուսային մատրիցի հակադարձ մատրից է կոչվում այն B քառակուսային մատրիցը, որը բավարարում է հետևյալ հավասարություններին.

$$AB=BA=E, \tag{1}$$

որտեղ E-ն միավոր մատրից է:

Սահմանումից հետևում է, որ հակադարձ մատրիցը գոյություն ունի միայն քառակուսային մատրիցների համար, և երկու A և B մատրիցներն էլ ունեն միևնույն կարգը:

A մատրիցի հակադարձ մատրիցը նշանակենք A^{-1}:

Դիտարկենք n-րդ կարգի քառակուսային մատրիցը՝

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}:$$

A մատրիցի շրջված մատրիցը նշանակենք A^T–ով:

Կառուցենք C մատրիցը, որի տարրերը կազմված են A^T մատրիցի հանրահաշվական լրացումներից.

$$C=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2}\\ & & \vdots & \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn}\end{pmatrix},$$

որտեղ C մատրիցը կոչվում է A^T մատրիցին կցյալ մատրից, որտեղ A_{ik}-ն A^T մատրիցի a_{ik} տարրի հանրահաշվական լրացումն է: Հեշտ է նկատել, որ A մատրիցի i-րդ տողի հանրահաշվական լրացումները գտնվում են C մատրիցի i-րդ սյունակում:

Տեղի ունի հետևյալ թեորեմը՝

<u>Թեորեմ.</u> Եթե A-ն հանդիսանում է n-րդ կարգի քառակուսային մատրից, իսկ C-ն նրա կցյալ մատրիցն է, ապա

$$AC=CA=E\det A,$$

որտեղ E-ն n-րդ կարգի միավոր մատրիցն է:

<u>Ապացույց.</u> AC արտադրյալը նշանակենք D մատրիցով`

$$D=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ & & \vdots & \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}:$$

Համաձայն մատրիցների բազմապատկման` D մատրիցի d_{ij} էլեմենտը հավասար է A մատրիցի i -րդ տողի և C մատրիցի j -րդ սյան համապատասխան էլեմենտների արտադրյալների գումարին:

d_{ij} էլեմենտները, որոնք համապատասխանում են գլխավոր անկյունագծին, որևէ տողի արտադրյալն է համապատասխան հանրահաշվական լրացումների հետ, որը հավասար է A մատրիցի որոշիչին:

Մնացած բոլոր արտադրյալները կլինեն հավասար 0-ի, (հատկություն 7): Հետևաբար,

$$D=AC=\begin{pmatrix} \det A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \det A \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}\det A = E\det A:$$

Նույն եղանակով կապացուցենք նաև $CA = E\det A$:

<u>Սահմանում.</u> Քառակուսային մատրիցը կոչվում է վերասերված, եթե նրա դետերմինանտը հավասար է զրոյի և չվերասերված` հակառակ դեպքում:

<u>**Հակադարձ մատրիցի գոյության թեորեմը**</u>. Չվերասերված A մատրիցի համար գոյություն ունի միակ A^{-1} հակադարձ մատրից, որը որոշվում է`

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}C \qquad (2)$$

բանաձևով, որտեղ C-ն A-ի կցյալ մատրիցն է:

<u>Ապացույց</u> . Քանի որ A-ն չվերասերված մատրից է, ապա $\det A\neq 0$, հետևաբար, (1) հավասարումից`

$$A\left(\frac{1}{\det A}C\right)=\left(\frac{1}{\det A}C\right)A=E,$$

իսկ սա նշանակում է, որ տեղի ունի $AA^{-1}=A^{-1}A=E$ հավասարությունները:

Այժմ ապացուցենք A^{-1} մատրիցի միակությունը:

Ենթադրենք գոյություն ունի մեկ այլ A_1^{-1} մատրից, որը բավարարում է $A_1^{-1}A=AA_1^{-1}=E$ պայմանին, այդ դեպքում`

$$\left.\begin{aligned} A_1^{-1}AA^{-1} &= A_1^{-1}(AA^{-1}) = A_1^{-1}E = A_1^{-1} \\ A_1^{-1}AA^{-1} &= (A_1^{-1}A)A^{-1} = EA_1^{-1} = A^{-1} \end{aligned}\right\} => A_1^{-1} = A^{-1}:$$

Չվերասերված մատրիցների համար տեղի ունի՝

1. $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$
2. $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$
3. $\left(A^{k}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{k}$
4. $\left(AB\right)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$:

Վերասերված մատրիցը չունի հակադարձ մատրից:

<u>Օրինակ</u>. Գտնել $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ մատրիցի հակադարձ A^{-1} մատրիցը: Հաշվենք A մատրիցի որոշիչը և նրա հանրահաշվական լրացումները:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \neq 0:$$

$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$, $A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3$, $A_{13} = -2$, $A_{21} = -2$, $A_{22} = 4$, $A_{23} = -3$, $A_{31} = -2$, $A_{32} = 3$, $A_{33} = -2$:

Օգտվելով (2) բանաձևից, կստանանք՝

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{vmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 3 & 4 & 3 \\ -2 & -3 & -2 \end{vmatrix}:$$

Խնդիրներ

1. Որոշել մատրիցի դետերմինանտը.

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}$$

Պատ. 7

2. Որոշել մատրիցի դետերմինանտը.

$$\begin{vmatrix} \sqrt{a} & -1 \\ a & \sqrt{a} \end{vmatrix}$$

Պատ. $2a$:

3. Գտնել որոշիչը, վերլուծելով ըստ առաջին սյան էլեմենտների.

$$\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ -1 & a & 1 \\ a & -1 & a \end{vmatrix}:$$

Պատ. $4a$:

4.Որոշել դետերմինանտը՝ վերլուծելով ըստ այն շարքի էլեմենտների, որը պարունակում է ավելի շատ զրոներ.

$$\begin{vmatrix} -x & 1 & x \\ 0 & -x & -1 \\ x & 1 & -x \end{vmatrix}$$

Պատ. $-2x$:

5. Պարզեցնելով՝ հաշվել դետերմինանտը.

$$V = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$$

Պատ. $V = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$:

6. Հաշվել դետերմինանտը.

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix}$$

Պատ. a^2b^2 :

7. Գտնել հակադարձ մատրիցը.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Պատ. $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 9 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ -12 & 1 & 7 \end{pmatrix}$:

8. Գտնել հակադարձ մատրիցը.

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Պատ. $\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 \\ -1 & 4 & 5 \\ -1 & 4 & -6 \end{pmatrix}$:

9. Տրված է $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ մատրիցը: Գտնել հակադարձ մատրիցը:

Պատ.. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 9/5 & -2/5 & -4/5 \\ 1/5 & 2/5 & -1/5 \\ -12/5 & 1/5 & 7/5 \end{pmatrix}$:

10. Հաշվել A և B մատրիցների արտադրյալի որոշիչը.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -5 & 6 & 7 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -1 \\ 0 & -5 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Պատ. $\det(AB) = 396$:

11. Հաշվել որոշիչը.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}:$$

12. Հաշվել որոշիչը.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 9 \\ 16 & 25 & 81 \end{vmatrix}:$$

13. Լուծել հավասարումներն ու անհավասարումները.

1/ $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ -4 & x+1 \end{vmatrix} = 0$, 2/ $\begin{vmatrix} x^2 & x \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 0$, 3/ $\begin{vmatrix} cosx & -sin5x \\ sinx & cos5x \end{vmatrix} = 0$,

4/ $\begin{vmatrix} sin3x & cosx \\ cos2x & sin4x \end{vmatrix} = 0$, 5/ $\begin{vmatrix} \log_2(x+1) & \log_4 2x \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2$, 6/ $\begin{vmatrix} 2 & \log_3 x \\ 4 & \log_3(x-1) \end{vmatrix} = 6$,

7/ $\begin{vmatrix} 3 & x & -x \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, 8/ $\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, 9/ $\begin{vmatrix} x+1 & x \\ 2 & x-3 \end{vmatrix} > 2$,

10/ $\begin{vmatrix} x-1 & x-1 \\ x & 3 \end{vmatrix} < 0$, 11/ $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} < 0$, 12/ $\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0$:

14. Հաշվել 4-րդ կարգի հետևյալ որոշիչները.

1/ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$, 2/ $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, 3/ $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$,

4/ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$, 5/ $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$, 6/ $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 6 & 3 \\ 1 & 5 & -1 & 2 \end{vmatrix}$:

15. Գտնել հակադարձ մատրիցը.

1/ $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}$, 2/ $\begin{pmatrix} cos \propto & -sin \propto \\ sin \propto & cos \propto \end{pmatrix}$, 3/ $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 4/ $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$:

§ 5. n անհայտով m գծային հավասարումների համակարգեր

$x_1, x_2 ..., x_n$, n անհայտներով m գծային հավասարումների համակարգ կոչվում է հետևյալ տիպի համակարգը.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ---------------- \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \qquad (1)$$

որտեղ a_{ij} և b_i-երը թվեր են: a_{ij} $(i=1,\cdots,m,\ \ j=1,\cdots,n)$ հանդիսանում են անհայտների գործակիցներ, իսկ b_i $(i=1,\cdots,m)$՝ ազատ անդամներ:

Գծային համակարգը կոչվում է համասեռ, եթե նրա բոլոր ազատ անդամները հավասար են զրոյի՝ $b_i = 0$, և ոչ համասեռ՝ հակառակ դեպքում: Պարզ է, որ համասեռ համակարգը կունենա հետևյալ տեսքը.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ ---------------- \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... a_{mn}x_n = 0 \end{cases}: \qquad (2)$$

(1) համակարգի լուծում է կոչվում $c_1, c_2, ..., c_n$ կարգավորված թվերի խումբը, որոնք, տեղադրելով (1) համակարգի յուրաքանչյուր հավասարման մեջ, այն դարձնում են նույնություն. $(x_1 = c_1, x_2 = c_2, ..., x_n = c_n)$:

Եթե գծային հավասարումների համակարգն ունի գոնե մեկ լուծում, ապա այն կոչվում է համատեղ: Եթե չունի ոչ մի լուծում, այն կոչվում է անհամատեղ համակարգ:

Նշենք, որ համասեռ հավասարումների համակարգը միշտ ունի զրոյական լուծում՝ $x_1 = 0, x_2 = 0, ..., x_n = 0$;

Համատեղ համակարգը կոչվում է որոշյալ, եթե նա ունի միայն մեկ լուծում, համակարգը կոչվում է անորոշ, եթե նա ունի մեկից ավելի լուծումներ: Հետագայում մենք կտեսնենք, որ նրանք կլինեն անվերջ շատ:

Երկու համակարգեր կոչվում են էկվիվալենտ կամ համազոր, եթե նրանցից մեկի ցանկացած լուծումը լուծում է հանդիսանում մյուսի համար և հակառակը: Այսինքն՝ նրանք երկուսն էլ ունեն միևնույն լուծումների բազմությունը:

Ցանկացած երկու անհամատեղ համակարգեր նույնպես հանդիսանում են էկվիվալենտ:

Գծային համակարգերի նկատմամբ էլեմենտար գործողություններ կանվանենք հետևյալ գործողությունները.

1) Համակարգի ցանկացած հավասարման բազմապատկումը զրոյից տարբեր որևէ λ թվով:
2) Համակարգի որևէ հավասարմանը գումարենք մեկ այլ հավասարում՝ բազմապատկած ցանկացած թվով:
3) Համակարգի ցանկացած թվով հավասարումների տեղափոխություն:

Ապացուցենք, որ էլեմենտար ձևափոխություններից հետո ստացված համակարգը էկվիվալենտ է մնում տրված նախնական համակարգին:

(1) համակարգի առաջին հավասարման երկու մասերը բազմապատկենք $\lambda \neq 0$ թվով և գումարենք որևէ հավասարման երկու մասերին, որի հետևանքով կստանանք մի նոր հավասարում:

Օրինակի համար ստացված առաջին հավասարումը գումարենք 2-րդ հավասարմանը՝

$$\lambda(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ...a_{1n}x_n) + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = \lambda b_1 + b_2 \qquad (2')$$

կամ նման անդամների միացումից հետո՝

$$a'_{21}x_1 + a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n} = b'_2,$$

որտեղ $a'_{2k} = \lambda a_{1k} + a_{2k}$, $k = 1,2,\cdots,n$, $b'_2 = \lambda b_1 + b_2$, կստանանք՝

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a'_{21}x + a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + ... + a_{3n}x_n = b_3 \\ ---------------- \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ...a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (3)$$

որը տարբերվում է (1) համակարգից միայն երկրորդ հավասարումով:

Եթե $c_1c_2...c_n$ հանդիսանում է (1) համակարգի լուծումը, ապա այն կհանդիսանա նաև (3) համակարգի լուծումը, այսինքն՝ եթե $x_k = c_k(k = 1,2...n)$ արժեքները բավարարում են (1) համակարգին, ապա նրանք պետք է բավարարեն նաև (3) համակարգի ցանկացած հավասարմանը, նաև (2’) հավասարմանը, քանի որ եթե $c_1c_2...c_n$ արժեքները տեղադրենք (2’) հավասարման մեջ, կստանանք՝

$$\lambda b_1 + b_2 = \lambda b_1 + b_2$$

թվային հավասարությունը:

Եվ հակառակը եթե $c_1, c_2,..., c_n$ բավարարում է (3)-ին, այն կբավարարի (1) համակարգին, քանի որ երկրորդ հավասարումը ստացվում է (3)-ի առաջին հավասարումից, եթե (2)-ը բազմապատկենք ($-\lambda$)-ով և գումարենք (1)-ին:

Յասկանալի է, որ նման ձևափոխություններ կարելի է կատարել մի քանի անգամ:

Եթե նման տիպի ձևափոխությունների հետևանքով հավասարումների համակարգում կառաջանա հավասարում, որի ձախ մասի գործակիցները հավասար են զրոյի և եթե այդ հավասարման ազատ անդամը նույնպես հավասար է 0-ի, ապա անհայտների ցանկացած արժեք կբավարարի տվյալ հավասարմանը և դեն գցելով այդ հավասարումը՝ կստանանք մի նոր համակարգ, որը համարժեք է սկզբնականին:

Իսկ եթե ձևափոխված հավասարման ազատ անդամը զրոյից տարբեր է, ապա այդ հավասարումը անհայտների ոչ մի արժեքներով չի կարող բավարարվել, հետևապես, մեր ստացած հավասարումների համակարգը, ինչպես և նրան համարժեք սկզբնական համակարգը կլինի անհամատեղելի համակարգ:

Գծային համակարգը կարելի է գրել մատրիցային տեսքով՝

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad (4)$$

որը կազմված է անհայտների գործակիցներից և կոչվում է համակարգի հիմնական մատրից (կամ համակարգի մատրից):

Մատրիցը, որը ստացված է հիմնական մատրիցից՝ ավելացնելով ազատ անդամները, կոչվում է ընդլայնված մատրից.

$$\bar{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}: \qquad (5)$$

Դիտարկենք նաև անհայտներից կազմված X սյուն մատրիցը և ազատ անդամներից կազմված B սյուն մատրիցը՝

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}: \qquad (6)$$

Քանի որ A և X մատրիցները համաձայնեցված են, ապա կարելի է գրել նրանց արտադրյալը՝

$$AX=\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_{n1} \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n \\ ------------- \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n \end{pmatrix}:$$

Ստացված մատրիցն իրենից ներկայացնում է սկզբնական (1) համակարգի ձախ մասը և, հետևաբար, տրված համակարգը կարելի է գրել մեկ մատրիցային հավասարման միջոցով՝

$$AX=B: \qquad (7)$$

որտեղ A-ն, X-ը և B-ն որոշվում են (4),(5), (6) բանաձևերի միջոցով: Գրության այս ձևը կոչվում է մատրիցային ձև:

Յուրաքանչյուր գծային համակարգին համապատասխանում են միակ A և B մատրիցները և հակառակը՝ յուրաքանչյուր մատրիցների զույգին համապատասխանում է միակ գծային համակարգը: (7) համակարգը կարելի է գրել նաև հետևյալ կերպ՝

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} X_1+\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} X_2+\dots+\begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix} X_n=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}:$$

Եթե $c_1, c_2, \dots, c_n$ մեր (1) համակարգի լուծումն է, ապա $C=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ կոչվում է վեկտոր-լուծում:

Լուծել համակարգը նշանակում է՝ պարզել այն համատեղելի է, թե ոչ, և եթե համատեղելի է, գտնել նրա բոլոր լուծումները:

§ 6. Գծային հավասարումների համակարգի լուծումը որոշիչների օգնությամբ

Դիտարկենք $x_1, x_2, ..., x_n$, n անհայտներով n գծային հավասարումների համակարգը.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2} + ... + a_{nn}x_n = b_n : \end{cases} \qquad (1)$$

(1) համակարգի որոշիչը դա A մատրիցի որոշիչն է, որը կազմված է անհայտի գործակիցներից $\Delta = \det A$: Δ_k-ով նշանակենք այն որոշիչը, որը ստացվում է Δ-ից՝ k-րդ սյունը փոխարինելով ազատ անդամների սյունով:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1k} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2k} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nk} & ... & a_{n4} \end{vmatrix} \quad \Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & b_1 & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & b_2 & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & b_k & ... & a_{n4} \end{vmatrix}, \qquad (2)$$

որտեղ $k = 1, 2, \cdots, n$:

<u>Թեորեմ.</u> Եթե (1) համակարգի դետերմինանտը զրոյից տարբեր է, ապա համակարգն ունի միակ լուծում՝

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, ..., x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

որտեղ Δ-ն և Δ_k-ն որոշվում են (2) բանաձևերով:

<u>Ապացույց </u> (1) համակարգը գրենք մատրիցային տեսքով՝

$$AX = B,$$

ըստ թեորեմի պայմանի՝ $\Delta = \det A \neq 0,$ ապա A մատրիցի համար գոյություն ունի հակադարձ A^{-1} մատրիցը:

Բազմապատկելով վերջին հավասարման 2 մասերը A^{-1}-ով՝ կստանանք՝

$$A^{-1}AX = A^{-1}B, \text{ քանի որ } AA^{-1} = E, \quad EX = X, \quad X = A^{-1}B:$$

Վերջին բանաձևը հանդիսանում է (1) համակարգի լուծում՝ գրված մատրիցային ձևով, այն նաև կարելի է գրել հետևյալ կերպ՝

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2k} & \dots & A_{nk} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

կամ $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11}b_1 + A_{22}b_2 + \dots + A_{n1}B_n \\ A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \dots + A_{n2}b_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_{1k}b_1 + A_{2k}b_2 + \dots + A_{nk}b_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \dots + A_{nn}b_n \end{pmatrix}:$$

Ի նկատի ունենալով, որ $A_{1k}b_1 + A_{2k}b_2 + \dots + A_{nk}b_n = A_k$, վերջին բանաձևից հետևում է $x_k = \dfrac{\Delta_k}{\Delta}$:

Ապացուցված թեորեմը կոչվում է Կրամերի թեորեմ, իսկ ստացված բանաձևերը Կրամերի բանաձևեր: Այսպիսով, մենք ստացանք հետևյալ կարևոր արդյունքը: n անհայտով n գծային հավասարումների համակարգը, որի դետերմինանտը հավասար չէ 0-ի՝ $\det A \neq 0$, ունի լուծում, այն էլ մեկը:

§ 7. Եռաչափ դեպքը

Ինչպես տեսանք որոշիչների ապարատի միջոցով պարզվում է, որ գծային հավասարումների համակարգի լուծումը կարելի է գրել բացահայտ տեսքով : Իհարկե խոսքը վերաբերում է այնպիսի համակարգերին, որոնք ունեն հավասար թվով անհայտներ և հավասարումներ:

Չնայած այն հանգամանքին, որ Կրամերի բանաձևերը ճիշտ են ցանկացած թվով հավասարումներ պարունակող համակարգերի համար, բայց պարզության համար ցուցադրենք եռաչափ դեպքի համար III կարգի համակարգի օրինակով՝

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \bullet \begin{vmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ A_{31} \end{vmatrix},$$

բազմապատկենք հավասարումը A_{11}, A_{21}, A_{31}-ով և գումարենք իրար՝

$$\begin{aligned}(a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31})X_1 + (a_{21}A_{11} + a_{22}A_{21} + a_{32}A_{31})X_2 + (a_{13}A_{11} + a_{23}A_{21} + a_{33}A_{31})X_3 = \\ = b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31}:\end{aligned} \quad (1)$$

Որոշիչի սահմանման համաձայն առաջին փակագծում գրված արտահայտությունը հավասար է A մատրիցի որոշիչին, իսկ հանրահաշվական լրացումների հատկության համաձայն մյուս երկու փակագծերը հավասար են 0-ի.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{32} \end{vmatrix} \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}:$$

$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ որոշիչները կոչվում են օժանդակ որոշիչներ, իսկ Δ-ն հիմնական որոշիչ:

Օժանդակ որոշիչներն ստացվում են հիմնական որոշիչից համապատասխան համարի սյունը փոխարինելով ազատ անդամների սյունով: Այսպիսով, ստացված (1) հավասարումը կարող ենք գրել հետևյալ տեսքով՝

$$\Delta x_1 = b_1 A_{11} + b_2 A_{21} + b_3 A_{31}:$$

Համաձայն նախորդ պարագրաֆի $x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}$ բանաձևի, կստանանք՝ $\Delta x_1 = \Delta_1$, ճիշտ նույն ձևով կստանանք նաև՝

$\Delta x_2 = \Delta_2$, $\Delta x_3 = \Delta_3$, որտեղից՝

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}:$$

<u>Օրինակ.</u> $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 = 1 \\ 7x_1 + 5x_2 = 17 \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 25 + 4 = 39$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 17 & 5 \end{vmatrix} = 5 + 34 = 39$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 7 & 17 \end{vmatrix} = 85 - 7 = 78$$

$$X_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{39}{39} = 1 \qquad X_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{78}{39} = 2$$

Պատ. (1,2):

Չնայած Կրամերի բանաձևերը շատ պարզ են և տեսանելի՝ ավելի շատ նրանք ունեն տեսական նշանակություն, գործնական տեսակետից համակարգերի նման լուծումը կապված է մեծ դժվարությունների հետ:

Որպեսզի լուծենք 10 անհայտով 10 հավասարումների համակարգ, պետք է հաշվենք 11 հատ 10 կարգի որոշիչներ:

§ 8. Գծային հավասարումների համակարգի լուծելիության դեպքերը

Գծային հավասարումների $\forall$ համակարգի համար տեղի ունի հետևյալ պնդումներից մեկը.

1. համակարգն ունի միակ լուծում
2. համակարգն ունի անվերջ լուծումներ
3. համակարգը լուծում չունի:

Այս իրողություններին տանք երկրաչափական մեկնաբանություն:

Ենթադրենք համակարգն ունի 2 անհայտներ՝

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 = 4 \\ 7x_1 + 2x_2 = 10 \\ 9x_1 - 3x_2 = 3 \end{cases}$$

Այս հավասարումներից յուրաքանչյուրը որևէ ուղիղ գծի հավասարում է հարթության վրա:

Երկու ուղիղ գծեր կարող են ունենալ հետևյալ դիրքերից մեկը.

1. դեպքում համակարգն ունի միակ լուծում, դա հատման կետի կոորդինատներն են:
2. դեպքում ուղիղները համընկնում են և ուղղի ցանկացած կետ համակարգի լուծումն է: Այսինքն համակարգն ունի անվերջ թվով լուծումներ:
3. դեպքում ուղիղները չունեն ընդհանուր կետ, զուգահեռ են և համակարգը չունի լուծում:

Եթե ավելացնենք նոր հավասարումներ, ապա կստացվեն տարբեր իրավիճակներ: Նման երկրաչափական մեկնաբանություններ կարելի է տալ նաև 3 անհայտով հավասարումների համակարգին :

Այժմ լուծելիության հարցը քննարկենք որոշիչներիի օգնությամբ: Պարզության համար դա կատարենք երրորդ կարգի համակարգի վրա:

$$\Delta x_1 = \Delta_1, \quad \Delta x_2 = \Delta_2 \quad \Delta x_3 = \Delta_3:$$

Յնարավոր են հետևյալ երեք դեպքերը:

1. $\Delta \neq 0$, $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$, $x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta}$ համակարգն ունի միակ լուծում:

2. $\Delta = 0$, նաև $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 0$, $\Delta_3 = 0$ համակարգն ունի անվերջ լուծումներ:

3. $\Delta = 0$, բայց $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ որոշիչներից գոնե մեկը 0 չէ, ապա համակարգը լուծում չունի:

Եթե համակարգը լուծում չունի, կոչվում է անհամատեղելի, մնացած 2 դեպքերում համատեղելի, կամ ունի լուծում, այն էլ մեկը:

§ 9. Անհայտների հաջորդական արտաքսման մեթոդը (Գաուսի մեթոդը)

Ենթադրենք տրված է n $x_1, x_2, ..., x_n$ անհայտներով m գծային հավասարումների համակարգը՝

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ------------------ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} : \qquad (1)$$

Անհայտների հաջորդական արտաքսման մեթոդի էությունը գծային հավասարումների լուծման համար կայանում է հետևյալում: Ընդունելով $a_{11} \neq 0$, առաջին հավասարումը բազմապատկում ենք $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$-ով և գումարում ենք երկրորդ հավասարմանը. արդյունքում երկրորդ հավասարման մեջ x_1-ի գործակիցը հավասարվում է 0-ի: Նույն եղանակով բազմապատկում ենք առաջին հավասարումը $-\frac{a_{31}}{a_{11}}$-ով և գումարում երրորդ հավասարմանը, նորից ստանում ենք x_1 գործակիցը հավասարվում է 0-ի:

Նույն եղանակով ձևափոխվելով մնացած հավասարումները՝ կստանանք սկզբնականին համարժեք հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ a'_{32}x_2 + \cdots + a'_{3n}x_n = b'_3 \\ ---------------- \\ a'_{m2}x_2 + \cdots + a'_{mn}x_n = b'_m \end{cases} , \qquad (2)$$

որտեղ a'_{ik} հանդիսանում են նոր գործակիցները:

Այժմ ենթադրելով, որ $a'_{22} \neq 0$ և նույնը թողնելով առաջին երկու հավասարումները, ձևափոխենք (2) համակարգը այնպես, որ x_2 գործակիցը մյուս բոլոր հավասարումներում հավասարվի 0-ի: Շարունակելով նման ձևով՝ (1) համակարգը կարելի է բերել հետևյալ համակարգերից որևէ մեկին՝

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + ... + c_{1n}x_n = d_1 \\ c_{22}x_2 + ... + c_{2n}x_n = d_2 \\ c_{33}x_3 + ... + c_{3n}x_n = d_3 \\ --------------- \\ c_{nn}x_n = d_n \end{cases} \qquad (3)$$

որտեղ $c_{nn} \neq 0$ ինչ -որ գործակիցներ են, իսկ d_k-ն՝ ազատ անդամներ:

Այդ դեպքում ստացված համակարգը կունենա միակ լուծումը, որտեղ x_n-ի արժեքը կստացվի վերջին հավասարումից, x_{n-1}՝ նախավերջինից և x_1-ը՝ առաջինից:

$$\left.\begin{array}{l} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1k}x_k + \cdots + c_{1n}x_n = d_1 \\ c_{22}x_2 + \cdots + c_{2k}x_k + \cdots + c_{2n}x_n = d_2 \\ c_{33}x_3 + \cdots + c_{3k}x_k + \cdots + c_{3n}x_n = d_3 \\ ---------------------- \\ c_{kk}x_k + \cdots + c_{kn}x_n = d_k \end{array}\right\}, \qquad (4)$$

Եթե $k < n$, (4) համակարգը կունենա անթիվ բազմությամբ լուծումներ: Վերջին հավասարումից կարելի է որևէ անհայտ արտահայտել մյուսների միջոցով, օրինակ՝ x_k մնացած $x_{k+1}, x_{k+2}, \cdots, x_n$ միջոցով, որտեղ $x_{k+1}, x_{k+2}, \cdots, x_n$ կարող են ընդունել ցանկացած արժեքներ, որոնցից կախված $x_1, x_2, \cdots, x_k$-ն կունենան արժեքներ կախված $x_{k+1}, x_{k+2}, \cdots, x_n$-ի արժեքներից՝

$$\left.\begin{array}{l} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1k}x_k + \cdots + c_{1n}x_n = d_1 \\ c_{22}x_2 + \cdots + c_{2k}x_k + \cdots + c_{2n}x_n = d_2 \\ ---------------------- \\ 0 \cdot x_n = d_k \end{array}\right\}: \qquad (5)$$

k-րդ հավասարման համար տեղի ունի՝ $0 \cdot x_n = d_k$: Համակարգն անհամատեղելի է, եթե $d_k \neq 0$, և անհայտների ոչ մի արժեք չի կարող բավարարել վերջին հավասարմանը:

Այսպիսով, անհայտների հաջորդական արտաքսման մեթոդը կիրառելի է ցանկացած գծային հավասարումների համակարգի համար:

Համակարգը լուծելով այս մեթոդով հեշտ է նկատել, որ ձևափոխությունները կատարվում են մատրիցների հետ, որոնք կազմված են անհայտների գործակիցներից և ազատ անդամներից:

§ 10. Հակադարձ մատրիցի որոշումը Ժորդան-Գաուսի մեթոդով

Հակադարձ մատրիցի որոշումը հանրահաշվական լրացումների միջոցով կապված է մեծածավալ հաշվումների հետ, մանավանդ, երբ A-ն բարձր կարգի մատրից է:

Յուրաքանչյուր հանրահաշվական լրացում հաշվելու համար հարկավոր է հաշվել (n-1)-րդ կարգի որոշիչները:

Գոյություն ունի պարզ և հեշտությամբ իրականացվող ալգորիթմ՝ հակադարձ մատրիցը որոշելու համար, որը հանգում է $AX = E$ հավասարման լուծմանը, որն իրականացվում է Ժորդան-Գաուսի ալգորիթմի կամ հետևյալ տարրական ձևափոխությունների միջոցով.

1. փոխել մատրիցի որևէ երկու տողերի տեղերը,
2. մատրիցի որևէ տող բազմապատկել զրոյից տարբեր որևէ թվով,
3. մատրիցի որևէ տողին ավելացնել մեկ այլ տող նախապես բազմապատկած զրոյից տարբեր որևէ թվով:

Ալգորիթմն իրականացվում է հետևյալ ձևով. չվերասերված A մատրիցին աջից ավելացնում ենք միավոր E մատրիցը, որն ունի նույն չափողականությունը, ինչ որ A մատրիցը՝ (A/E), հետագայում 1-3 ձևափոխությունների միջոցով A մատրիցը ձևափոխում ենք միավոր մատրիցի, իսկ E միավոր մատրիցը, որը գտնվում է աջ մասում, կձևափոխվի A^{-1} հակադարձ մատրիցի:

Եթե $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $(A/E)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, տարրական

ձևափոխությունների հետևանքով կստանանք՝

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ 0 & 1 & 0 & c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ 0 & 0 & 1 & c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix},$$

որտեղ $\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$ հանդիսանում է A-ի հակադարձ A^{-1} մատրիցը:

<u>Օրինակ</u>. հաշվել $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ մատրիցի A^{-1} հակադարձ մատրիցը:

Հաշվենք հանրահաշվական լրացումների մեթոդով:

$$\det A=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix}=0+16+6-0+4-30=-4,\ \det A\neq 0,$$

հետևաբար A^{-1}-ը գոյություն ունի:

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}=4,\ A_{21}=-\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}=-8,\ A_{31}=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=4,\ A_{12}=-\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}=-7,\ A_{22}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}=9,$$

$$A_{32}=-\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=-5,\ A_{13}=\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}=-6,\ A_{23}=-\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}=10,\ A_{33}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}=-6:$$

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ -7 & 9 & -5 \\ -6 & 10 & -6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ \frac{7}{4} & -\frac{9}{4} & \frac{5}{4} \\ \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix},$$

ստուգենք՝

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&-1\\3&0&2\\4&-2&5\end{pmatrix}\left(-\frac{1}{4}\right)\begin{pmatrix}4&-8&4\\-7&9&-5\\6&10&-6\end{pmatrix}=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&2&-1\\3&0&2\\4&-2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&-8&4\\-7&9&-5\\6&10&-6\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-4&0&0\\0&-4&0\\0&0&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E:$$

Այժմ հաշվենք Ժորդան-Գաուսի մեթոդով.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&-1&1&0&0\\3&0&2&0&1&0\\4&-2&5&0&0&1\end{array}\right)\;-3\;\;-4\;\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&-1&1&0&0\\0&-6&5&-3&1&0\\0&-10&9&-4&0&1\end{array}\right)\;:(-6)$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&-1&1&0&0\\0&1&-\frac{5}{6}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{6}&0\\0&-10&9&-4&0&1\end{array}\right)\;-2\;\;10\;\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&-1&1&0&0\\0&1&-\frac{5}{6}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{6}&0\\0&-10&9&-4&0&1\end{array}\right)\;3/2\;\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&\frac{2}{3}&0&\frac{1}{3}&0\\0&1&-\frac{5}{6}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{6}&0\\0&0&1&\frac{3}{2}&-\frac{5}{2}&\frac{3}{2}\end{array}\right)\;\frac{5}{6}\;\;-\frac{2}{3}\;\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1&2&-1\\0&1&0&\frac{7}{4}&-\frac{9}{4}&\frac{5}{4}\\0&0&1&\frac{3}{2}&-\frac{5}{2}&\frac{3}{2}\end{array}\right)\sim\left(E/A^{-1}\right),$$

ստացված արդյունքը համընկնում է մեր կողմից նախկինում ստացվածի հետ:

Խնդիրներ

1. Հատվում են արդյո՞ք ուղիղները մեկ կետում.

   1. $2x-3y=6, 3x+y=9, x+4y=3$
   2. $2x-3y=6, x+2y=4, x-5y=5$

2. Հավասարումների համակարգը լուծել Գաուսի մեթոդով.

$$\begin{cases}3x+2y+z=5\\x+y-z=0\\4x-y+5z=3\end{cases}$$

Պատ. $x=-1$, $y=3$, $z=2$:

3.Լուծել Գաուսի մեթոդով.

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -2 \\ 2x_1 + 8x_2 - x_3 = 8 \\ 9x_1 + x_2 + 8x_3 = 0 \end{cases}$$

Պատ. համակարգն անհամատեղելի է:

4. Լուծել Գաուսի մեթոդով.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Պատ. $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4$:

5. Հավասարումների համակարգը լուծել Գաուսի մեթոդով.

1/ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$

2/ $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 4x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 - 4x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$:

6. Լուծել հետևյալ համակարգերը Գաուսի մեթոդով.

1/ $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 7 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 8x_4 = -7 \end{cases}$

2/ $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 = -3 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22 \end{cases}$

3/ $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -4 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 - x_4 = 8 \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4 = -1 \end{cases}$

4/ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 9x_4 = -5 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 7 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = -4 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 4 \end{cases}$:

7. Լուծել հավասարումների համակարգը Ժորդան-Գաուսի մեթոդով.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ x_2 + 3x_3 + x_4 = 15 \\ 4x_1 + x_3 + x_4 = 11 \\ x_1 + x_2 + 5x_4 = 23 \end{cases}$$

Պատ. $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4$:

8. Լուծել հավասարումների համակարգը Ժորդան-Գաուսի մեթոդով.

$$\begin{cases} x_1+5x_2-2x_3-3x_4=1 \\ 7x_1+2x_2-3x_3-4x_4=2 \\ x_1+x_2+x_3+x_4=5 \\ 2x_1+3x_2+2x_3-3x_4=4 \\ x_1-x_2-x_3-x_4=-2 \end{cases}$$

Պատ. համակարգն անհամատեղելի է:

9. Գտնել X մատրիցը.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}:$$

Պատ. $X = \begin{pmatrix} 1 & -6 & -9 \\ -1 & 10 & 17 \end{pmatrix}:$

10. Գտնել X մատրիցը.

$$X\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}:$$

Պատ. $X = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}:$

11. Գտնել X մատրիցը.

$$X\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}:$$

Պատ. $X = \begin{pmatrix} -6 & 26 \\ 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}:$

12. Հետևյալ հավասարումներից գտնել X մատրիցը.

1/ $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 2/ $X\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

3/ $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$ 4/ $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}$

5/ $X\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 6/ $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 8 & 1 & 2 \end{pmatrix}:$

13. Որոշիչների օգնությամբ լուծել հավասարումների համակարգը:

$$\begin{cases} ax - 3y = 1 \\ ax - 2y = 2 \end{cases}:$$

Պատ. $x = \frac{4}{a}, \quad y = 1:$

14. Որոշիչների օգնությամբ լուծել հավասարումների համակարգը.

$$\begin{cases} 5x + 2y = 4 \\ 7x + 4y = 8 \end{cases}:$$

Պատ. $x = 0; y = 2:$

15. Լուծել հավասարումների համակարգը.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + 4y + 6z = 3: \\ 3x + y - z = 1 \end{cases}$$

Պատ. Անհամատեղելի է:

16. Հավասարումների համակարգը լուծել Կրամերի կանոնով.

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -1 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Պատ. $x_1 = \frac{106}{44}; \quad x_2 = -\frac{41}{44};$

$x_3 = \frac{99}{44}:$

17. Լուծել համակարգը.

$$\begin{cases} x + y - z = 3 \\ x + y + z = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

Պատ. $x + y = 2, z = -1$ կամ $x = 2 - y, z = -1,$ որտեղ y-ը կարող է ընդունել կամայական արժեքներ:

18. Որոշիչների օգնությամբ լուծել հավասարումների համակարգը:

$$\begin{cases} 9x + 2y = 8 \\ 4x + y = 3 \end{cases}:$$

Պատ. $x=2, y=-5$:

19. Լուծել հավասարումների համակարգը:

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-3y+4z=0 \\ 4x-11y+10z=0 \end{cases}$$

Պատ. $x=7k, y=-2k,$
$z=-5k$:

20. Լուծել հավասարումների համակարգը.

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x-3y+4z=3 \\ 4x-11y+10z=5 \end{cases}$$

Պատ՝. $x=\frac{1}{5}(9-7z),$
$y=\frac{1}{5}(1+2z)$:

21. Լուծել հավասարումների համակարգը.

$$\begin{cases} 2x+3y-z=0 \\ x-2y+2z=0 \end{cases}$$

Պատ՝. $x=4k, y=-5k, z=-7k$:

22. Հավասարումների համակարգը լուծել Կրամերի կանոնով.

1/ $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=8 \\ 3x_1+2x_2+x_3=10 \\ 4x_1+3x_2-2x_3=4 \end{cases}$ 2/ $\begin{cases} 4x_1+2x_2+x_3=0 \\ x_1+3x_2+x_3=0 \\ x_1+x_2+2x_3=0 \end{cases}$

3/ $\begin{cases} 5x_1-x_2-x_3=4 \\ x_1+2x_2+3x_3=6 \\ 4x_1+3x_2+2x_3=-8 \end{cases}$ 4/ $\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3=-1 \\ x_1+x_2+x_3=6 \\ 3x_1+x_2-2x_3=-1 \end{cases}$:

§ 11. Մատրիցի ռանգը

Ենթադրենք ունենք mxn չափողականության մատրից՝

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}:$$

A մատրիցի յուրաքանչյուր սյունը կարող ենք մեկնաբանել իբրև m-չափանի վեկտոր-սյուն: Այսպիսով, ունենք m-չափանի վեկտորներ, որոնց քանակը հավասար է n-ի՝ $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n$: Ուրեմն իրավունք ունենք խոսելու մատրիցի սյուների գծային կախվածության կամ անկախության մասին: Հիշենք, որ վեկտորների համախումբը կոչվում է գծորեն կախված, եթե կարելի է գտնել $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ թվեր, որոնցից գոնե մեկը 0 չէ, և տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը՝

$$\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\cdots+\lambda_n\vec{a}_n=0:$$

Եթե այս հավասարությունը հնարավոր է միայն այն դեպքում, երբ $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$, ապա վեկտորների համակարգը կոչվում է գծորեն անկախ:

Սահմանում. A մատրիցի գծորեն անկախ սյուների կամ տողերի թիվը կոչվում է A մատրիցի ռանգ: Ռանգը կարող է լինել 0 կամ որևէ բնական թիվ:

Ռանգը 0 է դառնում միայն 0-ական մատրիցի ժամանակ:

Օրինակ՝ $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$: Ունենք 5 հատ եռաչափ վեկտորներ:

Համաձայն մեզ հայտնի թեորեմի՝ դրանցից անկախ կարող են լինել ամենաշատը 3-ը, ուրեմն ռանգը հավասար է կամ 1, կամ 2, կամ 3-ի:

Օրինակ՝

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 4 & -6 & 8 \\ 3 & 6 & -9 & 12 \end{pmatrix} \text{ r=1,} \quad A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 5 \\ 2 & 0 & 10 & 2 \\ 3 & -1 & 15 & 2 \end{pmatrix} \text{ r=2:}$$

Ակնհայտ է, որ մատրիցի տողերը նույնպես կարելի է համարել վեկտորներ, ուրեմն կարելի է խոսել նաև տողերի գծային կախվածության և անկախության մասին:

Պարզվում է որ $\forall$ մատրից ունի այնքան գծորեն անկախ սյուն, որքան գծորեն անկախ տող:

Այժմ A մատրիցի մեջ ընտրենք k սյուն և k տող: Նրանց հատման տեղում կանգնած տարրերը կազմում են $k\times k$ չափողականության մատրից: Այս մատրիցի որոշիչը կլինի k-րդ կարգի մինոր: A մատրիցի մեջ կարող են լինել բազմաթիվ k կարգի մինորներ:

Մատրիցի ռանգը հավասար է 0-ից տարբեր ամենաբարձր կարգի մինորի կարգին: Եթե օրինակ մատրիցի ռանգը հավասար է 5-ի, ուրեմն գոյություն ունի 5-րդ կարգի մի մինոր, որը $\neq$ 0-ի: Իսկ 5-ից բարձր 6-րդ, 7-րդ և այլն բոլոր կարգի մինորները հավասար են զրոյի:

§ 12. Ռանգի հաշվումը տարրական ձևափոխությունների օգնությամբ

Ենթադրենք տրված է mxn չափողականության A մատրիցը՝

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ - & - & \cdots & - \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}:$$

Ինչպես գիտենք տարրակա ձևափոխություններ կոչվում են հետևյալ 3 ձևափոխությունները.

1. փոխել մատրիցի որևէ երկու տողերի կամ սյուների տեղերը,
2. որևէ տող կամ սյուն բազմապատկել 0-ից տարբեր որևէ թվով,
3. որևէ տողին կամ սյանը գումարել մեկ այլ տող կամ սյուն բազմապատկած որևէ թվով:

Տարրական ձևափոխությունների հետևանքով մատրիցը փոխվում է, բայց ռանգը մնում է նույնը, հետևաբար, միտք է առաջանում այս ձևափոխությունների օգնությամբ մատրիցը բերել այնպիսի տեսքի, որ ռանգն անմիջապես կարողանանք որոշել:

<u>Օրինակ.</u> $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ r=2, $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ r=3:

Այսպիսով, տարբեր ձևափոխությունների օգնությամբ աշխատում ենք մատրիցը բերել այնպիսի տեսքի, որ գլխավոր անկյունագծի մի կողմում լինեն զրոներ:

Մատրիցի ռանգը անկյունագծի վրա գտնվող ոչ զրոյական էլեմենտների քանակն է:

Որոշենք հետևյալ մատրիցի ռանգը՝

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & -9 & 5 & 1 \\ 0 & -5 & -9 & 5 & 1 \end{pmatrix} => \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & -9 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ r=2:}$$

Դիցուք տրված է $m\times n$ կարգի հետևյալ մատրիցը՝

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ - & - & \cdots & - \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}:$$

A մատրիցի մեջ վերցնենք կամայական k տողեր և k սյուներ: Ընդ որում, $1\le k\le \min(m,n)$, որտեղ $\min(m,n)$ m և n թվերի փոքրագույնն է:

Մատրիցի այն էլեմենտները, որոնք գտնվում են k տողերի, k սյուների մեջ, կկազմեն k-րդ կարգի քառակուսային մինոր:

Հետագայում մեզ հետաքրքրելու են այն մինորները, որոնք զրոյից տարբեր են:

Այստեղ կարևոր է հաշվի առնել հետևյալ դիտողությունը. եթե A մատրիցի բոլոր k-րդ կարգի մինորները հավասար են զրոյի, ապա զրոյի են հավասար նաև ավելի բարձր կարգի մինորները:

<u>Սահմանում.</u> Ինչպես նշել էինք, A մատրիցի գծորեն անկախ սյուների առավելագույն թիվը կոչվում է այդ մատրիցի ռանգ կամ մատրիցի ռանգ է կոչվում մատրիցի 0-ից տարբեր ամենաբարձր կարգի մինորի կարգը:

Մատրիցի ռանգը նշանակվում է r տառով: Մատրիցի ռանգի սահմանումից հետևում է, որ

1. մատրիցի ռանգն արտահայտվում է ամբողջ թվով՝ $0 \le r \le \min(m,n)$,
2. մատրիցի ռանգը հավասար է 0-ի այն և միայն այն ժամանակ, երբ մատրիցը հավասար է 0-ի,
3. քառակուսային մատրիցի ռանգը՝ $r = n$, երբ այն չվերասերված է:

<u>Օրինակ</u>. Որոշել A մատրիցի ռանգը k կարգի մինորների օգնությամբ:

<u>Լուծում</u>. Տրված է A մատրիցը՝

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} :$$

Քանի որ տրված մատրիցն ունի 3 տող և 5 սյուն, ապա մատրցի ռանգը՝

$$r = rangA \le \min(3;5) = 3 :$$

Դիտարկենք A մատրիցի առաջին կարգի մինորը, որը պարունակում է $a_{11} = 1 \ne 0$, տարրը, նրան ընդգրկող 2-րդ կարգի մինորը միակն է՝

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 6 = -5 \ne 0,$$

ուրեմն A մատրիցի ռանգը՝ $r \ge 2$:

Այժմ դիտարկենք վերոհիշյալ 2-րդ կարգի մինորն ընդգրկող 3-րդ կարգի մինորը՝

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -3 + 0 - 9 - 6 + 0 + 18 = 0 :$$

Դիտարկենք 3-րդ կարգի մի այլ մինոր՝

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 6 + 3 + 0 + 0 - 9 + 0 = 0,$$

այսպես շարունակելով, կնկատենք, որ բոլոր հնարավոր 3-րդ կարգի մինորները հավասար են զրոյի, հետևաբար, A մատրիցի ռանգը հավասար է 2-ի՝ $r = 2$:

§ 13. Կրոնեկեր-Կապելլի թեորեմը

Դիցուք տրված է հավասարումների հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_{12} + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ --------------- \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} : \qquad (1)$$

Դիտարկենք այդ համակարգի A մատրիցը և $\overline{A}$ ընդլայնված մատրիցը.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ - & - & \cdots & - \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ - & - & \cdots & - & - \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} :$$

<u>Թեորեմ1.</u> (Կրոնեկեր-Կապելլի) Որպեսզի (1) համակարգը լինի համատեղելի, անհրաժեշտ է և բավարար, որպեսզի A մատրիցի ռանգը հավասար լինի $\overline{A}$ ընդլայնված մատրիցի ռանգին:

<u>Ապացույց</u>:

1. Ենթադրենք (1) համակարգը համատեղելի է և $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ թվերը հանդիսանում են այդ լուծումներից մեկը: Տեղադրելով այդ թվերը (1) համակարգում անհայտների փոխարեն, կստանանք նույնություն, որը ցույց է տալիս, որ $\overline{A}$ մատրիցի վերջին սյունը հանդիսանում է մյուս սյուների գծային կոմբինացիան: $\overline{A}$ մատրիցի մյուս բոլոր սյուները համընկնում են A մատրիցի սյուների հետ, այսինքն գծորեն արտահայտվում են այդ մատրիցի սյուներով: Այսինքն $\overline{A}$ մատրիցը համարժեք է հետևյալ մատրիցին՝

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ - & - & - & - & - \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & 0 \\ - & - & - & - & - \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & 0 \end{pmatrix} :$$

Հակառակը, A մատրիցի յուրաքանչյուր սյունը հանդիսանում է $\overline{A}$-ի սյուն, այսինքն գծորեն արտահայտվում է այդ մատրիցի սյուներով: Այստեղից հետևում է, որ A և $\overline{A}$ մատրիցների սյուների համակարգերը համարժեք են միմյանց հետ, հետևաբար ըստ մատրիցների ռանգի հատկության նրանք կունենան միևնույն ռանգը՝ $rangA = rang\overline{A}$:

2. Այժմ ենթադրենք, որ A և $\overline{A}$ մատրիցներն ունեն հավասար ռանգեր: Այստեղից հետևում է, որ A մատրիցի սյուների ցանկացած մաքսիմալ գծորեն անկախ համակարգ կհանդիսանա $\overline{A}$ մատրիցի համար: Այսպիսով, այդ համակարգի միջոցով և, ընդհանրապես, A մատրիցի սյուների միջոցով գծորեն կարտահայտվի $\overline{A}$ մատրիցի վերջին սյունը: Հետևաբար, գոյություն կունենա $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ թվերի այնպիսի համակարգ, որ A մատրիցի սյուները բազմապատկած այդ թվերով տալիս է (1) համակարգի ազատ անդամների սյունը: Այսպիսով, A և $\overline{A}$ մատրիցների ռանգերի հավասարությունը բերում է (1) համակարգի համատեղելիությունը:

Դիտողություն. Անհրաժեշտ է նշել, որ Կրոնեկեր-Կապելլիի թեորեմը պարզում է ոչ համասեռ համակարգի համատեղ լինելու հարցը և հաստատում լուծման գոյությունը: Սակայն չի նշում լուծումների որոնման որևէ եղանակ:

Թեորեմ. Համատեղ համակարգը կունենա միակ լուծում, եթե նրա մատրիցի ռանգը հավասար է անհայտների թվին:

Թեորեմ. Եթե համատեղ համակարգի ռանգը փոքր է անհայտների թվից, համակարգը կունենա անթիվ բազմությամբ լուծումներ:

Սահմանում. Մատրիցի բազիսային մինոր կոչվում է 0-ից տարբեր մինորը, որի կարգը հավասար է այդ մատրիցի ռանգին:

Սահմանում. Բազիսային անհայտներ (համատեղ համակարգի) կոչվում է մատրիցի անհայտներից կազմված մինորը, որի ռանգը հավասար է r-ի: Մնացած անհայտները կոչվում են ազատ անհայտներ:

Նշված թեորեմներից հետևում է, որ գծային հավասարումների համակարգի լուծումները կարելի է հետազոտել հետևյալ կերպ.

1. հաշվել A և $\overline{A}$ մատրիցների ռանգերը, եթե $r \neq \overline{r}$, ապա համակարգն անհամատեղելի է,
2. եթե $r = \overline{r}$, ապա առանձնացվում են բազիսային և ազատ անհայտները,
3. սկզբնական համակարգից առանձնացվում են գծորեն անկախ հավասարումները, որոնց թիվը կլինի r, եթե բազիսային անհայտների թիվը հավասար է անհայտների թվին, ապա համակարգն ունի միակ լուծում, որը կարելի է ստանալ Կրամերի բանաձևերով,
4. եթե բազիսային անհայտների թիվը փոքր է անհայտների թվից՝ $r < n$, ապա համակարգը կունենա անթիվ բազմությամբ լուծումներ:

§ 14. Վեկտորների համակարգի գծորեն անկախության որոշումը որոշիչների միջոցով

Ենթադրենք ուսումնասիրվում է n-չափանի վեկտորներից կազմված համախումբը՝ $a_1, a_2, \cdots, a_n$, այս վեկտորները համարելով սյուներ(տողեր)՝ կազմենք $\Delta = |a_1, a_2, \cdots, a_n|$ որոշիչը:

Թեորեմ1. Եթե վեկտորների համախումբը գծորեն կախված է, ապա $\Delta = 0$:

Թեորեմ2. Եթե $\Delta \neq 0$, ապա վեկտորների համախումբը գծորեն անկախ է:

Այս թեորեմը կարելի է վերաձևակերպել հետևյալ կերպ:

Եթե մատրիցի ռանգը հավասար է նրա չափողականությանը, ապա $\Delta \neq 0$, և $\Delta = 0$, եթե ռանգը փոքր է չափողականությունից $(r < n)$:

Ապացուցենք ձևակերպված թեորեմներից առաջինը:

Դիցուք որոշիչի սյուները գծորեն կախված են, ապացուցենք, որ որոշիչը հավասար է 0-ի:

Համաձայն գծային կախվածության սահմանման՝ գոյություն ունեն այնպիսի $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ թվեր, որոնցից ոչ բոլորն են հավասար 0-ի, որոնց համար տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը՝

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \cdots + \lambda_n \vec{a}_n = 0:$$

Պարզության համար ենթադրենք, որ $\lambda_1 \neq 0$, բաժանենք նրա վրա, կստանանք՝

$$\vec{a}_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\vec{a}_2 + \cdots + \frac{\lambda_n}{\lambda_1}\vec{a}_n = 0:$$

Այժմ որոշիչի 2-րդ սյունը բազմապատկենք $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$-ով, 3-րդ սյունը՝ $\frac{\lambda_3}{\lambda_1}$-ով, ..., n-րդը՝ $\frac{\lambda_n}{\lambda_1}$ և գումարենք առաջին սյանը: Արդյունքում կստանանք մի որոշիչ, որի առաջին սյունը կազմված է միայն 0-ներից: Նշված ձևափոխությունների հետևանքով հին և նոր որոշիչները միմյանց հավասար են:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ - & - & \cdots & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \left|\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n\right| = \left|\vec{0}, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n\right| = 0:$$

§ 15. Գծային հավասարումների համասեռ համակարգեր

<u>Սահմանում</u>. Գծային հավասարումների համակարգը կոչվում է համասեռ, եթե բոլոր ազատ անդամները հավասար են 0-ի:

Ընդհանուր դեպքում համասեռ հավասարումների համակարգն ունի (1) տեսքը: Համասեռ համակարգը միշտ համատեղելի է:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_{12} + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ ---------------- \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}, \qquad (1)$$

Իրոք, $\alpha_i = 0 (i = 1,2,\ldots,n)$ բավարարում է համակարգի բոլոր հավասարումներին: Եթե (1) համակարգում $m = n$, իսկ

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ - & - & \cdots & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

որոշիչը հավասար չէ զրոյի, ապա այդպիսի համակարգը ունի միայն զրոյական լուծումներ, որը հետևում է Կրամերի բանաձևերից:

Իրոք, դժվար չէ նկատել, որ բոլոր օժանդակ որոշիչները հավասար են 0-ի՝ $\Delta_1 = \Delta_2 = \cdots = \Delta_n = 0$:

Հետևաբար, ըստ Կրամերի բանաձևի՝

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 0, \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 0, \; \ldots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}:$$

Ոչ զրոյական լուծումներ համակարգը կունենա այն ժամանակ, երբ հավասարումների թիվը փոքր է անհայտների թվից կամ նրանց հավասարության դեպքում, երբ համակարգի որոշիչը՝ $\Delta = 0$:

Ոչ զրոյական լուծումների հարցը պարզվում է հետևյալ թեորեմի միջոցով:

<u>Թեորեմ</u>. Համասեռ հավասարումների համակարգն ունի ոչ զրոյական լուծումներ այն դեպքում, երբ համակարգի ռանգը փոքր է անհայտների թվից, $r(A) < n$:

<u>Հետևանք 1</u>. Եթե համակարգի համասեռ հավասարումների թիվը փոքր է անհայտների թվից, ապա համակարգն ունի ոչ զրոյական լուծում:

<u>Հետևանք 2</u>. Եթե համասեռ հավասարումների համակարգում հավասարումների թիվը հավասար է անհայտների թվին, ապա նա ունի ոչ զրոյական լուծումներ այն դեպքում, եթե համակարգի անհայտների գործակիցներից կազմված որոշիչը հավասար է զրոյի:

Համասեռ հավասարումների լուծումներն օժտված են հետևյալ հատկություններով.

1/ Եթե $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ վեկտորը հանդիսանում է (1) համակարգի լուծում, ապա $k\overline{\alpha} = (k\alpha_1, k\alpha_2, \ldots, k\alpha_n)$ վեկտորը նույնպես կհանդիսանա (1) համակարգի լուծում:

2/ $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ և $\bar{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ հանդիսանում են (1) համակարգի լուծումներ, ապա ցանկացած c_1 և c_2 թվերի $c_1\overline{\alpha} + c_2\bar{k}$ գծային կոմբինացիան՝

$$c_1\overline{\alpha} + c_2\bar{k} = (c_1\alpha_1 + c_2k_1, c_1\alpha_2 + c_2k_2, \ldots, c_1\alpha_n + c_2k_n)$$

նույնպես կհանդիսանա (1) համակարգի լուծում:

Նշված հատկությունների ճշտության մեջ համոզվելու համար բավական է ստացած արժեքները տեղադրել (1) համակարգի մեջ:

1/ և 2/ հատկություններից հետևում է, որ համասեռ հավասարումների համակարգի լուծումների ցանկացած գծային կոմբինացիան նույնպես կհանդիսանա համակարգի լուծում:

<u>Թեորեմ.</u> Գծային համասեռ հավասարումների համակարգի լուծումների բազմությունը կազմում է գծային տարածություն:

<u>Ապացույց</u>. Յուրաքանչյուր լուծում իրենից ներկայացնում է n-չափանի վեկտոր՝

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}:$$

Պետք է ապացուցել, որ երկու լուծումների գումարը նորից լուծում է, և լուծումը՝ բազմապատկած որևէ թվով, կրկին կլինի լուծում:

Դիցուք $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ որևէ լուծումներ են, հետևաբար, $A\vec{x}_1 = 0$, $A\vec{x}_2 = 0$, հետևում է՝

$$A\vec{x}_1 + A\vec{x}_2 = 0$$
$$A(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = 0:$$

Ստացվեց, որ $\vec{x}_1 + \vec{x}_2$ կրկին լուծում է:

Դիցուք λ-ն որևէ թիվ է, $\vec{x}$ որևէ լուծում: Ունենք, որ $A(\lambda\vec{x}) = \lambda A(\vec{x}) = \lambda\vec{0} = \vec{0}$: Այսպիսով, $\lambda\vec{x}$ վեկտորը նույնպես կլինի լուծում: Մենք նաև ապացուցեցինք, որ համասեռ համակարգի լուծումների բազմությունը հանդիսանում է R^n տարածության ենթատարածություն:

Այստեղ հարց է առաջանում գտնել (1) համակարգի այն գծորեն անկախ լուծումները, որոնցից գծորեն կախված են մյուս բոլոր լուծումները:

Սահմանում. $e_1, e_2, \ldots, e_k$ վեկտորների համակարգը կոչվում է ֆունդամենտալ, եթե (1) համակարգի ցանկացած լուծում հանդիսանում է $e_1, e_2, \ldots, e_k$ լուծումների գծային կոմբինացիա:

Թեորեմ. Եթե (1) համակարգի գործակիցներից կազմված մատրիցի ռանգը հավասար է r-ի և r-ը փոքր է անհայտների n թվից $(r < n)$, ապա ֆունդամենտալ լուծումների համակարգն ունի $n - r$ լուծումներ:

(1) համակարգի ընդհանուր լուծումը կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$c_1 e_1 + c_2 e_2 + \ldots + c_k e_k,$$

որտեղ $e_1, e_2, \ldots, e_k$ ֆունդամենտալ լուծումների համակարգն է, $c_1, c_2, \ldots, c_k$ կամայական թվեր են, իսկ $k = n - r$:

Խնդիրներ

1. Հաշվել մատրիցի ռանգը.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 5 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

Պատ. $r = 2$:

2. Հաշվել մատրիցի ռանգը.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 11 \end{pmatrix}$$

Պատ. $r = 2$:

3. Որոշել ռանգը.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Պատ. $r = 2$:

4. Որոշել մատրիցի ռանգը.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Պատ. $r = 3$:

5. Ժորդան-Գաուսի մեթոդով որոշել մատրիցի ռանգը.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Պատ. $r = 3$:

6. Հետազոտել հավասարումների համակարգը.

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 5x_1 + 3x_2 + 8x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

Պատ. $r(A) = r(A_1) = 2$, համակարգը համատեղելի է:

7. Հետազոտել հավասարումների համակարգը.

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 1 \\ 2x_1 + 10x_2 + 8x_3 = 3 \\ 3x_1 + 15x_2 + 12x_3 = 5 \end{cases}$$

Պատ. $r(A) = 1, r(A_1) = 2$, համակարգն անհամատեղելի է:

8. Հետազոտել հավասարումների համակարգը.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 4 \\ x_1 - 4x_2 = -1 \\ 7x_1 + 10x_2 = 12 \\ 5x_1 + 6x_2 = 8 \\ 3x_1 - 16x_2 = -5 \end{cases}$$

Պատ. համակարգը համատեղելի է:

9.Հավասարումների համակարգը լուծել մատրիցային եղանակով.

1/ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -2 \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 7x_3 = -3 \end{cases}$ 2/ $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 + 8x_3 = -2 \end{cases}$

3/ $\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$ 4/ $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 = 5 \end{cases}$:

10. Գտնել համասեռ համակարգի լուծումների ֆունդամենտալ համակարգը և ընդհանուր լուծումը.

$$\begin{cases} x_1 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 5x_1 - x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Պատ. $e = (1;-3;2;1); ce$:

11. Գտնել համասեռ համակարգի լուծումների ֆունդամենտալ համակարգը և ընդհանուր լուծումը.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Պատ. $e = (0;-1;1); ce$:

§ 16. Գծային օպերատորներ: Գծային օպերատորի սահմանումը և հիմնական հատկությունները

Սահմանում. Կասենք, որ R գծային տարածության մեջ տրված է A օպերատորը, եթե R տարածության յուրաքանչյուր x տարրի համապատասխանության մեջ է դրված այդ տարածության որոշակի y տարր: Այդ համապատասխանությունը կնշանակենք հետևյալ ձևով՝ $y = Ax$ կամ $y = A(x)$:

A օպերատորը կանվանենք գծային, եթե R գծային տարածության ցանկացած x_1 և x_2 տարրերի և կամայական λ իրական թվի համար բավարարվում են հետևյալ պայմանները.

1. $A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2$

2. $A(\lambda x) = \lambda Ax$:

Ax տարրը կոչվում է x տարրի պատկեր, իսկ x տարրը Ax վեկտորի նախապատկեր:
Գծային օպերատորների մեջ հատուկ դեր են խաղում հետևյալ պարզագույն օպերատորները.
ε-նույնական օպերատորը, որը տարածության յուրաքանչյուր $\vec{x}$ վեկտորին համապատասխանության մեջ է դնում զրոյական վեկտորը, այսինքն՝

$$0\vec{x} = \vec{0}:$$

Գծային օպերատորի սահմանումից հետևում է նրա հետևյալ հատկությունները.

1. Գծային օպերատորը R գծային տարածության զրոյական տարրին համապատասխանության մեջ է դնում զրոյական վեկտորը: Իրոք, համաձայն վերը նշված 2. պայմանի՝

$$A0 = A(0 \cdot x) = 0:$$

2. Գծային օպերատորը պահպանում է վեկտորների գծային կոմբինացիան, այսինքն՝

$$A(\propto_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + \propto_2 \cdot \overrightarrow{a_2} + \cdots + \propto_n \cdot \vec{a}_n) = \propto_1 A\overrightarrow{a_1} + \propto_2 A\overrightarrow{a_2} + \cdots + \propto_n A\vec{a}_n,$$

որտեղ $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \cdots, \vec{a}_n$-ը կամայական վեկտորներ են R-ից: Ապացույցը կատարվում է մաթեմատիկական ինդուկցիայով:

3. Գծային օպերատորը պահպանում է վեկտորների գծային կախվածությունը: Իրոք, ենթադրենք $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \cdots, \vec{a}_n$ վեկտորները գծորեն կախված են: Դա նշանակում է, որ գոյություն ունեն $\propto_1, \propto_2, \cdots, \propto_n$ թվեր, որոնք միաժամանակ հավասար չեն զրոյի, և $\propto_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + \propto_2 \cdot \overrightarrow{a_2} + \cdots + \propto_n \cdot \vec{a}_n = 0$: Այդ դեպքում համաձայն 1. և 2. հատկությունների՝

$$A(\propto_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + \propto_2 \cdot \overrightarrow{a_2} + \cdots + \propto_n \cdot \vec{a}_n) = \propto_1 A\overrightarrow{a_1} + \propto_2 A\overrightarrow{a_2} + \cdots + \propto_n A\vec{a}_n = 0,$$

որտեղից հետևում է, որ $A\overrightarrow{a_1}, A\overrightarrow{a_2}, \cdots, A\vec{a}_n$ վեկտորները գծորեն կախված են:

§ 17. Գծային օպերատորների և մատրիցների միջև եղած կապը

Այժմ ցույց տանք, որ օպերատորները կարելի է նկրագրել մատրիցների օգնությամբ: Դրա համար նախ ապացուցենք հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ1. ենթադրենք $\overrightarrow{l_1}, \overrightarrow{l_2}, \cdots, \overrightarrow{l_n}$-ը R գծային տարածության մեջ ինչ որ բազիս է, իսկ $\overrightarrow{g_1}, \overrightarrow{g_2}, \cdots, \overrightarrow{g_n}$-ը այդ տարածության կամայական վեկտորներ են: Այդ դեպքում գոյություն ունի մեկ և միայն մեկ A գծային օպերատոր այնպիսին, որ՝

$$A\overrightarrow{l_\imath} = \overrightarrow{g_\imath},\ i = 1,2,\cdots,n:$$

Ապացույց. Ենթադրենք $\vec{x}$ -ը R գծային տարածության կամայական վեկտոր է, $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \vec{l_i}$: Դիտարկենք $\vec{y} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \vec{g_i}$ վեկտորը և նշանակենք A–ով այն օպերտորը, որը $\vec{x}$–ին համապատասխանության մեջ է դնում $\vec{y}$ վեկտորը՝ $A\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \vec{g_i}$:

Հեշտ է համոզվել, որ A-ն գծային է: Ակնհայտ է նաև, որ $A\vec{l_i} = g_i$, $i = 1,2,\cdots,n$: Մնում է ցույց տալ, որ ցանկացած գծային օպերատոր, այնպիսին, որ $B\vec{l_i} = g_i$, $i = 1,2,\cdots,n$, համընկնում է A-ի հետ:

$$B\vec{x} = B\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i \vec{l_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i B\,\vec{l_i} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \vec{g_i} = A\vec{x}:$$

Այժմ R գծային տարածության մեջ վերցնենք ինչ-որ $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \cdots, \vec{l}_n$ բազիս և ենթադրենք A գծային օպերատոր է R-ում: A օպերատորը $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \cdots, \vec{l}_n$ վեկտորներին համապատասխանության մեջ է դնում $A\vec{l}_1, A\vec{l}_2, \cdots, A\vec{l}_n$ վեկտորները: Այդ վեկտորները վերլուծենք ըստ $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \cdots, \vec{l}_n$ բազիսի՝

$$\begin{cases} A\vec{l}_1 = \propto_{11} \vec{l}_1 + \propto_{21} \vec{l}_2 + \cdots + \propto_{n1} \vec{l}_n \\ A\vec{l}_2 = \propto_{12} \vec{l}_1 + \propto_{22} \vec{l}_2 + \cdots + \propto_{n2} \vec{l}_n \\ - - - - - - - - - - - - - - - \\ A\vec{l}_n = \propto_{1n} \vec{l}_1 + \propto_{2n} \vec{l}_2 + \cdots + \propto_{nn} \vec{l}_n : \end{cases}$$

Հետևյալ աղյուսակը՝

$$A = \begin{pmatrix} \propto_{11} & \propto_{12} & \cdots & \propto_{1n} \\ \propto_{21} & \propto_{22} & \cdots & \propto_{2n} \\ - & - & - & - \\ \propto_{n1} & \propto_{n2} & \cdots & \propto_{nn} \end{pmatrix}$$

կկոչվի A օպերատորի մատրից $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \cdots, \vec{l}_n$ բազիսում:

Այսպիսով, տրված բազիսում յուրաքանչյուր գծային օպերատորի համապատասխանում է որոշակի մատրից: Առաջանում է հետևյալ հարցը. արդյո՞ք կամայական A քառակուսային մատրիցի համար գոյություն ունի այնպիսի գծային օպերատոր, որի մատրիցը տրված $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \cdots, \vec{l}_n$ բազիսում համընկնի A մատրիցի հետ: Պատասխանը դրական է, քանի որ ունենալով A մատրիցը, սկզբում կգտնենք՝

$$\begin{aligned} \vec{g_1} &= \propto_{11} \vec{l}_1 + \propto_{21} \vec{l}_2 + \cdots + \propto_{n1} \vec{l}_n \\ \vec{g_2} &= \propto_{12} \vec{l}_1 + \propto_{22} \vec{l}_2 + \cdots + \propto_{n2} \vec{l}_n \\ & - - - - - - - - - - - - - - - \\ \vec{g_n} &= \propto_{1n} \vec{l}_1 + \propto_{2n} \vec{l}_2 + \cdots + \propto_{nn} \vec{l}_n \end{aligned}$$

վեկտորները, այնուհետև համաձայն թեորեմ1.-ի գոյություն կունենա A գծային օպերատոր, ընդ որում միակը, որը $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \cdots, \vec{l}_n$ վեկտորներին համապատասխանության մեջ կդնի $\vec{g_1}, \vec{g_2}, \cdots, \vec{g_n}$ վեկտորները, և նրա մատրիցը $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \cdots, \vec{l}_n$ բազիսում կհամընկնի A մատրիցի հետ:

Այսպիսով, գծային տարածության մեջ բազիսի ընտրությունից հետո փոխմիարժեք համապատասխանություն է ստեղծվում այդ տարածության մեջ տրված գծային օպերատորների և քառակուսային մատրիցների միջև:

Օրինակ1. Ենթադրենք R-ը գծային տարածություն է, որի տարրերը բոլոր բազմանդամներն են, որոնց աստիճանը փոքր է n-ից, և A-ն յուրաքանչյուր բազմանդամին համապատասխանության մեջ է դնում այդ բազմանդամի ածանցյալը: R-ում որպես բազիս վերցնենք, օրինակ $\vec{l_1} = 1, \vec{l_2} = x, \vec{l_3} = \frac{x^2}{2!}, \cdots, \vec{l_n} = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ վեկտորները: Այդ դեպքում՝ $A\vec{l_1} = 0, A\vec{l_2} = 1 = \vec{l_1}, \vec{l_3} = x = \vec{l_2}, \cdots, A\vec{l_n} = \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} = \vec{l}_{n-1}$: Հետևաբար, A գծային օպերատորի մատրիցը նշված բազիսում կլինի՝

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}:$$

Օրինակ2. Ենթադրենք E –ն նույնական օպերատոր է R գծային տարածության մեջ: R-ում վերցնենք $\vec{l}_1, \vec{l_2}, \cdots, \vec{l_n}$ բազիսը: Ակնհայտ է, որ E օպերատորի մատրիցը կլինի՝

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}:$$

§ 18. Գործողություններ գծային օպերատորների հետ

Ենթադրենք A և B գծային օպերատորներ են R գծային տարածության մեջ:
Սահմանում. C օպերատորը կոչվում է A և B օպերատորների գումար, եթե $\forall\ \vec{x} \in R$ –ի համար տեղի ունի՝

$$C\vec{x} = A\vec{x} + B\vec{x}:$$

Կնշանակենք՝

$$C = A + B:$$

Պարզ է, որ գծային օպերատորների գումարը նույնպես գծային օպերատոր է: Եթե A և B օպերատորները մի ինչ-որ բազիսում ունեն համապատասխանաբար $\mathrm{A} = (\propto_{\mathrm{ij}})$ և $\mathrm{B} = (\beta_{\mathrm{ij}})$ մատրիցները, ապա $C = A + B$ օպերատորի մատրիցը կլինի՝ $\mathrm{C} = (\mathrm{c_{ij}})$, որտեղ $c_{ij} = \propto_{ij} + \beta_{ij}$:
Սահմանում. $\propto$ թվի և A գծային օպերատորի արտադրյալ կոչվում է $\propto \cdot A$ օպերատորը, որը $\forall\ \vec{x} \in R$ –ին համապատասխանության մեջ է դնում $\propto (A\vec{x})$ վեկտորը, այսինքն՝

$$(\propto A)\vec{x} = \propto (A\vec{x}):$$

Պարզ է, որ $\propto A$-ն ևս գծային օպերատոր է: Եթե $A = (\propto_{ij})$ -ն A օպերատորի մատրիցն է, ապա $\propto A$ օպերատորի մատրիցը կլինի՝ $\propto A = (\propto \cdot \propto_{ij})$:
Սահմանում. C օպերատորը կոչվում է A և B օպերատորների արտադրյալ, եթե

$\forall \vec{x} \in R$ – ի համար տեղի ունի՝

$$C\vec{x} = A(B\,\vec{x}):$$

Կնշանակենք հետևյալ կերպ՝

$$C = A \cdot B:$$

Նշենք, որ ընդհանրապես $AB \neq BA$:

Ցույց տանք, որ C-ն գծային օպերատոր է:

Իրոք,

$$C(\vec{x_1} + \vec{x_2}) = AB(\vec{x_1} + \vec{x_2}) = A(B\,\vec{x_1} + B\,\vec{x_2}) = A(B\,\vec{x_1}) + A(B\,\vec{x_2}) = C\vec{x_1} + C\vec{x_2}:$$

$$C(\lambda\vec{x}) = A(B(\lambda\vec{x})) = A(\lambda B\vec{x}) = \lambda A(B\vec{x}) = \lambda C\vec{x}:$$

Ենթադրենք $\vec{l_1}, \vec{l_2}, \cdots, \vec{l_n}$ բազիսում $A = (\propto_{ij})$-ն A օպերատորի մատրիցն է, իսկ $B = (\beta_{ij})$ -ն՝ B օպերատորի մատրիցը: Գտնենք $C = AB$ օպերատորի $C = (c_{ij})$ մատրիցը:

Համաձայն օպերատորի մատրիցի սահմանման՝

$$A\vec{l_k} = \sum_i \propto_{ik} \vec{l_\iota},\ B\vec{l_k} = \sum_i \beta_{ik} \vec{l_\iota},\ C\vec{l_k} = \sum_i C_{ik} \vec{l_\iota}:$$

Կարող ենք գրել՝

$$C\vec{l_k} = A(B\vec{l_k}) = A\left(\sum_j \beta_{jk}\,\vec{l_j}\right) = \sum_j \beta_{jk} A\vec{l_j} = \sum_j \beta_{jk} \propto_{ij} \vec{l_\iota}:$$

Համեմատելով $\vec{l_\iota}$-ի գործակիցները ստանում ենք՝

$$C_{ik} = \sum_j \propto_{ij}\, \beta_k:$$

Այսպիսով, պարզ է դառնում մատրիցների գումարի, մատրիցը թվով բազմապատկման և, հատկապես, մատրիցների արտադրյալի սահմանումների իմաստը:

Նկատենք, որ $\forall A$ օպերատորի համար՝ $\boldsymbol{AE = EA = A}$, E-ն նույնական օպերատոր է: Այսպիսով, օպերատորների բազմապատկման դեպքում նույնական օպերատորը կատարում է միավորի դերը: Այդ պատճառով նույնական օպերատորը կկոչվի նաև միավոր օպերատոր:

Ծանոթանանք նաև A օպերատորի հակադարձ օպերատորի գաղափարին:

<u>**Սահմանում.**</u> B գծային օպերատորը կոչվում է A օպերատորի հակադարձ, եթե $\boldsymbol{AB = BA = E}$, որտեղ E–ն միավոր օպերատորն է:

A օպերատորի հակադարձը կնշանակենք $\boldsymbol{A^{-1}}$-ով: Ոչ բոլոր գծային օպերատորներն ունեն հակադարձ օպերատոր: Օրինակ, եթե A օպերատորը ոչ զրոյական $\vec{x}$ վեկտորին համապատասխանեցնում է զրոյական վեկտորը՝ $A\vec{x} = \vec{0}$, ապա A օպերատորի համար հակադարձը գոյություն չունի: Իրոք, ենթադրենք A^{-1}-ը գոյություն ունի: Այդ դեպքում՝ $\vec{x} = A^{-1}A\vec{x} = A^{-1}\vec{0} = \vec{0}$: Եկանք հակասության:

Քանի որ տրված բազիսում գծային օպերատորների և քառակուսային մատրիցների միջև գոյություն ունի փոխմիարժեք համապատասխանություն, որը պահպանում է բազմապատկման գործողությունը, և քանի որ A մատրիցի համար գոյություն ունի հակադարձ մատրից այն և միայն այն ժամանակ, երբ $det\mathrm{A} \neq 0$, ապա որպեսզի A օպերատորի համար գոյություն ունենա հակադարձ օպերատոր, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրա մատրիցը մի ինչ-որ բազիսում ունենա զրոյից տարբեր դետերմինանտ:

§19. Գծային օպերատորների սեփական վեկտորները և սեփական արժեքները

Ենթադրենք R-ը գծային տարածություն է, և A-ն գծային օպերատոր է R-ում:
__Սահմանում__. R տարածության մեջ $\vec{x}$ ոչ զրոյական վեկտորը կոչվում է A օպերատորի սեփական վեկտոր, եթե

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}:$$

λ թիվը կոչվում է A օպերատորի սեփական արժեք: Այժմ տեսնենք, ինչպես կարելի է գտնել A օպերատորի սեփական արժեքները և սեփական վեկտորները:

R տարածության մեջ վերցնենք $\vec{l_1}, \vec{l_2}, \cdots, \vec{l_n}$ բազիսը և ենթադրենք $\mathrm{A} = (\propto_{ij})$-ն A օպերատորի մատրիցն է նշված բազիսում: Ենթադրենք $\vec{x} = \xi_1\vec{l_1} + \xi_2\vec{l_2} + \cdots + \xi_n\vec{l_n}$ -ը A օպերատորի սեփական վեկտորն է, իսկ λ -ն՝ սեփական արժեքը, այսինքն՝ $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$: Այդ դեպքում՝

$$\begin{aligned}
A\vec{x} = A(\xi_1\vec{l_1} + \xi_2\vec{l_2} + \cdots + \xi_n\vec{l_n}) &= \xi_1 A\vec{l_1} + \xi_2 A\vec{l_2} + \cdots + \xi_n A\vec{l_n} = \\
&= \xi_1(\propto_{11}\vec{l}_1 + \propto_{21}\vec{l}_2 + \cdots + \propto_{n1}\vec{l}_n) + \xi_2(\propto_{12}\vec{l}_1 + \propto_{22}\vec{l}_2 + \cdots + \propto_{n2}\vec{l}_n) + \cdots \\
&+ \xi_n(\propto_{1n}\vec{l}_1 + \propto_{2n}\vec{l}_2 + \cdots + \propto_{nn}\vec{l}_n) == (\propto_{11}\xi_1 + \propto_{12}\xi_2 + \cdots + \propto_{1n}\xi_n)\vec{l_1} + \\
+(\propto_{21}\xi_1 + \propto_{22}\xi_2 + \cdots + \propto_{2n}\xi_n)\vec{l_2} &+ \cdots + (\propto_{n1}\xi_1 + \propto_{n2}\xi_2 + \cdots + \propto_{nn}\xi_n)\vec{l_n} \\
&= \lambda(\xi_1\vec{l_1} + \xi_2\vec{l_2} + \cdots + \xi_n\vec{l_n}):
\end{aligned}$$

Այստեղից՝

$$\begin{cases}
(\propto_{11} - \lambda)\xi_1 + \propto_{12}\xi_2 + \cdots + \propto_{1n}\xi_n = 0 \\
\propto_{21}\xi_1 + (\propto_{22} - \lambda)\xi_2 + \cdots + \propto_{2n}\xi_n = 0 \\
\text{— — — — — — — — — — — — — — — — —} \\
\propto_{n1}\xi_1 + \propto_{n2}\xi_2 + \cdots + (\propto_{nn} - \lambda)\xi_n = 0
\end{cases} \quad : \qquad (1)$$

Որպեսզի (1) համակարգը ունենա ոչ զրոյական լուծում, անհրաժեշտ է և բավարար, որ համակարգի դետերմինանտը հավասար լինի զրոյի՝

$$\begin{vmatrix}
\propto_{11} - \lambda & \propto_{12} & \cdots & \propto_{1n} \\
\propto_{21} & \propto_{22} - \lambda & \cdots & \propto_{2n} \\
— & — & — & — \\
\propto_{n1} & \propto_{n2} & \cdots & \propto_{nn} - \lambda
\end{vmatrix} = 0:$$

Այս հավասարման դետերմինանտը $\mathrm{A} - \lambda\mathrm{E}$ մատրիցի դետերմինանտն է, որը λ -ի նկատմամբ n-րդ աստիճանի բազմանդամ է: Այն կոչվում է A մատրիցի բնութագրիչ բազմանդամ:

Ցույց տանք, որ այդ բազմանդամը կախված չէ բազիսի ընտրությունից: Իրոք, եթե անցնենք այլ բազիսի, ապա A օպերատորի A մատրիցը կընդունի $\mathrm{C}^{-1} \cdot \mathrm{A} \cdot \mathrm{C}$ տեսքը, որտեղ

C –ն մի բազիսից մյուսին անցման մատրիցն է: Այսպիսով, նոր բազիսում բնութագրիչ բազմանդամը $C^{-1} \cdot A \cdot C - \lambda E$ մատրիցի դետերմինանտն է, բայց՝

$$\left|C^{-1}AC-\lambda E\right|=\left|C^{-1}AC-\lambda C^{-1}EC\right|=\left|C^{-1}(A-\lambda E)C\right|=\left|C^{-1}\right|\left|A-\lambda E\right|\left|C\right|=\left|A-\lambda E\right|:$$

Այսպիսով, A մատրիցի բնութագրիչ բազմանդամը կախված չէ մատրիցի կոնկրետ տեսքից, այդ պատճառով այն կարելի է կոչել A օպերատորի բնութագրիչ բազմանդամ:

Օրինակ. Գտնել A օպերատորի սեփական արժեքները և սեփական վեկտորները, եթե նրա մատրիցը հետևյալն է՝

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 5 & 4\end{pmatrix}:$$

Լուծում. A օպերատորի բնութագրիչ բազմանդամը կլինի՝

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ 5 & 4-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-5\lambda-6=0=0:$$

Նրա արմատներն են՝ $\lambda_1=6,\ \lambda_2=-1$: Կգտնենք սեփական վեկտորները՝ լուծելով հետևյալ երկու համակարգերը.

$$\begin{cases}(1-\lambda_i)\xi_1+2\xi_2=0\\ 5\xi_1+(4-\lambda)\xi_2=0\end{cases},\quad i=1,2:$$

Այս համակարգերից յուրաքանչյուրը բերվում է մեկ հավասարման, քանի որ նրա գլխավոր դետերմինանտները հավասար են զրոյի:

Եթե $\lambda=6$, ստանում ենք՝ $5\xi_1-2\xi_2=0$: Որպես սեփական վկտոր կարելի է վերցնել $\overrightarrow{a_1}=(2;5)$ վեկտորը, ինչպես նաև ցանկացած $\propto\overrightarrow{a_1},\ \alpha\neq 0$:

Եթե $\lambda=-1$, ստանում ենք $\xi_1+\xi_2=0$: Որպես սեփական վեկտոր կարելի է վերցնել $\overrightarrow{a_2}=(1;-1)$ վեկտորը, ինչպես նաև $\beta\cdot\overrightarrow{a_2}$ վեկտորը, $\beta\neq 0$:

Շատ դեպքերում անհրաժեշտ է իմանալ, թե տրված A գծային օպերատորի մատրիցը որևէ բազիսում, երբ կարող է ունենալ անկյունագծային տեսք:

Թեորեմ. Որպեսզի A օպերատորի մատրիցը $\vec{l_1},\vec{l_2},\cdots,\vec{l_n}$ բազիսում լինի անկյունագծային, անհրաժեշտ է և բավարար, որպեսզի $\vec{l_1},\vec{l_2},\cdots,\vec{l_n}$ վեկտորները լինեն A օպերատորի սփական վեկտորներ:

Անհրաժեշտություն. Ենթադրենք A օպերատորի մատրիցը $\vec{l_1},\vec{l_2},\cdots,\vec{l_n}$ բազիսում ընդունում է անկյունագծային տեսք՝

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ - & - & - & -\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}:$$

Այդ դեպքում $A\overrightarrow{l_k}=\lambda_k\overrightarrow{l_k},\ k=1,2,\cdots,n$: Իսկ սա նշանակում է, որ $\overrightarrow{l_k}$ վեկտորները A օպերատորի սեփական վեկտորներն են:

Բավարարություն. Ենթադրենք $\vec{l_1}, \vec{l_2}, \cdots, \vec{l_n}$ բազիսային վեկտորները A օպերատորի սեփական վեկտորներն են, այսինքն՝ $A\vec{l_k} = \lambda_k \vec{l_k}$, $k = 1,2,\cdots,n$: Այդ դեպքում A օպերատորի մատրիցը կունենա անկյունագծային տեսք:

Խնդիրներ

1. Գտնել գծային օպերատորի սեփական արժեքներըև սեփական վեկտորները, եթե ինչ-որ բազիսում տրված է նրա մատրիցը.

1/ $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 2/ $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ 3/ $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ 4/ $\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

5/ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -3 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ 6/ $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ 7/ $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$:

Պատ. 1/ $\lambda_1 = 1$; $\vec{x_1} = \{\propto; -\propto\}$; $\lambda_2 = 3$; $\vec{x_2} = \{\propto; \propto\}$ 2/ $\lambda_1 = 1$; $\vec{x_1} = \{\propto; -2\propto\}$; $\lambda_2 = 3$; $\vec{x_2} = \{\propto; \propto\}$ 3/ $\lambda_1 = 0$; $\vec{x_1} = \{2\propto; -\propto\}$; $\lambda_2 = 10$; $\vec{x_2} = \{\propto; 2\propto\}$ 4/ λ=2, $\vec{x} = \{\propto; \propto\}$ 5/ λ=0, $\vec{x} = \{\propto; \propto; \propto\}$ 6/ λ=-1, $\vec{x} = \{\propto; \propto; -\propto\}$ 7/ λ=1, $\vec{x} = \{3\propto; \propto; \propto\}$:

Խառը խնդիրներ գծային հանրահաշվի վերաբերյալ

Տրված են A և B մատրիցները: Գտնել $A \cdot B$ արտադրյալը.

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$: Պատ. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$:

2. $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$: Պատ. $\begin{pmatrix} -9 & 13 \\ 15 & 4 \end{pmatrix}$:

3. $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$: Պատ. $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$:

4. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$: Պատ. $\begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$:

5. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$: Պատ. $\begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix}$:

6. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$: Պատ. $\begin{pmatrix}9 & 3\\ 10 & 3\end{pmatrix}$:

7. $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$: Պատ. $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix}$:

8. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$: Պատ. $\begin{pmatrix}4\\ 7\\ 3\end{pmatrix}$

9. $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 8 & 4\\ 7 & 0 & 3\\ 2 & 1 & -2\end{pmatrix}$: Պատ. $\begin{pmatrix}2 & 16 & 8\\ 21 & 0 & 9\\ 10 & 5 & -10\end{pmatrix}$:

10. $A=\begin{pmatrix}1 & 8 & 4\\ 7 & 0 & 3\\ 2 & 1 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}$: Պատ. $\begin{pmatrix}2 & 24 & 20\\ 14 & 0 & 15\\ 4 & 3 & -10\end{pmatrix}$:

Տրված է A մատրիցը: Գտնել A^n-ը.

11. $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$: Պատ. $\mathrm{A}^n=\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$:

12. $A=\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$: Պատ. $A^n=\begin{pmatrix}\lambda^n & n\lambda^n\\ 0 & \lambda^n\end{pmatrix}$:

13. $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$: Պատ. $A^n=2^{n-1}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$:

14. $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix}$: Պատ. $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, եթե n-ը զույգ է, $\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix}$ եթե n-ըկենտ է:

15. $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$: Պատ. $A^n=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$:

16. $A=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$: Պատ. $A^n=\begin{pmatrix}\cos n\varphi & -\sin n\varphi\\ \sin n\varphi & \cos n\varphi\end{pmatrix}$:

Գտնել հակադարձ մատրիցը.

17. $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$: Պատ. $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$:

18. $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}$: Պատ. $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -6 & -4 \\ -8 & -5 \end{pmatrix}$:

19. $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$: Պատ. $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$:

20. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$: Պատ. $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$:

21. $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$: Պատ. $\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$:

22. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: Պատ. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$:

23. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$: Պատ. $\begin{pmatrix} 7 & -6 & 4 \\ -3 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$:

24. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$: Պատ. $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$:

25. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$: Պատ. $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 9 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ -12 & 1 & 7 \end{pmatrix}$:

26. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$: Պատ. $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ 6 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$:

27. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$: Պատ. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$:

28. $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$: Պատ. $\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 \\ -1 & 4 & 5 \\ -1 & 4 & -6 \end{pmatrix}$:

Հետևյալ հավասարումներից գտնել X մատրիցը.

29. $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$: Պատ. $X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$:

30. $X \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$: Պատ. $X = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$:

31. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$: Պատ. $X = \begin{pmatrix} 0 & -7 \\ 1 & 14 \end{pmatrix}$:

32. $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}$: Պատ. $X = \begin{pmatrix} 1 & -6 & -9 \\ -1 & 10 & 17 \end{pmatrix}$:

33. $X \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$: Պատ. $X = \begin{pmatrix} -6 & 24 \\ 0 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$:

34. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 8 & 1 & 2 \end{pmatrix}$: Պատ. $X = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 5 \\ 15 & 2 & -3 \end{pmatrix}$:

35. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$: Պատ. $X = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$:

36. $X \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$: Պատ. $X = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$:

Հավասարումների համակարգը լուծել Կրամերի կանոնով.

37. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4: \end{cases}$ Պատ. $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3$:

38. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0: \end{cases}$ Պատ. $x_1 = x_2 = x_3 = 0$:

39. $\begin{cases} 5x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 4: \end{cases}$ Պատ. $x_1 = 1,\ x_2 = -2,\ x_3 = 3:$

40. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -1: \end{cases}$ Պատ. $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3:$

Հավասարումների համակարգը լուծել մատրիցային եղանակով.

41. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -2 \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 7x_3 = -3: \end{cases}$ Պատ. $x_1 = -8,\ x_2 = 11,\ x_3 = -4:$

42. $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 + 8x_3 = -2: \end{cases}$ Պատ. $x_1 = 31,\ x_2 = -34,\ x_3 = -3:$

43. $\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 = 2: \end{cases}$ Պատ. $x_1 = 2,\ x_2 = -5,\ x_3 = -6:$

44. $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 = 5: \end{cases}$ Պատ. $x_1 = x_2 = x_3 = 1:$

45. $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 2: \end{cases}$ Պատ. $x_1 = x_2 = x_3 = 1:$

46. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 2: \end{cases}$ Պատ. $x_1 = -1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 0:$

Հավասարումների համակարգը լուծել Գաուսի մեթոդով.

47. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = 3: \end{cases}$ Պատ. $x_1 = 1,\ \ x_2 = 2,\ x_3 = 3:$

48. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 4x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 - 4x_3 - x_4 = 2: \end{cases}$ Պատ. $\begin{matrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \end{matrix},\ \begin{matrix} x_3 = 1 \\ x_4 = 1 \end{matrix}:$

49. $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 = 6 \\ 5x_1 + 6x_2 = 8: \end{cases}$ Պատ. $x_1 = -2,\ \ x_2 = 3,:$

50. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 9x_3 + 2x_4 + 7x_5 = 3 \\ 4x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 6x_4 + 8x_5 = 5: \end{cases}$ Պատ. $\begin{matrix} x_1 = \frac{4}{7} - \frac{13}{14}u + \frac{9}{14}v \\ x_2 = u, x_5 = v \end{matrix},\ \begin{matrix} x_3 = \frac{1}{7} + \frac{1}{7}u - \frac{5}{7}v \\ x_4 = \frac{2}{7} - \frac{3}{14}u - \frac{13}{14}v \end{matrix}:$

51. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 6 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 5 \\ 4x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 8: \end{cases}$ Պատ. Համակարգն անհամատեղելի է:

52. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 7 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 12 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 7x_1 + x_2 + x_3 = 9: \end{cases}$ Պատ. $x_1 = x_2 = x_3 = 1:$

53. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ 6x_1 + 9x_2 + 2x_3 = 8: \end{cases}$ Պատ. $x_1 = -1{,}5u + 1{,}8$, $x_2 = u$, $x_3 = -1{,}4:$

54. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 = 6: \end{cases}$ Պատ. $x_1 = 0{,}2u + 3{,}4$, $x_2 = 0{,}4u + 0{,}8$, $x_3 = u:$

Գտնել համասեռ համակարգի լուծումների ֆունդամենտալ սիստեմը և ընդհանուր լուծումը.

55. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 : \end{cases}$ Պատ. $e_1 = \left(-\frac{4}{3}; -\frac{11}{3}; 1; 0\right)$, $e_2 = (1;2;0)$, $c_1e_1 + c_2e_2$:

56. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 - x_4 = 0 : \end{cases}$ Պատ. $e_1 = (1;2;1;0)$, $e_2 = (-1;1;0;1)$, $c_1e_1 + c_2e_2$:

57. $\begin{cases} x_1 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 5x_1 - x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0 : \end{cases}$ Պատ. $e = (1;-3;2)$, ce:

58. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 0 : \end{cases}$ Պատ. $e = (0;-1;1)$, ce:

Գրականություն

1. И. И. Привалов “Аналитическая геометрия” , Москва-1963г.
2. В. Е. Шнейдер, А. И. Слуцкий, А. С. Шумов “Краткий курс высшей математики”, Т. 1, Москва “Высшая школа”, 1978г.
3. “Сборник задач по математике”, для втузов, Т. 1, под редакции А. В. Ефимова, Б. П. Демидовича, Москва, “Наука”, 1981г.
4. Л. А. Беклемишева, А. Ю. Петрович, И. А. Чубаров “ Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебры”, москва, “Наука”, 1987г.
5. В. А. Малугин, Математика для экономистов, “Линейная алгебра”, Курс лекций, Москва-2006г.
6. В. А. Малугин, Математика для экономистов, “Линейная алгебра”, Задачи и упражнения, Москва-2006г.
7. П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Е. Кожевникова “Высшая математика в упражнениях и задачах”, Издательство, Москва “Высшая школа”, 1986г.
8. Гусак А. А. “Пособие к решению задач по высшей математике”, издание 3-е, стереотипное, Минск 1973г.
9. В. П. Минорский “Сборник задач по высшей математике”, Издание четырнадцатое, Москва 2003г.
10. Յու. Մ. Մովսիսյան «Բարձրագույն հանրահաշիվ և թվերի տեսություն», Երևան, Զանգակ-97, 2008թ.
11. Ռ. Գալոյան, Ա. Հայրապետյան, Վ. Դավթյան, Հ. Մկրտչյան «Բարձրագույն մաթեմատիկայի խնդիրների ձեռնարկ», մաս 1, Երևան 1997թ.
12. Հ. Ս. Առաքելյան, Հ. Մ. Խոսրովյան, Ֆ. Մ. Մինասյան «Մաթեմատիկայի խնդիրների ժողովածու», Երևան-1998թ.
13. Հ. Առաքելյան, Հ. Խոսրովյան, Վ. Միրզոյան «Անալիտիկ երկրաչափության և գծային հանրահաշվի տարրեր», Երևան, «ՀՊՃՀ», 2002թ.
14. Հ. Ս. Առաքելյան, Հ. Մ. Խոսրովյան, Վ. Ա. Միրզոյան «Անալիտիկ երկրաչափություն և գծային հանրահաշիվ», «Ճարտարագետ», Երևան-2003թ.
15. Վ. Ս. Զաքարյան, Հ. Ս. Առաքելյան, Հ. Մ. Խոսրովյան, Ֆ. Մ. Մինասյան «Մաթեմատիկայի խնդիրների շտեմարան», մաս 1, Երևան 2004թ.