Դիսկրետ մաթեմատիկա

§ 1.1. Բուլյան փոփոխականներ և տարրական բուլյան ֆունկցիաներ

- Դասական մաթեմատիկայում առաջին ծանոթությունը սկսվում է տարրական ֆունկցիաների (Sin, log,…) ուսումնասիրությամբ:
- Բուլյան ֆունկցիաների տեսությունը սկսվում է տարրական բուլյան ֆունկցիաների (դիզյունկցիա, կոնյունկցիա և այլն) ուսումնասիրությամբ:

Դիցուք $E_2 = E_2^1 = \{0,1\}$, $E_2^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n)\}$,

որտեղ $x_i \in E_2$, i=1,2,…n:

Այդ դեպքում $f : E_2^n \to E_2$ ֆունկցիան կոչվում է բուլյան ֆունկցիա:

P_n-ով նշանակենք n փոփոխականի բոլոր բուլյան ֆունկցիաների բազմությունը, այսինքն

$$P_n = \{f \mid f : E_2^n \to E_2\}:$$

Բուլյան ֆունկցիան կարելի է տալ նրա բոլոր հնարավոր արժեքների ցուցակով.

$x_1, x_2, \ldots, x_n$	$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
0 0 0	f(0,0,…,0)
0 0 1	f(0,0,…,1)
…………	…………
…………	…………
1 1 1	f(1,1,…,1)

$$|P_n| = 2^{2^n}$$

$f \in P_n$ բուլյան ֆունկցիան էապես կախված է x_i փոփոխականից, եթե գոյություն ունի այնպիսի $a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n$ հավաքածու, որ

$f(a_1,a_2,\ldots,a_{i-1},0,a_{i+1},\ldots,a_n)$ ✸ $f(a_1,a_2,\ldots,a_{i-1},1,a_{i+1},\ldots,a_n)$:

Այդ դեպքում x_i-ն կոչվում է էական փոփոխական, հակառակ դեպքում՝ ոչ էական կամ ֆիկտիվ: Օրինակ,

x_1	x_2	f_1	f_2
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	1	0
1	1	1	0

x_1-ը էական փոփոխական է, քանի որ $f_i(0,0)$✸$f(1,0)$, $i=1,2$: x_2-ը ֆիկտիվ փոփոխական է, քանի որ $f_i(0,1)=f_i(0,0)$ և $f_i(1,1)=f_i(1,0)$, $i=1,2$:

Միայն նույնաբար 0 և 1 ֆունկցիաներն են, որ չունեն էական փոփոխականներ:

Դիցուք x_i փոփոխականը $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ ֆունկցիայի ֆիկտիվ փոփոխական է: Վերցնենք f ֆունկցիայի աղյուսակը և նրանից կառուցենք նոր աղյուսակ, ջնջելով $(\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1},1,\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_n)$ տեսքի բոլոր տողերը և ջնջելով x_i արգումենտի սյունը: Ստացված աղյուսակը կորոշի ինչ-որ նոր $g(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n)$ ֆունկցիա: Կասենք, որ g ֆունկցիան ստացված է f ֆունկցիայից x_i ֆիկտիվ փոփոխականի հեռացումով, իսկ f ֆունկցիան ստացված է g ֆունկցիայից x_i ֆիկտիվ փոփոխականի ներմուծման ճանապարհով:

<u>Սահմանում</u>: Բուլյան ֆունկցիաները հավասար են, եթե մեկը մյուսից ստացվում են ֆիկտիվ փոփոխականների ներմուծման կամ հեռացման ճանապարհով:

Մեկ փոփոխականի ֆունկցիաները չորսն են.

x	Զերո (0)	նույնական (x)	ժխտում ($\neg x, \bar{x}, x'$)	մեկ (1)
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Երկու փոփոխականի ֆունկցիաները 16-ն են, որոնցից առաջին վեցը հետևյալներն են.

x	y	զերո	կոնյունկցիա ($\cdot$,&,$\wedge$)				
0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0
1	1	0	1	0	1	0	1

x y	գումարում մոդուլ 2-ով (+,⌖,↖,▤)	Դիզյունկցիա V	Պիրսի սլաք (↓)	≡
0 0	0	0	1	1
0 1	1	1	0	0
1 0	1	1	0	0
1 1	0	1	0	1

x y				Իմպլիկացիա $\to, \Rightarrow, \supset$	Շեֆերի շտրիխ (|)	միավոր
0 0	1	1	1	1	1	1
0 0	0	0	1	1	1	1
0 0	1	1	0	0	1	1
0 0	0	1	0	1	0	1

Մաթեմատիկական տրամաբանության մեջ և կիբեռնետիկայում մեծ դեր են խաղում հետևյալ 9 ֆունկցիաները`

$f_1(x)=0$, $f_2(x)=1$, $f_3(x)=x$, $f_4(x)=x'$, $f_5(x_1,x_2)=\&(x_1,x_2)$, $f_6(x_1,x_2)=V(x_1,x_2)$, $f_7(x_1,x_2)= \to(x_1,x_2)=x_1 \to x_2$, $f_8(x_1,x_2)=+(x_1,x_2)=x_1+x_2$, $f_9(x_1,x_2)=/(x_1,x_2)=x_1/x_2$:

§ 1.2. Բանաձևեր

Տարրական ֆունկցիաներից ինդուկտիվ եղանակով կառուցվում են ավելի բարդ ֆունկցիաներ՝ բանաձևեր:

Դիցուք $F=\{f_1,f_2,\ldots,f_m\}$–ը բուլյան ֆունկցիաների որևէ բազմություն է:

Ինդուկցիայի հիմք: F-ի յուրաքանչյուր տարրական ֆունկցիա կոչվում է բանաձև F-ի վրա:

Ինդուկտիվ անցում: Դիցուք $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$–ը որևէ ֆունկցիա է F-ից, իսկ $t_1,t_2,\ldots t_n$-երը կամ փոփոխականներ են կամ բանաձևեր F–ի վրա: Այդ դեպքում,

$$f(t_1,t_2,\ldots,t_n)$$

տեսքի արտահայտությունը կոչվում է բանաձև F բազայի վրա:

Տարրական բուլյան ֆունկցիաների համար գոյություն ունի նախապատվություն $(\neg,\wedge,\vee,\rightarrow)$ հաջորդականությամբ, որից հետո կարելի է ավելորդ փակագծերը բաց թողնել:

Յուրաքանչյուր բանաձևի միարժեք ձևով համապատասխանում է ինչ-որ ֆունկցիա, ընդ որում, տարբեր բանաձևերի կարող են համապատասխանել հավասար ֆունկցիաներ:

§ 1.3. Համարժեքություն և երկակիություն

Երկու բանաձևեր կոչվում են համարժեք, եթե նրանք իրացնում են նույն ֆունկցիան:

1. $a\vee a=a$ $\quad$ $a\wedge a=a$
2. $a\vee b=b\vee a$ $\quad$ $a\wedge b=b\wedge a$
3. $a\vee(b\vee c)=(a\vee b)\vee c$ $\quad$ $a\wedge(b\wedge c)=(a\wedge b)\wedge c$
4. $(a\wedge b)\vee a=a$ $\quad$ $(a\vee b)\wedge a=a$
5. $a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c)$ $\quad$ $a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$
6. $a\vee 1=1$ $\quad$ $a\wedge 0=0$
7. $a\vee 0=a$ $\quad$ $a\wedge 1=a$
8. $(a')'=a$
9. $(a\wedge b)'=a'\vee b'$ $\quad$ $(a\vee b)'=a'\wedge b'$
10. $a\vee a'=1$ $\quad$ $a\wedge a'=0$

Տեղադրման կանոն: Եթե համարժեք բանաձևերում որևէ փոփոխականի փոխարեն, բոլոր տեղերում, որտեղ այն հանդիպում է, տեղադրենք միևնույն բանաձևը, ապա կստանանք համարժեք բանաձևեր:

Փոխարինման կանոն: Եթե բանաձևում որևէ ենթաբանաձև փոխարինենք համարժեք բանաձևով, ապա կստանանք համարժեք բանաձևեր:

Սահմանում: Դիցուք $f(x_1,\ldots,x_n)$–ը բուլյան ֆունկցիա է: Այդ դեպքում

$$f^*(x_1,\ldots,x_n)=\neg f(\neg x_1,\ldots,\neg x_n)$$

ֆունկցիան կոչվում է երկակի f ֆունկցիայի նկատմամբ: Սահմանումից հետևում է, որ $f^{**}=f$:

Հեշտ է տեսնել, որ

- 0 ֆունկցիան երկակի է 1-ին,
- 1 ֆունկցիան երկակի է 0-ին,
- x ֆունկցիան երկակի է x-ին,
- $\neg x$ ֆունկցիան երկակի է $\neg x$-ին,
- $x_1 \wedge x_2$ ֆունկցիան երկակի է $x_1 \vee x_2$-ին,
- $x_1 \vee x_2$ ֆունկցիան երկակի է $x_1 \wedge x_2$ –ին:

f ֆունկցիան կոչվում է ինքնաերկակի, եթե $f^*=f$:

Օրինակ, նույնական ֆունկցիան և ժխտումը ինքնաերկակի են, իսկ դիզյունկցիան և կոնյունկցիան՝ ոչ:

Թեորեմ (Երկակիության սկզբունք): Դիցուք $F=\{f_1,\ldots,f_m\}$: Նշանակենք $F^*=\{f_1^*,\ldots,f_m^*\}$: Այդ դեպքում, եթե $\mathfrak{I}$ բանաձևը (F բազայի վրա) իրացնում է f ֆունկցիան, ապա $\mathfrak{I}^*$ բանաձևը (F^* բազայի վրա), որը ստացվում է $\mathfrak{I}$ -ից բոլոր f_i-երը փոխարինելով երկակի f_i^* ֆունկցիաներով, իրացնում է f^*-ը:

§ 1.4. Դիզյունկտիվ և կոնյունկտիվ նորմալ ձևեր (ԴՆՁ և ԿՆՁ)

$$K = x_{i_1}^{\sigma_1} x_{i_2}^{\sigma_2} \ldots x_{i_r}^{\sigma_r}$$ բանաձևը, որտեղ

$$\sigma_k \in \{0,1\},\ x_{i_k}^0 = \bar{x}_{i_k}, x_{i_k}^1 = x_{i_k}, i_k \in \{1,2,\ldots,n\},$$

$$k = 1,2,\ldots,r\ (r \geq 1,\ n \geq 1),$$

կոչվում է կոնյունկցիա $\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ փոփոխականների բազմության վրա: Համանմանորեն, $K = x_{i_1}^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_{i_r}^{\sigma_r}$ բանաձևը կոչվում է դիզյունկցիա: Եթե $x_{i_j} \neq x_{i_k}$, երբ $j \neq k$, կոնյունկցիան (դիզյունկցիան) կոչվում է տարրական:

r թիվը կոչվում է տարրական կոնյունկցիայի (դիզյունկցիայի) ռանգ: Ըստ սահմանման, 1 հաստատունը 0 ռանգի տարրական կոնյունկցիա է, իսկ 0 հաստատունը՝ 0 ռանգի տարրական դիզյունկցիա:

$D=K_1\vee K_2\vee\ldots\vee K_s$ տեսքի արտահայտությունը, որտեղ K_i–երը ($i=1,\ldots,s$) զույգ առ զույգ իրարից տարբեր տարրական կոնյունկցիաներ են, կոչվում է դիզյունկտիվ նորմալ ձև:

$K=D_1\cdot D_2\cdot\ldots\cdot D_s$ տեսքի արտահայտությունը, որտեղ D_i–երը ($i=1,\ldots,s$) զույգ առ զույգ իրարից տարբեր տարրական դիզյունկցիաներ են, կոչվում է կոնյունկտիվ նորմալ տեսք:

Նշանակենք $x^0=x'$ և $x^1=x$: Այդ դեպքում

$$x^y = x\cdot y \vee x'\cdot y' = \begin{cases} x', & y=0 \\ x\ , & y=1 \end{cases} = \begin{cases} 1, & x=y \\ 0, & x\neq y \end{cases} = (x\equiv y):$$

<u>**Թեորեմ**</u> (վերլուծում ըստ փոփոխականների):
Յուրաքանչյուր (ոչ նույնաբար 0) բուլյան ֆունկցիա ունի հետևյալ ներկայացումը

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n)=\bigvee_{(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_k)} x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2}\dots x_k^{\sigma_k}\, f(\sigma_1,\dots,\sigma_k,x_{k+1},\dots,x_n),$$

որտեղ դիզյունկցիան կատարվում է ըստ բոլոր հնարավոր $(\sigma_1,\dots,\sigma_k)$ հավաքածուների:

§ 1.5. Փակ դասեր և լրիվություն

Ժամանակակից թվային տեխնիկան աշխատում է երկու թվերով՝ 0 և 1: Հետևաբար, պրոցեսորի կողմից իրացված ցանկացած ֆունկցիա բուլյան ֆունկցիա է: Քանի որ ցանկացած բուլյան ֆունկցիա իրացվում է կոնյունկցիայի, դիզյունկցիայի և ժխտման միջոցով, ապա կարելի է կառուցել անհրաժեշտ պրոցեսորը, ձեռքի տակ ունենալով այնպիսի էլեմենտներ, որոնք իրացնում են կոնյունկցիան, դիզյունկցիան և ժխտումը: Իսկ գոյություն ունե՞ն արդյոք բուլյան ֆունկցիաների այլ համակարգեր, որոնց միջոցով նույնպես կարելի է իրացնել կամայական ֆունկցիա:

Սահմանում: Բուլյան ֆունկցիաների $F=\{f_1,\ldots,f_m\}$ համակարգի փակում (նշանակվում է $[F]$-ով) կոչվում է բոլոր այն բուլյան ֆունկցիաների բազմությունը, որոնք իրացվում են F–ի վրա որոշված բանաձևերով: Ֆունկցիաների F դասը կոչվում է փակ, եթե $[F]=F$:

Փակման հատկություններ.

- $F\subseteq[F]$;
- $[[F]]=F$;
- $F_1\subseteq F_2 \to [F_1]\subseteq[F_2]$;
- $([F_1]\cup[F_2])\subseteq[F_1\cup F_2]$:

Դիտարկենք ֆունկցիաների հետևյալ դասերը.

1. Ֆունկցիաներ, որոնք պահպանում են 0-ն.

$$T_0=\{f \mid f(0,\ldots,0) = 0\}:$$

2. Ֆունկցիաներ, որոնք պահպանում են 1-ը.

$$T_1=\{ f \mid f(1,\ldots,1) = 1 \}:$$

3. ինքնաերկակի ֆունկցիաներ.

$$T_*=\{ f \mid f = f^* \}:$$

4. Մոնոտոն ֆունկցիաներ

$$T_{\searrow}=\{ f \mid \alpha \le \beta \Rightarrow f(\alpha) \le f(\beta) \},$$

որտեղ $\alpha=(a_1,\ldots,a_n)$, $\beta=(b_1,\ldots,b_n)$, $a_i,b_i\in E_2$, $\alpha\le\beta:=\forall i, a_i\le b_i$:

5. Գծային ֆունկցիաներ.

$$T_L=\{ f \mid f=c_0+c_1x_1+\ldots+c_nx_n \},$$

որտեղ +-ը մոդուլ 2-ով է, իսկ &-ը բաց է թողնված:

Թեորեմ: T_0, T_1, T_*, $T_{\searrow}$ և T_L դասերը փակ են:

Ապացույց: Կիրառենք ինդուկցիա ըստ բանաձևի բարդության: Ինդուկցիոն հիմքը ակնհայտ է, քանի որ առնչվում է տարրական ֆունկցիաներին: Ինդուկցիոն անցում:

1. Դիցուք $f, f_1, \ldots, f_n \in T_0$ և $\Phi = f(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n))$: Այդ դեպքում,

$$\Phi(0, \ldots, 0) = f(f_1(0, \ldots, 0), \ldots, f_n(0, \ldots, 0)) = f(0, \ldots, 0) = 0:$$

Հետևաբար, $\Phi \in T_0$: ■

2. Դիցուք $f, f_1, \ldots, f_n \in T_1$ և $\Phi = f(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n))$: Այդ դեպքում,

$$\Phi(1, \ldots, 1) = f(f_1(1, \ldots, 1), \ldots, f_n(1, \ldots, 1)) = f(1, \ldots, 1) = 1:$$

Հետևաբար, $\Phi \in T_1$: ■

Թեորեմ (Պոստի լրիվության հայտանիշը): Որպեսզի ֆունկցիաների F համակարգը լինի լրիվ, անհրաժեշտ է և բավարար, որպեսզի այն չլինի $T_0, T_1, T_*, T_\leq, T_L$ հինգ փակ դասերից և ոչ մեկի սեփական ենթաբազմություն, կամ այլ կերպ ասած, գոյություն ունենան f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 ֆունկցիաներ F–ից, այնպես, որ

$$f_1 \notin T_0,\ f_2 \notin T_1,\ f_3 \notin T_*,\ f_4 \notin T_\leq,\ f_5 \notin T_L:$$

Օրինակ: Ֆունկցիաների $\{x \to y, x+y+z'\}$ համակարգը լրիվ չէ, քանի որ $x \to y \notin T_0$, $x+y+z' \notin T_1$, $x \to y \notin T_*$ (երկու փոփոխականից էապես կախված ինքնաերկակի ֆունկցիա չկա), $x \to y \notin T_\leq$ $((0,0)<(1,0), 0 \to 0=1, 1 \to 0=0)$, $x \to y \notin T_L$ ($x \to y$ ֆունկցիայի համապատասխան Ժեգալկինի բազմանդամը $1+x+xy$ է):

§ 1.6. ԴՆՁ-ի մինիմիզացիա (անալիտիկ մեթոդ)

x_1	x_2	x_3	$f(x_1,x_2,x_3)$		x_1	x_2	x_3	$f(x_1,x_2,x_3)$
0	0	0	1		1	0	0	1
0	0	1	0		1	0	1	1
0	1	0	0		1	1	0	1
0	1	1	0		1	1	1	1

f-ը ունի երկու իրարից տարբեր դ.ն.ձ.-եր.

$f=(x_1'x_2'x_3')\vee(x_1\vee x_1x_2'x_3x_2'x_3)\vee(x_1x_2x_3')\vee(x_1x_2x_3)$

կատարյալ դ.ն.ձ.-ը և $(x_2'x_3')\vee x_1$ դ.ն.ձ.-ը, որոնք էապես տարբերվում են սիմվոլների քանակով:

Պարզագույն դ.ն.ձ.-երի որոնման նպատակով F դ.ն.ձ.-ի համար ներմուծվում է L(F) բարդության ինդեքս հասկացությունը: Առավել տարածված է բարդության հետևյալ տարատեսակը.

L(F)-ը փոփոխականների տառերի քանակն է, որոնք հանդիպում են F դ.ն.ձ.-ի ներկայացման մեջ:

Օրինակ, վերոհիշյալ աղյուսակում ներկայացված ֆունկցիայի երկու տարբեր դ.ն.ձ.-երի բարդությունները համապատասխանաբար հավասար են 15 և 3:

Բուլյան ֆունկցիաների մինիմիզացիայի խնդիրը դա տված $f(x_1,\ldots,x_n)$ բուլյան ֆունկցիայի համար այնպիսի դ.ն.ձ. գտնելն է, որը մինիմալ է L-ի նկատմամբ: Այս խնդիրը գործնական կարևոր և միաժամանակ դժվար խնդիր է:

ԴՆՁ-ի կրճատման Բլեյքի մեթոդը: Առաջին փուլում կիրառվում է ընդհանրացված սոսնձման $xK_1 \vee x'K_2 = xK_1 \vee x'K_2 \vee K_1K_2$ գործողությունը այնքան ժամանակ, քանի դեռ հնարավոր է: Երկրորդ փուլում կիրառվում է կլանման $K_1 \vee K_1K_2 = K_1$ գործողությունը:

Օրինակ: Կառուցել $x_1x_2 \vee x'_1x_3 \vee x'_2x_3$ ԴՆՁ-ի կրճատված ԴՆՁ-ը:

Լուծում: Առաջին փուլից հետո կստանանք

$$x_1x_2 \vee x'_1x_3 \vee x'_2x_3 \vee x_2x_3 \vee x_1x_3 \vee x_3$$

ԴՆՁ-ը: Երկրորդ փուլից հետո կստանանք $x_1x_2 \vee x_3$ կրճատված ԴՆՁ-ը:

ԴՆՁ-ի կրճատման Նելսոնի մեթոդը թույլ է տալիս կառուցել կրճատված ԴՆՁ, եթե տված է ԿՆՁ-ը: Նախ, բացվում են տված ԿՆՁ-ի փակագծերը, օգտագործելով դիստրիբուտիվության օրենքը: Երկրորդ փուլում հեռացվում են տառեր և կոնյունկցիաներ $xx'K=0$, $xxK=xK$, $K_1 \vee K_1K_2=K_1$ կանոնների օգնությամբ:

Օրինակ: Կառուցել $(x_1 \vee x_2)(x'_1 \vee x_2 \vee x_3)$ ԿՆՁ-ի կրճատված ԴՆՁ-ը:

Լուծում: Փակագծերը բացելուց հետո կունենանք

$$x_1 x'_1 \vee x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2 x'_1 \vee x_2x_2 \vee x_2x_3$$

Երկրորդ փուլից հետո կոնենանք $x_1x_3 \vee x_2$ կրճատված տեսքը:

ԴՆՁ-ի կրճատման Քվայնի ալգորիթմը կառուցում է կատարյալ ԴՆՁ-ի կրճատված ԴՆՁ-ը: Առաջին փուլում կատարյալ ԴՆՁ-ի նկատմամբ կիրառվում է ոչ լրիվ սոսնձման ($xK \vee x'K = K \vee xK \vee x'K$) գործողությունը: Երբ այս գուրծողությյոնը կիրառվել է կոնյունկցիաների բոլոր զույգերի նկատմամբ, կլանման ($K \vee x^{\sigma}K = K$) գործողությամբ հեռացվում են n ռանգի բոլոր հնարավոր կոնյունկցիաները: Արդյունքում ստացվում է ինչ-որ D_1 ԴՆՁ: Եթե անցել ենք նման $k \geq 1$ փուլեր, ապա (k+1)-րդ փուլում ոչ լրիվ սոսնձման և կլանման գործողությունները կիրառվում են n-k ռանգի կոնյունկցիաների նկատմամբ D_k ԴՆՁ-ում: Արդյունքում կստանանք D_{k+1} ԴՆՁ-ը: Ալգորիթմը ավարտվում է, եթե $D_{k+1} = D_k$:

Տարրական կոնյունկցիաների և արտադրիչների հեռացման համար կարելի է օգտվել բուլյան հանրահաշվի օրենքներից`

1. Կոմուտատիվություն – $pq=qp$, $p\vee q=q\vee p$
2. Ասոցիատիվություն – $p(qr)=(pq)r$,
   $p\vee(q\vee r)=(p\vee q)\vee r$
3 Դիստրիբուտիվություն – $p(q\vee r)=pq\vee pr$,
   $p\vee qr=(p\vee q)(p\vee r)$
4. իդեմպոտենտություն – $pp=p$, $p\vee p=p$
5. Կլանում – $p(p\vee q)=p$, $p\vee pq=p$
6. Դե մորգանի կանոն – $(pq)'=p'\vee q'$,
   $(p\vee q)'=p'q'$
7. $pq\vee p' =q\vee p'$

§ 1.7. ԴՆՁ-ի մինիմիզացիա (երկրաչափական մեթոդ)

Բոլոր $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ հավաքածուների բազմությունը, որտեղ $\alpha_i \in \{0,1\}$, նշանակենք B^n: B^n-ի α և β տարրերը կոչվում են հարևան, եթե նրանք տարբերվում են միայն մեկ բաղադրիչով: B^n-ի տարրերը անվանենք գագաթներ և նրանցից կամայական երկուսը միացնենք այն և միայն այն ժամանակ, երբ նրանք հարևան են: B^n-ի տարրերի վրա այս կերպ սահմանված գրաֆը կանվանենք n–չափանի միավոր խորանարդ և կնշանակենք E^n:

Պնդում: r ռանգի N_k ինտերվալը (n-r)–չափանի նիստ է:

Ապացույց: $K(x_1,\ldots,x_n)$ կոնյունկցիան 1 արժեքներ է ընդունում այն և միայն այն ժամանակ, երբ

$$x_{i_1} = \sigma_1 \ ,\ldots,\ x_{i_r} = \sigma_r :$$

Դա նշանակում է, որ եթե $(x_1,\ldots,x_n)$–ի $i_1,\ldots,i_r$ կոորդինատները ֆիքսենք, իսկ մնացածները փոփոխենք բոլոր հնարավոր տարբերակներով, ապա այդ բոլորի վրա f-ը կնդունի 1 արժեք, այսինքն, N_k-ն (n-r)–չափանի նիստ է: ■

Պնդում: Եթե $f(x_1,\ldots,x_n) = g(x_1,\ldots,x_n) \vee h(x_1,\ldots,x_n)$, ապա $N_g \subseteq N_f$, $N_h \subseteq N_f$ և $N_f = N_g \cup N_h$:

Թեորեմ: Եթե

$$f(x_1,\ldots,x_n) = K_1 \vee \ldots \vee K_s \ ,$$

ապա $N_{k_i} \subseteq N_f \quad (i = 1,\ldots,s)$ և

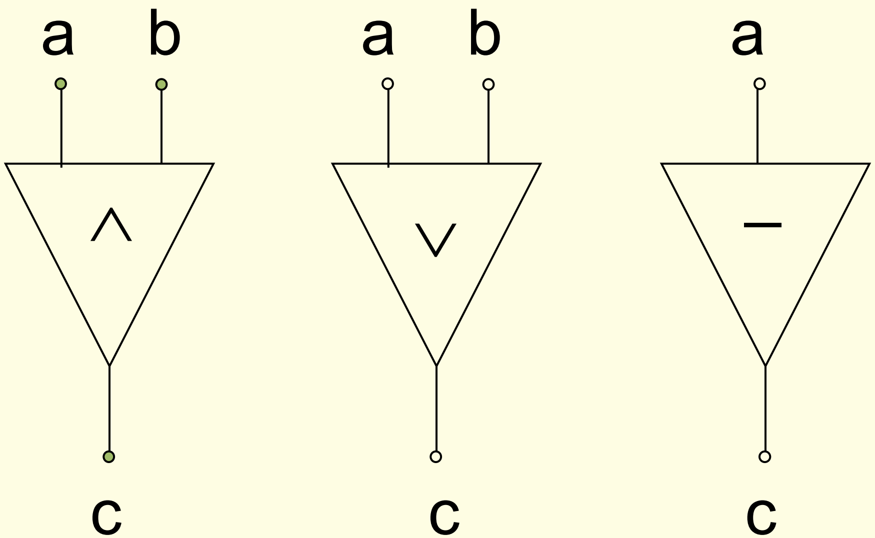
$$N_f = N_{K_1} \cup N_{K_2} \cup \ldots \cup N_{K_s} \quad ,$$

այսինքն, f ԴՆՁ-ին համապատասխանում է N_f բազմության ծածկույթ $N_{K_1},\ldots,N_{K_s}$ ինտերվալներով:

Թեորեմ: N_f բազմության յուրաքանչյուր ինտերվալային ծածկույթին, որի մեջ մտնող ինտերվալները ընկած են N_f–ում, համապատասխանում է f ֆունկցիայի ինչ-որ ԴՆՁ:

§ 1.8. Ֆունկցիոնալ սխեմաներ

Ֆունկցիոնալ տարր (ֆտ) անվանենք ստորև պատկերված նկարներից յուրաքանչյուրը, որոնք այլ կերպ կանվանենք $\wedge, \vee$ կամ - տարրեր:



a և b գագաթները կանվանենք ֆտ-ի մուտքեր, իսկ c գագաթը՝ ելք: Ֆտ-երից զատ կդիտարկենք նաև մուտքային գագաթներ, որոնցից յուրաքանչյուրին վերագրված է փոփոխական:

Ֆունկցիոնալ սխեմայի (ֆս) սահմանումը:

1. Մուտքային գագաթների վերջավոր բազմությունը որի տարրերին վերագրված են իրարից տարբեր փոփոխականներ, ֆունկցիոնալ սխեմա է:
2. Եթե E-ն ֆունկցիոնալ սխեմա է, իսկ F–ը ֆունկցիոնալ տարր, ապա ֆունկցիոնալ տարրի մուտքային գագաթները E–ի որևէ երկու (կամ մեկ) գագաթների հետ նույնացման արդյունքը ֆունկցիոնալ սխեմա է, որի գագաթները E–ի գագաթներն են, ավելացրած F–ի ելքը:
3. Ուրիշ ֆունկցիոնալ սխեմաներ չկան և յուրաքանչյում ֆոնկցիոնալ սխեմա ստացվում է մուտքային գագաթներից վերջավոր անգամ 2-րդ գործողության կիրառումից:

Ֆունկցիոնալ սխեմայի գագաթները նշենք բուլյան ֆունկցիաներով հետևյալ կանոնով.

ա) մուտքային գագաթները նշենք նրանց վերագրված փոփոխականներով,

բ) եթե $\wedge$ տարրի մուտքերը նշված են f և g ֆունկցիաներով, ապա ելքը նշենք $f \wedge g$ ֆունկցիայով,

գ) եթե $\vee$ տարրի մուտքերը նշված են f և g ֆունկցիաներով, ապա ելքը նշենք $f \vee g$ ֆունկցիայով,

դ) եթե $\neg$ տարրի մուտքը նշված է f ֆունկցիայով, ապա ելքը նշենք $\neg f$ ֆունկցիայով:

Նկարագրված պրոցեսը ֆունկցիոնալ սխեմայի յուրաքանչյուր գագաթի միարժեքորեն համապատասխանեցնում է ինչ-որ բուլյան ֆունկցիա:

Գլուխ 2: Բազմություններ և հարաբերություններ

Մարդկային մտածողությունը կառուցված է այնպես, որ աշխարհը ներկայանում է որպես առանձին օբյեկտների միասնություն: Սա թույլ է տալիս ձևավորել աշխարհի մի պատկեր, որը հարմար է ռացիոնալ վերլուծության համար:

“բազմություն”, “հարաբերություն”, “ֆունկցիա” և դրանց մոտ մի շարք այլ տերմիններ ներկայացնում են դիսկրետ մաթեմատիկայի հիմնական հասկացությունները:

Բազմությունների տեսության հիմնադիրը Գեորգ կանտորն է:

§ 2.1. Բազմության հասկացությունը

Բազմության հասկացությունը մաթեմատիկայի ֆունդամենտալ և միաժամանակ չսահմանված հասկացություններից է: Կարելի է ասել, որ բազմությունը դա որոշակի օբյեկտների կամայական հավաքածու է: Այդ օբյեկտները կոչվում են բազմության տարրեր: Բազմության տարրերը պետք է իրարից տարբեր լինեն և սկզբունքորեն պետք է հնարավոր լինի դրանք իրարից տարբերել:

<u>Օրինակ</u>: Այս պարագրաֆի բառերի S բազմությունը: Բնական թվերի (1,2,…) **N** բազմությունը: Պարզ թվերի (2,3,5,7,11,…) **P** բազմությունը: Ամբողջ թվերի (…,-2,-1,0,1,2,…) **Z** բազմությունը: Իրական թվերի **R** բազմությունը:

Եթե x-ը M բազմության տարր է, ապա ասում են, որ x–ը պատկանում է M-ին և նշանակում են $x \in M$: Հակառակ դեպքում ասում են, որ x–ը չի պատկանում M–ին և նշանակում են $x \notin M$:

Բազմությունները, որպես օբյեկտներ, կարող են լինել այլ բազմությունների տարրեր: Բազմությունը, որի տարրերը կարող են լինել բազմություններ, սովորաբար կոչվում են դասեր կամ ընտանիքներ:

Բազմությունը, որը տարր չի պարունակում, կոչվում է դատարկ և նշանակվում է $\varnothing$: Ունիվերսալ բազմությունը դա այն բազմությունն է, որը պարունակում է բոլոր բազմությունները որպես տարրեր:

§ 2.2. Գործողություններ բազմությունների հետ:

A բազմությունը ընկած է B բազմության մեջ (B բազմությունը ընդգրկում է A-ն), եթե A-ի յուրաքանչյուր տարրը B–ի տարր է: Այդ դեպքում A–ն կոչվում է B-ի ենթաբազմություն և նշանակվում է $A \subseteq B$: Եթե $A \subseteq B$ և $A \neq B$, ապա A-ն կոչվում է B-ի սեփական ենթաբազմություն և նշանակվում է $A \subset B$: Կամայական բազմության համար, $M \subseteq M$ և $\varnothing \subseteq M$: Երկու բազմություններ հավասար են, եթե նրանք մեկը մյուսի ենթաբազմությունն են: M բազմության հզորությունը նշանակվում է $|M|$: Վերջավոր բազմությունների համար հզորությունը տարրերի քանակն է: Օրինակ, $|\varnothing|=0$, $|\{\varnothing\}|=1$:

5. կլանում.

$(A \cap B) \cup A = A,$ $(A \cup B) \cap A = A;$

6. 0-ի հատկությունը.

$A \cup \varnothing = A,$ $A \cap \varnothing = \varnothing;$

7. միավորի հատկությունը.

$A \cup U = U,$ $A \cap U = A;$

8.

$A'' = A;$

9. դե Մորգանի օրենքներ.

$(A \cap B)' = A' \cup B',$ $(A \cup B)' = A' \cap B';$

10. լրացման հատկություններ.

$A \cup A' = U,$ $A \cap A' = \varnothing;$

11. տարբերության հատկությունը. $A \setminus B = A \cap B'$:

A և B բազմությունների AxB դեկարտյան արտադրյալ կոչվում է բոլոր հնարավոր (a,b) կարգավորված զույգերի բազմությունը, որտեղ $a \in A$ և $b \in B$:

Դեկ. արտադրյալի համարժեք սահմանումներ

$$(a,b) \in AxB \Leftrightarrow (a \in A) \text{ և } (b \in B),$$

$$AxB=\{(a,b) \mid (a \in A), (b \in B)\}:$$

Օրինակներ:

1. A-ն իրական թվերի բազմությունն է և B=A: Այդ դեպքում, AxB-ն ներկայացնում է կոորդինատային հարթության կետերի բազմությունը:

2. Եթե A=[0,1] և B=[1,2], ապա AxB-ն կոորդինատային հարթության $\{(x,y)|(0 \le x \le 1),(1 \le x \le 2)\}$ միավոր կողմով քառակուսու կետերի բազմությունն է:

Գլուխ 3: Կոմբինատորիկա

Կոմբինատոր հաշվարկները նպատակ ունեն հաշվելու բոլոր հնարավոր տարբերակների քանակը, որոնցով հնարավոր է որոշակի կանոններով դասավորել, ընտրել կամ հեռացնել վերջավոր բազմությունների տարրերը:

3.2. (n,k)–տեղափոխություն կրկնություններով

(n,k)-ընտրությունը դա որևէ k տարրերի ընտրությունն է n հզորություն ունեցող S բազմությունից:

(n,k)-տեղափոխությունը դա այն (n,k)–ընտրությունն է, որի տարրերի հաջորդականությունը էական է:

(n,k)-տեղափոխություն կրկնություններով կոչվում է այն (n,k)–տեղափոխությունը, որի տարրերը կարող են կրկնվել:

U(n,k)-ով նշանակվում է կրկնություններով (n,k)–տեղափոխությունների քանակը:

Թեորեմ 3.2.1:

$$U(n,k)=n^k:$$

3.3. (n,k)-տեղափոխություններ առանց կրկնությունների

(n,k)-տեղափոխություն առանց կրկնությունների կոչվում է այն (n,k)–տեղափոխությունը, որի տարրերը չեն կարող կրկնվել:

P(n,k)-ով (կամ A_n^k-ով) նշանակվում է առանց կրկնությունների (n,k)–տեղափոխությունների քանակը:

Թեորեմ 3.3.1:

$$P(n,k) = A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}:$$

3.4. (n,k)-զուգորդություններ կրկնություններով

(n,k)-զուգորդություն կրկնություններով կոչվում է այն (n,k)–զուգորդությունը, որի տարրերը կարող են կրկնվել:

V(n,k)-ով նշանակվում է կրկնություններով (n,k)–զուգորդությունների քանակը:

Թեորեմ 3.4.1:

$$V(n,k)=\frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}:$$

<u>3.5. (n,k)- զուգորդություններ առանց կրկնությունների</u>

<u>(n,k)-զուգորդություն առանց կրկնությունների</u> կոչվում է այն (n,k)–զուգորդությունը, որի տարրերը չեն կարող կրկնվել:

<u>C(n,k)-</u>ով (կամ C_n^k**-**ով կամ $\binom{n}{k}$ –ով) նշանակվում է առանց կրկնությունների (n,k)–զուգորդությունների քանակը:

<u>Թեորեմ 3.5.1:</u>

$$C(n,k) = C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}:$$

3.6. Տարրական նույնություններ

1. $$C_n^k = C_n^{n-k}$$

2. $$C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$$

3. $$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$$