ՏԱՐՐԱԿԱՆ ԷԿՈՆՈՄԵՏՐԻԿԱ

ԼՈՒՍԻՆԵ ՂՈՒՇՉՅԱՆ
ՏԻԳՐԱՆ ԹԵՐԶՅԱՆ
ԼՈՒՍԻՆԵ ԴԱՎԹՅԱՆ

ՏԱՐՐԱԿԱՆ
ԷԿՈՆՈՄԵՏՐԻԿԱ

Support for this publication was provided by the SCOUT (Support for Community Outreach and University Teaching) Program, funded by the Bureau of Educational and Cultural Affairs of the United States Department of State (ECA), under authority of the Fulbright-Hays Act of 1961 as amended, and administered by the Open Society Institute (OSI) and the Civic Education Project (CEP). The opinions expressed herein are the organizer's/author's own and do not necessarily express the views of ECA, OSI or CEP.

ԼՈՒՍԻՆԵ ՂՈՒՃՋՅԱՆ
ՏԻԳՐԱՆ ԹԵՐՁՅԱՆ
ԼՈՒՍԻՆԵ ԴԱՎԹՅԱՆ

ՁԵՍԹ
ԵՐԵՎԱՆ 2002

ՀՏԴ 33
ԳՄԴ 65
Ղ 977

Հրատարակության են երաշխավորել ԵրՊՏԻ Մակրոէկոնոմիկայի և Մաթեմատիկական մեթոդների և մոդելավորման ամբիոնները

Գրախոսներ՝ տ.գ.դ., պրոֆ. Մ. Ա. Միտոյան
տ.գ.թ., պրոֆ. Ս. Դ. Սարգսյան

Մասն. խմբագիր տ.գ.դ., պրոֆ. Հ. Բ. Ղուշչյան

Գիրքը հրատարակվել է Համալսարանական և արտաժամյա ուսուցման աջակցության (ՀԱՈՒԱ / SCOUT) ծրագրի օժանդակությամբ։

Ղ 977 Ղուշչյան Լ. Հ. և ուրիշ. **Տարրական էկոնոմետրիկա**։
Ուս. ձեռնարկ / Լ. Ղուշչյան, Տ. Թերզյան, Լ. Դավթյան . – Եր.։
Զեսթ, 2002. – 280 էջ։

Գիրքը նպատակ ունի ընթերցողին ծանոթացնել էկոնոմետրիկայի տարրական հիմունքներին։

Գրքում ներկայացվում են էկոնոմետրիկայում կիրառվող հավանականությունների տեսության և մաթեմատիկական վիճակագրության հիմնական հասկացությունները և թեորեմները, որից հետո լուսաբանվում են երկչափ և բազմաչափ գծային մոդելների վերլուծության եղանակները։

Նախատեսվում է տնտեսագիտական բարձրագույն ուսումնական հաստատությունների ուսանողների, դասախոսների, ինչպես նաև գործնական աշխատողների համար։

Ղ $\frac{0601000000}{0113(01)2002}$ 2002 թ. ԳՄԴ 65

ISBN 99930-819-0-6

ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Այս գրքի լույսընծայումը հեղինակների մտածողության փոփոխության արդյունք է և նոր գաղափարները ի մի բերելու, հանրությանը ներկայացնելու նպատակ ունի։ Գրքի հեղինակներից երկուսը մագիստրոսի կոչումներ ստացել են ԱՄՆ համալսարաններում, որտեղ տնտեսագետ կադրերի պատրաստման կրթական ծրագրերը էապես տարբերվում են մեր հանրապետությունում գործող ծրագրերից։ Եթե տնտեսագիտության մասնագիտությունների ոլորտում մենք ուսուցանում ենք տեսական գիտելիքներ՝ հիմնականում որակական վերլուծությունների վրա հիմնված, ապա ամերիկյան ուսուցման համակարգը մեծ ուշադրություն է դարձնում տնտեսության օրինաչափությունների քանակական վերլուծություններին և ուսուցման բոլոր մակարդակներում (բակալավրիատ, մագիստրատուրա, դոկտորանտուրա) տարբեր խորությամբ ուսումնասիրվում է էկոնոմետրիկայի դասընթացը։ Հեղինակները ցանկացել են Երևանի պետական տնտեսագիտական ինստիտուտի և տնտեսագետ կադրեր պատրաստող մյուս ԲՈՒՀ-երի համար ստեղծել «էկոնոմետրիկա» առարկայի ուսումնական ձեռնարկ։

Նրանց՝ նման գիրք հրատարակելու հնարավորությունը կապված է նաև ստացած ամերիկյան կրթության հետ, քանի որ Համալսարանական և արտաժամյա ուսուցման աջակցության (ՀԱՈւԱ) ծրագիրը, ԱՄՆ պետդեպարտամենտի կրթության և մշակութային հարաբերությունների բյուրոյի օժանդակությամբ, ֆինանսավորում է միայն ԱՄՆ-ում "MUSKIE" ծրագրով կրթություն ստացած մասնագետների աշխատանքների հրատարակումը։

Գրքի առաջին մասը և մատրիցային հանրահաշվին վերաբերող հավելվածը շարադրել է Երևանի պետական տնտեսագիտական ինստիտուտի Մաթեմատիկական մեթոդների և մոդելավորման ամբիոնի դոցենտ, ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածու Տ. Ի. Թերզյանը: Տ. Թերզյանը շուրջ հինգ տարի դասավանդում է «էկոնոմետրիկա» առարկան, սկզբում՝ ինստիտուտի ինժեներատնտեսագիտական ֆակուլտետում, այնուհետև՝ նաև մյուս ֆակուլտետներում: Հեղինակի համոզմամբ, առանց հավանականությունների տեսության, մաթեմատիկական վիճակագրության և մատրիցային հանրահաշվի իմացության, էկոնոմետրիկայի ուսումնասիրությունը թերի է և ոչ հիմնավոր:

Գրքի ներածությունը, երկրորդ մասը և բազմակոլինեարության ու ավտոկոռելյացիային վերաբերող հավելվածները շարադրել է ԱՄՆ «Սենթրալ Միչիգան» համալսարանում «էկոնոմիկա» ծրագրով մագիստրոսի կոչում ստացած Լ. Հ. Ղուշչյանը, երրորդ մասը և հետերոսկեդաստիկությանը վերաբերող հավելվածը՝ ԱՄՆ «Բոուլինգ Գրին Սթեյթ» համալսարանում «էկոնոմիկա» ծրագրով մագիստրոսի կոչում ստացած Լ. Ա. Դավթյանը:

Վստահ եմ, որ գրքի հրատարակումը մեծապես կնպաստի հեղինակների առջև դրված նպատակների իրագործմանը և տվյալ առարկայի դասավանդման շրջանակների ընդլայնմանը:

Երիտասարդ մասնագետների նախաձեռնությունը խթանելու նպատակով ես համաձայնվեցի իրականացնել դրա խմբագրման աշխատանքը, նկատի ունենալով, որ էկոնոմետրիկայի ձեռնարկ շարադրելիս առաջին հերթին անհրաժեշտ են ճշգրիտ պատկերացումներ տնտեսական երևույթների էության և փոփոխության օրինաչափությունների մասին, որի հիման վրա է հնարավոր օգտագործել մաթեմատիկական ցանկացած մոդելներ ու մեթոդներ:

Որքանով է դա հաջողվել հեղինակներին և խմբագրին, կգնահատեն ընթերցողները: Սակայն որևէ աշխատանք ընթերցողի դատին ներկայացնելու համար անհրաժեշտ է նախ իրագործել այն, որին և ձեռնամուխ ենք եղել երիտասարդ հեղինակների հետ:

Հ. Ղուշչյան

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ԱՌԱՋԱԲԱՆ 9
ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ 13
ՄԱՍ I
ՀԱՎԱՆԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ՎԻՃԱԿԱԳՐՈՒԹՅԱՆ ՀԻՄՈՒՆՔՆԵՐԸ 21
ԳԼՈՒԽ 1
ՀԱՎԱՆԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՏԱՐՐԵՐԸ 21
1.1. Պատահարներ 21
1.2. Պատահարի հավանականությունը 28
1.3. Միացությունների տեսության տարրերը 32
1.4. Հավանականությունների դասական սահմանման որոշ կիրառություններ 36
1.5. Հավանականության վիճակագրական սահմանումը 39
1.6. Պատահարի պայմանական հավանականությունը և հավանականությունների բազմապատկման թեորեմը 41
1.7. Լրիվ հավանականության և Բայեսի բանաձևերը 46
1.8. Երկրաչափական հավանականություններ 49
1.9. Գոնե մեկ պատահարի երևալու հավանականությունը 52
1.10. Բեռնուլիի փորձերը 54
ԳԼՈՒԽ 2
ՊԱՏԱՀԱԿԱՆ ՄԵԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԵՎ ԲԱՇԽՄԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ 63
2.1. Պատահական մեծություններ 63
2.2. Դիսկրետ պատահական մեծություններ 69
2.3. Անընդհատ պատահական մեծություններ 74

2.4. Երկչափ պատահական մեծություններ 80
2.5. Պատահական մեծության ֆունկցիայի բաշխումը 87
2.6. Հավանականությունների χ^2, Ստյուդենտի և Ֆիշերի բաշխումները 90
2.7. Պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը և դրա հատկությունները 92
2.8. Պատահական մեծության դիսպերսիան և դրա հատկությունները 98
2.9. Պատահական մեծության թվային այլ բնութագրիչներ 101
2.10.Երկչափ պատահական մեծության բնութագրիչները 106
2.11. Բազմաչափ նորմալ պատահական մեծություն, դրա հատկությունները 111
2.12. Մեծ թվերի օրենք: Հավանականությունների կենտրոնական սահմանային և Սլուցկու թեորեմները 114
2.13. Պայմանական մաթեմատիկական սպասում 120

ԳԼՈՒԽ 3

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ՎԻՃԱԿԱԳՐՈՒԹՅԱՆ ՏԱՐՐԵՐԸ 124
3.1. Վերցվածքային(ընտրանքային) բազմություն, դրա հիմնական բնութագրիչները 124
3.2. Փորձնական բաշխման և խտության ֆունկցիա (հիստոգրամ) 128
3.3. Անհայտ պարամետրերի գնահատումը 132
3.4. Վստահելի միջակայք 141
3.5. Վիճակագրական վարկածներ և դրանց ստուգումը 144

ՄԱՍ II

ԵՐԿՈՒ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆՈՎ ՌԵԳՐԵՍԻԱՅԻ ՄՈԴԵԼ 147

ԳԼՈՒԽ 4

ԵՐԿՉԱՓ ՌԵԳՐԵՍԻԱՅԻ ԳԾԱՅԻՆ ՄՈԴԵԼ 148
4.1. Համախմբության և ընտրանքի ռեգրեսիայի

ֆունկցիաներ 148
4.2. Փոքրագույն քառակուսիների մեթոդը 152
4.3. Դասական գծային ռեգրեսիայի մոդելի ենթադրությունները 157
4.4. Գաուս-Մարկովի թեորեմը 162
4.5. Սխալների դիսպերսիայի գնահատումը 169
4.6. Դետերմինացիայի գործակիցը 171
Ամփոփում 176
ՀԱՐՑԵՐ ԵՎ ԽՆԴԻՐՆԵՐ 177

ԳԼՈՒԽ 5

ՏԻՐՈՒՅԹԻ ԳՆԱՀԱՏՈՒՄ ԵՎ ՎԱՐԿԱԾԻ ՍՏՈՒԳՈՒՄ 181
5.1. Դասական նորմալ գծային ռեգրեսիայի մոդել 182
5.2. Վարկածի ստուգում 184
5.3. Ռեգրեսիայի վերլուծության արդյունքների գնահատումը 191
Ամփոփում 195
ՀԱՐՑԵՐ ԵՎ ԽՆԴԻՐՆԵՐ 196
Հավելված 5.1. 199

ՄԱՍ III

ԲԱԶՄԱԿԻ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆՆԵՐՈՎ ՌԵԳՐԵՍԻԱՅԻ ՄՈԴԵԼ 201

ԳԼՈՒԽ 6

ԲԱԶՄԱՉԱՓ ՌԵԳՐԵՍԻԱՅԻ ԳԾԱՅԻՆ ՄՈԴԵԼ 202
6.1. Բազմակի փոփոխականներով ռեգրեսիայի մոդելի ընդհանուր բնութագիրը 202
6.2. Վարկածներ 211
Ամփոփում 225
Հավելված 5.1. 226

ԳԼՈՒԽ 7

ՌԵԳՐԵՍԻԱՅԻ ՄՈԴԵԼԻ ՖՈՒՆԿՑԻՈՆԱԼ ՁԵՎԵՐ 227
7.1. Լոգարիթմական գծային մոդել 228
7.2. Մասնակի լոգարիթմական մոդել 229
7.3. Հակադարձ մեծության մոդելներ 230

Ամփոփում 232
ՀԱՐՑԵՐ ԵՎ ԽՆԴԻՐՆԵՐ 232
ՀԱՎԵԼՎԱԾ I 236
ՄԱՏՐԻՑԱՅԻՆ ՀԱՆՐԱՀԱՇԻՎ 236
1.1. Գործողություններ մատրիցների հետ 237
1.2. Մատրիցի հետքը և որոշիչը (դետերմինանտ) 241
1.3. Մատրիցի ռանգ 243
1.4. Հակադարձ մատրից 243
1.5. Մատրիցի սեփական արժեքներ և սեփական վեկտորներ 245
1.6. Սիմետրիկ մատրիցներ 246
1.7. Իդեմպոտենտ մատրիցներ 249
ՀԱՎԵԼՎԱԾ II 250
Ա. Բազմակոլինեարություն 251
Բ.Հետերոսկեդաստիկություն 253
Գ. Ավտոկոռելյացիա 258
ՀԱՎԵԼՎԱԾ III
ՎԻՃԱԿԱԳՐԱԿԱՆ ԱՂՅՈՒՍԱԿՆԵՐ 266
Աղյուսակ 1. φ(x) ֆունկցիայի արժեքները 267
Աղյուսակ 2. Φ (x) ֆունկցիայի արժեքները 268
Աղյուսակ 3. Ստյուդենտի t բաշխման կրիտիկական կետերը 269
Աղյուսակ 4. χ^2 բաշխման կրիտիկական կետերը 270
Աղյուսակ 5. Ֆիշերի F բաշխման կրիտիկական կետերը 272
Աղյուսակ 6.Դարբին-Վաթսոնի (DW) *d* տեստի արժեքները 274
Աղյուսակ 7. *Run* տեստի կրիտիկական արժեքները 275
ՕԳՏԱԳՈՐԾՎԱԾ ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՑԱՆԿ 277

ԱՌԱՋԱԲԱՆ

Վերջին տարիներին ՀՀ-ում, շուկայական տնտեսության անցմանը զուգընթաց, էկոնոմետրիկա գիտությունը բուռն զարգացում է ապրում և աստիճանաբար ժամանակակից տնտեսագիտական կրթության մեջ գրավում իր արժանի տեղը միկրոտնտեսագիտության և մակրոտնտեսագիտության կողքին:

Տնտեսագիտական գիտությունների շարքում էկոնոմետրիկան համեմատաբար երիտասարդ գիտություն է: Գտնվելով մի շարք գիտությունների «եզրին» (տնտեսագիտության տեսություն, մակրոտնտեսագիտություն, հավանականությունների տեսություն, մաթեմատիկական և տնտեսական վիճակագրություն և այլն)՝ հանդիսանում է անընդհատ զարգացող գիտություն, որի ընդգրկման շրջանակների ամբողջականությունը դժվար է ներկայացնել համառոտ:

Ըստ էության, էկոնոմետրիկան գործիքների համախմբություն է, որի միջոցով, փորձնական տվյալների վերլուծության արդյունքում, ուսումնասիրվում և գնահատվում են տնտեսական երևույթների քանակական կախվածությունների ձևերն ու չափը հնարավորություն ընձեռելով կանխատեսումներ անել տնտեսագիտական այս կամ այն երևույթի ապագա (անցյալ) վարքի վերաբերյալ:

Ներկայացնենք տնտեսագիտության և էկոնոմետրիկայի բնագավառի մի քանի խոշորագույն գիտնականների բնութագրումները էկոնոմետրիկա գիտության վերաբերյալ.

«Էկոնոմետրիկան թույլ է տալիս քանակապես վերլուծել իրական տնտեսական երևույթները՝ հիմնվելով տեսության ժամանակակից նվաճումների և եզրակացություն անելու հնարավորություն ընձեռող դիտարկման մեթոդների վրա» (Սամուելսոն):

«Էկոնոմետրիկայի հիմնական խնդիրը տեսական տնտեսագիտական դատողությունները էմպիրիկ (փորձով հաստատված) բովանդակությամբ հարստացնելն է» (Կլեյն):

«Էկոնոմետրիկայի նպատակը տնտեսագիտական օրենքները փորձով հաստատված արդյունքներից բխեցնելն է: Էկոնոմետրիկան լրացնում է տնտեսագիտական տեսությունը՝ արդեն ընդունված առնչությունները ստուգելու և ճշգրտելու համար օգտագործելով փաստացի տվյալներ» (Մալենվո):

Այս գիրքը «Էկոնոմետրիկա» առարկայի հայերեն լեզվով առաջին ձեռնարկն է: Վերնագիրը՝ «Տարրական էկոնոմետրիկա», արդեն հուշում է, որ գրքի նպատակը սկզբնական (տարրական) էկոնոմետրիկական հասկացություններին և բնութագրիչներին, պարզագույն էկոնոմետրիկական մոդելներին և դրանց գնահատման եղանակին, ինչպես նաև մոդելների գործակիցների վիճակագրական վարկածների ստուգմանը ընթերցողին ծանոթացնելն է: Գիրքը առաջին հերթին հասցեագրված է տնտեսագետներին և հատկապես տնտեսագիտություն ուսումնասիրող ուսանողներին:

Գիրքը բաղկացած է ներածությունից, երեք մասերից և հավելվածներից:

Ներածությունում ներկայացվել են էկոնոմետրիկայի մեթոդաբանության հիմունքները, էկոնոմետրիկական մոդելի առանձնահատկությունները և էկոնոմետրիկայում օգտագործվող տվյալների ձևերը և աղբյուրները:

Հաշվի առնելով այն հանգամանքը, որ էկոնոմետրիկական վերլուծություններում հիմնականում կիրառվում են հավանականությունների տեսության և մաթեմատիկական վիճակագրության եղանակները, հեղինակները հարկ են համարել գրքի առաջին մասը նվիրել հավանականությունների տեսությանը և մաթեմատիկական վիճակագրությանը: Այս մասում սահմանվում են այն հիմնական հասկացությունները և ձևակերպվում այն թեորեմները (առանց ապացուցման), որոնք անհրաժեշտ են գրքի հաջորդ մասերը մատչելի դարձնելու համար:

Այս պատճառով էկոնոմետրիկան ուսումնասիրող սկսնակ ընթերցողին խորհուրդ է տրվում սկզբում ծանոթանալ գրքի առաջին մասին, հետո անցնել մյուս մասերի ուսումնասիրությանը:

Պետք է նշել, որ առաջին մասում հավանականությունների տեսությանը և մաթեմատիկական վիճակագրությանը վերաբերող տեղեկությունները ավելի խորությամբ են տրված, քան անհրաժեշտ է ներկայացվող նյութի ուսումնասիրության համար: Սակայն հեղինակներն այն կարծիքին են, որ լրացուցիչ տեղեկությունները ընթերցողին կօգնեն հետագայում ավելի հիմնավոր ուսումնասիրելու էկոնոմետրիկան:

Գրքի երկրորդ մասում ներկայացված է էկոնոմետրիկայի երկչափ ռեգրեսիայի մոդելը: Այն բաղկացած է երկու գլուխներից: Առաջին գլուխը վերաբերում է երկու փոփոխականներով դասական պայմանները բավարարող պարզագույն գծային մոդելների ուսումնասիրությանը, դրանց գնահատմանը: Բացի այդ, ձևակերպված և ապացուցված է Գաուս-Մարկովի թեորեմը, որը էկոնոմետրիկայի առանցքային թեորեմներից մեկն է: Երկրորդ գլուխը նվիրված է գնահատականների նշանակալիության վերաբերյալ վարկածի ստուգմանը, մոդելի որակի բնութագրիչների կիրառությանը: Ուսումնասիրվող մոդելներում տրված են ստացված գնահատականների և արհեստականորեն ստացված մեծությունների տնտեսագիտական մեկնաբանությունները:

Գրքի երրորդ մասում մեկնաբանված են դասական պայմանները բավարարող գծային բազմաչափ մոդելի հիմունքները՝ համապատասխան վերլուծություններ կատարելու հիմնական հասկացություններով և պայմաններով: Լուսաբանված են վարկածների ստուգման առանձնահատկությունները բազմակի ռեգրեսիայի մոդելի համար, ինչպես նաև անհրաժեշտ տեստերը, դրանցից բխող եզրակացությունները:

Դասական գծային ռեգրեսիայի մոդելի ենթադրությունների պայմանները ստուգելու նպատակով հավելվածներում ներկայացված են բազմակոլինեարության, հետերոսկեդաստիկության, ավտոկոռելյացիայի հիմնախնդիրների համառոտ էությունը և դրանց հայտնաբերման եղանակները:

Հեղինակները շնորհակալ կլինեն գրքի կառուցվածքի, տեղ գտած վրիպումների, անհրաժեշտ լրացուցիչ մեկնաբանությունների վերաբերյալ տեղեկատվության, ինչպես նաև կատարված դիտողությունների և առաջարկությունների համար:

ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

Տնտեսագիտությունը, ինչպես գիտենք, դիտարկում է տնտեսության զարգացման օրինաչափությունները, սակայն քանակական գնահատական չի տալիս դրանց: Այսպես, ըստ միկրոտնտեսագիտության՝ տվյալ ապրանքի պահանջարկը հակադարձ համեմատական է տվյալ ապրանքատեսակի միջին շուկայական գնին և ուղիղ համեմատական է սպառողի եկամտին: Ըստ մակրոտնտեսագիտության՝ ամբողջական պահանջարկը հակադարձ համեմատական է գների մակարդակին և պայմանավորված է դրամավարկային և հարկաբյուջետային քաղաքականությամբ: Ինչպես տեսնում ենք, տնտեսագիտության տեսության դրույթները իրենց բնույթով որակական են: Էկոնոմետրիկան ուսումնասիրում է տնտեսական երևույթների քանակական օրինաչափությունները: Այն օգտագործելով վիճակագրության, տնտեսամաթեմատիկական, մաթեմատիկական վիճակագրության մեթոդները՝ էմպիրիկ գնահատական է տալիս տնտեսագիտության դրույթներին: Տնտեսագիտության տեսության եզրակացությունները ստուգելու նպատակով էկոնոմետրիկան օգտագործում է նաև վիճակագրության տվյալները: Ավելին՝ եթե վիճակագրական տվյալները ճիշտ չեն գնահատված, էկոնոմետրիըը ճիշտ չեն գնահատված, էկոնոմետրիկան մշակում է այդ սխալները հայտնաբերելու և ճշտելու մեթոդներ:

Էկոնոմետրիկայի ուսումնասիրության հիմնական գործիքը ռեգրեսիայի վերլուծությունն է, որը թույլ է տալիս պարզել մեկ փոփոխականի զգայունությունը այլ փոփոխականի նկատմամբ: Ի տարբերություն կոռելյացիայի վերլուծության, որը ցույց է տալիս երկու փոփոխականների միջև կապի աստիճանը, ռեգրեսիայի վերլուծությունը փորձում է գնահատել և կանխատեսել մեկ փոփոխականի միջին արժեքը՝ մեկ այլ տրված արտածին(էկզոգեն) փոփոխականի հիման վրա: Պետք է նշել, որ ռեգրեսիայի վերլուծության ժամանակ ենթադրվում է, որ փոփոխականների կապը վիճակագրական է, ոչ թե՝ ֆունկցիոնալ, այսինքն փոփոխականները պատահական բնույթ ունեն:

Էկոնոմետրիկայի դասընթացը կարելի է բաժանել երկու մասի՝ տեսական և կիրառական:

Տեսականը ուսումնասիրում է որոշակի մեթոդներ՝ տնտեսական երևույթները գնահատելու համար, մշակում է վիճակագրական մոդելներ՝ կիրառելով մաթեմատիկական վիճակագրական վերլուծության մեթոդները: Կիրառական էկոնոմետրիկան օգտագործում է տեսականի եզրահանգումները՝ տնտեսագիտության որևէ բնագավառի ուսումնասիրության համար: Այսինքն՝ տեսականը մշակում է տեխնիկա, իսկ կիրառականը դա օգտագործում գործնականում:

Էկոնոմետրիկայի մեթոդաբանությունը տնտեսական երևույթների գնահատման և վերլուծության ժամանակ նախատեսում է.

- ընտրել մաթեմատիկական մոդել,
- վերափոխել այն վիճակագրական մոդելի,
- գտնել համապատասխան տվյալներ,

- հաշվարկել մոդելի գործակիցները,
- ստուգել մոդելը, կատարել կանխատեսումներ տնտեսական երևույթի փոփոխության մասին:

Փորձենք նշված հաջորդականությունը ներկայացնել տնտեսագիտական որևէ հասկացության օրինակով: Ինչպես գիտենք, ըստ մակրոտնտեսագիտական տեսության՝ ազգային արդյունքը փակ տնտեսությունում բաժանվում է երեք խմբի՝

$$Y = C + I + G,$$

որտեղ՝

C-ն սպառումն է,

I-ը՝ ներդրումները,

G-ն՝ պետական գնումները:

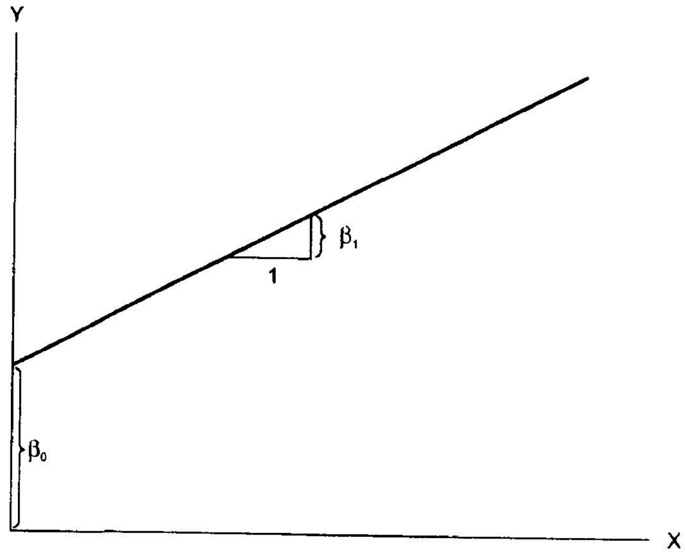
Իր հերթին, սպառումը ֆունկցիա է եկամտից, իսկ ներդրումները՝ տոկոսադրույքից:

Հետևաբար, եկամուտների և սպառման փոխհարաբերությունները կարող ենք գնահատել հետևյալ մաթեմատիկական մոդելի օգնությամբ՝

$$Y= \beta_0+\beta_1 X$$

որտեղ՝ X-ը եկամուտն է,Y-ը սպառումն է, իսկ՝ β_0-ն և β_1 -ն մոդելի գործակիցներն են: Ընդ որում, β_0 -ն տվյալ ֆունկցիայի ազատ անդամն է, իսկ β_1 -ը՝ անկյունային գործակիցը, որը ցույց է տալիս, թե ինչպես է փոփոխվում սպառումը եկամտի մեկ միավոր ավելանալու դեպքում: Տվյալ ֆունկցիան ունի հետևյալ գրաֆիկական տեսքը (գրաֆիկ 1).

Այս մաթեմատիկական մոդելը ենթադրում է, որ սպառման և եկամտի միջև գոյություն ունի որոշակի կախվածություն: Էկոնոմետրիկական տեսանկյունից տվյալ մոդելը թերի է, քանի որ իրական կյանքում գրեթե հնարավոր չէ, որ տարբեր խմբերի



Գրաֆիկ 1. *Սպառման սահմանային հակման ֆունկցիան*

սպառման հակվածությունը հավասար լինի: Իրականում եկամտի մեկ միավոր ավելանալու դեպքում սպառման վարքագիծը այդ խմբերի համար տարբեր է: Եթե փորձենք պայմանական օրինակով ներկայացնել սպառումը տարբեր եկամուտ ունեցող խմբերի համար (տե՛ս աղյուսակ 1), ապա կտեսնենք, որ միևնույն եկամուտ ունեցող խմբերի սպառման վարքագիծը տարբերվում է միմյանցից: Որոշակի դեպքերում, ավելի քիչ եկամուտ ունեցողի սպառումը կարող է գերազանցել շատ եկամուտ ունեցողի սպառումը: Այնուամենայնիվ, պետք է նշել, որ չնայած տատանումներին, խմբերի միջին սպառումը ուղիղ համեմատական է նրանց եկամուտներին:

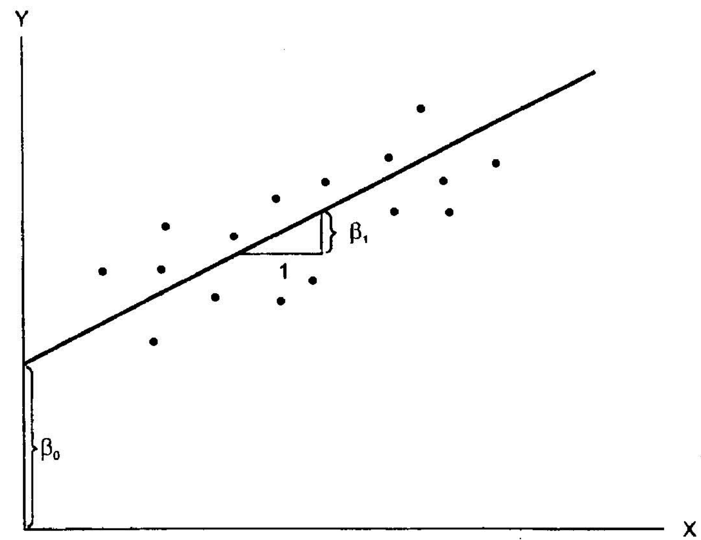
Հաշվի առնելով սպառման ծավալների տատանումները՝ կարելի է ներկայացնել սպառման սահմանային հակման էկոնոմետրիկական մոդելը (տե՛ս գրաֆիկ 2).

$$Y_t=\beta_0+\beta_1X_t+\varepsilon_t$$

որտեղ՝ ε_t-ն մոդելի սխալն է՝ այն բոլոր գործոնների հանրագումարը, որոնք ազդում են սպառման վրա, սակայն որոշակիորեն ընդգրկված չեն մոդելում:

Աղյուսակ 1. *Եկամուտները և սպառման ծավալները (հազ.դրամ)*

X / Y	Եկամուտներ						
	2	4	6	8	10	12	14
Սպառում	1.4	2.1	3.1	5.3	7.6	10.0	11.0
	1.6	2.2	3.5	5.5	8.5	10.6	11.4
	1.7	2.4	3.8	6.7	8.6	11.1	12.5
	1.8	2.8	4.5	7.4	9.2	11.2	12.8
	1.9	3.2	5.2	7.5	9.3	11.4	13.3
Միջին սպառում	1.68	2.76	4.02	6.48	8.64	10.86	12.2



Գրաֆիկ 2. *Սպառման սահմանային հակման վիճակագրական կախվածությունը*

Մոդելը կառուցելուց հետո այն պետք է գնահատել՝ գտնելով համապատասխան տվյալները: Տվյալների առկայությունը և ճշտությունը էկոնոմետրիկական վերլուծության ամենակարևոր նախապայմաններից մեկն է: Նշենք, որ էկոնոմետրիկայում օգտագործվող տվյալները կարող են լինել.

1. ժամանակային շարքեր՝ տվյալներ, որոնք արտահայտում են տնտեսական երևույթի փոփոխությունը ժամանակի ընթացքում,
2. զանգվածային շարքեր՝ տվյալներ, որոնք արտահայտում են նույն տնտեսական երևույթի բազմություններ,
3. խառը՝ տվյալներ, որոնք պարունակում են երևույթների տարածական և ժամանակային փոփոխությունները:

Ժամանակայինը այն տվյալներն են, որոնք ցույց են տալիս որոշակի ժամանակահատվածում տնտեսական երևույթի փոփոխության դինամիկայի օրինաչափությունները:

Էկոնոմետրիկայի համար զանգվածային տվյալներ կարելի է համարել գյուղատնտեսական մշակաբույսերի միջին բերքատվության ցուցանիշները՝ կախված հողի բերրիությունից, ոռոգման հնարավորություններից և այլն:

Խառը տվյալների օրինակ է առանձին ընկերության բաժնետոմսերի կուրսի տատանումները ժամանակի ընթացքում:

Մեր հանրապետությունում սպառման մասին տվյալների պաշտոնական աղբյուրը ՀՀ ազգային վիճակագրական ծառայության տվյալներն են ազգային համախառն ներքին արդյունքի (ՀՆԱ) արտադրության և բաշխման վերաբերյալ: Չնայած ՀՆԱ տվյալները ներկայացվում են նաև պետական այլ մարմինների կողմից: Օրինակ, ՀՀ կենտրոնական բանկի տարեկան հաշվետվությունների առաջին «Տնտեսության ընդհանուր բնութագիրը»

բաժնում տրվում են մակրոտնտեսական իրավիճակի, ՀՀ պետական բյուջեի և ՀՀ վճարային հաշվեկշռի տվյալները, որոնց հիման վրա հնարավոր է կատարել էկոնոմետրիկական վերլուծություններ՝ տնտեսական զարգացման ընդհանուր քանակական օրինաչափությունների բացահայտման համար:

Վերը նշված աղբյուրներից համապատասխան տվյալներ հավաքագրելուց հետո՝ կարելի է ռեգրեսիայի վերլուծության միջոցով գնահատել մոդելի գործակիցները: Գոյություն ունեն գործակիցների գնահատման մի քանի եղանակներ: Մենք կներկայացնենք փոքրագույն քառակուսիների մեթոդը, որը մեծ կիրառություն ունի էկոնոմետրիկայում: Գրականության մեջ հաճախ օգտագործվում է մեթոդի անգլերեն հապավումը՝ OLS (Ordinary Least Square):

Տվյալ մոդելը երկչափ ռեգրեսիայի մոդել է, քանի որ կախյալ փոփոխականը՝ սպառումը, բացատրվում է մեկ փոփոխականի՝ եկամուտների օգնությամբ:

Եթե փորձենք ներկայացնել ոչ թե ամբողջական, այլ ապրանքատեսակի սպառումը, ապա, ըստ միկրոտնտեսագիտության՝ այն ուղիղ համեմատական է սպառողի եկամտին և հակադարձ համեմատական՝ տվյալ ապրանքատեսակի միջին շուկայական գնին: Հետևաբար, տվյալ հիմնահարցի լուծման համար կիրառվող մոդելը կունենա հետևյալ տեսքը.

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \beta_2 X_t + \varepsilon_t$$

որտեղ՝ β_0-ն կայուն սպառումն է,

β_1-ն սպառման սահմանային հակումն է եկամտի նկատմամբ,

β_2 –ն՝ սպառման ծավալի կախվածությունն է ապրանքատեսակի գնից,

ε_t-ն մոդելի սխալն է:

Նշենք, որ այն մոդելը, որում կախյալ փոփոխականը բացատրվում է մեկից ավելի փոփոխականներով, կոչվում է բազմաչափ ռեգրեսիայի մոդել:

Տվյալ բանաձևը հաճախ կոչվում է վարքագծի բանաձև, քանի որ արտահայտում է տվյալ ապրանքատեսակի նկատմամբ սպառողի վարքագիծը՝ կախված իր եկամտից և ապրանքի գնից: Սպառողի վարքագիծը բացահայտ կերևա մոդելի գործակիցները գնահատելուց հետո, սակայն նշենք, որ տեսականորեն b_1-ը արտահայտում է դրական, իսկ b_2-ը՝ բացասական կախվածություն:

Մոդելի գործակիցները գնահատելուց հետո անհրաժեշտ է ստուգել՝ ստացված արդյունքները համապատասխանում են արդյոք տնտեսագիտության տեսական դրույթներին: Ռեգրեսիայի վերլուծության արդյունքների համապատասխանելիությունը տնտեսագիտական տեսությանը ստուգվում է վիճակագրական վարկածի տեստի միջոցով:

Եթե տվյալ մոդելը հաստատում է նշված վարկածը, այն կարելի է օգտագործել հետագա կանխատեսումների և տնտեսական քաղաքականության մշակման համար:

ՄԱՍ I

ՀԱՎԱՆԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ՎԻՃԱԿԱԳՐՈՒԹՅԱՆ ՀԻՄՈՒՆՔՆԵՐԸ

ԳԼՈՒԽ 1

ՀԱՎԱՆԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՏԱՐՐԵՐԸ

1.1. Պատահարներ

Հասարակության և բնության օրինաչափությունները ուսումնասիրելիս և սահմանելիս հարկ է լինում կատարել փորձեր և դիտումներ:

Միևնույն պայմաններում կատարվող փորձերի արդյունքները կարող են տարբեր լինել: Այլ կերպ ասած՝ փորձի կամ դիտման արդյունքները պատահական բնույթ ունեն, դրանք հնարավոր չէ միանշանակ կանխատեսել:

Պատահարի սահմանումը տալու համար անհրաժեշտ է տվյալ փորձին համապատասխանող տարրական պատահարների կամ ելքերի տարածության գաղափարը:

Սահմանում 1. Փորձի՝ իրար բացառող ելքերի կամայական Ω բազմությունը անվանում ենք տարրական պատահարների կամ ելքերի տարածություն, եթե փորձի ցանկացած ելք կարելի է ներկայացնել Ω - բազմության տարրերի միջոցով:

Ω բազմության տարրերը նշանակենք ω-ով և դրանք անվանենք տարրական պատահարներ կամ ելքեր:

Դիտողություն. Փորձի՝ իրար բացառող ելքեր ասելով՝ նկատի ունենք փորձի այնպիսի ելքեր, որոնք համատեղ հանդես գալ չեն կարող: Այստեղից հետևում է, որ, ըստ էության, փորձի տարրական պատահարը կամ ելքը փորձի չտրոհվող ելքն է, և Ω բազմությունը՝ փորձի բոլոր չտրոհվող ելքերի բազմություն:

Բերենք մի քանի օրինակ.

1.Ենթադրենք՝ նետված է մետաղադրամը: Եթե մետաղադրամի մի երեսը նշանակենք A-ով, իսկ մյուսը B-ով, ապա Ω-ն կազմված կլինի փոխբացառող A և B ելքերից:

2.Ենթադրենք՝նետված է զառը: Քանի որ զառն ունի վեց նիստեր, ապա ակնհայտ է, որ Ω-ն բաղկացած կլինի 6 տարրերից:

Նշված երկու օրինակներն ունեն մի ընդհանրություն. երկուսում էլ Ω-տարածությունը վերջավոր է: Սակայն պետք չէ կարծել, որ գոյություն չունեն անվերջ տարածությամբ փորձեր: Բերենք այդպիսի փորձի օրինակ:

3.Ենթադրենք՝ մետաղադրամը նետվում է այնքան, մինչև երևա A-երեսը: Այս դեպքում որպես փորձի տարրական ելք՝ կարելի է ներկայացնել հետևյալ հաջորդականությունը՝(B,B,...,B,A): Պարզ է, որ նշված հաջորդականություններն անվերջ շատ են, և բոլորն իրարից տարբեր, ուստի այս դեպքում Ω-ն չի կարող լինել վերջավոր, այն անվերջ բազմություն է:

Հետագայում կդիտարկենք միայն այն դեպքերը, երբ Ω-ն վերջավոր կամ հաշվելի բազմություն է: Նման տարրական ելքերով տարածություններին անվանում են դիսկրետ տարածություններ:

Սահմանում 2. Պատահար ասելով կհասկանանք Ω-ի ցանկացած ենթաբազմություն:

Պատահարները ընդհանրապես նշանակում են լատինական այբուբենի մեծատառերով: Ասում ենք՝$A \subseteq \Omega$ պատահարը տեղի է ունեցել, եթե տեղի է ունեցել A-ին պատկանող որևէ տարրական պատահար:

Սահմանում 2-ին համարժեք է հետևյալ՝ առավել տարածված սահմանումը.

Սահմանում 2՛. Փորձի կամ դիտման յուրաքանչյուր հնարավոր արդյունք անվանում ենք պատահար:

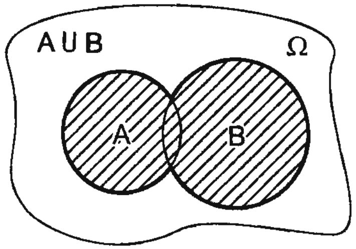
Սահմանում 3. A և B պատահարների գումար՝$A \cup B (A+B)$, անվանում են այն պատահարը, որը բաղկացած է A-ին կամ B-ին պատկանող տարրական պատահարներից:

Քանի որ, ըստ սահմանում 2-ի, պատահար է Ω-ի կամայական ենթաբազմությունը, ուստի պատահարը կարելի է նույնացնել բազմության հետ, որն ավելի է հեշտացնում պատահարների միջև գործողությունների կատարումը:

A և B պատահարների գումարը ներկայացված է Նկ. 1.1-ում:

Սահմանում 3-ին համարժեք է հետևյալ սահմանումը.

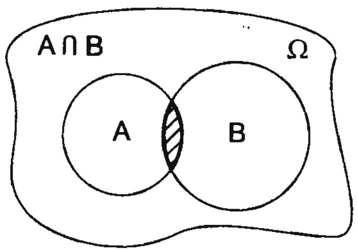
Սահմանում 3՛. A և B պատահարների գումար $A \cup B$-ն, պատահար է, որի դեպքում հանդես է գալիս A և B պատահարներից գոնե մեկը:



Նկ. 1.1

Սահմանում 4. A և B պատահարների արտադրյալ՝ $A \cap B$ (AB), անվանում են այն պատահարը, որը բաղկացած է միաժամանակ A-ին և B-ին պատկանող տարրական պատահարներից:

Նկ. 1.2-ում պատկերված է $A \cap B$ պատահարը:



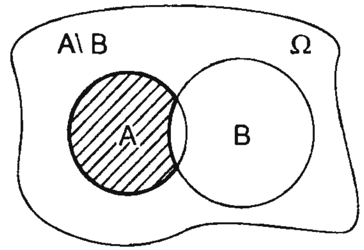
Նկ.1.2

.Սահմանում 4-ին համարժեք է հետևյալ սահմանումը.

Սահմանում 4՛. A և B պատահարների արտադրյալ $A \cap B$-ն, պատահար է, որն իրենից ներկայացնում է A և B պատահարների համատեղ հանդես գալը:

Սահմանում 5. A և B պատահարների տարբերություն՝ $A \setminus B(A-B)$, անվանում են այն պատահարը, որը բաղկացած է A-ի այն տարրական պատահարներից, որոնք չեն պատկանում B-ին:

Նկ. 1.3-ում ներկայացված է $A \setminus B$ տարբերությունը:



Նկ.1.3

Սահմանում 5-ին համարժեք է հետևյալ սահմանումը՝

Սահմանում 5՛. A և B պատահարների տարբերություն $A \setminus B$-ն այն պատահարն է, որի դեպքում A պատահարը հանդես է գալիս առանց B պատահարի:

Սահմանում 6. Ω բազմությունը անվանում են հավաստի պատահար:

Ω -ն, որպես ենթաբազմություն, ինքնին պատահար է, այնպիսի պատահար, որ փորձի յուրաքանչյուր ելքի դեպքում անհրաժեշտաբար տեղի է ունենում, այստեղից էլ առաջացել է անվանումը՝ *հավաստի* պատահար:

Քանի որ $\varnothing$ դատարկ բազմությունը կարելի է համարել ցանկացած բազմության ենթաբազմություն, ուստի այն նույնպես պատահար է: Այս պատահարը, ի տարբերություն Ω -ի, փորձի յուրաքանչյուր ելքի դեպքում անհրաժեշտաբար տեղի չի ունենում:

Սահմանում 7. $\varnothing$ պատահարն անվանում են անհավաստի պատահար:

Սահմանում 8. A պատահարը կոչվում է B-ի մասնավոր դեպք՝ $A \subseteq B$, եթե A պատահարի հանդես գալուց, հանդես է գալիս նաև B-ն:

Սահմանում 9. A և B պատահարները կոչվում են համարժեք կամ հավասար, եթե A-ն B-ի մասնավոր դեպքն է, իսկ B-ն՝ A-ի մասնավոր դեպքը:

($A=B$, եթե $A \subseteq B$, $B \subseteq A$)

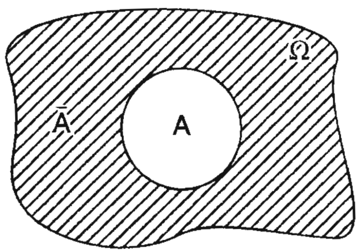
Սահմանում 10. A և B պատահարները կոչվում են անհամատեղելի, եթե $A \cap B = \varnothing$:

Սահմանում 10-ը կարելի է ձևակերպել նաև հետևյալ կերպ՝

Սահմանում 10՛. A և B պատահարները կոչվում են անհամատեղելի, եթե դրանցից մեկի հանդես գալը տվյալ փորձում բացառում է մյուսի հանդես գալը:

Սահմանում 11. $\overline{A}$ պատահարը կոչվում է A պատահարի հակադիր պատահար կամ A-ի լրացում, եթե $\overline{A} = \Omega \backslash A$:

Նկար 1.4-ում ներկայացված է A-ի հակադիր պատահարը:



Նկ.1. 4

Սահմանում 12. $A_1, A_2, \dots, A_n$ պատահարները տվյալ փորձում կազմում են լրիվ խումբ, եթե այդ պատահարներից առնվազն մեկը անհրաժեշտաբար հանդես է գալիս:

Սահմանումից հետևում է, որ եթե $A_1, A_2, \dots, A_n$ պատահարները կազմում են լրիվ խումբ, նշանակում է՝ նշված պատահարները սպառում են փորձի բոլոր հնարավոր արդյունքները: Այլ կերպ ասած՝ $A_1, A_2, \dots, A_n$ պատահարների լրիվ խումբ կազմելը համարժեք է՝ $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$:

Ենթադրենք՝ նետված է երկու զառ: Որպես տարրական պատահարների տարածություն՝ կարելի է դիտարկել (i, j) $i=\overline{1,6}$; $j=\overline{1,6}$ թվազույգերի բազմությունը, որոնց թիվը հավասար է 36-ի: Դիտարկենք $A=\{i+j \le 3\}$ և $B=\{j=6\}$ պատահարները:

Այստեղ A -ն $\{(1,1); (1,2); (2,1)\}$ տարրական պատահարների բազմությունն է, իսկ B-ն՝$\{(1,6); (2,6); (3,6); (4,6); (5,6); (6,6)\}$ տարրական պատահարների բազմությունը:

Ինչպես տեսնում ենք՝ A և B պատահարները միաժամանակ հանդես չեն կարող գալ: Այստեղից հետևում է, որ A և B-ն անհամատեղելի պատահարներ են:

Դիտարկենք AUB պատահարը: Ըստ սահմանման՝

$A \cup B=\{(1,1); (1,2); (2,1); (1,6); (2,6); (3,6); (4,6); (5,6)\}$

Ենթադրենք՝$C=\{j$ (զույգ է)$\}$, այստեղ C-ն հետևյալ տարրական պատահարներից բաղկացած պատահար է՝$\{(1,2); (1,4); (1,6); (2,2); (2,4); (3,2); (3,4); (3,6); (4,2); (4,4); (4,6); (5,2); (5,4); (5,6); (6,2); (6,4) (6,6)\}$:

A և C պատահարների արտադրյալը կլինի հետևյալ պատահարը՝$AC=\{(1.2)\}$:

A և C պատահարների տարբերությունը կլինեն հետևյալ պատահարը՝$A \backslash C=\{(1.1); (2.1)\}$:

$\overline{C}$ պատահարի հակադիր պատահարը կլինի՝

$\overline{C}=\{(1,1); (1,3); (1,5); (2,1); (2,3); (2,5); (3,1); (3,3); (3,5); (4,1); (4,3); (4,5); (5,1); (5,3); (5,5); (6,1); (6,3); (6,5)\}$:

Պարզ է, որ C և $\overline{C}$ պատահարները կազմում են լրիվ խումբ՝ $C \cup \overline{C} = \Omega$:

Պատահարների գումարին, արտադրյալին և տարբերությանը բնորոշ են հետևյալ ակնհայտ հատկությունները (ընթերցողին առաջարկվում է ապացուցել ինքնուրույն).

1. $A \cup A = A$
2. $A \cup \varnothing = A$
3. $A \cup \Omega = \Omega$
4. $A \cup \overline{A} = \Omega$
5. $A \cap A = A$
6. $A \cap \varnothing = \varnothing$
7. $A \cap \Omega = A$
8. $A \cap \overline{A} = \varnothing$
9. $A \setminus A = \varnothing$
10. $\Omega \setminus \overline{A} = A$
11. $A \setminus B = A \cap \overline{B}$

Դիտողություն. 4-րդ հատկությունից հետևում է, որ A և $\overline{A}$ պատահարները կազմում են լրիվ խումբ, 8-րդ հատկությունից հետևում է, որ A և $\overline{A}$ պատահարները անհամատեղելի են, իսկ 10-րդ հատկությունից հետևում է, որ եթե $\overline{A}$-ը A-ի հակադիրն է, ապա A-ն էլ կլինի $\overline{A}$-ի հակադիրը:

1.2. Պատահարի հավանականությունը

Նախ դիտարկենք մի պարզագույն դեպք, երբ Ω բազմությունը վերջավոր է և բաղկացած է անհամատեղելի և հավասարահնարավոր տարրական պատահարներից:

Դիտողություն 1. Այստեղ պատահարների հավասարահնարավորությունը ամենայն խորությամբ հնարավոր չէ սահմանել, բայց այնուամենայնիվ կարելի է ներըմբռնել գաղափարի իմաստը հետևյալ ձևով՝

A,B,C… պատահարները տվյալ փորձում հավասարահնարավոր են, եթե հիմք չկա պնդելու, որ դրանցից մեկի հանդես գալը գերադասելի է, քան մյուսներինը: Օրինակ, եթե միատեսակ դետալներից բաղկացած խմբից պատահական վերցնենք մի դետալ, ապա յուրաքանչյուր դետալի երևան գալը հավասարահնարավոր է: Պարզ է, որ եթե դետալները միատեսակ չլինեին և իրանից տարբեր դետալների քանակները լինեին տարբեր, ապա յուրաքանչյուր դետալի երևան գալը հավասարահնարավոր չէր լինի:

Ենթադրենք՝ տվյալ փորձում $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_k, \omega_{k+1} \ldots \omega_n\}$, որտեղ $\omega_i, i=\overline{1,n}$ տարրական պատահարներ են, որոնք հավասարահնարավոր են, զույգ առ զույգ անհամատեղելի $(\omega_i \cap \omega_j = \varnothing, i \neq j)$ և կազմում են պատահարների լրիվ խումբ: ω_i, $i=\overline{1,n}$ տարրական պատահարները կրճատ անվանենք փորձի տարրական ելքեր:

Դիցուք, փորձի որևէ k թվով տարրական ելքեր, օրինակ, $\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_k}$ ներկայացնում են որևէ A պատահարի մասնավոր դեպքերը, այսինքն՝ $\omega_{i_1} \subseteq A$, $\omega_{i_2} \subseteq A$, $\ldots, \omega_{i_k} \subseteq A$:

Այլ կերպ ասած $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \ldots, \omega_{i_k}\}$:

$\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_k}$ տարրական ելքերը A պատահարի համար անվանենք նպաստավոր: Ակնհայտ է, որ տվյալ դեպքում A պատահարն ունի K թվով նպաստավոր ելքեր:

A պատահարի հավանականությունը նշանակենք P(A)-ով: Յաշվի առնելով Ω-ին վերաբերող պայմանները՝սահմանենք A պատահարի հավանականությունը:

Սահմանում (դասական սահմանում). A պատահարի հավանականությունը տվյալ փորձում հավասար է պատահարի համար նպաստավոր տարրական ելքերի թվի և տվյալ փորձի բոլոր տարրական ելքերի թվի հարաբերությանը՝ $P(A)=\frac{K}{n}$:

Նշենք այս սահմանումից հետևող պատահարի հավանականության մի քանի հատկություններ՝

1. $P(\Omega)=1$
2. $P(\varnothing)=0$
3. Եթե $A\subseteq B \Rightarrow P(A)\le P(B)$
4. $0\le P(A)\le 1$, ցանկացած A պատահարի համար:
5. Եթե $A=B \Rightarrow P(A)=P(B)$(հակառակը ոչ միշտ է ճիշտ):
6. *Յավանականությունների գումարման թեորեմ՝զույգ առ զույգ անհամատեղելի պատահարների համար.*

Դիցուք, $A_1,\dots,A_n$ պատահարները զույգ առ զույգ անհամատեղելի են ($A_i \cap A_j=\varnothing, i\neq j$), այդ դեպքում տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը՝

$$P(A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\dots+P(A_n)$$

Յավասարությունը նշանակում է, որ զույգ առ զույգ անհամատեղելի պատահարներից գոնե մեկի հանդես գալու հավանականությունը հավասար է այդ պատահարների հավանականությունների գումարին:

7. *Յավանականությունների գումարման թեորեմ՝ցանկացած պատահարների համար.*

Դիցուք ունենք $A_1,\dots,A_n$ պատահարները: Այս պատահարներից գոնե մեկի հանդես գալու հավանականությունը կարելի է հաշվել հետևյալ բանաձևով՝

$$P(A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{i<j}P(A_i\cap A_j)+$$
$$+\sum_{i<j<k}P(A_i\cap A_j\cap A_k)-\dots+(-1)^{n-1}P(A_1\cap\dots\cap A_n):$$

Մասնավոր դեպքում, երբ n=2, բանաձևը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1\cap A_2):$$

8. Եթե $A_1,\dots,A_n$ պատահարները զույգ առ զույգ անհամատեղելի են և լրիվ խումբ են կազմում, ապա՝

$$P(A_1)+P(A_2)+\dots+P(A_n)=1:$$

Սա հետևում է 6-րդ հատկությունից, իսկ այս հատկությունից հետևում է, որ հակադիր պատահարների համար տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը՝

$$P(A)+P(\overline{A})=1:$$

Այժմ սահմանենք պատահարի հավանականությունը՝մեղմացնելով սահմանափակումները Ω տարածության վրա:

Ենթադրենք՝ Ω -ն վերջավոր կամ հաշվելի բազմություն է:

Սահմանում. Տարրական պատահարների հավանականությունները տրված են, եթե Ω բազմության վրա տրված է ոչ բացասական P թվային ֆունկցիա, այնպիսին, որ $\sum_{\omega\in\Omega}P(\omega)=1$:

Սահմանում. A պատահարի հավանականություն անվանում են հետևյալ P(A) թիվը՝ $P(A)=\sum_{\omega\in A}P(\omega)$:

Դիտողություն. Յավանականության վերջին սահմանումը դասական սահմանման համեմատ ավելի ընդհանրական է: Այստեղ չի պարտադրված, որ բոլոր $P(\omega)$ հավանականությունները լինեն իրար հավասար, ինչպես նաև, ի տարբերություն դասական սահմանման, գործում է նաև այն դեպքերում, երբ փորձի տարրական ելքերի բազմությունը անվերջ հաշվելի բազմություն է: Սակայն այս սահմանումն ունի մի շատ մեծ թերություն. հավանականության սահմանումը չի գործում, երբ Ω-ն անվերջ ոչ հաշվելի բազմություն է, օրինակ (0,1) միջակայքը: Այս դեպքի համար կիրառվում է հավանականության Կոլմոգորովի աքսիոմատիկ՝ հավանականության ամենաընդհանուր համարվող սահմանումը: Այդ սահմանումը ընկալելու համար անհրաժեշտ է ծանոթ լինել բարձրագույն հանրահաշվից որոշակի նախնական հասկացությունների: Այս պատճառով, չենք ներկայացնում հիշյալ սահմանումը, իսկ ցանկացողները այն կարող են գտնել, օրինակ (Боровков А. А Теория вероятностей, 1986, гл.4.,) գրքում:

Ըստ վերջին սահմանման՝պատահարի հավանականության բոլոր 1-8 հատկությունները տեղի ունեն: Բացի այդ, տեղի ունի նաև հետևյալ հատկությունը:

9. Դիցուք, $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ պատահարները զույգ առ զույգ անհամատեղելի են, այդ դեպքում կիրառելի է հետևյալ հավասարությունը՝

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i):$$

Այս հատկությունը 6-րդ հատկության ընդհանրացումն է. այստեղ պատահարները վերջավոր չեն:

1.3. Միացությունների տեսության տարրերը

Հավանականությունների դասական սահմանումը կիրառելու համար անհրաժեշտություն է առաջանում գտնել փորձի բոլոր տարրական ելքերի և պատահարի նպաստավոր ելքերի թիվը:

Այս թվերը միշտ հեշտությամբ չեն գտնվում: Դրա համար կիրառվում է միացությունների տեսությունը:

Ենթադրենք՝ A-բազմությունը վերջավոր է: A-բազմության տարրերի քանակը նշանակենք n(A)-ով:

Օրինակ, եթե M{0,1,2, …9}, ապա n(M)=10:

Թեորեմ. Չհատվող A և B վերջավոր բազմությունների միավորման տարրերի քանակը հավասար է դրանց տարրերի քանակների գումարին՝

եթե $A \cap B = \varnothing$, ապա $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$:

Սահմանում. Կամայական A և B բազմությունների համար Դեկարտյան արտադրյալ՝$A \times B$ ասելով հասկանում ենք բոլոր հնարավոր (a,b) զույգերի բազմությունը, որտեղ $a \in A; b \in B$:

Ավելի կարճ՝$A \times B = \{(a,b): a \in A, b \in B\}$:

Օրինակ 1. Եթե A={a,b},B={x,y,z}, ապա

$A \times A = \{(a,a); (a,b); (b,a); (b,b)\}$

$A \times B = \{(a,x); (a,y); (a,z); (b,x); (b,y); (b,z)\}$:

Օրինակ 2. Պարի խմբակում կան երկու տղաներ՝Բագրատն ու Դավիթը և երեք աղջիկ՝Արմինեն, Մարիամն ու Նունեն: Գտնենք, թե քանի՞ տարբերակով է հնարավոր նրանցից կազմել պարազույգ (մեկ տղա և մեկ աղջիկ):

Քանի որ խմբակում կա երեք աղջիկ, ուրեմն պարազույգերը, որոնց մասնակիցը կարող է լինել Բագրատը, երեքն են (նշվում են անունների սկզբնատառերը)՝

(Բ, Ա), (Բ, Մ), (Բ, Ն):

Դավիթի մասնակցությամբ կազմվող պարազույգերը ևս երեքն են՝

(Դ, Ա), Դ, Մ), (Դ, Ն):

Հետևաբար, հնարավոր պարազույգերի քանակը կլինի՝$2 \times 3 = 6$: Եթե A-ով նշանակենք խմբակի տղաների բազմությունը՝A={Բ, Դ}, իսկ B-ով՝աղջիկներինը՝B={Ա, Մ, Ն}, ապա $A \times B$ բազմությունը կլինի պարազույգերի բազմությունը, և ինչպես տեսանք.

$$n(AxB)=n(A)\cdot n(B) \quad (1.1)$$

Կարելի է ցույց տալ, որ (1.1) բանաձևը ճիշտ է կամայական A և B վերջավոր բազմությունների համար:

Սահմանում. A_1, A_2, …, A_k բազմությունների Դեկարտյան արտադրյալ՝ $A_1xA_2x \ldots xA_k$ կոչվում է այն $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ հավաքածուների բազմությունը, որոնց համար $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_k \in A_k$:

K թիվը կոչվում է $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ հավաքածուի երկարություն, իսկ a_m-ը՝ հավաքածուի m-րդ կոորդինատ $(m=\overline{1,k})$:

Թեորեմ. Կամայական $A_1, A_2, \ldots, A_k$ վերջավոր բազմությունների համար՝

$$n(A_1xA_2x \ldots xA_k)=n(A_1)n(A_2) \ldots n(A_k) \quad (1.2)$$

Մասնավորապես, եթե բոլոր A_k բազմությունները համընկնում են, ապա նշանակելով $A^K=\underbrace{A\times A\times\cdots\times A}_{K}$, կունենանք.

$$n(A_k)=(n(A))^k:$$

Օրինակ 3. Գտնենք այն եռանիշ թվերի քանակը, որոնք չեն պարունակում կենտ թվանշաններ: Նշանակենք A={2,4,6,8,}, B={0,2,4,6,8}:

Քանի որ թվի առաջին թվանիշը չի կարող լինել 0, ուստի նշված թվերն ունեն հետևյալ տեսքը՝

$\overline{X_1X_2X_3}$, որտեղ $X_1 \in A$, $X_2 \in B$, $X_3 \in B$:

Այսպիսով, այդ թվերի բազմությունը կարելի է ներկայացնել AxBxB դեկարտյան արտադրյալի տեսքով, ուստի դրանց քանակը կարելի է հաշվել (1.2) բանաձևի միջոցով՝

$$n(AxBxB)=n(A)\cdot(n(B))^2=4\cdot5^2=100$$

Սահմանում. *n* տարր պարունակող բազմության k տարբեր տարրերից կազմված հավաքածուները կոչվում են n տարրից k- ական կարգավորություններ:

n տարրից k-ական կարգավորությունների քանակը նշանակում են՝ A_n^k:

Այստեղ k=0,1,2, …,n, ընդ որում, 0 տարրից կազմված կարգավորություն ընդունված է համարել դատարկ բազմությունը, ուստի $A_n^0=1$: Կարելի է ցույց տալ, որ A_n^k-ն հնարավոր է հաշվել հետևյալ բանաձևով՝

$A_n^k=\dfrac{n!}{(n-k)\,!}$, որտեղ՝ $n!=1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot n$, իսկ 0 ! - ընդունված է համարել 1:

Օրինակ 4. Գտնենք երեք թվանշան ունեցող հեռախոսի համարների քանակը:

Քանի որ թվանշանների քանակը 10 է, ապա հեռախոսի համարների քանակը հավասար կլինի՝

$$A_{10}^3=\frac{10!}{(10-3)!}=\frac{10!}{7!}=10\cdot9\cdot8=720:$$

Սահմանում. n-տարր պարունակող բազմության n-ական կարգավորություններն անվանում են տեղափոխություններ n տարրից:

n-տարրից տեղափոխությունների քանակը նշանակում են P_n: Այն կարելի է հաշվել հետևյալ բանաձևով՝ $P_n=n!$:

Օրինակ 5. Գտնենք, թե գրադարակում 5 գիրքը քանի տարբերակով կարելի է դասավորել:

Մենք պետք է գտնենք 5 տարր պարունակող 5-ական կարգավորությունների թիվը, այսինքն՝ 5 տարրից կազմված տեղափոխությունների քանակը՝ $P_5=5!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5=120$:

Սահմանում. n տարր պարունակող բազմության k տարրից կազմված ենթաբազմությունները կոչվում են n տարրից k -ական զուգորդություններ:

n տարրից k-ական զուգորդությունների քանակը նշանակում են C_n^k:

Զուգորդությունների թիվը կարելի է հաշվել հետևյալ բանաձևով՝

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}:$$

Օրինակ 6. Դիցուք, ունենք մի բազմություն, որը պարունակում է N թվով որևէ տեսակի համասեռ առարկաներ, ընդ որում՝M առարկաներ օժտված են A հատկանիշով, իսկ մնացած N-M=L առարկաներն այդ հատկանիշով օժտված չեն:

Այդ բազմությունից վերցվում է այնպիսի n առարկաներ պարունակող ենթաբազմություն, որի մեջ m առարկաներ օժտված են A հատկանիշով: Գտնենք նկարագրված n-յակների քանակը:

Քանի որ n-յակում m առարկաներ օժտված են A հատկությամբ, ուստի $n-m=\ell$ առարկաներ օժտված չեն: Այստեղից հետևում է, որ նման հատկությամբ n-յակների թիվը հավասար կլինի՝ $C_M^m \cdot C_L^\ell$ արտադրյալի:

1.4. Հավանականությունների դասական սահմանման որոշ կիրառություններ

Այս պարագրաֆում կդիտարկենք,կոնկրետ պատահարի հավանականության հաշվումը՝կիրառելով հավանականությունների դասական սահմանումը, հավանականությունների գումարման թեորեմներն ու հատկությունները, ինչպես նաև միացությունների տեսության տարրերը:

Խնդիր 1. Ծրարում եղած 100 լուսանկարների մեջ է փնտրվող նկարը: Ծրարից պատահական հանված է 10 նկար: Գտնել հավանականությունը, որ դրանց մեջ կլինի փնտրվող նկարը:

Լուծում. Այստեղ փորձը 100 լուսանկարներից 10 նկարի պատահական ընտրությունն է: Փորձի բոլոր տարրական ելքերի թիվը հավասար կլինի C_{100}^{10} -ի: Մեզ հետաքրքրող պատահարը նշանակենք A-ով, այսինքն՝ 10 նկարների մեջ կլինի փնտրվող նկարը: Հաշվենք A պատահարի համար նպաստավոր տարրական ելքերի թիվը: Եթե 10-ից մեկը փնտրվող նկարն է, ապա մնացած 9-ում չէ փնտրվող նկարը, ուստի նպաստավոր տարրական ելքերի քանակը կլինի C_{99}^9: Այստեղից հետևում է, որ՝

$$P(A) = \frac{C_{99}^9}{C_{100}^{10}} = \frac{\dfrac{99!}{9!(99-9)!}}{\dfrac{100!}{10!(100-10)!}} = \frac{10!\cdot 90!}{9!\cdot 90!\cdot 100} = 0{,}1$$

Խնդիր 2. Խմբում կա 12 ուսանող, որոնցից 8-ը տիրապետում է օտար լեզվի: Ըստ ցուցակի պատահական ընտրված է 9 ուսանող: Գտնել հավանականությունը, որ նրանց մեջ կա օտար լեզվի իմացությամբ 5 ուսանող:

Լուծում. Պատահարի նպաստավոր տարրական ելքերի քանակը գտնելու համար կարելի է օգտվել նախորդ պարագրաֆի օրինակ 6-ից՝ n-ի փոխարեն տեղադրելով 8, m-ի փոխարեն 5, L-ի փոխարեն՝ 4 և ℓ-ի փոխարեն 4:

Կունենանք $C_8^5 \cdot C_4^4 = \frac{8!}{5!3!} = \frac{6\cdot 7\cdot 8}{2\cdot 3} = 56$:

Փորձի բոլոր տարրական ելքերի քանակը կլինի՝

$$C_{12}^9 = \frac{12!}{9!\cdot 3!} = \frac{10\cdot 11\cdot 12}{2\cdot 3} = 220$$

Որոնելի հավանականությունը հավասար կլինի՝

$$P = \frac{56}{220} = \frac{14}{55}:$$

Խնդիր 3. Քսան տոմսերից, որոնց համարներն են 1, 2, 3,... ...20 պատահական վերցվել է մեկ տոմս: Որոշել.

ա) վերցված տոմսի համարի՝3-ի կամ 7-ի վրա բաժանվելու հավանականությունը,

բ) վերցված տոմսի համարի՝3-ի կամ 4-ի բաժանվելու հավանականությունը:

Լուծում: ա) Այն պատահարները, որոնց դեպքում վերցված տոմսի համարը կբաժանվի 3-ի և 7-ի, նշանակենք A և B: Ակնհայտ է, որ փորձի պայմաններում, եթե վերցված տոմսի համարը բաժանվում է 3-ի, ապա չի բաժանվի 7-ի: Ճիշտ է նաև հակառակը: Կիրառենք հավանականությունների գումարման թեորեմը A և B անհամատեղելի պատահարների համար՝

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B):$$

Այստեղ A պատահարի համար նպաստավոր տարրական ելքերն են {3,6,9,12,15,18}՝ 6 հատ, իսկ B-ի համար {7,14}՝ 2 հատ, իսկ փորձի բոլոր տարրական ելքերի թիվը 20 է:

Այսպիսով, որոնելի հավանականությունը հավասար կլինի՝

$$P(A \cup B) = \frac{6}{20} + \frac{2}{20} = \frac{8}{20} = 0{,}4$$

բ) Այս դեպքում ևս նշանակենք A և C այն պատահարները, որոնց դեպքում վերցված տոմսի համարը բաժանվում է 3-ի և 4-ի: Պարզ է, որ գոյություն ունի այնպիսի տոմս՝ (օրինակ 12 համարի տոմսը), որի համարը բաժանվում է ինչպես 3-ի, այնպես էլ 4-ի, ուստի այս դեպքում A և C պատահարները անհամատեղելի չեն: P(AUC) հավանականությունը գտնելու համար կիրառենք հավանականությունների գումարման թեորեմը կամայական պատահարների համար՝

$$P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C),$$

Պարզ է, որ

$$P(A) = \frac{6}{20}, P(C) = \frac{5}{20}, P(A \cap C) = \frac{1}{20}:$$

Այստեղից հետևում է, որ $P(A \cup C) = \frac{6}{20} + \frac{5}{20} - \frac{1}{20} = \frac{1}{2};$

1.5. Հավանականության վիճակագրական սահմանումը

1.3 պարագրաֆում տրված հավանականության սահմանումների միջոցով հաճախ հնարավոր չէ գտնել պատահարի հավանականությունը, քանի որ, նշված սահմանումներում կան փորձի տարրական ելքերի սահմանափակումներ, որոնք միշտ չէ, որ տեղի են ունենում: Նման դեպքերում տվյալ փորձի հետ կապված պատահարի հավանականությունը որոշելիս հիմնվում են նույն փորձի նախորդ կատարումների արդյունքների վրա՝պահպանելով փորձի կատարման պայմանները: Ենթադրենք նույն պայմաններում կատարված n փորձերում մեզ հետաքրքրող A պատահարը իրականացել է m անգամ: Այդ դեպքում $\frac{m}{n}$ հարաբերությունը կոչվում է n փորձերի ընթացքում A պատահարի հանդես գալու հաճախություն: Նշենք հաճախության մի քանի հատկություններ՝

1. $\frac{m}{n} \geq 0$

2. Հավաստի պատահարի հաճախությունը հավասար է 1-ի: $(m = n)$

3. Եթե A և B պատահարները անհամատեղելի են և A պատահարի հաճախությունը $\frac{m_1}{n}$ է, իսկ B պատահարինը՝ $\frac{m_2}{n}$, ապա AUB-ի հաճախությունը հավասար կլինի A և B պատահարների հաճախությունների գումարին՝ $\frac{m_1+m_2}{n}$:

Մեծ թվով փորձերից բաղկացած հաջորդականություններում, որոնք կատարվում են միևնույն պայմաններում, A պատահարի հանդես գալու հաճախությունը գրեթե չի փոփոխվում. որքան մեծ է փորձերի n թիվը յուրաքանչյուր հաջորդականությունում, այնքան ավելի փոքր են հաճախության արժեքների շեղումները:

Ասվածը հաստատված է բազմաթիվ փորձերով. Դրանցից կարելի է նշել նորածինների սեռի որոշման նպատակով տարբեր երկրներում կատարված փորձերը: Պատահարի հաճախությունները դրսևորվել են այնպես, ինչպես նկարագրված է վերում: Հայտնի է Բյուֆոնի փորձը: Մետաղադրամը 4040 անգամ նետելով պարզել է, որ «գերբը» պատկերող կողմի վրա մետաղադրամի ընկնելու հաճախությունը 0,5080 է, այսինքն՝ստացվել է մի թիվ, որը շատ մոտ է «գերբի» վրա ընկնելու պատահարի հավանականությանը և այլն: Հիմնվելով հետևյալ երկու հանգամանքների վրա կարելի է եզրահանգել.

1. մեծ թվով փորձերից բաղկացած հաջորդականություններում, հաճախությունը պահպանում է համարյա միևնույն արժեքը,

2. երբ հնարավոր է լինում հաշվել պատահարի հավանականությունը մեծ թվով փորձերի ժամանակ ստացված հաճախությունը, փորձերի թիվը մեծացնելիս, տատանվում է գտնված հավանականության շուրջը:

Ասվածը հիմք է տալիս ենթադրելու, որ քննարկվող A պատահարի համար գոյություն ունի այնպիսի հաստատուն մեծություն, որի շուրջը տատանվում է դրա հաճախությունը: Այսպիսով, կարելի է տալ A պատահարի հավանականության վիճակագրական սահմանումը:

Սահմանում A պատահարի հավանականությունը այն հաստատուն մեծությունն է, որի շուրջը տատանվում է պատահարի հաճախությունը միևնույն պայմաններում կատարված մեծ թվով փորձերից բաղկացած տարբեր սերիաներում:

Դիտողություն 1. Սահմանման մեջ նշված հաստատուն մեծության գոյությունը և միակությունը հետևում է Բեռնուլիի թեորեմից, որը կտրվի հետագայում:

Դիտողություն 2. Ըստ նշված սահմանման՝անհնար է ճշգրիտ որոշել պատահարի հավանականությունը: Սակայն այդ հավանականության համար կարելի է գտնել բավականաչափ մոտ արժեք, որն այնքան ավելի մոտ կլինի ճիշտ արժեքին, որքան մեծ է կատարված փորձերի թիվը:

1.6. Պատահարի պայմանական հավանականությունը և հավանականությունների բազմապատկման թեորեմը

Սահմանում. A պատահարի պայմանական հավանականությունը B պատահարի իրականացման պայմանով, A պատահարի հավանականությունն է այն պայմանով, որ տեղի է ունեցել B պատահարը:

A պատահարի պայմանական հավանականությունը՝B պատահարի իրականացման պայմանով նշանակենք $P_B(A)$ կամ $P(A\backslash B)$:

Ցույց տանք, որ $P(A)$ և $P_B(A)$ հավանականությունները տարբեր են ընդհանրապես:

Օրինակ. Ենթադրենք՝նետված է երկու զառ: Գտնենք հավանականությունը այն պատահարի, երբ զառերի վրա հայտնված նիշերի գումարը 3 է, ինչպես նաև նշված պատահարի պայմանական հավանականությունը՝առաջին զառի վրա 1 հայտնվելու պայմանով:

Լուծում. A-ով նշանակենք նշված պատահարը, X-ով՝առաջին զառի վրա հայտնված թիվը, Y-ով՝երկրորդ զառի վրա հայտնված թիվը, B-ով՝առաջին զառի վրա 1 բացվելու պատահարը: Այս նշանակումների դեպքում՝

$$P(A)=P(X+Y=3)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$$

$$P_B(A)=P_{x=1}(X+Y=3)=\frac{1}{6};$$

Ավելի մանրամասն նկարագրենք վերջին հավանականության ստացումը: Քանի որ առաջին զառի վրա, ըստ պայմանի, արդեն հայտնվել է 1-ը, ուստի փորձի տարրական ելքերի թիվը 36-ից փոքրացել և դարձել է 6, իսկ նպաստավոր ելքերի թիվը դարձել է մեկը, այն է՝ y=2: Այսպիսով, ըստ հավանականության դասական սահմանման՝պայմանական հավանականությունը հավասար է 1/6:

Ինչպես տեսնում ենք, $P(A)\neq P_B(A)$: Իհարկե, ստացվածը չի նշանակում, որ P(A) և $P_B(A)$ հավանականությունները չեն կարող լինել իրար հավասար:

Սահմանում. A և B պատահարները կոչվում են անկախ, եթե դրանցից յուրաքանչյուրի հավանականությունը կախված չէ, այն հանգամանքից՝մյուս պատահարը տեղի է ունեցել, թե՝ոչ: Սահմանումից հետևում է, որ

$$P_B(A)=P(A),\ P_{\bar{B}}(A)=P(A),\quad P_A(B)=P(B)\quad ,P_{\bar{A}}(B)=P(B):$$

Գոյություն ունի A և B պատահարների անկախության՝վերևում բերված սահմանմանը համարժեք սահմանում (դա կարելի է ապացուցել): Տանք այդ սահմանումը՝

Սահմանում. A և B պատահարները կոչվում են անկախ, եթե տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը՝

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B):$$

Օրինակ. Ենթադրենք՝A պատահարը իրենից ներկայացնում է մետաղադրամի սիմետրիկ երկու նետումներից առաջինի դեպքում «գերբ» ընկնելը, իսկ B-ն՝երկրորդ նետման ժամանակ «գիր» ընկնելը: Ցույց տանք, որ A և B պատահարներն անկախ են:

Նախ A∩B պատահարի համար նպաստավոր ելքերի թիվը հավասար է 1-ի, իսկ փորձի բոլոր տարրական ելքերի թիվը հավասար է 4-ի, ուստի $P(A\cap B)=\frac{1}{4}$: Պարզ է, որ $P(A)=\frac{1}{2};P(B)=\frac{1}{2}$:

Այստեղից հետևում է, որ $P(A\cap B)=\frac{1}{4}=P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$, ուրեմն A և B պատահարներն անկախ են:

Կարելի է ցույց տալ, որ եթե A և B պատահարները անկախ են, ապա անկախ կլինեն նաև $\bar{A}$ և B, A և $\bar{B}$, $\bar{A}$ և $\bar{B}$ պատահարները:

Բազմապատկման թեորեմ. Երկու պատահարների համատեղ տեղի ունենալու հավանականությունը հավասար է՝պատահարներից մեկի հավանականությունը բազմապատկած մյուս պատահարի պայմանական հավանականությամբ՝առաջին պատահարի տեղի ունենալու պայմանով, այսինքն՝

$$P(A\cap B)=P(A)P_A(B)=P(B)\cdot P_B(A) \qquad (1.3)$$

Մասնավոր դեպքում, երբ A և B պատահարներն անկախ են, ապա (1.3) հավասարությունը ընդունում է հետևյալ տեսքը՝

$$P(A\cap B)=P(A)(B):$$

Ձևակերպված բազմապատկման թեորեմը կարելի է ընդհանրացնել երկուսից ավելի պատահարների համար՝

Թեորեմ. A_1, A_2, ⋯, A_n պատահարների համար տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը.

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \cdots \cdots P_{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n) \quad (1.4)$$

Սահմանում. A_1, A_2, · · ·, A_n պատահարները կոչվում են համախմբության մեջ անկախ, եթե դրանցից յուրաքանչյուրի մնացած պատահարներից ցանկացած խմբի իրականացման պայմանով, հավասար է այդ պատահարի ոչ պայմանական հավանականությանը, այսինքն՝

$$P_{A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_j}}(A_i) = P(A_i), \quad i = \overline{1,n}$$

Սահմանումից հետևում է, որ եթե A_1,A_2, ⋯,A_n պատահարները անկախ են համախմբության մեջ, ապա տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը՝

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdots P(A_n):$$

Կարելի է ցույց տալ, որ համախմբության մեջ պատահարների անկախության սահմանմանը համարժեք է հետևյալ սահմանումը՝

Սահմանում. A_1, A_2, ⋯, A_n պատահարները կոչվում են համախմբության մեջ անկախ, եթե կամայական i_1, i_2, ⋯, i_j բնական թվերի համար՝ $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_j \le n, \quad j = 1,2,3,\cdots,n$ տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը՝

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_j}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_j}):$$

Սահմանումից հետևում է, որ եթե A_1, A_2, ⋯, A_n պատահարները անկախ են համախմբության մեջ, ապա դրանք զույգ առ զույգ անկախ են:

Պետք է հատուկ նշել, որ հակառակը ոչ միշտ է ճիշտ, այսինքն՝ պատահարների զույգ առ զույգ անկախությունից չի հետևում համախմբության մեջ դրանց անկախությունը: Այս կապակցությամբ բերենք Բեռնշտեյնի օրինակը:

Օրինակ. Դիտարկենք հետևյալ փորձը: Դիցուք, հարթության վրա նետվում է կանոնավոր քառանիստ (տետրաեդր), որի երեք նիստերը համապատասխանաբար ներկված են կարմիր, կապույտ և կանաչ, իսկ չորրորդ նիստը ներկված է նշված երեք գույներով:

A-ով նշանակենք այն պատահարը, որի դեպքում, նետելուց հետո, դիմակողմը կլինի կարմիր գույնով ներկված նիստը, B-ով՝ երբ դիմակողմը կապույտ նիստն է և C-ով՝ երբ կանաչ նիստն է: Պարզ է, որ

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A)P(B),$$

$$P(A \cap C) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A)P(C),$$

$$P(B \cap C) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(B)P(C),$$

Այստեղից հետևում է, որ A, B, C պատահարները զույգ առ զույգ անկախ են: Ցույց տանք, որ A, B, C պատահարները համախմբության մեջ անկախ չեն:

Ակնհայտ է, որ

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} \qquad P(A)P(B)P(C) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}:$$

Ինչպես տեսնում ենք $P(A\cap B\cap C)\neq P(A)P(B)P(C)$, ուստի A, B, C պատահարները համախմբության մեջ անկախ չեն:

1.7. Լրիվ հավանականության և Բայեսի բանաձևերը

Թեորեմ. Ենթադրենք՝A-ն որևէ պատահար է, B_1, B_2, $\cdots$, B_n-ը զույգ առ զույգ անհամատեղելի պատահարներ են, որոնք ունեն դրական հավանականություն՝ $P(B_i)>0;\quad i=\overline{1,n}$, և $A\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}B_i$:

Այս պայմանների դեպքում տեղի ունի հետևյալ բանաձևը՝

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)\cdot P_{B_i}(A), \tag{1.5}$$

(1.5) բանաձևն անվանում են լրիվ հավանականության բանաձև, B_1, $\cdots$,B_n պատահարներն անվանում են վարկածներ: Վերջին անվանումը պատահական չէ, քանի որ ըստ թեորեմի պայմանի՝A պատահարը կարող է իրականանալ B_1, $\cdots$,B_n -ից մեկի հետ, այսինքն՝A-ի համար B_1, $\cdots$,B_n պատահարները հանդես են գալիս որպես վարկածներ:

Խնդիր 1. Երկու գնդակ պարունակող սափորի մեջ գցվել է սպիտակ գնդակ, որից հետո այնտեղից պատահական հանվել է մեկ գնդակ: Գտնել հավանականությունը, որ հանված գնդակը կլինի սպիտակ, եթե սափորում նախապես գտնված գնդակների գույնի մասին բոլոր հնարավոր ենթադրությունները հավասարահնարավոր են:

Լուծում. A-ով նշանակենք այն պատահարը, որի դեպքում հանվածը սպիտակ գնդակ է: Հնարավոր են սափորում նախապես եղած գնդակների մասին հետևյալ ենթադրությունները (վարկածները). B_1՝սպիտակ գնդակ չկար, B_2՝մեկ սպիտակ գնդակ կար, B_3՝երկու սպիտակ գնդակ կար: Քանի որ ունենք երեք վարկած, որոնք կազմում են պատահարների լրիվ խումբ և դրանք հավասարահնարավոր են, ուստի՝

$$P(B_1)=P(B_2)=P(B_3)=\frac{1}{3}:$$

Պայմանական հավանականությունը, որ կհանվի սպիտակ գնդակ՝այն պայմանով, որ սկզբում սափորում չի եղել սպիտակ գնդակ.

$$P_{B_1}(A)=\frac{1}{3}:$$

Պայմանական հավանականությունը, որ կհանվի սպիտակ գնդակ՝այն պայմանով, որ սկզբում սափորում կար 1 սպիտակ գնդակ.

$$P_{B_2}(A)=\frac{2}{3}:$$

Պայմանական հավանականությունը, որ կհանվի սպիտակ գնդակ՝այն պայմանով, որ սկզբում կար 2 սպիտակ գնդակ.

$$P_{B_3}(A)=1:$$

Որոնելի հավանականությունը, որ կհանվի սպիտակ գնդակ, կարելի է հաշվել լրիվ հավանականության բանաձևով, քանի որ բավարարված են բանաձևի կիրառելիության համար անհրաժեշտ բոլոր պայմանները (ստուգել ինքնուրույն)՝

$$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P_{B_i}(A)=P(B_1)P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)+$$

$$+P(B_3)\cdot P_{B_3}\cdot(A)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{2}{3}$$

Թեորեմ. Ենթադրենք՝ A և $B_1, B_2, \cdots, B_n$ պատահարները բավարարում են սույն պարագրաֆի նախորդ թեորեմի պայմաններին և, բացի այդ, $P(A)>0$: Այդ դեպքում տեղի ունի հետևյալ բանաձևը (*Բայեսի բանաձև*)՝

$$P_A(B_j)=\frac{P(B_j)P_{B_j}(A)}{\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P_{B_i}(A)}:$$

Խնդիր 2. Հատուկ հիվանդանոց են ընդունվում միջին հաշվով 50% K հիվանդությամբ, 30%՝L հիվանդությամբ 20 %՝M հիվանդությամբ հիվանդներ: K հիվանդությունը լրիվ բուժելու հավանականությունը հավասար է 0,7-ի, L և M հիվանդությունների համար այդ հավանականությունները համապատասխանաբար հավասար են՝0,8-ի և 0,9-ի: Հիվանդանոց ընդունված հիվանդը առողջ է դուրս գրվել: Գտնել հավանականությունը, որ նա հիվանդ էր K հիվանդությամբ:

Լուծում. A-ով նշանակենք այն պատահարը, որի դեպքում հիվանդանոց ընդունված հիվանդը առողջ է դուրս գրվել: B_1, B_2, B_3 նշանակենք այն պատահարները, ըստ որոնց՝համապատասխանաբար հիվանդանոց ընդունված հիվանդը հիվանդ էր K, L, M հիվանդություններով: Մեր նպատակն է գտնել $P_A(B_1)$ հավանականությունը: Հեշտ է ստուգել, որ A, B_1, B_2, B_3 բավարարում են նախորդ թեորեմի պայմանները:

Խնդրի տվյալներից ունենք, որ

$$P(B_1)=\frac{1}{2}, P(B_2)=\frac{3}{10}, P(B_3)=\frac{1}{5}, P_{B_1}(A)=0{,}7; P_{B_2}(A)=0{,}8;$$

$$P_{B_3}(A)=0{,}9:$$

Ստացված հավանականությունները տեղադրելով Բայեսի բանաձևի մեջ, կունենանք.

$$P_A(B_1)=\frac{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A)+P(B_2)P_{B_2}(A)+P(B_3)P_{B_3}(A)}=$$

$$=\frac{0{,}5\cdot 0{,}7}{0{,}5\cdot 0{,}7+0{,}3\cdot 0{,}8+0{,}2\cdot 0{,}9}=\frac{5}{11}:$$

1.8. Երկրաչափական հավանականություններ

Այս պարագրաֆում կքննարկենք այնպիսի փորձ, որի տարրական ելքերի բազմությունը հաշվելիից ավելի բարձր կարգ ունեցող անվերջ բազմություն է: Նկարագրենք փորձը.

Դիցուք, M կետը պատահական նետվում է AB հատվածի վրա, որի երկարությունը հավասար է L-ի:

Սահմանենք, թե ինչի է հավասար AB հատվածի վրա գտնվող ցանկացած CD հատվածի վրա M կետի ընկնելու հավանականությունը:

Կատարենք հետևյալ բնական աքսիոմատիկ ենթադրությունը՝CD հատվածի վրա ընկնելու հավանականությունը ուղիղ համեմատական է այդ հատվածի երկարությանը, և կախված չէ CD-ի դիրքից AB հատվածի վրա, այսինքն՝

$$P(M\in CD)=KX,$$

որտեղ՝X-ը CD հատվածի երկարությունն է, իսկ K-ն հաստատուն մեծություն է: Մասնավոր դեպքում կունենանք՝

$$P(M\in AB)=KL=1,$$

որտեղից՝ $K=\frac{1}{L}$, և հետևաբար՝ $P(M\in CD)=\frac{X}{L}$:

Սահմանում. Այն պատահարի հավանականությունը, որ պատահաբար AB հատվածի վրա նետված կետը կընկնի CD հատվածի վրա, հավասար է CD և AB հատվածների երկարությունների հարաբերությանը:

Այս կերպ սահմանված հավանականությունը կոչվում է երկրաչափական հավանականություն: Հեշտ է ստուգել, որ երկրաչափական հավանականությունը օժտված է հավանականության դասական սահմանման հատկություններով:

Համանման եղանակով կարելի է սահմանել երկրաչափական հավանականությունը հարթության և տարածության մեջ, միայն թե այս դեպքում երկարություն բառը պետք է փոխարինվի համապատասխանաբար՝մակերես և ծավալ բառերով, այսինքն՝եթե կետը պատահական նետվում է հարթության D տիրույթի մեջ, որի մակերեսը գոյություն ունի և հավասար է S_D-ի, իսկ d տիրույթը ընկած է D-ի մեջ, որի մակերեսը հավասար է S_d-ի, ապա հավանականությունը, որ կետը կընկնի d տիրույթի մեջ, հավասար է S_d-ի հարաբերությանը S_D-ի՝

$$P(M\in d)=\frac{S_d}{S_D}:$$

Նույն ձևով G և $g\in G$ մարմինների համար՝

$$P(M\in g)=\frac{V_g}{V_G},$$

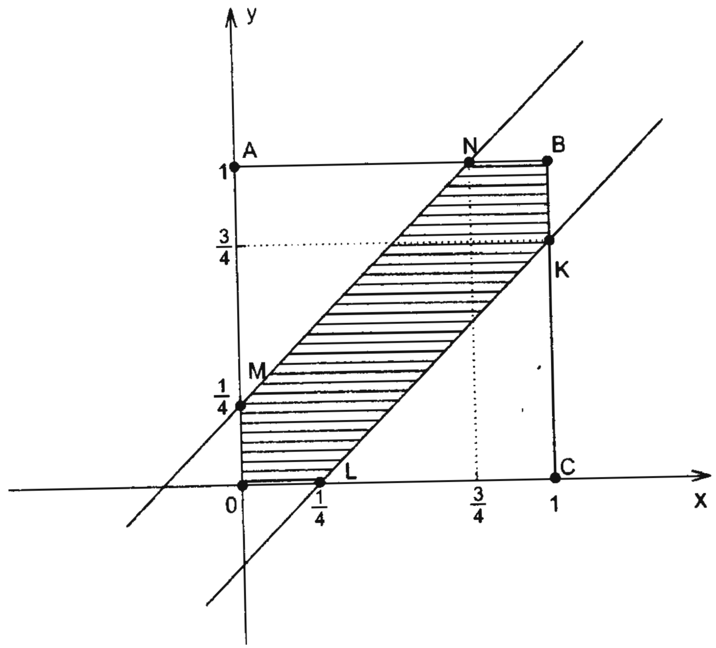
որտեղ՝ V_G և V_g համապատասխանաբար G և g մարմինների ծավալներն են:

Խնդիր.(հանդիպման խնդիր). Երկու ուսանող պայմանավորվել են հանդիպել որոշակի վայրում՝օրվա 12 և 13 ժամերի միջև: Առաջին եկողը սպասում է երկրորդին $\frac{1}{4}$ ժամ, որից հետո հեռանում է: Գտնել հավանականությունը, որ հանդիպումը կկայանա, եթե յուրաքանչյուր ուսանող պատահական է ընտրում իր գալու ակնթարթը 12-ից մինչև 13-ը ժամերի միջակայքում:

Լուծում. Պայմանական ընդունենք, որ ժամը 12-ը 0 ժամն է, իսկ 13-ը՝1-ը: Ենթադրենք՝առաջինը գալիս է X ժամին, երկրորդը՝Y ժամին, ընդ որում՝$0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$: Որպեսզի ուսանողները հանդիպեն, անհրաժեշտ է, որ $|x-y|\le\frac{1}{4}$: Կոորդինատային հարթության վրա.

$$\begin{cases}0\le x\le 1\\0\le y\le 1\end{cases} \text{ և } \begin{cases}0\le x\le 1\\0\le y\le 1\\|x-y|\le\frac{1}{4}\end{cases}$$

պայմանները բավարարող տիրույթները համապատասխանաբար կլինեն՝1 կողմով OABC քառակուսին և OMNBKN - վեցանկյունը (տե՛ս Նկ.1.5):



Նկ. 1.5

Խնդիրը վերաձևակերպենք հետևյալ կերպ: Ենթադրենք՝(x, y) կետը պատահականորեն նետված է OABC քառակուսու մեջ: Գտնել հավանականությունը, որ այն կընկնի OMNBKL վեցանկյան մեջ: Հաշվենք S_{OABC} և S_{OMNBKL}: Քանի որ OABC-ն 1 կողմով քառակուսի է, ապա $S_{OABC}=1$: Նկ.1.5-ից երևում է, որ՝

$$\Delta MAN = \Delta LCK \quad \text{և} \quad S_{\Delta MAN} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{32},$$

այստեղից հետևում է, որ

$$S_{OMNBKL} = S_{OABC} - 2S_{\Delta MAN} = 1 - 2\cdot\frac{9}{32} = \frac{7}{16}:$$

Օգտագործելով երկրաչափական հավանականության սահմանումը՝ հարթության վրա պահանջվող հավանականությունը հավասար կլինի՝

$$P = \frac{S_{OMNBKL}}{S_{OABC}} = \frac{\frac{7}{16}}{1} = \frac{7}{16}:$$

1.9. Գոնե մեկ պատահարի երևալու հավանականությունը

Դիցուք, $A_1, A_2, \cdots, A_n$ պատահարները համախմբության մեջ անկախ են և $P(A_1)=P_1, P(A_2)=P_2, \cdots, P(A_n)=P_n$:

Փորձի արդյունքում կարող են տեղի ունենալ այդ բոլոր պատահարները կամ դրանց մի մասը, կամ ոչ մեկը:

A-ով նշանակենք այն պատահարը, որն իրենից ներկայացնում է $A_1, A_2, ..., A_n$ պատահարներից գոնե մեկի հանդես գալը:

Պարզ է, որ A և $\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \cdots \cap \bar{A}_n$ պատահարները հակադիր պատահարներ են, ուստի՝

$$P(A)+P(\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\cdots\cap\bar{A}_n)=1$$

Կարելի է ցույց տալ, որ, եթե $A_1, A_2, \cdots, A_n$, պատահարները համախմբության մեջ անկախ են, ապա անկախ կլինեն նաև $\bar{A}_1, \bar{A}_2 \cdots, \bar{A}_n$ պատահարները, ուրեմն.

$$P(A)=1-P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)\cdots P(\bar{A}_n)=1-P_1\cdot P_2\cdots P_n:$$

Այսպիսով, ապացուցեցինք հետևյալ թեորեմը՝

Թեորեմ. Համախմբության մեջ անկախ $A_1, A_2, \cdots, A_n$ պատահարներից գոնե մեկի հանդես գալու հավանականությունը հավասար է 1-ի և $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \cdots, \bar{A}_n$ պատահարների հավանականությունների արտադրյալի տարբերությանը:

Խնդիր. Կամրջի քանդվելու համար բավական է մեկ ավիացիոն ռումբ: Գտնել հավանականությունը, որ կամուրջը կքանդվի, եթե դրա վրա, իրարից անկախ, գցվեր 4 ռումբեր, որոնց՝կամրջին դիպչելու հավանականությունները համապատասխանաբար հավասար են՝0,3; 0,4; 0,6; 0,7:

Լուծում. Ըստ խնդրի պայմանի՝կամուրջը կքանդվի, եթե 4 ռումբերից գոնե մեկը դիպչի կամրջին: Պատահարները նշանակենք A_1, A_2, A_3 և A_4, որոնք համապատասխանաբար իրենցից ներկայացնում են առաջին, երկրորդ, երրորդ և չորրորդ ռումբերի դիպչելը կամրջին: Մեր խնդիրն է գտնել դրանցից գոնե մեկի՝կամրջին դիպչելու հավանականությունը: Նշված հավանականությունը, ըստ վերևում ասվածի, հավասար կլինի՝

$$1-P(\bar{A}_1)\cdot P(\bar{A}_2)\cdot P(\bar{A}_3)\cdot P(\bar{A}_4)=$$

$$=1-(1-0,3)(1-0,4)(1-0.6)(1-0,7)=1-0,7\cdot 0,6\cdot 0,4\cdot 0,3=0,9496$$

1.10. Բեռնուլիի փորձերը

Սահմանում. Փորձերը կոչվում են անկախ, եթե, կամայական փորձի ելքի հավանականությունը կախված չէ մյուս փորձերում հանդես եկող ելքերից:

Օրինակ. Մետաղադրամը n անգամ նետված է կամ զառը n անգամ նետված է:

Դիտարկենք $G_1, G_2, \cdots, G_n$ անկախ փորձերը, որոնցից յուրաքանչյուրն ունի երկու ելք՝ A կամ $\overline{A}$: Ենթադրենք՝ $P(A)=P$, $P(\overline{A})=q$, որտեղ q=1-P: Պահանջվում է որոշել այդ n անկախ փորձերում A պատահարի m անգամ տեղի ունենալու հավանականությունը: Եթե այդ հավանականությունը նշանակենք $P_n(m)$-ով, ապա կարող ենք կիրառել հետևյալ բանաձևը՝

$$P_n(m)=C_n^m P^m q^{n-m}, \tag{1.6}$$

որն անվանում են Բեռնուլիի բանաձև:

Այս բանաձևի միջոցով որոշվում է A պատահարի երևումների ամենահավանական թիվը: Պարզաբանենք, թե ի՞նչ ենք հասկանում պատահարի երևումների ամենահավանական թիվ ասելով:

Դիտարկված փորձերի ժամանակ A պատահարը կարող է հանդես գալ m անգամ, և m-ը կարող է ընդունել 0, 1, 2, ⋯,n արժեքներից որևէ մեկը, ընդ որում յուրաքանչյուրը որոշակի հավանականությամբ, որը որոշվում է (1.6) բանաձևով: Պատահարի երևումների այն թիվը, որին համապատասխանում է ամենամեծ հավանականությաունը կոչվում է պատահարի երևումների ամենահավանական թիվ:

Եթե (np-q)-ն ամբողջ թիվ է, ապա գոյություն ունեն երկու ամենահավանական թվեր, դրանք են՝np-q և np+p (ակնհայտ է որ

վերջինս ամբողջ թիվ է), եթե np-q-ն ամբողջ չէ, ապա գոյություն ունի պատահարի երևումների միայն մեկ ամենահավանական թիվ, որը պատկանում է (np-q;np+p) միջակայքին: Պետք է նշել, որ եթե np-q-ն ամբողջ չէ, ապա միջակայքում գոյություն կունենա միակ ամբողջ թիվը, քանի որ np+p-(np-q)=1:

Այժմ դիտարկենք $G_1, G_2, \cdots, G_n$ անկախ փորձեր, որոնցից յուրաքանչյուրն ունի S անհամատեղելի ելքեր՝ $A_1, A_2, \cdots, A_s$, ընդ որում՝ A_k(k=1, 2, ..., S) պատահարի հավանականությունը կախում չունի փորձի համարից և հավասար է P_k-ի՝

$$P(A_k)=P_k, k=1,2,\cdots,S$$

$$P_1+P_2+\cdots+P_S=1:$$

Պահանջվում է որոշել A_1 պատահարի m_1 անգամ, A_2 պատահարի՝m_2 անգամ,⋯A_S պատահարի՝m_s անգամ հանդես գալու հավանականությունը: Այդ հավանականությունը նշանակենք $P_n(m_1, m_2, \cdots, m_S)$: Գտնված է, որ.

$$P_n(m_1,m_2,\cdots,m_S)=\frac{n!}{m_1!m_2!\cdots m_S!}P_1^{m_1}\cdot P_2^{m_2}\cdots P_S^{m_S}: \tag{1.7}$$

Ակնհայտ է, որ (1.7) բանաձևը (1.6)-ի ընդհանրացումն է:

Խնդիրների միջոցով ցույց տանք, թե ինչպես են գործում (1.6) ու (1.7) բանաձևերը և ինչպես կարելի է գտնել պատահարի ամենահավանական թիվը:

Խնդիր 1. Ընտանիքում կա 5 երեխա: Գտնել հավանականությունը, որ նրանցից երկուսը տղա են, գտնել տղաների ամենահավանական թիվը: (Տղա ծնվելու հավանականությունը ընդունել 0,51, աղջիկ ծնվելունը՝0,49):

Լուծում. Որպես A պատահար՝վերցնենք տղա ծնվելը, $\overline{A}$-ը՝ենթադրենք՝աղջիկ ծնվելու պատահարն է: Գտնենք հավանականությունը այն պատահարի, որ 5 անկախ փորձերում (փորձերի անկախությունը ենթադրվում է) A պատահարը հանդես կգա 2 անգամ: Օգտվելով Բերնուլիի բանաձևից կունենանք՝

$$P_5(2)=C_5^2(0{,}51)^2\cdot(0{,}49)^3=\frac{5!}{2!\cdot 3!}(0{,}51)^2\cdot(0{,}49)^3=$$

$$=10\cdot(0{,}51)^2\cdot(0{,}49)^3\approx 0{,}306:$$

Այժմ գտնենք տղաների ամենահավանական թիվը:

$nP-q=5\cdot 0{,}51-0{,}49=2{,}06$ ամբողջ չէ:

$nP\text{-}q=5\cdot 0{,}51+0{,}51=3{,}06$:

Նշանակենք ամենահավանական թիվը m_o, ըստ վերևում ասվածի $m_0\in(nP-q;nP+P)$, այսինքն $m_0\in(2{,}06;3{,}06)$: Ինչպես տեսնում ենք, նշված միջակայքում գոյություն ունի միայն մեկ ամբողջ թիվ՝3-ը, ուստի $m_o=3$:

Խնդիր 2. 5 սպիտակ, 7 սև և 8 կարմիր գնդակներ պարունակող սափորից հանվում են պատահական 6 գնդակներ: Որոշել սպիտակ, սև և կարմիր գնդակների՝ հավասար չափով հանդես գալու հավանականությունը:

Լուծում. Այստեղ $P_1=P(A_1)=P(\text{սպ})=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$,

$P_2=P(A_2)=P(\text{սև})=\frac{7}{20}$; $P_3=P(A_3)=P(\text{կար})=\frac{2}{5}$:

Կիրառելով (1.7) բանաձևը՝ որոնելի հավանականությունը կլինի՝

$$P_6(2,2,2)=\frac{6!}{2!\cdot 2!\cdot 2!}\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{7}{20}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^2=0.11:$$

Ընդհանրապես (1.6) բանաձևով հավանականության հաշվումը դժվարանում է (երբեմն՝ դառնում անհնար), երբ փորձերի n թիվը շատ մեծ է: Այդ պատճառով խիստ օգտակար է դառնում Մուավր-Լապլասի լոկալ սահմանային թեորեմը:

Թեորեմ. Եթե A պատահարի P հավանականությունը n անկախ փորձերում հաստատուն է և տարբեր է զրոյից ու մեկից, ապա տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը՝

$$\lim_{n\to\infty}\left[P_n(m):\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}e^{-\frac{(m-np)^2}{2npq}}\right]=1$$

Թեորեմից հետևում է, որ բավականաչափ մեծ n-ի համար $P_n(m)$-ը կարելի է փոխարինել՝

$$\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}e^{-\frac{(m-np)^2}{2npq}}\right]$$ արտահայտությամբ:

Կատարենք հետևյալ նշանակումները՝ $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$,

$$x=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}:$$

Այս նշանակումներով կունենանք.

$$P_n(m)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x) \qquad (1.8)$$

Նշենք $\varphi(x)$ ֆունկցիայի որոշ հատկությունները՝

1. $\varphi(x)>0$, x-ի բոլոր արժեքների համար,
2. $\varphi(x)$-ը նվազող ֆունկցիա է և $\lim_{x\to\infty}\varphi(x)=0$
3. $\varphi(x)$-ը զույգ ֆունկցիա է՝ $\varphi(-x)=\varphi(x)$:

$\varphi(x)$ ֆունկցիայի արժեքը, երբ տրված է x-ի արժեքը գտնում են աղյուսակից(տե՛ս հավելված III): Եթե x>4, ապա $\varphi(x)$-ը կարելի է ընդունել 0:

Խնդիր 3. Մեկ անգամ կրակելիս թիրախի խոցման հավանականությունը հավասար է 0,8-ի: Գտնել հավանականությունը, որ 100 անգամ կրակելիս թիրախը կխոցվի ուղիղ 75 անգամ:

Լուծում. Քանի որ n-ը մեծ է՝n=100, օգտվենք Մուավր-Լապլասի լոկալ սահմանային թեորեմից՝

$$P_{100}(75) \approx \frac{1}{\sqrt{100pq}}\varphi(x)$$

P=0.8; q=1-0.8=0.2;

$$x=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}=\frac{75-100\cdot 0{,}8}{\sqrt{100\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}=\frac{-5}{4}=-1{,}25$$

$$\varphi(x)=\varphi(-1{,}25)=\varphi(1{,}25)=0{,}1826:$$

Այստեղից հետևում է, որ $P_{100}(75)\approx \frac{1}{4}\cdot 0{,}1826 = 0{,}04565$:

Հաշվի առնելով, որ երբ $n\to\infty$, m-ի արժեքների հավանականությունները ձգտում են զրոյի, ապա մեծ թվով փորձերի ժամանակ A պատահարի m անգամ իրականանալու հավանականությունը լինելով շատ փոքր՝հետաքրքրություն չի ներկայացնում: Ավելի մեծ հետաքրքրություն է ներկայացնում մեծ թվով փորձերի ժամանակ A պատահարի հանդես գալու m թվի՝որոշ սահմաններում գտնվելու հավանականությունը: Այս առումով իր նշանակալի դեր ունի Մուավր-Լապլասի ինտեգրալային թեորեմը: Արտածենք այն:

Թեորեմ. Եթե n անկախ փորձերում A պատահարի P հավանականությունը հաստատուն է և տարբեր է 0-ից ու մեկից (0<P<1), ապա հավասարաչափ ըստ a-ի և b-ի $(-\infty\le a\le b\le+\infty)$, երբ $n\to\infty$ տեղի ունի՝

$$P\left\{a\le\frac{m-np}{\sqrt{npq}}<b\right\}\to\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{z^2}{2}}dz \qquad (1.9)$$

Կատարենք հետևյալ նշանակումները՝$P_n(K_1, K_2)$-ը հավանականությունն է այն պատահարի, որ n անկախ փորձերում A պատահարը հանդես է եկել K_1-ից ոչ պակաս անգամ և ոչ ավելի, քան K_2 անգամ,

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz:$$

Գտնենք այնպիսի a և b, որ $K_1=a\sqrt{npq}+np$, $K_2=b\sqrt{npq}+np$:

Կունենանք $a=\frac{K_1-np}{\sqrt{npq}}$ և $b=\frac{K_2-np}{\sqrt{npq}}$:

Այս նշանակումներով (1.9)-ը կգրվի հետևյալ տեսքով՝

$$\lim_{n\to\infty}P(K_1\le m<K_2)=\Phi(b)-\Phi(a) \qquad (1.10)$$

Օգտվելով (1.10)-ից՝ ձևակերպենք Մուավր-Լապլասի ինտեգրալային թեորեմի հետևանքը, որն ավելի է հեշտացնում թեորեմի կիրառությունը կոնկրետ խնդիրներ լուծելիս:

Հետևանք. Եթե տեղի ունեն թեորեմի պայմանները, ապա բավականաչափ մեծ n-երի համար.

$P_n(K_1,K_2)\approx\Phi(b)-\Phi(a)$,

որտեղ $a=\frac{K_1-np}{\sqrt{npq}}, b=\frac{K_2-np}{\sqrt{npq}}$:

$\Phi(x)$- ֆունկցիան կոչվում է Լապլասի ֆունկցիա: Նշենք այս ֆունկցիայի որոշ հատկություններ՝

1. $\Phi(0)=0$,
2. $\Phi(x)$-ը աճող ֆունկցիա է,
3. $\lim_{n\to\infty}\Phi(x)=\frac{1}{2}$,

4. $\Phi(x)$-ը կենտ ֆունկցիա է՝ $\Phi(-x) = -\Phi(x)$:

Նկատի ունենալով 3-րդ հատկությունը, գործնականում ընդունված է, որ երբ $x>4$, $\Phi(x)$-ը ընդունում են հավասար $\frac{1}{2}$-ի:

$\Phi(x)$ ֆունկցիայի արժեքները կարելի է գտնել գրքի վերջում ներկայացված աղյուսակից (տես հավելված III):

Խնդիր 4. Պատահարի հանդես գալու հավանականությունը 21 անկախ փորձերից յուրաքանչյուրում 0,7 է: Գտնել հավանականությունը, որ պատահարը հանդես կգա փորձերից մեծամասնությունում:

Լուծում. Մեր խնդիրն է որոշել $P_{21}(11, 21)$, հավանականությունը: Օգտվենք Մուավր-Լապլասի ինտեգրալային թեորեմի հետևանքից: Խնդրի պայմանների դեպքում՝

$$a = \frac{11-21\cdot 0{,}7}{\sqrt{21\cdot 0{,}7\cdot 0{,}3}} \approx -1{,}762$$

$$b = \frac{21-21\cdot 0{,}7}{\sqrt{21\cdot 0{,}7\cdot 0{,}3}} = 3,$$

$$\Phi(-1.762) = -\Phi(1.762) \approx -0.4608$$

$$\Phi(3) \approx 0.49865$$

Այստեղից հետևում է, որ.

$$P_{21}(11;21) \approx 0{,}49865 - (-0{,}4608) = 0{,}95945:$$

Վերջին երկու թեորեմների մեջ ենթադրվում էր, որ A պատահարի P հավանականությունը յուրաքանչյուր փորձում կախում չունի n-ից, սակայն դա միշտ չէ, որ այդպես է: Այժմ դիտարկենք այն դեպքը, երբ P-ն, անկախ մնալով փորձի համարից (փորձերի տվյալ հաջորդականությունում), ձգտում է, զրոյի երբ, փորձերի թիվը ձգտում է անվերջության: Վերջին միտքը ներկայացնենք

ավելի մանրամասն: Ենթադրենք առաջին հաջորդականությունը բաղկացած է n=1 փորձից, այստեղ A պատահարի հանդես գալու հավանականությունը նշանակենք $P_1 = \frac{\lambda}{1}$, երկրորդ հաջորդականությունը բաղկացած է n=2 փորձերից, այս հաջորդականության յուրաքանչյուր փորձում A պատահարի հավանականությունը հաստատուն է, այն նշանակենք P_2 և n-րդ հաջորդականությունը բաղկացած է n փորձերից, յուրաքանչյուր փորձում A պատահարի հավանականությունը նշանակենք $P_n = \frac{\lambda}{n}$ և այլն:

Այստեղ $\lambda > 0$ հաստատուն է: Ինչպես տեսնում ենք, յուրաքանչյուր հաջորդականությունում պատահարի հավանականությունը հաստատուն է, իսկ հաջորդականությունից հաջորդականություն անցնելիս փոփոխվում է, ընդ որում՝ հավանականության տեսքից հետևում է, որ եթե սերիայի փորձերի թիվը անվերջ մեծացնում ենք, ապա այն ձգտում է 0-ի:

Այս դեպքում $P_n(m)$ հավանականությունը որոշելու համար կիրառելի է Պուասոնի թեորեմը:

Պուասոնի թեորեմ. Եթե պատահարի հավանականությունը n անկախ փորձերից բաղկացած հաջորդականության յուրաքանչյուր փորձում նույնն է և հավասար է $\frac{\lambda}{n}(\lambda > 0)$, ապա տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը՝

$$\lim_{n\to\infty} P_n(m) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^m}{m!} \qquad (1.11)$$

Կիրառությունների ժամանակ, երբ փորձերի թիվը բավականաչափ մեծ է, $P_n(m)$ հավանականությունը ընդունված է վերցնել $e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^m}{m!}$ մեծությանը հավասար, այսինքն՝

$$P_n(m) \approx e^{-\lambda}\frac{\lambda^m}{m!}: \qquad (1.12)$$

Խնդիր 7. Դետալներ պատրաստելիս խոտանի միջին տոկոսը տվյալ գործարանում 0,5 % է: Որոշել այն հավանականությունը, որ պատահական վերցված 500 դետալների մեջ խոտան դետալների թիվը չի անցնում 4-ից:

Լուծում. Խնդրի պայմաններից ունենք, որ դետալի խոտան լինելու հավանականությունը հավասար է՝ $P = \frac{0.5}{100} = \frac{1}{200}$, n=500, այստեղից հետևում է, որ $\lambda = \frac{500}{200} = 2{,}5$: Օգտվելով հավանականությունների գումարման թեորեմից և (1.12) բանաձևից՝ կունենանք.

$$P(m \le 4) = P(m = 0 \cup m = 1 \cup m = 2 \cup m = 3 \cup m = 4) =$$

$$= P(m = 0) + P(m = 2) + P(m = 3) + P(m = 4) =$$

$$= e^{-2.5} + e^{-2.5}\frac{2.5^1}{1!} + e^{-2.5}\frac{2.5^2}{2!} + e^{-2.5}\frac{2.5^3}{3!} + e^{-2.5}\frac{2.5^4}{4!} \approx 0.867:$$

ԳԼՈՒԽ 2

ՊԱՏԱՀԱԿԱՆ ՄԵԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԵՎ ԲԱՇԽՄԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ

2.1. Պատահական մեծություններ

Այս գրքում խնդիր չի դրվում հավանականությունների տեսության որոշ հիմնական գաղափարների սահմանումները տալ խիստ մաթեմատիկական ճշգրտությամբ: Ընթերցողը, հնարավոր է, առաջին անգամ գործ ունի նման գաղափարների հետ և ըստ ունեցած մաթեմատիկական գիտելիքների՝ պատրաստ չէ ընկալելու ճշգրիտ սահմանումները:

Նման գաղափարներից է նաև «պատահական մեծություն» հասկացությունը: Նկարագրենք, թե ինչ են իրենցից ներկայացնում պատահական մեծությունները:

Դիցուք, ունենք որևէ փորձի հետ կապված տարրական պատահարների Ω բազմություն: Դիտարկենք որևէ $X(\omega)$ ֆունկցիա*, որի որոշման տիրույթը Ω -ն է, իսկ արժեքներ ընդունում է R^1-ից` իրական թվերի բազմությունից, այսինքն` ցանկացած $\omega\in\Omega$ համար R^1 բազմությունում գոյություն ունի միակ X թիվը, այնպես որ` $X(\omega)=X$:

Պատահական մեծությունը, թեև նման է սովորական ֆունկցիային, սակայն ունի նաև տարբերություն. այն փորձի ընթացքում պատահականորեն է ընդունում որևէ արժեք` իր հնարավոր արժեքների բազմությունից: Որպես օրինակ կարելի է դիտարկել նետված զառի կետերի թիվը, շտապ օգնության օրվա կանչերի թիվը, վիճակախաղով շահած գումարի չափը, որևէ ապրանքի սպառման ծավալը, որևէ ապրանքի առաջարկը, պահանջարկը և այլն:

Ավելի մանրամասն դիտարկենք զառի պարզագույն օրինակը: Մեզ հայտնի է, որ զառի հետ կապված փորձի տարրական պատահարների Ω բազմությունը հետևյալն է` {1, 2, 3, 4, 5, 6}: Այստեղ, որպես $X(\omega)$ վերցվում է $\omega$ -ն` $X(\omega)=\omega$, այսինքն` $X(1)=1$, $X(2)=2$, … $X(6)=6$: Պարզ է, որ զառը նետելիս նախօրոք հայտնի չի լինում արդյունքը, սա նույնն է, թե նշված պատահական մեծությունը պատահականորեն է ընդունում իր արժեքները:

Ընդհանրապես պատահական մեծությունը համարվում է տրված և հավանականությունների տեսության ուսումնասիրման առարկա, եթե տրված է այդ պատահական մեծության հնարավոր արժեքների բազմությունը և այդ արժեքները ընդունելու հավանականությունները: Սակայն շատ հազվադեպ են տրված լինում վերը նշվածները. այդ է պատճառը, որ ուսումնասիրվում է պա-

*$X(\omega)$-ն սովորական թվային արգումենտով ֆունկցիաներից տարբերվում է նրանով, որ $X(\omega)$-ի որոշման տիրույթը` Ω բազմությունը, ոչ միշտ է թվային բազմություն:

տահական մեծության կարևորագույն բնութագրիչը` բաշխման ֆունկցիան:

Սահմանում. $X(\omega)$ պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիա է կոչվում իրական թվերի բազմության վրա տրված $F(x)$ ֆունկցիան, որի արժեքները որոշվում են հետևյալ հավասարությամբ`

$F(x)=P(X(\omega)<x)$:

Դիտողություն 1. $\{X(\omega)<x\}$ -ը իրենից ներկայացնում է պատահար, այսինքն` այն ω -երի բազմությունը, որոնց համար տեղի ունի $X(\omega)<x$ անհավասարությունը:

Դիտողություն 2. $\{X(\omega)<x\}$ պատահարը կարելի է ներկայացնել հետևյալ ձևով` $X(\omega)\in(-\infty,x)$, այսինքն` $F(x)$ բաշխման ֆունկցիան պատահական մեծության $(-\infty,x)$ միջակայքին պատկանելու հավանականությունն է:

Դիտողություն 3. Որոշ հեղինակներ բաշխման ֆունկցիան սահմանում են ոչ խիստ անհավասարության միջոցով` $F(x)=P(X(\omega)\le x)$: Այս սահմանումը նույնպես ընդունելի է, սակայն այսպես սահմանված բաշխման ֆունկցիայի հատկությունները փոքր-ինչ տարբերվում են վերը սահմանված բաշխման ֆունկցիայի հատկություններից:

Նշենք պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիայի հատկությունները.

1. $0\le F(x)\le 1$:

Այս հատկությունն ակնհայտ է, քանի որ $F(x)$ -ը սահմանվում է որպես հավանականություն. այն ճիշտ է նաև դիտողություն 3-ում նշված բաշխման ֆունկցիայի համար:

2. $F(x)$-ը չնվազող ֆունկցիա է, այսինքն` ցանկացած x_1 և x_2 թվերի համար $x_1<x_2$ պայմանից հետևում է, որ $F(x_1)\le F(x_2)$:

Ցույց տանք այս հատկության ճշմարտացիությունը: Ըստ հավանականությունների գումարման թեորեմի՝ $X=X(\omega)$ պատահական մեծության արժեքի՝ x_2 -ից փոքր լինելու հավանականությունը կլինի՝

$$P(X<x_2)=P(X<x_1 \cup x_1\le X<x_2)=P(X<x_1)+P(x_1\le X<x_2)$$

կամ $F(x_2)=F(x_1)+P(x_1\le X<x_2)$,

բայց $P(x_1\le X<x_2)\ge 0$, ուստի $F(x_2)\ge F(x_1)$:

Այս հատկությունից հետևում է, որ.

$$P(x_1\le X<x_2)=F(x_2)-F(x_1),$$

կամ, որ նույնն է՝ $P(X\in[x_1,x_2))=F(x_2)-F(x_1)$: (2.1)

Երկրորդ հատկությունը պահպանվում է նաև դիտողություն 3-ում սահմանված բաշխման ֆունկցիայի համար:

3. Բաշխման ֆունկցիայի համար տեղի ունեն հետևյալ հավասարությունները՝

$$\lim_{x\to\infty}F(x)=0, \quad (2.2)$$

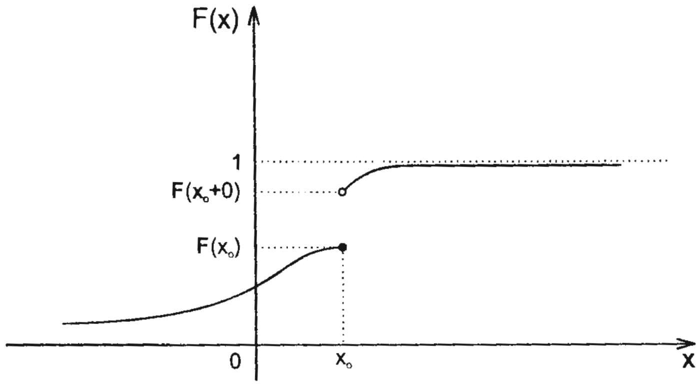
$$\lim_{x\to+\infty}F(x)=1: \quad (2.3)$$

Երրորդ հատկությունը նույնպես պահպանվում է դիտողություն 3-ում սահմանված բաշխման ֆունկցիայի համար:

4. Բաշխման ֆունկցիան ձախից անընդհատ ֆունկցիա է, այսինքն.

$$\lim_{x\uparrow x_0}F(x)=F(x_0-0)=F(x_0);$$

Այս հատկությունից հետևում է, որ, ընդհանուր առմամբ, բաշխման ֆունկցիան անընդհատ ֆունկցիա չէ, այն միայն ձախից անընդհատ է, օրինակ՝ գրաֆիկ 2.2-ում ներկայացված ֆունկցիան.



Գրաֆիկ 2.1

$x=x_0$ կետում ձախից անընդհատ է, սակայն աջից անընդհատ չէ, քանի որ $\lim_{x\downarrow x_0}F(x)=F(x_0+0)\ne F(x_0)$, ուստի ֆունկցիան $x=x_0$ կետում անընդհատ չէ:

Օգտվելով բաշխման երկրորդ և երրորդ հատկություններից՝ կարելի է ցույց տալ, որ տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը՝

$$P(X=x_0)=F(x_0+0)-F(x_0): \quad (2.4)$$

Եթե x_0 կետը բաշխման ֆունկցիայի անընդհատության կետ է, ապա $F(x_0+0)=F(x_0)$ և (2.4) բանաձևից կհետևի, որ $P(X=x_0)=0$:

Այսպիսով, կարող ենք ձևակերպել բաշխման ֆունկցիայի հատկություններից բխող մի շատ կարևոր հետևանք:

Հետևանք. Հավանականությունը, որ պատահական մեծությունը կընդունի իր որևէ արժեքը, հավասար է այդ կետում բաշխման ֆունկցիայի խզման թռիչքին՝ $F(x_0+0)-F(x_0)$:

Ձևակերպված հետևանքը հնարավորություն է տալիս ոչ միայն հաշվել $P(X\in[x_1,x_2))$ հավանականությունը, այլ նաև $P(X\in(x_1,x_2))$, $P(X\in(x_1,x_2])$, $P(X\in[x_1,x_2])$ հավանականությունները:

Օրինակ՝ հաշվենք $P(X \in [x_1;x_2])$ հավանականությունը՝

$$P(X \in [x_1;x_2]) = P(X \in [x_1,x_2) \cup \{x_2\}) = P(X \in [x_1,x_2) \cup X = x_2) =$$

$$= P(X \in [x_1,x_2)) + P(X = x_2) = F(x_2) - F(x_1) + F(x_2 + 0) - F(x_2) =$$
$$= F(x_2 + 0) - F(x_1):$$

Համանման ձևով կարելի է հաշվել նաև մյուս հավանականությունները. դրանք խորհուրդ է տրվում հաշվել ընթերցողին ինքնուրույն, այսինքն՝ արտահայտել բաշխման ֆունկցիայի միջոցով:

Պետք է նշել, որ բաշխման ֆունկցիայի չորրորդ հատկությունը չի պահպանվում *դիտողություն 3*-ում սահմանված բաշխման ֆունկցիայի համար. այստեղ բաշխման ֆունկցիան հանդիսանում է աջից անընդհատ ֆունկցիա: Պարզ է, որ այս դեպքում փոխվում է նաև (2.4)-ը և ընդունում է հետևյալ տեսքը՝

$$P(X = x_0) = F(x_0) - F(x_0 - 0): \qquad (2.5)$$

Այժմ ձևակերպենք հավանականությունների տեսության առանցքային թեորեմներից մեկը:

Թեորեմ. Եթե որևէ $F(x)$ ֆունկցիա բավարարում է բաշխման ֆունկցիայի (2-4) հատկությունները, ապա գոյություն ունի Ω հավանականության տարածություն և դրա վրա որոշված $X(\omega)$ պատահական մեծություն, այնպես որ $F(x)$ ֆունկցիան հանդիսանում է $X(\omega)$ պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիան:

Դիտողություն 1. Թեորեմում չի նշված բաշխման ֆունկցիայի առաջին հատկությունը, քանի որ այն հետևում է (2-4) հատկություններից: Վերևում առաջին հատկությունը տրված է ուսուցողական նպատակներով:

Դիտողություն 2. Թեորեմում նշվում է, որ գոյություն ունի $X(\omega)$ պատահական մեծություն, որ $F(\omega)$-ն դրա բաշխման ֆունկցիան է, սակայն չպետք է կարծել, որ գոյություն ունի միակ

$X(\omega)$-ն: Այլ կերպ ասած՝ հնարավոր է, որ տարբեր պատահական մեծություններ ունենան նույն բաշխման ֆունկցիան: Բերենք մի օրինակ:

Դիտարկենք հետևյալ պատահական մեծությունները.

$$X_1(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{եթե } \omega \in A \\ 0, & \text{եթե } \omega \notin A \end{cases} \quad \text{և} \quad X_2(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{եթե } \omega \in A \\ 1, & \text{եթե } \omega \notin A, \end{cases}$$

որտեղ՝ $P(A) = 1/2$:

Հեշտ է ստուգել, որ $X_1(\omega)$ և $X_2(\omega)$ պատահական մեծությունները լինելով տարբեր՝ ունեն նույն բաշխման ֆունկցիան՝

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{եթե } x \le 0 \\ \frac{1}{2}, & \text{եթե } 0 < x \le 1: \\ 1, & \text{եթե } x > 1 \end{cases}$$

2.2. Դիսկրետ պատահական մեծություններ

Դիսկրետ պատահական մեծությունը սահմանելու համար անհրաժեշտ է հասկանալ, թե որ բազմություններն են կոչվում հաշվելի բազմություններ:

Ընդհանրապես հաշվելի բազմություններն անվերջ բազմությունների պարզագույն դեպքերն են: Դրանք այնպիսի բազմություններ են, որոնց տարրերը կարելի է համարակալել կամ, ավելի խիստ՝ բազմության տարրերը կարելի է դնել փոխմիարժեք համապատասխանության մեջ բնական թվերի հետ: Օրինակ՝ ամբողջ թվերի բազմությունը, ռացիոնալ թվերի բազմությունը և այլն:

Սահմանենք դիսկրետ պատահական մեծությունը:

Սահմանում. X=X(ω) պատահական մեծությունը կոչվում է դիսկրետ պատահական մեծություն, եթե դրա արժեքների բազմությունը վերջավոր կամ հաշվելի բազմություն է:

Որպես դիսկրետ պատահական մեծության պարզագույն օրինակներ՝ կարելի է նշել նետված զառի կետերի թիվը, n փորձերում պատահարի հանդես գալու թիվը, որևէ սպասարկման համակարգում օրվա ընթացքում ներկայացված պահանջարկների թիվը և այլն:

Սահմանում. Դիսկրետ պատահական մեծության բաշխման օրենք կոչվում է պատահական մեծության բոլոր հնարավոր արժեքների և այդ արժեքները ստանալու հավանականությունների համախմբությունը:

Այսպիսով, եթե X=X(ω) պատահական մեծության արժեքները նշանակենք.

$x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots,$

իսկ համապատասխան հավանականությունները՝

$P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots,$

որտեղ՝ $P_k=P(X=x_k)$, $k=1,2,3\ldots,n,\ldots$

ապա՝ X պատահական մեծության բաշխման օրենքը կարելի է տալ հետևյալ աղյուսակի միջոցով՝

$$\frac{X}{P}\left|\frac{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots}{P_1, P_2, \cdots, P_n, \cdots}\right.:$$

Պարզ է, որ P_k հավանականությունները բավարարում են հետևյալ պայմանները՝

$$0 \le P_k \le 1, \quad k = 1,2,\cdots,n,\cdots, \tag{2.6}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} P_k = 1: \tag{2.7}$$

Ճիշտ է նաև հակառակը. եթե ունենք $q_1, q_2, \cdots, q_n \cdots$ թվերի հաջորդականություն, որոնք բավարարում են (2.6) և (2.7) պայմանները, ապա գոյություն ունի որևէ դիսկրետ պատահական մեծություն, որի բաշխման օրենքն է՝

$$\frac{Y}{q}\left|\frac{y_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots}{q_1, q_2, \cdots, q_n, \cdots}\right.:$$

Կապ գոյություն ունի դիսկրետ պատահական մեծության բաշխման օրենքի և բաշխման ֆունկցիայի միջև: Եթե տրված է դիսկրետ պատահական մեծության բաշխման օրենքը, ապա դրա բաշխման ֆունկցիան որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$F(x) = \sum_{x_K < x} P_K, \tag{2.8}$$

որտեղ՝ գումարը տարածված է k-ի այն բոլոր արժեքների վրա, որոնց համապատասխանող x_K -երը փոքր են x -ից:

Այժմ ենթադրենք՝ տրված են դիսկրետ պատահական մեծության F(x) բաշխման ֆունկցիան և անհայտ P_1, P_2,... հավանականություններին համապատասխանող $x_1, x_2, \ldots$ արժեքները. գտնենք բաշխման օրենքը: Օգտվելով (2.4) բանաձևից՝ կունենանք՝

$$P_K = P(X = x_K) = F(x_K + 0) - F(x_K):$$

Դիտարկենք դիսկրետ պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիայի անալիտիկ և գրաֆիկական տեսքը, երբ դրա արժեքների բազմությունը վերջավոր է, իսկ բաշխման օրենքը՝ տրված.

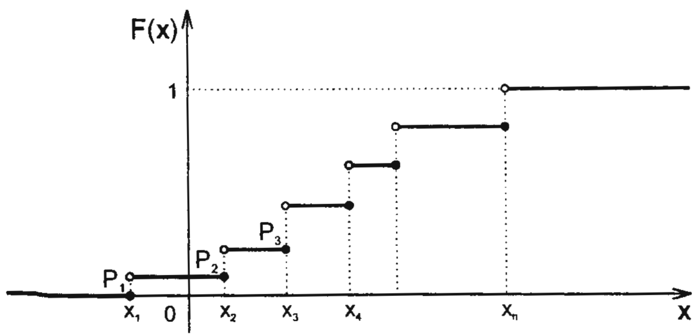
$$\frac{X}{P}\left|\frac{x_1, x_2, \cdots, x_n}{P_1, P_2, \cdots, P_n}\right.,$$

ընդ որում՝ $x_1<x_2<\ldots<x_n$:

Բաշխման ֆունկցիայի անալիտիկ տեսքը կլինի.

$$F(X)=\begin{cases} 0, & \text{եթե } x \le x_1 \\ P_1, & \text{եթե } x_1 < x \le x_2 \\ P_1+P_2, & \text{եթե } x_2 < x \le x_3 \\ ------------- & \\ P_1+P_2+\cdots+P_K, & \text{եթե } x_K < x \le x_{K+1} \\ --------------------- & \\ P_1+P_2+\cdots+P_n=1, & \text{եթե } x > x_n \end{cases}$$

իսկ դրա գրաֆիկը կունենա հետևյալ տեսքը.



Գրաֆիկ 2.2

Գրաֆիկ 2.2-ից երևում է, որ դիսկրետ պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիան ունի հետևյալ առանձնահատկությունները՝

1. դրա գրաֆիկը աստիճանաձև է,

2. այն խզվում է $x_1, x_2, \cdots, x_n$ կետերում և խզման թռիչքները համապատասխանաբար հավասար են՝ $P_1, P_2, \cdots, P_n$:

Բերենք դիսկրետ պատահական մեծությունների մի քանի օրինակներ, որոնք տրված են բաշխման օրենքի միջոցով:

Օրինակ 1. Նետված զառի կետերի թիվը պատահական մեծություն է, որի բաշխման օրենքը տրվում է հետևյալ աղյուսակով՝

$$\begin{array}{c|cccccc} X & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6 \\ \hline P & \frac{1}{6}, & \frac{1}{6}, & \frac{1}{6}, & \frac{1}{6}, & \frac{1}{6}, & \frac{1}{6}, \end{array}$$

Օրինակ 2. Բեռնուլիի փորձերում A պատահարի հանդես գալու m թիվը պատահական մեծություն է, որի բաշխման օրենքը տրվում է հետևյալ աղյուսակով՝

$$\begin{array}{c|ccccc} m & 0, & 1, & 2, & \cdots, & n \\ \hline P & C_n^0q^n, & C_n^1Pq^{n-1}, & C_n^2P^2q^{n-2}, & \cdots & ,C_n^nP^n, \end{array},$$

որտեղ՝ $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, $k=\overline{0,n}$, $P=P(A)$, $q=1-P$:

Այստեղ անհրաժեշտություն կա ստուգելու հետևյալ հավասարությունը՝

$$C_n^0q^2+C_n^1Pq^{n-1}+C_n^2P^2q^{n-2}+\cdots+C_n^nP^n=1:$$

Այն ճիշտ է, քանի որ դրա ձախ մասը հավասար է $(P+q)^n$, իսկ վերջինս ակնհայտաբար հավասար է 1-ի:

Ստացված հավանականությունների բաշխումը կոչվում է հավանականությունների բինոմական բաշխում:

Օրինակ 3. X պատահական մեծությունն ունի Պուասոնի հավանականությունների բաշխումը, եթե դրա բաշխման օրենքը տրվում է հետևյալ աղյուսակով՝

$$\begin{array}{c|ccccccc} X & 0, & 1, & 2, & 3, & \cdots, & n, & \cdots \\ \hline P & e^{-\lambda}, & \lambda e^{-\lambda}, & \frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}, & \frac{\lambda^3}{3!}e^{-\lambda}, & \cdots, & \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}, & \cdots \end{array},$$

որտեղ՝ $\lambda>0$:

Այստեղ նույնպես $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{\lambda^K}{K!}e^{-\lambda}=1$:

2.3. Անընդհատ պատահական մեծություններ

Սահմանում. $X=X(\omega)$ պատահական մեծությունը կոչվում է անընդհատ կամ բացարձակ անընդհատ, եթե գոյություն ունի մի որևէ $f(x)$ ոչ բացասական ֆունկցիա, այնպիսին, որ

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(u)du:$$

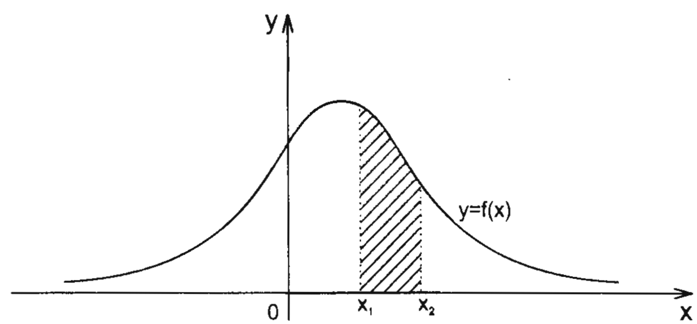
Սահմանումից հետևում է, որ եթե $F(x)$ ֆունկցիան ունի անընդհատ ածանցյալ, ապա՝ $f(x)=F'(x)$:

$f(x)$ ֆունկցիան անվանում են $X=X(\omega)$ պատահական մեծության խտության ֆունկցիա: Պարզ է, որ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$:

Հայտնի է, որ $P(x_1 \le X < x_2)=F(x_2)-F(x_1)$ (տես բանաձև 1.1), այն արտահայտենք խտության ֆունկցիայի միջոցով՝

$$P(x_1 \le X < x_2)=\int_{-\infty}^{x_2} f(u)du-\int_{-\infty}^{x_1} f(u)du=\int_{x_1}^{x_2} f(u)du \qquad (2.9)$$

Ստացվածից հետևում է, որ $x_1 \le X < x_2$ անհավասարության իրականացման հավանականությունը թվապես հավասար է այն կորագիծ սեղանի մակերեսին, որը սահմանափակված է $y=f(x)$ կորով, աբսցիսների առանցքով և $x=x_1$, $x=x_2$ կետերով անցնող աբսցիսների առանցքին ուղղահայաց ուղիղներով: Նշված կորագիծ սեղանը ցույց է տրված հետևյալ նկարում՝



Բերենք մի քանի հայտնի անընդհատ պատահական մեծությունների օրինակներ:

Օրինակ 1. Պատահական մեծությունը [a, b] միջակայքում ունի հավանականությունների հավասարաչափ բաշխում, եթե դրա հավանականությունների խտության ֆունկցիան ունի հետևյալ տեսքը՝

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & \text{եթե } a \le x \le b\\ 0, & \text{եթե } x<a \text{ կամ } x.>b\end{cases}: \qquad (2.10)$$

Ունենալով խտության ֆունկցիայի (2.10) տեսքը՝ կարող ենք գտնել բաշխման ֆունկցիան՝

$$F(x)=\int_{a}^{x} (u)du=\begin{cases}0 & , \text{եթե } x \le a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{եթե } a<x \le b\\ 1 & , \text{եթե } x>b\end{cases}: \qquad (2.11)$$

Ենթադրենք՝ $[x_1, x_2)$ միջակայքը որևէ միջակայք է [a, b] միջակայքի ներսում: Ըստ (2.9) բանաձևի՝ կունենանք.

$$P(x_1 \le X < x_2)=\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx=\int_{x_1}^{x_2}\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}(x_2-x_1):$$

Այսպիսով, երբ X պատահական մեծությունը [a, b] միջակայքում ունի հավանականությունների հավասարաչափ բաշխում, ապա [a, b]-ի ներսում գտնվող միջակայքում ընկնելու հավանականությունը ուղիղ համեմատական է այդ միջակայքի երկարությանը և կախում չունի դրա դիրքից [a, b] միջակայքի ներսում:

Յուրաքանչյուր պատահական մեծություն կարելի է ձևափոխել այնպես, որ ստացված պատահական մեծությունը [0, 1] միջակայքում ունենա հավանականությունների հավասարաչափ բաշխում: Այդ է վկայում հետևյալ թեորեմը՝

Թեորեմ. Դիցուք, $X=X(\omega)$-ն կամայական պատահական մեծություն է՝ $F(x)$ բաշխման ֆունկցիայով, այդ դեպքում $y=F(X)$ պատահական մեծությունը $[0,1]$ միջակայքում ունի հավասարաչափ բաշխում:

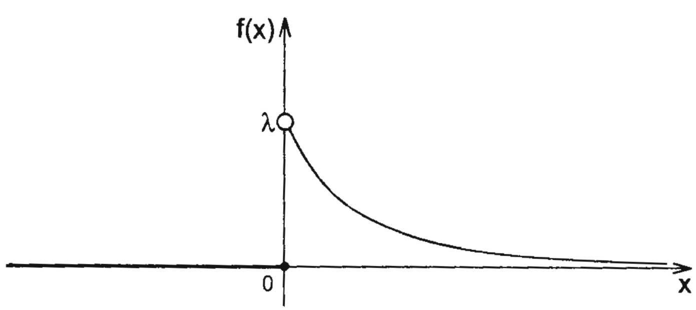
Օրինակ 2. Հավանականությունների ցուցչային բաշխում: X պատահական մեծությունը ենթարկվում է հավանականությունների ցուցչային բաշխման, եթե դրա խտության ֆունկցիան ունի հետևյալ տեսքը՝

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{, եթե } x\le 0\\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{, եթե } x>0\end{cases},$$

որտեղ $\lambda>0$ և կոչվում է ցուցչային բաշխման պարամետր: Խտության ֆունկցիայի գրաֆիկի տեսքը պատկերնած է գրաֆիկ 2.4-ում:

Բաշխման ֆունկցիայի տեսքը կլինի՝

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{, եթե } x\le 0\\ 1-e^{-\lambda x} & \text{, եթե } x>0\end{cases}:$$



Գրաֆիկ 2.4

Օրինակ 3. Առավել հաճախ հանդիպող պատահական մեծություններից են a և σ պարամետրերով նորմալ բաշխված պատահական մեծությունները, որոնք անվանում են նաև Գաուսյան պատահական մեծություններ և կրճատ գրում են՝ $X\sim N(a,\sigma)$:

X պատահական մեծությունը բաշխված է նորմալ a և σ պարամետրերով, եթե դրա խտության ֆունկցիան ունի հետևյալ տեսքը՝

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},\quad x\in(-\infty,+\infty):$$

պարզ է, որ բաշխման ֆունկցիան կլինի՝

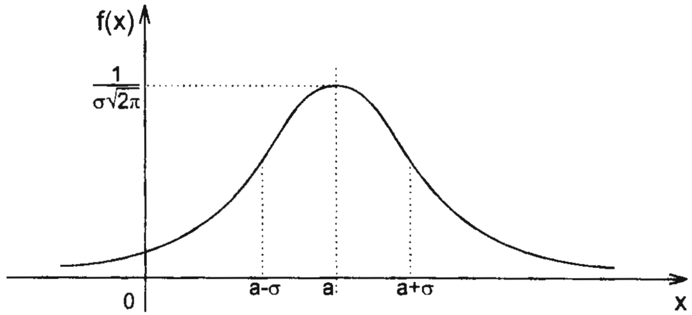
$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(u-a)^2}{2\sigma^2}}du:$$

Դժվար չէ ստուգել, որ $F(x)$ ֆունկցիան, իրոք, պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիա է, այսինքն՝ բավարարում է 2-4 հատկությունները:

Երբ $a=0$, $\sigma=1$, ապա պատահական մեծությունն անվանում են ստանդարտ նորմալ պատահական մեծություն:

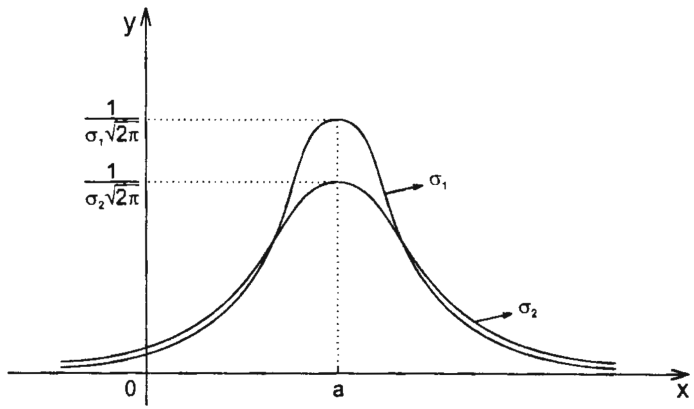
Կարելի է ցույց տալ, որ նորմալ բաշխված պատահական մեծության $y=f(x)$ խտության ֆունկցիան ունի մաքսիմում $X=a$ կետում և $y_{max}=y(a)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$, դրա գրաֆիկը համաչափ է (սիմետրիկ) $X=a$ ուղղի նկատմամբ, ունի շրջման երկու կետ՝ $x=a\pm\sigma$ և $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$: Խտության ֆունկցիայի գրաֆիկն ունի հետևյալ տեսքը (տե՛ս գրաֆիկ 2.5):

a պարամետրի փոփոխման ժամանակ կորը կտեղափոխվի աբսցիսների առանցքով՝ չփոխելով իր ձևը:



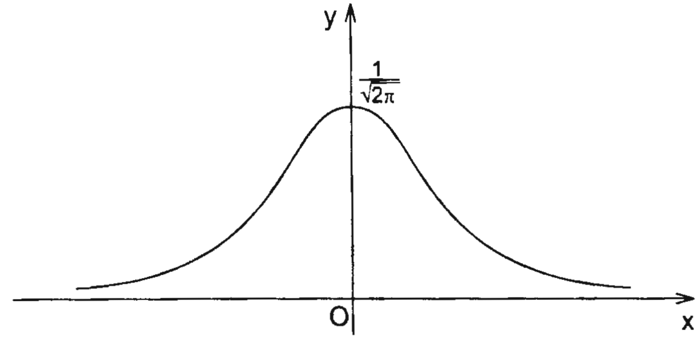
Գրաֆիկ 2.5

σ պարամետրը բնութագրում է կորի փռվածությունը աբսցիսների առանցքի նկատմամբ: Գրաֆիկ 2.6-ում բերված են σ_1, σ_2; $\sigma_1<\sigma_2$ պարամետրերին համապատասխանող կորերը՝ հաստատուն a պարամետրերի դեպքում:



Գրաֆիկ 2.6

Ակնհայտ է, որ ստանդարտ նորմալ պատահական մեծության խտության ֆունկցիայի գրաֆիկը կլինի համաչափ՝ օրդինատների առանցքի նկատմամբ և կունենա գրաֆիկ 2.7-ում պատկերված տեսքը:



Գրաֆիկ 2.7.

Պարզագույն հաշվարկներից հետո կարելի է գտնել նորմալ պատահական մեծության՝ որևէ միջակայքում ընկնելու հավանականությունը, ընդ որում՝ այստեղ նշանակություն չունի միջակայքի բաց, փակ կամ կիսաբաց լինելը, քանի որ նորմալ պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիան ամենուրեք անընդհատ է, այսինքն՝ պատահական մեծության որևէ արժեք ստանալու հավանականությունը հավասար է զրոյի:

Նշված հավանականությունը հաշվարկվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$P(x_1 \le X < x_2) = \Phi\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right),$$

որտեղ՝ $\Phi(x)$-ը Լապլասի ֆունկցիան է՝

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

Մասնավոր դեպքում, երբ $x_1=a-3\sigma$, $x_2=a+3\sigma$, կունենանք՝

$$P(a - 3\sigma \le X < a + 3\sigma) = 2\Phi(3) \approx 0{,}997\ ,$$

այսինքն՝ a և σ պարամետրերով նորմալ բաշխման դեպքում 0,997 հավանականությամբ (այսինքն՝ համարյա հավաստի) կարելի է պնդել, որ պատահական մեծությունը կշեղվի a -ից ոչ ավել, քան 3σ մեծությամբ: Նորմալ բաշխված պատահական մեծության այս հատկությունը կոչվում է «երեք սիգմայի» կանոն:

Պատահական մեծությունների օրինակներում (դիսկրետ կամ անընդհատ) տեսնում ենք, որ բաշխման ֆունկցիաները, բաշխման օրենքները և խտության ֆունկցիաները կախված են մեկ կամ մի քանի պարամետրերից: Հայտնի է, որ այդ պարամետրերը ունեն որոշակի իմաստներ, այլ կերպ ասած՝ դրանք պատահական մեծության որոշակի բնութագրիչներ են:

2.4. Երկչափ պատահական մեծություններ

Դիցուք, ունենք X և Y պատահական մեծությունները:

Սահմանում: Երկու պատահական մեծություններից կազմված (X, Y) համակարգը կոչվում է երկչափ պատահական մեծություն կամ պատահական վեկտոր:

Երկչափ պատահական մեծությունը հաճախ նշանակում են մեկ տառով՝ Z=(X,Y):

Սահմանում: Երկչափ պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիան x և y փոփոխականներից կախված F (x, y) ֆունկցիան է, որի արժեքները որոշվում են հետևյալ կերպ՝

$$F(x,y)=P(X<x\cap Y<y),\ -\infty\le x\le+\infty,\ -\infty\le y\le+\infty :$$

Բաշխման ֆունկցիան ունի հետևյալ հատկությունները՝

1. $0\le F(x, y)\le 1$:
2. F(x,y) ֆունկցիան ըստ յուրաքանչյուր արգումենտի, չնվազող ֆունկցիա է՝

$F(x_1, y)\le F(x_2, y),\quad x_1<x_2$

$F(x, y_1)\le F(x, y_2),\quad y_1<y_2$:

3. Ըստ յուրաքանչյուր արգումենտի՝ ձախից անընդհատ է,

4. Կամայական x -ի և y -ի համար՝

$$F(-\infty,y)=F(x,-\infty)=F(-\infty,-\infty)=0 :$$

5. Կամայական x -ի և y-ի համար $(x\ne-\infty, y\ne-\infty)$

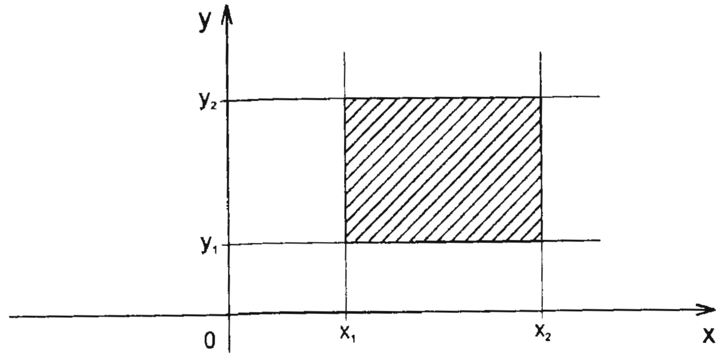
$$F(x,+\infty)=F_X(x),$$

$$F(+\infty,y)=F_Y(y),$$

որտեղ՝ $F_X(x)$ և $F_Y(y)$ ֆունկցիաները համապատասխանաբար X և Y պատահական մեծությունների բաշխման ֆունկցիաներն են,

6. $F(-\infty,+\infty)=1$,
7. F(x, y)=F(y, x):

Հավանականությունների բաշխման երկչափ՝ F (x, y) ֆունկցիայի միջոցով կարելի է արտահայտել այն հավանականությունը, որ X պատահական մեծությունը կընկնի $[x_1,x_2)$ միջակայքում և, միաժամանակ, Y-ը կընկնի $[y_1, y_2)$ միջակայքում, այսինքն՝ M(X,Y) կետը (պատահական մեծություն կոորդինատներ ունեցող) կընկնի գրաֆիկ 2.8-ում շտրիխավորված ուղղանկյան մեջ:



Գրաֆիկ 2.8

Նշված հավանականությունը կորոշվի հետևյալ բանաձևով՝

$$P(x_1 \le X < x_2 \cap y_1 \le Y < y_2) = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) +$$

$$+ F(x_1, y_1): \qquad (2.12)$$

(2.12) բանաձևը համեմատելի է (2.1) բանաձևի հետ:

Սահմանում. X և Y պատահական մեծությունները կոչվում են անկախ, եթե՝

$F(x,y)=F_X(x)\cdot F_Y(y)$:

Երկչափ պատահական մեծությունները, ինչպես մեկ չափանի պատահական մեծությունները, կարելի է դասակարգել ըստ դիսկրետ և անընդհատ պատահական մեծությունների:

Սահմանում. Եթե X և Y պատահական մեծությունները դիսկրետ պատահական մեծություններ են, ապա (X, Y) երկչափ պատահական մեծությունը կոչվում է դիսկրետ երկչափ պատահական մեծություն, որի բաշխման օրենք կոչվում է դրա արժեքների և համապատասխան հավանականությունների համախմբությունը, որը տրվում է հետևյալ աղյուսակով՝

x / y	x_1,	x_2, …	x_i …	x_n
y_1	P_{11},	P_{21}, …	P_{i1}, …	P_{n1}
y_2	P_{12},	P_{22}, …	P_{i2}, …	P_{n2}
…	…	…	…	…
y_k	P_{1k},	P_{2k}, …	P_{ik}, …	P_{nk}
…	…	…	…	…
y_m	P_{1m},	P_{2m}, …	P_{im}, …	P_{nm},

որտեղ՝

$$P_{ik} = P(X = x_i \cap Y = y_k), \quad i = 1,2,\cdots,n \quad k = 1,2,\cdots,m:$$

Ակնհայտ է, որ $0 \le P_{ik} \le 1$, $\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} P_{ik} = 1$:

Եթե տրված է (X, Y) երկչափ պատահական մեծության բաշխման օրենքը, կարելի է որոշել X և Y պատահական մեծություններից յուրաքանչյուրի բաշխման օրենքը: Նշանակենք՝

$$P_{i\bullet} = P(X = x_i), \quad P_{\bullet k} = P(Y = y_k), \quad i = \overline{1,n}, \quad k = \overline{1,m},$$

ապա՝

$$P_{i\bullet} = \sum_{k=1}^{m} P_{ik}, \quad i = \overline{1,n}, \qquad P_{\bullet k} = \sum_{i=1}^{n} P_{ik}, \quad k = \overline{1,m}$$

Եթե հայտնի է դիսկրետ երկչափ պատահական մեծության բաշխման օրենքը, ապա այդ պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիան կլինի.

$$F(x,y) = \sum_{\substack{x_i < x \\ y_k < y}} P_{ik},$$

որտեղ՝ գումարումը տարածվում է այն i և k արժեքների վրա, որոնց համար $x_i<x$, $y_k<y$:

Դիսկրետ X և Y պատահական մեծությունների համար տեղի ունի հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ. Որպեսզի դիսկրետ X և Yպատահական մեծությունները լինեն անկախ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ տեղի ունենա հետևյալ հավասարությունը՝

$$P_{ik} = P_{i\bullet} P_{\bullet k}, \quad i = \overline{1,n}, \quad k = \overline{1,m}:$$

Ուսումնասիրենք դիսկրետ երկչափ պատահական մեծության մի օրինակ:

Նետում ենք երկու զառ. դիցուք՝ X-ը այն կետերի թիվն է, որ բացվում է առաջին զառի վրա, իսկ Y-ը՝ այն կետերի թիվը, որ բացվում է երկրորդ զառի վրա: Դիտարկվում է (X, Y) երկչափ պատահական մեծությունը: Կառուցենք (X, Y) երկչափ պատահական մեծության բաշխման օրենքը:

Պարզ է, որ X և Y պատահական մեծությունների բաշխման աղյուսակները կլինեն՝

$$\begin{array}{c|cccccc} X & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6 \\ \hline P & \frac{1}{6}, & \frac{1}{6}, & \frac{1}{6}, & \frac{1}{6}, & \frac{1}{6}, & \frac{1}{6}, \end{array}, \quad P_i = P_{i\bullet} = \frac{1}{6}, \ i = \overline{1,6},$$

$$\begin{array}{c|cccccc} Y & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6 \\ \hline q & \frac{1}{6}, & \frac{1}{6}, & \frac{1}{6}, & \frac{1}{6}, & \frac{1}{6}, & \frac{1}{6}, \end{array}, \quad q_k = P_{\bullet k} = \frac{1}{6}, \quad k = \overline{1,6}:$$

(X, Y)-ի հնարավոր արժեքներն են (i, k), $i = \overline{1,6}$, $k = \overline{1,6}$, իսկ $P_{ik} = P(X = i \cap Y = k) = \frac{1}{36}$: Ակնհայտ է, որ X և Y պատահական մեծություններն անկախ են՝ $P_{ik}=P_{i\cdot}P_{\cdot k}$:

Այսպիսով, բաշխման օրենքը կտրվի հետևյալ աղյուսակով.

x \ y	1	2	3	4	5	6
1	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
2	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
3	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
4	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
5	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
6	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36

Այժմ սահմանենք երկչափ անընդհատ պատահական մեծությունը:

Սահմանում. Երկչափ (X, Y) պատահական մեծությունը կոչվում է անընդհատ, եթե գոյություն ունի $f(x, y) \geq 0$ ֆունկցիա, այնպիսին, որ կամայական x-ի և y-ի համար տեղի ունի.

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv,$$

f(x,y) ֆունկցիան անվանում են երկչափ պատահական մեծության խտության ֆունկցիա:

Սահմանումից հետևում է, որ $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)\,du\,dv = 1$ և, եթե գոյություն ունի $\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$ խառը ածանցյալը և այն անընդհատ է, ապա՝ $f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$:

Եթե հայտնի է (X, Y) անընդհատ պատահական մեծության F(x,y) բաշխման ֆունկցիան, ապա կարելի է գտնել X և Y պատահական մեծությունների բաշխման և խտության ֆունկցիաները: Այդ ֆունկցիաներն ունեն հետևյալ տեսքը.

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)\,du\,dv, \tag{2.13}$$

$$Fy(y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)\,dv\,du, \tag{2.14}$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy, \tag{2.15}$$

$$f_y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx: \tag{2.16}$$

Պատահական մեծությունների անկախությունը ցույց տալու համար հաճախ օգտվում են հետևյալ թեորեմից:

Թեորեմ. Եթե (X,Y) երկչափ պատահական մեծությունն անընդհատ է, f(x,y) խտության ֆունկցիայով, ապա որպեսզի X և Y պատահական մեծությունները լինեն անկախ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ տեղի ունենա $f(x,y)=f_x(x)\cdot f_y(y)$ հավասարությունը:

Որպես անընդհատ երկչափ պատահական մեծության օրինակ, դիտարկենք երկչափ նորմալ բաշխված պատահական մեծությունը:

Երկչափ պատահական (X, Y) մեծությունը բաշխված է նորմալ, եթե դրա հավանականությունների բաշխման խտության ֆունկցիան ունի՝

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-a)^2}{\sigma_1^2}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{2r(x-a)(y-b)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-b)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

տեսքը, որը պարունակում է հինգ պարամետրեր՝

a, b, $\sigma_1>0$, $\sigma_2>0$ և r, ընդ որում՝ $|r|<1$:

Կարելի է ցույց տալ, որ.

$$f(x,y)\geq 0 \quad և \quad \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy=1:$$

Օգտվելով վերը նշված (2.15) և (2.16) բանաձևերից՝ կարելի է ստանալ X և Y պատահական մեծությունների խտության ֆունկցիաները: Այդ խտության ֆունկցիաներն ունեն հետևյալ տեսքը՝

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_1^2}} \qquad f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-a)^2}{2\sigma_2^2}}:$$

Ստացվածից հետևում է, որ X և Y պատահական մեծությունները բաշխված են նորմալ, համապատասխանաբար՝ (a, σ_1) և (b, σ_2) պարամետրերով:

Նմանատիպ ձևով սահմանվում է n-չափանի պատահական մեծությունը՝ $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ և դրա բաշխման ֆունկցիան՝

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=P(X_1<x_1\cap X_2<x_2\cap\cdots A\cap X_n<x_n):$$

Հետագայում անհրաժեշտ կլինի օգտագործել X_1, X_2, $\cdots$, X_n պատահական մեծությունների անկախության գաղափարը, այդ պատճառով սահմանենք այն:

Սահմանում: X_1, X_2, $\cdots$, X_n պատահական մեծություններն անկախ են, եթե կամայական x_1, x_2, $\cdots$, x_n թվերի համար տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը՝

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_2)=F_{X_1}(x_1)\cdot F_{X_2}(x_2)\cdot\cdots\cdot F_{X_n}(x_n):$$

2.5. Պատահական մեծության ֆունկցիայի բաշխումը

Ենթադրենք՝ X-ը պատահական մեծություն է, իսկ $y=\varphi(x)$՝ որևէ ֆունկցիա: Դիտարկենք $Y=\varphi(X)$ պատահական մեծությունը:

Սկզբում ենթադրենք, որ X պատահական մեծությունը դիսկրետ է. այստեղից կհետևի, որ $\varphi(X)$ պատահական մեծությունը նույնպես կլինի դիսկրետ՝ $\varphi(X_i)$, $i=1,2,\ldots,n,\ldots$ արժեքներով, որտեղ X_i, $i=1,2,\cdots,n,\cdots$ X պատահական մեծության արժեքները, իսկ $\varphi(X)$-ի արժեքներն են, ստանալու հավանականությունները կլինեն՝

$$P(\varphi(X)=\varphi(X_i))=P(X=x_i)=P_i, \quad i=1,2,\cdots,n,\cdots$$

Եթե (X, Y)-ը դիսկրետ պատահական մեծություն է, իսկ $Z=\varphi(x,y)$-ը՝ երկու փոփոխականից կախված ֆունկցիա, ապա համանման ձևով $\varphi(X,Y)$ պատահական մեծության արժեքները կլինեն՝ $\varphi(X_i,Y_j)$; $i=1,2,\ldots,n$; $j=1,2,\ldots,m$, իսկ համապատասխան հավանականությունները՝

$$P(\varphi(X,Y)=\varphi(x_i,y_j))=P(X=x_i\cap Y=y_j)=P_{ij}, \quad i=1,2,\cdots,n,\cdots,$$

$$j=1,2,\cdots,m,\cdots:$$

Այժմ ենթադրենք՝ X-ը անընդհատ պատահական մեծություն է՝ $F_1(x)$ բաշխման ֆունկցիայով: Ենթադրենք՝ $y=\varphi(x)$ ֆունկցիան մոնոտոն է (աճող կամ նվազող), ուստի գոյություն ունի դրա հակադարձ ֆունկցիան՝ $x=\Psi(y)$: Դիտարկենք $Y=\varphi(X)$ պատահական մեծությունը և գտնենք դրա բաշխման ֆունկցիան: Նշանակենք այն $F_2(y)$: Ըստ բաշխման ֆունկցիայի սահմանման՝

$$F_2(y)=P(Y<y)=P(\varphi(X)<y):$$

Եթե $Y=\varphi(X)$ -ը աճող ֆունկցիա է, ապա $\varphi(X)<y$ անհավասարությունը համարժեք է $X<\Psi(y)$ անհավասարությանը, իսկ եթե $Y=\varphi(X)$ -ը նվազող ֆունկցիա է, ապա $\varphi(X)<y$ անհավասարությունը համարժեք է $X>\Psi(y)$ անհավասարությանը:

Առաջին դեպքում կունենանք.

$$F_2(y)=P(X<\Psi(y))=F_1(\Psi(y)): \qquad (2.17)$$

Եթե $f_1(x)$ -ով նշանակենք X պատահական մեծության խտության ֆունկցիան, $f_2(y)$-ով՝ $Y=\varphi(X)$ պատահական մեծության խտության ֆունկցիան, ապա օգտվելով (2.17) բանաձևից՝ կստանանք.

$f_2(y)=f_1(\Psi(y))\cdot\Psi'(y)$; եթե գոյություն ունի $\Psi(y)$-ի ածանցյալը, և $f_1(\Psi(y))=\left.\frac{\partial F_1(t)}{\partial t}\right|_{t=\Psi(y)}$:

Երկրորդ դեպքում, երբ $\varphi(X)$-ը նվազող ֆունկցիա է, կունենանք.

$$F_2(y)=P(X>\Psi(y))=1-F_1(\Psi(y)+0): \qquad (2.18)$$

Այս հավասարությունից կհետևի, որ.

$$f_2(y)=-f_1(\Psi(y))\Psi'(y) :$$

Ենթադրենք՝ X և Y դիսկրետ պատահական մեծությունները անկախ են, ընդ որում՝ դրանց բաշխման օրենքները տրված են հետևյալ աղյուսակներով.

$$\begin{array}{c|c} X & x_1,\ldots\ldots x_n \\ \hline P & P_1,\ldots\ldots P_n \end{array}, \qquad \begin{array}{c|c} y & y_1,\ldots\ldots y_m \\ \hline q & q_1,\ldots\ldots q_m \end{array}$$

Դիտարկենք Z=X+Y պատահական մեծությունը:

Ակնհայտ է, որ դրա արժեքների բազմությունը կլինի՝

$\{x_i+y_j\}_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,m}}}=\{Z_K\}$, որտեղ $Z_k=x_i+y_j$:

Հաշվենք $P(Z=Z_k)$ հավանականությունները՝

$$P(Z=Z_k)=\sum_{i=1}^{n}P(X=x_i\cap Y=Z_K-x_i)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}P(X=x_i)P(Y=Z_K-x_i)$$

Հիմա ենթադրենք՝ X և Y պատահական մեծությունները անընդհատ են ու անկախ, X և Y պատահական մեծությունների խտության ֆունկցիաները համապատասխանաբար նշանակենք $f_1(x)$, $f_2(y)$: Այդ դեպքում Z=X+Y պատահական մեծության f(z) խտության ֆունկցիան որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$f(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(x)f_2(z-x)dx :$$

Կարելի է ցույց տալ, որ եթե երկու անկախ պատահական մեծություններ ունեն Պուասոնի բաշխումը՝ λ_1 և λ_2 պարամետրերով, ապա դրանց գումարի (կոմպոզիցիայի) բաշխումը կլինի Պուասոնի բաշխում, որի պարամետրը հավասար կլինի $\lambda_1+\lambda_2$:

Նույնատիպ արդյունք ստացվում է նաև անկախ նորմալ բաշխված պատահական մեծությունների գումարի համար, այսինքն, եթե անկախ պատահական մեծությունները բաշխված են նորմալ, համապատասխանաբար՝ (a_1,σ_1) և (a_1,σ_2) պարամետրերով, ապա դրանց գումարը նույնպես բաշխված կլինի նորմալ՝ $\left(a_1+a_2,\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)$ պարամետրերով:

Վերջում դիտարկենք նաև երկու անկախ պատահական մեծությունների քանորդի բաշխումը։ Դիցուք, X և Y անկախ պատահական մեծությունները համապատասխանաբար ունեն $f_1(x), f_2(y)$ խտության ֆունկցիաները։ Դիտարկվում է $Z = \frac{X}{Y}$ պատահական մեծությունը։ Այս պատահական մեծության f(z) խտության ֆունկցիան կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$f(z) = \int_0^{+\infty} y f_2(y) f_1(zy) dy - \int_{-\infty}^0 y f_2(y) f_1(zy) dy \text{ ։}$$

2.6. Հավանականությունների χ^2, Ստյուդենտի և Ֆիշերի բաշխումները

Այսպիսի բաշխումներ ունեցող պատահական մեծությունները շատ են կիրառվում մաթեմատիկական վիճակագրության մեջ և, մասնավորապես, էկոնոմետրիկայում, երբ հարկ է լինում ստուգել վիճակագրական վարկածներ. դրանք ծառայում են որպես վիճակագրական հայտանիշներ։

1. χ^2 բաշխում

Դիցուք, X_1, X_2, ..., X_n պատահական մեծություններն անկախ, ստանդարտ, նորմալ պատահական մեծություններ են, այսինքն՝ $X_i \sim N(0,1)$, $i = \overline{1,n}$ ։

Հետևյալ պատահական մեծությանը՝ $\chi^2(n) = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$, անվանում են χ^2 պատահական մեծություն, իսկ նրա բաշխմանը՝ n ազատության աստիճանով χ^2 բաշխում։ Հայտնի է $\chi^2(n)$ պատահական մեծության խտության ֆունկցիան, որն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$f(x) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{n/2-1} \cdot \exp\left(-\frac{x}{2}\right),$$

երբ $x > 0$, $f(x) = 0$, երբ $x \le 0$

որտեղ՝ Γ գամմա-ֆունկցիան որոշվում է.

$$\Gamma(t) = \int_0^{\infty} x^{t-x} e^{-x} dx, \quad t>0$$

հավասարությամբ։ Մասնավոր դեպքում, երբ t-ն բնական թիվ է՝ $\Gamma(t)=(t-1)!$ ։

2. Ստյուդենտի բաշխում (t-բաշխում)

Ենթադրենք՝ X_0, X_1, ..., X_n-ը ստանդարտ, նորմալ, անկախ պատահական մեծություններ են,

այդ դեպքում՝ $t(n) = \dfrac{X_0}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2}} = \dfrac{X_0}{\sqrt{\frac{1}{n}\chi^2(n)}}$

պատահական մեծության բաշխմանը անվանում են n ազատության աստիճանով Ստյուդենտի բաշխում կամ t-բաշխում։ Հավանականությունների բաշխման խտության ֆունկցիան ունի հետևյալ տեսքը՝

$$P(x) = \frac{\Gamma\left((n+1)/2\right)}{(n\pi)^{1/2}\Gamma(n/2)}\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-(n+1)/2} \text{ ։}$$

Ակնհայտ է, որ այն զույգ ֆունկցիա է։

3. Ֆիշերի բաշխում (F-բաշխում)

Ենթադրենք՝ X_1, ..., X_m, Y_1, ..., Y_n-ը ստանդարտ, նորմալ, անկախ պատահական մեծությունների համախմբություն է։ Հետևյալ պատահական մեծության՝

$$F(m,n)=\frac{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}X_i^2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i^2}=\frac{\frac{1}{m}\chi^2(m)}{\frac{1}{n}\chi^2(n)}$$

բաշխմանը անվանում են (m, n) ազատության աստիճաններով Ֆիշերի բաշխում կամ F-բաշխում: Դրա խտության ֆունկցիան ունի հետևյալ տեսքը՝

$$P(x)=\frac{\Gamma[(m+n)/2]\,m^{m/2}\cdot n^{n/2}}{\Gamma(m/2)\,\Gamma(n/2)}\cdot\frac{x^{m/2-1}}{(mx+n)^{(m+n)/2}},\quad \text{երբ } x>0;$$

$P(x)=0$, երբ $x\le 0$:

2.7. Պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը և դրա հատկությունները

Մինչև այժմ պատահական մեծությունները բնութագրվում էին բաշխման ֆունկցիաների, բաշխման օրենքների և բաշխման խտության ֆունկցիաների միջոցով: Սակայն X պատահական մեծության համար գոյություն ունեն նաև այլ՝ թվային բնութագրիչներ: Այդ բնութագրիչներից է պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը: Հետագայում ցույց կտրվի, որ այն բնութագրում է պատահական մեծության միջին արժեքը: Այդ է պատճառը, որ շատ հաճախ մաթեմատիկական սպասմանը անվանում են միջին արժեք:

Նախ սահմանենք մաթեմատիկական սպասումն դիսկրետ պատահական մեծությունների համար:

Ենթադրենք՝ X պատահական մեծության բաշխման օրենքն է՝ $\dfrac{X}{P}\left|\dfrac{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots}{P_1,P_2,\cdots,P_n,\cdots}\right.$:

Սահմանում. Դիսկրետ պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասում կոչվում է այդ մեծության բոլոր հնարավոր արժեքների և համապատասխան հավանականությունների արտադրյալների գումարը, պայմանով, որ այդ գումարը բացարձակ զուգամետ է: Հակառակ դեպքում՝ մաթեմատիկական սպասում գոյություն չունի*:

X պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը նշանակենք E(X)-ով (գոյություն ունի նաև M(X) նշանակումը): Ըստ սահմանման՝ կունենանք. $E(X)=\sum_{i=1}^{\infty}x_iP_i$, եթե $\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|P_i<\infty$:

Մասնավոր դեպքում, երբ X-ը ընդունում է վերջավոր արժեքներ, ապա X պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը միշտ գոյություն ունի և հավասար է՝ $E(X)=\sum_{i=1}^{n}x_iP_i$:

Թվարկենք որոշ հայտնի դիսկրետ պատահական մեծությունների մաթեմատիկական սպասումները:

1. Եթե X պատահական մեծությունն ունի հետևյալ բաշխման օրենքը՝

$$\frac{X}{P}\left|\frac{0,\qquad 1}{1-P=q,P}\right.,\quad 0\le P\le 1,$$

ապա՝ E(X)=P:

2. Եթե X պատահական մեծությունն ունի հավանականությունների բինոմական բաշխում (2.2), ապա՝ EX=np:

* Ընդհանրապես, մաթեմատիկական սպասումը կարելի է սահմանել ցանկացած պատահական մեծության համար մեկ բանաձևով, որ արտահայտվում է Լեբեգի ինտեգրալի միջոցով, սակայն այդ սահմանումը իր բարդության պատճառով այստեղ չի տրվի:

3. Եթե X պատահական մեծությունն ունի Պուասոնի բաշխում $\lambda > 0$ պարամետրով (2.2), ապա՝ $E(X) = \lambda$:

Այսպիսով, Պուասոնի բաշխման պարամետրը ստանում է իմաստ, այսինքն՝ հավասար է պատահական մեծության միջին արժեքին:

Այժմ բերենք մի օրինակ, որն ավելի ցայտուն ցույց կտա մաթեմատիկական սպասման միջին արժեք լինելը:

Օրինակ: Վիճակախաղում շահումները բաշխված են հետևյալ կերպ.

m_1 շահում՝ յուրաքանչյուրը x_1 դրամ արժողությամբ,

m_2 շահում՝ յուրաքանչյուրը x_2 դրամ արժողությամբ,

....

m_k շահում՝ յուրաքանչյուրը x_k դրամ արժողությամբ,

որտեղ՝ $m_1+m_2+\ldots+m_n=n$: Գտնենք վիճակախաղի տոմսի շահումի միջին արժեքը: Տոմսի շահումի դրամական արժեքը նշանակենք X: Այն պատահական մեծություն է, որի բաշխման օրենքն է՝

$$\begin{array}{c|c} X & x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_k \\ \hline P & \frac{m_1}{n}, \frac{m_2}{n}, \ldots, \frac{m_k}{n} \end{array}; \quad P(X = x_i) = \frac{m_i}{n}, \quad i = \overline{1,k}:$$

Այստեղից հետևում է, որ

$$E(X) = x_1 \cdot \frac{m_1}{n} + x_2 \frac{m_2}{n} + \cdots + x_k \frac{m_k}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i m_i}{n}:$$

Այստեղ $\sum_{i=1}^{k} x_i m_i$ մեծությունը շահումների ընդհանուր գումարն է, իսկ n-ը՝ վիճակախաղի տոմսերի թիվը, ուստի E(X)-ը տոմսի միջին շահումն է:

Այժմ սահմանենք անընդհատ պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը:

Ենթադրենք՝ X պատահական մեծությունը անընդհատ է՝ f(x) խտության ֆունկցիայով:

Սահմանում. X անընդհատ պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասում կոչվում է հետևյալ մեծությունը՝

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx,$$

պայմանով, որ ինտեգրալը բացարձակ զուգամետ է, հակառակ դեպքում մաթեմատիկական սպասում գոյություն չունի:

Թվարկենք մի քանի հայտնի անընդհատ պատահական մեծությունների մաթեմատիկական սպասումները:

1. Եթե X պատահական մեծությունը [a, b] միջակայքում ունի հավասարաչափ բաշխում (2.2), ապա.

$$E(X) = \frac{a+b}{2}:$$

2. Եթե X պատահական մեծությունն ունի հավանականությունների ցուցչային բաշխում $\lambda>0$ պարամետրով (2.2), ապա.

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}:$$

3. Եթե X պատահական մեծությունը բաշխված է նորմալ a, σ պարամետրերով (2.2), ապա.

E(X) = a,

այս պատճառով a պարամետրը հաճախ անվանում են բաշխման կենտրոն:

4. Եթե X պատահական մեծությունն ունի χ^2 բաշխում՝ n ազատության աստիճանով (2.6), ապա՝

E(X)=n,

5. Եթե X պատահական մեծությունն ունի Ստյուդենտի բաշխում (2.6), ապա՝ E(X)=0,

6. Եթե X պատահական մեծությունն ունի Ֆիշերի բաշխում՝ (n, m) ազատության աստիճաններով (2.6), ապա.

$$E(X)=\frac{n}{n-2}:$$

Պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումն ունի հետևյալ հատկությունները՝

1. Հաստատուն մեծության մաթեմատիկական սպասումը հավասար է հենց իրեն, այսինքն՝

E(C)=C, C=const:

2. Հաստատուն արտադրիչը կարելի է դուրս բերել մաթեմատիկական սպասման նշանի տակից, այսինքն՝

E(CX)=CE(X):

3. Վերջավոր թվով պատահական մեծությունների գումարի մաթեմատիկական սպասումը հավասար է այդ պատահական մեծությունների մաթեմատիկական սպասումների գումարին, այսինքն՝

$E(X_1+X_2+\ldots+X_n)=E(X_1)+E(X_2)+\ldots+E(X_n)$:

4. Անկախ պատահական մեծությունների արտադրյալի մաթեմատիկական սպասումը հավասար է այդ պատահական մեծությունների մաթեմատիկական սպասումների արտադրյալին, այսինքն՝

$E(X\cdot Y)=E(X)\cdot E(Y)$,

որտեղ՝ X և Y պատահական մեծություններն անկախ են:

5. Եթե X և Y պատահական մեծությունների համար $P(X\geq Y)=1$, ապա՝ $E(X)\geq E(Y)$:

6. Եթե X և Y պատահական մեծությունների համար P(X=Y)=1, ապա՝ E(X) = E(Y):

7. Եթե X≥0 և E(X)=0, ապա՝ P(X=0)=1:

8. *Չեբիշևի անհավասարությունը.* Եթե X պատահական մեծությունը ոչ բացասական է՝ X≥0, ապա կամայական ε>0 թվի համար տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը՝

$$P(X\geq\varepsilon)\leq\frac{E(X)}{\varepsilon}:$$

9. Եթե X պատահական մեծությունը դիսկրետ է, իսկ φ ֆունկցիան որոշված է X պատահական մեծության հնարավոր արժեքների բազմության վրա, ապա φ(X) պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$E(\varphi(X))=\sum_{i=1}^{n}\varphi(x_i)P_i$$

որտեղ՝ $x_1, x_2, \cdots, x_n$ թվերը X պատահական մեծության արժեքներն են, իսկ $P_i=P(X=x_i)$, $i=\overline{1,n}$:*

10. Եթե X պատահական մեծությունը անընդհատ պատահական մեծություն է՝ f(x) խտության ֆունկցիայով, իսկ φ ֆունկցիան որոշված X պատահական մեծության արժեքների բազմության վրա անընդհատ ֆունկցիա է, ապա φ(X) պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$E(\varphi(X))=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)f(x)dx:$$

Դիտողություն. 4-րդ հատկության մեջ հակառակ պնդումը ոչ միշտ տեղի ունի: Այն տեղի ունի, երբ X և Y պատահական մեծությունները բաշխված են նորմալ, այսինքն՝ եթե X և Y պատահական մեծությունները բաշխված են նորմալ և E(X·Y)=EX·EY, ապա X և Y պատահական մեծություններն անկախ են:

---

* Եթե X պատահական մեծության արժեքները հաշվելի են, ապա

$$E(\varphi(X))=\sum_{i=1}^{\infty}\varphi(x_i)P_i \text{, եթե միայն } \sum_{i=1}^{\infty}|\varphi(x_i)|P_i<\infty:$$

2. 8. Պատահական մեծության դիսպերսիան և դրա հատկությունները

Պատահական մեծության կարևորագույն թվային բնութագրիչներից է դիսպերսիան, որը ցույց է տալիս պատահական մեծության միջին քառակուսային ցրվածության (շեղման) աստիճանը միջին արժեքից՝ մաթեմատիկական սպասումից:

Պատահական մեծության դիսպերսիան սովորաբար նշանակում են V(X) կամ D(X):

Սահմանում. Պատահական մեծության դիսպերսիա է կոչվում պատահական մեծության՝ իր մաթեմատիկական սպասումից շեղման քառակուսու մաթեմատիկական սպասումը, այսինքն՝

$V(X)=E(X-EX)^2$,

Հաշվի առնելով նախորդ պարագրաֆում ձևակերպված մաթեմատիկական սպասման 9 և 10 հատկությունները՝ դիսկրետ X պատահական մեծության դիսպերսիան կարելի է հաշվի հետևյալ բանաձևով՝

$$V(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-E(X))^2 P_i\ ,$$

որտեղ՝ $x_1, \cdots, x_n$ պատահական մեծության արժեքներն են, $P_i=P(X=x_i)$ $i=\overline{1,n}$, իսկ անընդհատ X պատահական մեծության դիսպերսիան՝

$$V(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-E(X))^2 f(x)\,dx\ ,$$

որտեղ՝ f(x) -ը X պատահական մեծության խտության ֆունկցիան է:

Պատահական մեծության դիսպերսիան հաշվելու համար երբեմն հարմար է, սահմանումից ստացված, հետևյալ բանաձևը՝

$V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$:

Թվարկենք մի քանի հայտնի բաշխումներ ունեցող պատահական մեծությունների դիսպերսիաները:

1.Եթե X պատահական մեծությունն ունի հետևյալ բաշխման օրենքը՝

$$\begin{array}{c|cc} X & 0, & 1 \\ \hline P & q, & p \end{array},\quad q+p=1,$$

ապա՝ V(X) = p q:

2. Եթե X պատահական մեծությունն ունի հավանականությունների բինոմական բաշխում (2.2), ապա՝ V(X)=npq:

3. Եթե X պատահական մեծությունն ունի հավանականությունների Պուասոնի բաշխում $\lambda>0$ պարամետրերով (2.2), ապա՝ $V(X)=\lambda$

4. Եթե X պատահական մեծությունն [a, b] միջակայքում ունի հավասարաչափ բաշխում (2.2), ապա՝ $V(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$:

5. Եթե X պատահական մեծությունն ունի հավանականությունների ցուցչային բաշխում $\lambda>0$ պարամետրով (2.2), ապա՝ $V(X)=\dfrac{1}{\lambda^2}$:

6. Եթե X պատահական մեծությունը բաշխված է նորմալ a, σ պարամետրերով (2.2), ապա՝ $V(X)=\sigma^2$:

7. Եթե X պատահական մեծությունն ունի χ^2 բաշխում՝ n ազատության աստիճանով (2.6), ապա. V(X)=2n:

8. Եթե X պատահական մեծությունն ունի Ստյուդենտի բաշխումը՝ n ազատության աստիճանով (2.6), ապա.

$$V(X)=\frac{n}{n-2}\ :$$

9. Եթե X պատահական մեծությունն ունի Ֆիշերի բաշխում՝ (n, m) ազատության աստիճաններով (2.6), ապա.

$$V(X)=\frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-4)(n-2)^2}:$$

Պատահական մեծության դիսպերսիան ունի հետևյալ հատկությունները՝

1. Հաստատուն մեծության դիսպերսիան հավասար է զրոյի՝ V(C)=0:

2. Պատահական մեծության դիսպերսիան ոչ բացասական է՝ V(X)≥0, դիսպերսիան հավասար է 0-ի այն և միայն այն դեպքում, երբ P(X=C)=1, որտեղ՝ C-ն հաստատուն է (կախված չէ ω -ից):

3. Հաստատուն արտադրիչը կարելի է դուրս բերել դիսպերսիայի նշանի տակից քառակուսի աստիճանով, այսինքն՝
$V(CX)=C^2V(X)$:

Սահմանում: Պատահական մեծության դիսպերսիայի քառակուսի արմատի արժեքը կոչվում է միջին քառակուսային շեղում:

Նշանակելով այն σ (X) կամ σ՝ կունենանք.

$$\sigma=\sigma(X)=\sqrt{V(X)}:$$

4. Կամայական C հաստատունի համար տեղի ունի՝ V(X±C)=V(X) հավասարությունը:

5. Անկախ պատահական մեծությունների գումարի կամ տարբերության դիսպերսիան հավասար է դրանց դիսպերսիաների գումարին* այսինքն՝

V(X±Y)=V(X)+V(Y):

* Կարելի է ցույց տալ, որ եթե $X_1, X_2, \ldots, X_n$ –ը անկախ պատահական մեծություններ են, ապա՝ $V\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}V(X_i)$:

6. Կամայական X և Y պատահական մեծությունների համար տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը՝

V(X+Y)=V(X)+V(Y)+2 cov(X, Y),

որտեղ՝ Cov(X, Y)=E((X-EX)(Y-EY)) և անվանում են X և Y պատահական մեծությունների միջև կովարիացիա կամ կոռելյացիոն մոմենտ: Այս մեծությունն ավելի մանրամասն կներկայացնենք հաջորդ պարագրաֆում:

7. *Չեբիշևի անհավասարության այլ գրելաձև*

Կամայական X պատահական մեծության համար և կամայական ε>0 թվի համար տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը՝

$$P(|X-EX|\geq\varepsilon)\leq\frac{V(X)}{\varepsilon^2}:$$

8. $g(x)=E(X-x)^2$ ֆունկցիան ընդունում է իր փոքրագույն արժեքը x=EX կետում և հավասար է X պատահական մեծության դիսպերսիային՝ min g(x)=V(X):

2.9. Պատահական մեծության թվային այլ բնութագրիչներ

Սահմանում. Պատահական մեծության k կարգի սկզբնական մոմենտ կոչվում է պատահական մեծության k աստիճանի մաթեմատիկական սպասումը՝

$V_k=E(X^k)$, k=0, 1, 2, ...

Եթե X-ը դիսկրետ պատահական մեծություն է՝

$$\begin{array}{c|c} X & x_1, x_2, \cdots, x_n \\ \hline P & P_1, P_2, \cdots, P_n \end{array},$$

ապա՝ $V_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k P_i$:

Եթե X-ը անընդհատ պատահական մեծություն է՝ f(x) խտության ֆունկցիայով, ապա

$$V_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx :$$

Նկատենք, որ պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումն առաջին կարգի սկզբնական մոմենտն է:

Սահմանում. Պատահական մեծության k կարգի կենտրոնական մոմենտ կոչվում է X-E(X) շեղման k աստիճանի մաթեմատիկական սպասումը, այսինքն՝

$$\mu_k = E(X-E(X))^k, k=0,1,2,\cdots :$$

Դիսկրետ պատահական մեծության համար կունենանք.

$$\mu_k = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^k P_i ,$$

իսկ անընդհատ պատահական մեծության համար՝

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^k f(x)\, dx :$$

Մասնավորապես՝ $\mu_0=1$, $\mu_1=0$, $\mu_2=V(X)$: Ընդհանրապես երրորդ* կարգի կենտրոնական մոմենտը բնութագրում է X պատահական մեծության բաշխման համաչափությունը (սիմետրիկությունը): Իրոք, եթե X պատահական մեծությունն ունի համաչափ (սիմետրիկ) բաշխում x=E(X) ուղղի նկատմամբ, այսինքն՝ յուրաքանչյուր X-EX շեղման համար գոյություն ունի հավասար հավանականությամբ դրան հակադիր շեղում, ապա՝

$$\mu_3 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^3 P_i$$

* Կարելի է ասել կենտ կարգի:

արտահայտության մեջ համապատասխան գումարելիները չեզոքացնում են միմյանց, և երրորդ կարգի կենտրոնական մոմենտը հավասարվում է զրոյի: Եթե երրորդ կարգի կենտրոնական մոմենտը զրոյի հավասար չէ՝ նշանակում է, որ պատահական մեծության բաշխումը համաչափ չէ: Որքան երրորդ կարգի մոմենտը մոտ է 0-ի, այնքան պատահական մեծության բաշխումը x=E(X) ուղղի նկատմամբ մոտ է համաչափությանը:

Սկզբնական և կենտրոնական մոմենտները փոխադարձաբար արտահայտվում են միմյանցով: Տեղի ունեն հետևյալ բանաձևերը՝

$$\mu_k = V_k - C_k^1 V_1 V_{k-1} + C_k^2 V_1^2 V_{k-2} - \cdots + (-1)^k V_1^k ,$$

$$V_k = \mu_k + C_k^1 V_1 \mu_{k-1} + C_k^2 V_1^2 \mu_{k-2} + \cdots + V_1^k ,$$

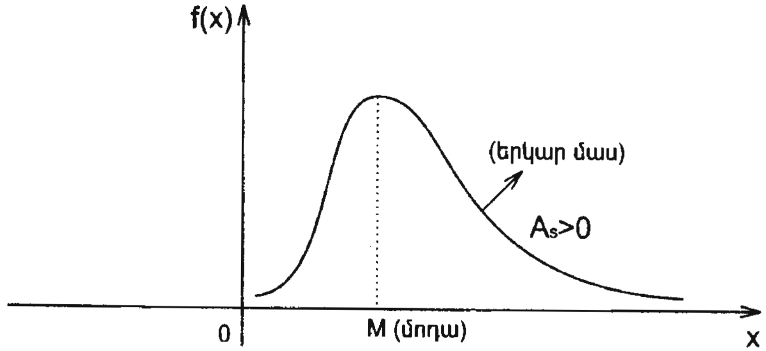
որտեղ՝ $C_k^i = \frac{k!}{i!(k-i)!}$, $i = \overline{1,k}$:

Սահմանում. Պատահական մեծության բաշխման ասիմետրիա կոչվում է երրորդ կարգի կենտրոնական մոմենտի հարաբերությունը միջին քառակուսային շեղման խորանարդին՝

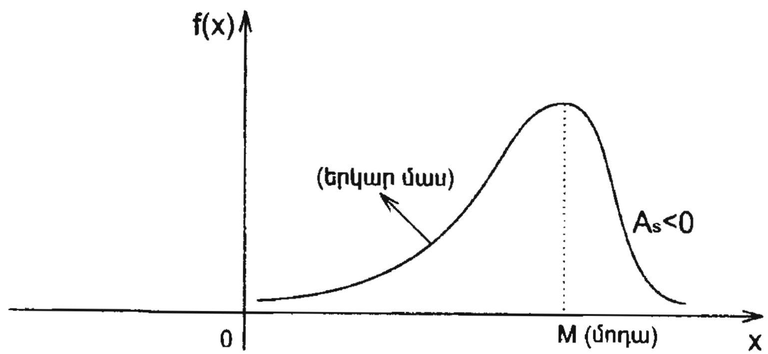
$$A_s = \frac{\mu^3}{\sigma^3} :$$

Ասիմետրիան դրական է, եթե բաշխման կորի «երկար մասը» գտնվում է մաթեմատիկական սպասումից աջ, բացասական է, եթե կորի «երկար մասը» գտնվում է մաթեմատիկական սպասումից ձախ: Ասիմետրիան հավասար է 0-ի, երբ բաշխման կորը համաչափ է x=EX ուղղի նկատմամբ:

Գործնականում ասիմետրիայի նշանը որոշում են մոդայի՝ (խտության ֆունկցիայի մաքսիմումի կետ) նկատմամբ խտության ֆունկցիայի գրաֆիկի դիրքով: Եթե նշված գրաֆիկի «երկար մասը» դասավորված է մոդայից աջ, ապա $A_s>0$, իսկ եթե դասավորված է մոդայից ձախ, ապա՝ $A_s<0$, (տե՛ս գրաֆիկ 2.9, գրաֆիկ 2.10):



Գրաֆիկ 2.9



Գրաֆիկ 2.10

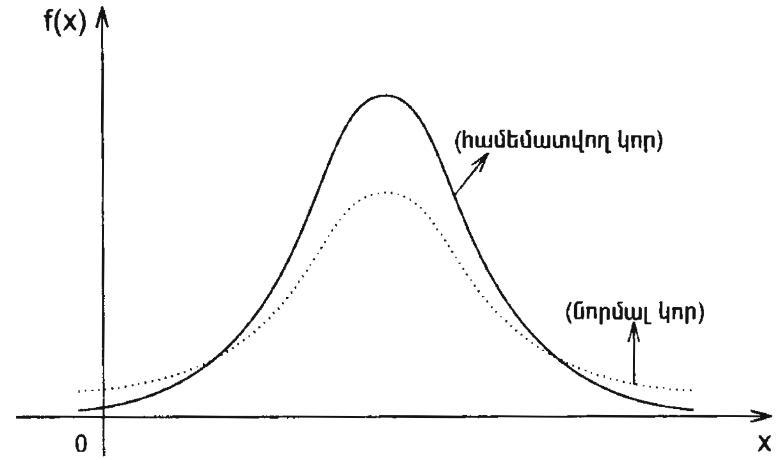
Սահմանում. Պատահական մեծության բաշխման էքսցես անվանում են հետևյալ մեծությունը՝

$$E_k = \frac{\mu^4}{\sigma^4} - 3:$$

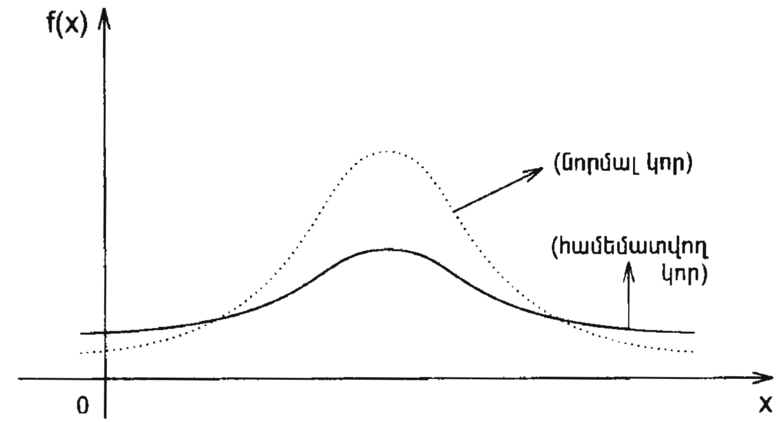
Այս բնութագրիչը ցույց է տալիս պատահական մեծության բաշխման «վերելքի» մեծ կամ փոքր լինելը տվյալ պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասման և դիսպերսիային հավասար պարամետրերով նորմալ բաշխման համեմատ:

Նորմալ բաշխման համար $E_k=0$, ուստի, եթե որևէ պատահական մեծության բաշխման էքսցեսը տարբեր է 0-ից, ապա այն տարբեր է նորմալից:

Եթե պատահական մեծության բաշխման էքսցեսը դրական է, ապա դրա բաշխման կորն ունի ավելի բարձր և «սուր» գագաթ, քան նորմալ կորը (նորմալ բաշխված պատահական մեծության խտության ֆունկցիայի գրաֆիկը), հակառակ դեպքում ($E_k<0$) համեմատվող կորն ունի ավելի ցածր և «հարթ» գագաթ, քան նորմալ կորը (տե՛ս գրաֆիկ 2.11, գրաֆիկ 2.12):



Գրաֆիկ 2.11



Գրաֆիկ 2.12

Սահմանում: Պատահական մեծության մեդիանա(միջնարժեք) կոչվում է այն x_0 թիվը, որի համար տեղի ունեն հետևյալ անհավասարությունները՝

$$F(x_o) \le \frac{1}{2}, \qquad F(x_0+0) \ge \frac{1}{2},$$

որտեղ՝ $F(x_0+0)=\lim_{x\downarrow x_0}F(x)$:

Մասնավորապես անընդհատ պատահական մեծությունների համար, այն որոշվում է հետևյալ հավասարությամբ՝

$$\int_{-\infty}^{x_0} f(x)dx = \int_{x_0}^{\infty} f(x)dx = \frac{1}{2}:$$

Սահմանում. α կարգի կվանտիլ $\alpha\in(0,1)$, կոչվում է այն X_α թիվը, որի համար $F(X_\alpha)\le\alpha$, $F(X_\alpha+0)\ge\alpha$: Եթե X պատահական մեծությունն անընդհատ է, ապա x_α կվանտիլը որոշվում է հետևյալ հավասարությամբ՝ $F(X_\alpha)=\alpha$: Ակնհայտ է, որ մեդիանան իրենից ներկայացնում է α կարգի կվանտիլ:

2.10. Երկչափ պատահական մեծության բնութագրիչները

Սահմանում. Երկչափ Z=(X, Y) պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասում կամ միջին կոչվում է հետևյալ երկչափ վեկտորը՝ E(Z)=(E(X), E(Y)), որի կոորդինատներն են X և Y պատահական մեծությունների մաթեմատիկական սպասումները:

Նկատենք, որ երկչափ պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը, ի տարբերություն մեկ չափանիի, այլևս թիվ չէ, այն վեկտոր է (կամ թվազույգ):

Սահմանում. Երկչափ Z=(X, Y) պատահական մեծության (k,m)-րդ կարգի սկզբնական մոմենտ կոչվում է X^k և Y^m պատահական մեծությունների արտադրյալի միջինը, այսինքն՝

$V_{km}=E(X^k.Y^m)$:

Մասնավոր դեպքում $V_{k0}=E(X^k)$ (k=0,1,2...) մեծությունը X պատահական մեծության k-րդ կարգի մոմենտն է, իսկ $V_{0m}=E(Y^m)$ (m=0,1,2...) մեծությունը՝ Y պատահական մեծության m-րդ կարգի մոմենտը: Կիրառությունների մեջ էական նշանակություն ունի $V_{11}=E(X\cdot Y)$ մոմենտը:

Սահմանում. Երկչափ Z=(X,Y) պատահական մեծության (k,m)-րդ կարգի կենտրոնական մոմենտ կոչվում է $(X-EX)^k$ և $(Y-EY)^m$ պատահական մեծությունների արտադրյալի մաթեմատիկական սպասումը, այսինքն՝

$$\mu_{km}=E\left[(X-E(X))^k(Y-E(Y))^m\right]:$$

Եթե երկչափ Z=(X,Y) պատահական մեծությունը դիսկրետ է $\{P_{ij}\}\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,s}$ բաշխման օրենքով, ապա.

$$\mu_{km}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{s}\left[(x_i-E(X))^k(y_j-E(Y))^m P_{ij}\right],$$

իսկ, եթե Z=(X,Y) պատահական մեծությունը անընդհատ է՝ f (x, y) խտությամբ, ապա.

$$\mu_{km}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-E(X))^k(y-E(Y))^m f(x,y)dxdy:$$

Մասնավոր դեպքում μ_{k0} և μ_{0m} մոմենտները համապատասխանաբար X և Y պատահական մեծությունների k և m կարգի կենտրոնական մոմենտներն են, իսկ μ_{20} և μ_{02} մոմենտները՝ X և Y պատահական մեծությունների դիսպերսիաները:

Էկոնոմետրիկայում մեծ նշանակություն ունի՝

$$\mu_{11}=E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$$

մոմենտը, որին անվանում են X և Y պատահական մեծությունների միջև կովարիացիա կամ կոռելյացիոն մոմենտ: Այսուհետև մենք կօգտագործենք կովարիացիա տերմինը և այն կնշանակենք $Cov(X,Y) = \mu_{11}$:

Հեշտ է տեսնել, որ՝

$Cov(X,Y)=E(X \cdot Y)-E(X)E(Y)$:

Եթե X և Y պատահական մեծությունները անկախ են, ապա վերջին բանաձևից հետևում է, որ Cov(X,Y)=0, հակառակը ոչ միշտ է ճիշտ:

Սահմանում. Եթե X և Y պատահական մեծությունների միջև կովարիացիան հավասար է 0-ի, ապա ասում են, որ X և Y պատահական մեծությունները չկոռելացված են:

Թեորեմ. Եթե Z=(X,Y) երկչափ պատահական մեծությունը բաշխված է նորմալ և X, Y պատահական մեծությունները չկոռելացված են, ապա դրանք անկախ են:

Սահմանում. Երկչափ Z=(X, Y) պատահական մեծության կովարիացիոն մատրից անվանում են հետևյալ մատրիցը՝

$$V(Z)=\begin{pmatrix} \mu_{20} & \mu_{11} \\ \mu_{11} & \mu_{02} \end{pmatrix}$$

Ակնհայտ է, որ կովարիացիոն մատրիցը սիմետրիկ մատրից է, այսինքն՝ $V(Z)=(V(Z))'$, որտեղ $(V(Z))'$[*]-ը կովարիացիոն մատրիցի շրջված մատրիցն է: Կովարիացիոն մատրիցի գլխավոր անկյունագծի վրա գտնվում են երկչափ պատահական մեծության բաղադրիչների դիսպերսիաները, իսկ անկյունագծից դուրս՝ բաղադրիչների միջև կովարիացիաները:

Օրինակ. Ենթադրենք՝ երկչափ Z=(X,Y) պատահական մեծությունը բաշխված է նորմալ (2.4): Օգտվելով երկչափ պատահական մեծության բնութագրիչների սահմանումներից՝ կարելի է

[*] Այս նշանակումը չպետք է շփոթել դիսպերսիայի հետ: Ընդհանրապես երկչափ կամ ավելի բարձր չափողականությամբ պատահական մեծությունների համար դիսպերսիա չի սահմանվում, այն փոխարինվում է կովարիացիոն մատրիցով:

գտնել պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը և կովարիացիոն մատրիցը: Եթե Z պատահական մեծության խտության ֆունկցիան տրված է հետևյալ բանաձևով.

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-a_1)^2}{\sigma_1^2}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-2r\frac{(x-a_1)(y-a_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-a_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\},$$

ապա՝ $E(Z) = (a_1,a_2)$:

$$V(Z)=\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & r\sigma_1\sigma_2 \\ r\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}:$$

Եթե (x,y) վեկտորը նշանակենք $\bar{x}$, E(Z) վեկտորը՝ a, V(Z) մատրիցը՝ Σ և ենթադրենք, որ Σ մատրիցի որոշիչը զրո չէ, այսինքն՝

$$|\Sigma|=(\sigma_1\sigma_2)^2-r^2(\sigma_1\sigma_2)^2 \neq 0,$$

ապա երկչափ պատահական մեծության խտության ֆունկցիան կարելի է գրել հետևյալ մատրիցային տեսքով՝

$$f(\bar{x})=\frac{1}{2\pi\sqrt{|\Sigma|}}\exp\left(-\frac{1}{2}(\bar{x}-a)\Sigma^{-1}(\bar{x}-a)'\right),$$

որտեղ՝ $(\bar{x}-a)'=(x-a_1,y-a_2)'=\begin{pmatrix} x-a_1 \\ y-a_2 \end{pmatrix}$, Σ^{-1}-ը

Σ մատրիցի հակադարձ մատրիցն է, այսինքն՝

$$\Sigma^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{(1-r)\sigma_1^2} & -\frac{1}{\sigma_1\sigma_2(1-r^2)} \\ \frac{r}{\sigma_1\sigma_2(1-r^2)} & \frac{1}{\sigma_2^2(1-r^2)} \end{pmatrix}:$$

Էկոնոմետրիկայի հիմնական խնդիրներից մեկն է պարզել X և Y պատահական մեծությունների կախվածության ձևը և գնահատել կախվածության չափը: Այս խնդիրը լուծելու համար պետք է հասկանալ, որ երկու պատահական մեծություններ կամ կապված են ֆունկցիոնալ կախվածությամբ՝ գոյություն ունի φ ֆունկցիա, այնպիսին, որ $Y=\varphi(X)$, կամ կապված են ոչ ֆունկցիոնալ կախվածությամբ (նման կախվածությանը անվանում են վիճակագրական) կամ անկախ են:

Երկու պատահական մեծությունների միջև ֆունկցիոնալ կախվածությունը հազվադեպ է հանդիպում, քանի որ հիմնականում այդ մեծություններից գոնե մեկը գտնվում է պատահական գործոնների ազդեցության ներքո, այս դեպքում X և Y պատահական մեծությունների միջև առաջանում է վիճակագրական կախվածություն: Օրինակ, տնտեսագիտությունից հայտնի է, որ ապրանքի սպառման ծավալը կախված է գնից, սակայն փորձը ցույց է տալիս, որ գնի միևնույն մակարդակին համապատասխանում են սպառման տարբեր ծավալներ, այսինքն՝ գնի և սպառման միջև չկա ֆունկցիոնալ կախվածություն, այդ կախվածությունը վիճակագրական է:

Սահմանում. Ասում են՝ Y պատահական մեծության կախվածությունը X պատահական մեծությունից կոռելյացիոն է, եթե գոյություն ունի ֆունկցիոնալ կախվածություն X-ի արժեքների և դրանց համապատասխանող Y պատահական մեծության արժեքների միջինների միջև:

Երկու՝ X և Y պատահական մեծությունների միջև գծային կախվածությունը չափվում է կոռելյացիայի գործակցի միջոցով:

Սահմանում. X և Y պատահական մեծությունների կոռելյացիայի գործակից է կոչվում հետևյալ մեծությունը՝

$$r(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}}:$$

Կոռելյացիայի գործակիցն ունի հետևյալ հատկությունները.

1. Կամայական X և Y պատահական մեծությունների համար՝ $-1\le r(X,Y)\le 1$:

2. Եթե $r(X.Y)=1$, ապա՝ $Y=aX+b$, $a>0$, եթե $r(X,Y)=-1$, ապա՝ $Y=aX+b$, $a<0$:

3. Որքան $|r(X.Y)|$-ը մոտենում է մեկին, այնքան X և Y պատահական մեծությունների կախվածությունը մեծանում է, իսկ որքան $|r(X.Y)|$-ը մոտ է 0-ին, այնքան կախվածությունը թուլանում է:

4. Եթե X և Y պատահական մեծություններն անկախ են, ապա՝ $r(X,Y)=0$:*

2.11. Բազմաչափ նորմալ պատահական մեծություն, դրա հատկությունները

Սահմանում. Բազմաչափ (n-չափանի)՝ $Z=(X_1,X_2,..,X_n)'$ պատահական մեծությանը (վեկտորին) անվանում են չվերասերված, նորմալ բաշխված պատահական մեծություն (վեկտոր), եթե դրա բաշխման խտության ֆունկցիան տրվում է հետևյալ հավասարությամբ՝

$$f(x)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\Sigma|^{1/2}}\exp\left(-\frac{1}{2}(x-m)'\Sigma^{-1}(x-m)\right),$$

որտեղ՝ $x\in R^n$, $m\in R^n$, Σ-ն $n\times n$ - չափանի սիմետրիկ, դրական որոշված մատրից է ($\Sigma=\Sigma'$ և $\Sigma>0$):

* Եթե կոռելյացիայի գործակիցը հավասար է զրոյի, ապա դրանից ընդհանուր առմամբ չի հետևում, որ X և Y պատահական մեծություններն անկախ են (տես սույն պարագրաֆի առաջին թեորեմը):

m վեկտորը և Σ մատրիցը նորմալ բաշխման պարամետրերն են: Եթե m=0, իսկ $\Sigma=I$ (միավոր մատրից), ապա պատահական մեծությանն անվանում են ստանդարտ նորմալ պատահական մեծություն: Սովորաբար Z պատահական մեծության` m և $\Sigma$ պարամետրերով նորմալ բաշխված լինելը կրճատ գրում են հետևյալ ձևով` $Z\sim N(m, \Sigma)$:

Թվարկենք բազմաչափ նորմալ բաշխված պատահական մեծության հիմնական հատկությունները.

1. Եթե $Z\sim N(m, \Sigma)$, ապա $E(Z)=m$, $V(Z)=\Sigma$, որտեղ` $V(Z)$-ը Z պատահական մեծության կովարիացիոն մատրիցն է`

$V(Z)=E((Z-m)(Z-m'))$:

2. Նորմալ բաշխված վեկտորի կամայական ենթավեկտորը նույնպես նորմալ է բաշխված:

3. Եթե Z-ը և Y-ը նորմալ բաշխված անկախ վեկտորներ են, ապա $U=\begin{pmatrix} Z \\ Y \end{pmatrix}$ վեկտորը նույնպես կլինի նորմալ բաշխված:

4. Եթե $U=\begin{pmatrix} Z \\ Y \end{pmatrix}$ վեկտորը նորմալ է բաշխված, իսկ Z և Y պատահական մեծությունները չկոռելացված են, ապա դրանք կլինեն անկախ:

5. Եթե Z պատահական մեծությունը n-չափանի նորմալ բաշխված վեկտոր է` m և $\Sigma$ պարամետրերով, A-ն` kxn-չափանի մատրից, L-ը` k-չափանի վեկտոր (kx1), ապա k չափանի $Y=AZ+L$ պատահական մեծությունը բաշխված կլինի նորմալ $Am+L$ և $A\Sigma A'$ պարամետրերով:

6. Եթե ε-ը n-չափանի ստանդարտ նորմալ բաշխված պատահական մեծություն է` $X=A\varepsilon+a$, $Y=B\varepsilon+b$, որտեղ` A-ն pxn չափանի մատրից է, B-ն` qxn-չափանի մատրից, $a\in R^p$, $b\in R^q$, ապա $Cov(X,Y)=AB'$: Մասնավորապես, X և Y պատահական վեկտորները կլինեն անկախ միայն և միայն այն դեպքում, երբ $AB'=0$:

7. Եթե ε-ը n-չափանի ստանդարտ նորմալ բաշխված պատահական մեծություն է, իսկ M-ը` nxn-չափանի իդեմպոտենտ մատրից, ապա $\varepsilon'M\varepsilon$ պատահական մեծությունը բաշխված է $\chi^2$ բաշխմամբ` rank(M) ազատության աստիճանով:

8. Եթե Z-ը n-չափանի նորմալ բաշխված պատահական մեծություն է` m և $\Sigma$ պարամետրերով, ապա $(Z-m)'\Sigma^{-1}(Z-m)$ պատահական մեծությունը բաշխված է $\chi^2$ բաշխմամբ` n ազատության աստիճանով:

9. Եթե` $X_1, X_1, \ldots, X_n$ պատահական մեծությունները անկախ, a և $\sigma$ պարամետրերով նորմալ բաշխված մեկ չափանի պատահական մեծություններ են, ապա` $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ և $\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$ պատահական մեծություններն անկախ են:

10. 9-րդ հատկության պայմանների դեպքում

$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$ պատահական մեծությունը բաշխված է χ^2 բաշխմամբ n-1 ազատության աստիճանով:

11. 9-րդ հատկության պայմանների դեպքում.

$\dfrac{\left(\overline{X}-a\right)\sqrt{n}}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2}}$ պատահական մեծությունը բաշխված է Ստյուդենտի բաշխմամբ` n-1 ազատության աստիճանով:

2.12. Մեծ թվերի օրենք: Հավանականությունների կենտրոնական սահմանային և Սլուցկու թեորեմները

Մեծ թվերի օրենք ասելով հասկանում ենք մի շարք սահմանային թեորեմներ, որոնք հաստատում են, որ միավորին մոտ հավանականությամբ տեղի կունենան որոշ պատահարներ, որոնք վերաբերում են մեծ թվով պատահական մեծությունների գումարին:

Եթե $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ պատահական մեծությունների հաջորդականության առաջին n անդամների միջին թվաբանականի համար գոյություն ունի $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ թվային հաջորդականություն, այնպիսին, որ կամայական $\varepsilon>0$ թվի համար տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը՝

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{X_1+X_2+\cdots X_n}{n}-\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right|<\varepsilon\right\}=1, \quad (2.19)$$

ապա ասում են, որ տեղի է ունեցել մեծ թվերի օրենքը:

Մեծ թվերի օրենքի ամենաընդհանուր թեորեմը, անկախ պատահական մեծությունների համար, Չեբիշևի թեորեմն է: Մինչև այն ձևակերպելը տանք հետևյալ սահմանումները:

Սահմանում: Պատահական մեծությունների $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$: հաջորդականությունը համարյա հավաստի (հավաստի բառի փոխարեն հաճախ օգտագործվում է ամենուրեք բառը) զուգամիտում է X պատահական մեծությանը, եթե

$$P\left(\lim_{n\to\infty} X_n = X\right)=1\left(X_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} X\,h.h.\right): \quad (2.20)$$

Սահմանում: Պատահական մեծությունների $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ հաջորդականությունը ըստ հավանականության զուգամիտում է

X պատահական մեծությանը, եթե կամայական $\varepsilon>0$ թվի համար տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը՝

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|X_n - X\right|>\varepsilon\right)=0\left(P\lim_{n\to\infty} X_n = X, X_n \underset{n\to\infty}{\overset{P}{\rightarrow}} X\right): \quad (2.21)$$

Կարելի է ցույց տալ, որ եթե պատահական մեծությունների $\{X_n\}$ հաջորդականությունը համարյա հավաստի զուգամիտում է X պատահական մեծությանը, ապա զուգամիտությունը տեղի ունի նաև ըստ հավանականության: Հակառակը ոչ միշտ է ճիշտ:

Այժմ ձևակերպենք Չեբիշևի թեորեմը՝

Թեորեմ. Դիցուք, $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ անկախ պատահական մեծությունների հաջորդականություն է, որոնց համար գոյություն ունի մաթեմատիկական սպասում՝ $E(X_k)=a_k$, $k=1,2,\ldots$ և դիսպերսիա $V(X_k)=b_k < L$ կամայական k-ի համար, այդ դեպքում տեղի ունի մեծ թվերի օրենքը՝ կամայական $\varepsilon>0$ թվի համար

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}-\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right|<\varepsilon\right\}=1: \quad (2.22)$$

Դիտողություն 1. Թեորեմից հետևում է, որ $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ պատահական մեծությունների միջին թվաբանականը ըստ հավանականության զուգամիտում է համապատասխան մաթեմատիկական սպասումների՝ $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ միջին թվաբանականին, սա նշանակում է, որ բավականաչափ մեծ n-երի համար պատահական մեծությունների միջին թվաբանականը և մաթեմատիկական սպասումների միջին թվաբանականը համարյա հավասար են:

Դիտողություն 2. Եթե $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ անկախ պատահական մեծությունները նույն ձևով են բաշխված և գոյություն ունի դրանց մաթեմատիկական սպասումը՝ $E(X_k)=a$, $k=1, 2, \ldots$ և դիսպերսիան $V(X_k)=b$, $k=1,2, \ldots$, ապա միավորի ձգտող հավանականությամբ կարելի է պնդել, որ $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ պատահական մեծություն-ների միջին թվաբանականը քիչ է տարբերվում պատահական մե-ծությունների մաթեմատիկական սպասումից, երբ n-ը մեծանում է անվերջորեն, այսինքն՝ կամայական $\varepsilon>0$ թվի համար

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}-a\right|<\varepsilon\right\}=1: \qquad (2.23)$$

Հետևանք. (Բեռնուլիի թեորեմ): Եթե Բեռնուլիի անկախ փոր-ձերում A պատահարի՝ յուրաքանչյուր փորձում տեղի ունենալու հավանականությունը հաստատուն է և հավասար է $P(0<P<1)$, իսկ փորձերի թիվը՝ n -ը, ձգտում է անվերջության, ապա միավորի ձգտող հավանականությամբ կարելի է պնդել, որ պատահարի երևումների հաճախության շեղումը դրա՝ յուրաքանչյուր առան-ձին փորձում տեղի ունենալու հավանականությունից փոքր է նա-խապես տրված ցանկացած $\varepsilon>0$ թվից, այսինքն՝

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n}-P\right|<\varepsilon\right)=1, \qquad (2.24)$$

որտեղ m-ը A պատահարի երևումների թիվն է՝ n անկախ փորձերում:

Կիրառություններում ավելի շատ օգտագործվում է Բեռնու-լիի թեորեմի ապացույցից հետևող հետևյալ բանաձևը՝

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-P\right|<\varepsilon\right)\approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right), \qquad (2.25)$$

երբ n-ը բավականաչափ մեծ է: (2.25) բանաձևում $\Phi(x)$ ֆունկցիան Լապլասի ֆունկցիան է:

Եթե $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ պատահական մեծությունների հաջոր-դականության առաջին n անդամների միջին թվաբանականի հա-

մար գոյություն ունի $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ թվային հաջորդականություն, այնպիսին, որ տեղի ունի

$$P\left\{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{X_1+X_2+\cdots+X_2}{n}-\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right|=0\right\}=1 \qquad (2.26)$$

հավասարությունը, ապա ասում են, որ տեղի ունի մեծ թվերի ու-ժեղացված օրենքը: (2.26) հավասարությունը կարելի է գրել նաև հետևյալ տեսքով՝

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{X_1+X_2+\cdots+X_2}{n}-\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right|=0, h\cdot h\cdot:$$

Թեորեմ. Եթե $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ անկախ պատահական մե-ծությունները նույն ձևով են բաշխված և գոյություն ունի դրանց մաթեմատիկական սպասումը՝ $E(X_k)=a$, k=1, 2, …, ապա՝

$$\frac{X_1+X_2+\cdots+X_2}{n}\to a, h\cdot h\ :$$

Դիցուք, $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ անկախ պատահական մեծություն-ներ են՝ համապատասխան $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ մաթեմատիկական սպասումներով, $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ դիսպերսիաներով, $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ երրորդ կարգի բացարձակ կենտրոնական մոմենտներով*: Նշանակենք.

$B_n=b_1+b_2+\ldots+b_n$:

Այդ դեպքում հավանականությունների տեսության առանց-քային՝ կենտրոնական սահմանային թեորեմը, որը ապացուցված է ակադեմիկոս Ա.Մ. Լյապունովի կողմից և այդ պատճառով հա-

---

* X պատահական մեծության k կարգի բացարձակ կենտրոնական մոմենտ ասելով հասկանում ենք $E|X-EX|^k$ մեծությունը:

ճախ անվանում են Լյապունովի թեորեմ, կձևակերպվի հետևյալ կերպ՝ Թեորեմ. եթե տեղի ունի՝ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}c_k}{B_n^{3/2}}=0$ պայմանը (Լյապունովի պայման), ապա՝ $\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(X_k-a_k)}{\sqrt{B_n}}$ պատահական մեծության հավանականությունների բաշխման սահմանային ֆունկցիան, երբ n-ը ձգտում է անվերջության, կլինի հավանականությունների նորմալ բաշխման ֆունկցիան՝ 0 և 1 պարամետրերով, այսինքն՝

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(X_k-a_k)}{\sqrt{B_n}}<x\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt:$$

Պարզաբանենք Լյապունովի պայմանի իմաստը:

Դիտարկենք.

$$Y_{nk}=\frac{X_k-a_k}{\sqrt{B_n}},\quad k=1,2,\cdots,n,\cdots,$$

պատահական մեծությունները: Լյապունովի պայմանը այս նշանակումներով կգրվի հետևյալ կերպ.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}E\left(\left|Y_{nk}\right|^3\right)=0:$$

Որպեսզի տեղի ունենա այս պայմանը, անհրաժեշտ է, որ տեղի ունենա հետևյալ հավասարությունը՝

$$\lim_{n\to\infty}E\left(\left|Y_{nk}\right|^3\right)=0: \qquad (2.27)$$

Այժմ օգտագործելով Չեբիշևի անհավասարությունը հետևյալ տեսքով՝

$P\left(|X|\geq\varepsilon\right)\leq\frac{E|X|^3}{\varepsilon^3}$, կունենանք.

$$P\left(|Y_{nk}|\geq\varepsilon\right)\leq\frac{E\left(\left|Y_{nk}\right|^3\right)}{\varepsilon^3}:$$

Օգտագործելով (2.27) հավասարությունը, կստանանք, որ Y_{nk} պատահական մեծությունները, երբ n-ը ձգտում է անսահմանության, ըստ հավանականության զուգամիտում են զրոյի, այսինքն՝ կամայական ε>0 թվի համար տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը՝

$$\lim_{n\to\infty}P\left(|Y_{nk}|\geq\varepsilon\right)=0,\quad k=1,2,\cdots,n,\cdots$$

կամ

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{X_k-a_k}{\sqrt{B_n}}\right|\geq\varepsilon\right)=0,\qquad k=1,2,\cdots,n,\cdots$$

Այստեղից հետևում է, որ Լյապունովի պայմանը, X_k (k=1, 2, ..., n..) մեծությունների վրա դրվելով, պահանջում է, որ կամայական k-ի և բավականաչափ մեծ n-երի համար $\frac{X_k-a_k}{\sqrt{B_n}}$ պատահական մեծությունները մոտ լինեն զրոյի:

Այսպիսով, կենտրոնական սահմանային թեորեմի իմաստն այն է, որ բավականաչափ փոքր, բայց մեծ թվով պատահական մեծությունների գումարի բաշխման սահմանային ֆունկցիան ստանդարտ նորմալ բաշխման ֆունկցիա է:

Այժմ ներկայացնենք ևս մեկ սահմանային թեորեմ՝ Սլուցկու թեորեմը, որը էկոնոմետրիկայում հաճախ է կիրառվում:

Դիցուք, տրված է պատահական մեծությունների k (հատ) հաջորդականություններ՝ $\{X_n^j\}$, $j=\overline{1,k}$ և $g(x_1, x_2, \cdots, x_k)$ ֆունկցիան: Այդ դեպքում Սլուցկու թեորեմը կձևակերպվի հետևյալ կերպ.

Թեորեմ. Ենթադրենք՝ $\{X_n^i\}$ պատահական մեծությունների հաջորդականություններից յուրաքանչյուրը ըստ հավանականության զուգամիտում է հաստատունին՝ $X_n^j \xrightarrow[n\to\infty]{P} C_j, j=\overline{1,k}$ և $g(x_1, x_2, \cdots, x_k)$ ֆունկցիան անընդհատ է $(C_1, C_2, \ldots, C_k)$ կետում: Այդ դեպքում՝

$$g\left(X_n^1, X_n^2, \cdots, X_n^k\right) \xrightarrow[n\to\infty]{P} g\left(C_1, C_2, \cdots, C_k\right):$$

2.13. Պայմանական մաթեմատիկական սպասում

Ենթադրենք՝ X և Y պատահական մեծությունները դիսկրետ են հետևյալ բաշխման օրենքներով՝

$$\begin{array}{c|c} X & x_1, x_2, \cdots, x_n \\ \hline P & P_{1\cdot}, P_{2\cdot}, \cdots, P_{n\cdot} \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} Y & y_1, y_2, \cdots, y_m \\ \hline P & P_{\cdot 1}, P_{\cdot 2}, \cdots, P_{\cdot m} \end{array}$$

որտեղ՝ $P_{i\bullet} = P(X = x_i)$, $i=\overline{1,n}$; $P_{\bullet k} = P(Y = y_k)$, $k=\overline{1,m}$:

Ըստ հավանականությունների բազմապատկման թեորեմի՝ կունենանք.

$$P_{ik} = P(X = x_i \cap Y = y_k) = P_{i\bullet} P_{X=x_i}(Y = y_k) = P_{\bullet k} P_{Y=y_k}(X = x_i): \tag{2.28}$$

Այստեղից հետևում է, որ (2.28) հավասարության մեջ տեղ գտած պայմանական հավանականությունները կարելի է ներկայացնել հետևյալ ձևով՝

$$P_{Y=y_k}(X = x_i) = \frac{P_{ik}}{P_{\bullet k}},$$

$$P_{X=x_i}(Y = y_k) = \frac{P_{ik}}{P_{i\bullet}}:$$

Այսպիսով, եթե $Y=y_k$ $\left(k=\overline{1,m}\right)$, ապա X պատահական մեծության պայմանական բաշխման օրենքը կլինի.

$$x_1, \quad x_2, \cdots, \quad x_n$$

$$\frac{P_{1k}}{P_{\bullet k}}, \frac{P_{2k}}{P_{\bullet k}}, \cdots, \frac{P_{nk}}{P_{\bullet k}},$$

և եթե $X=x_k$ $\left(i=\overline{1,n}\right)$, Y պատահական մեծության պայմանական բաշխման օրենքը կլինի.

$$y_1, \quad y_2, \cdots, \quad y_n$$

$$\frac{P_{i1}}{P_{i\bullet}}, \frac{P_{i2}}{P_{i\bullet}}, \cdots, \frac{P_{im}}{P_{i\bullet}}:$$

Սահմանում. X պատահական մեծության պայմանական մաթեմատիկական սպասումը՝ $Y=y_k$ պայմանով, որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$E(X \setminus Y = y_k) = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{P_{ik}}{P_{\bullet k}}:$$

Նման ձևով կարելի է սահմանել Y պատահական մեծության պայմանական մաթեմատիկական սպասումը՝ $X=x_i$ պայմանով՝

$$\left(E(Y \setminus X = x_i) = \sum_{k=1}^{m} y_k \frac{P_{ik}}{P_{j\bullet}}\right):$$

Սահմանում: X պատահական մեծության պայմանական մաթեմատիկական սպասումը, երբ տրված է Y պատահական մեծությունը կամ Y պատահական մեծության պայմանով, իրենից ներկայացնում է Y-ից կախված պատահական մեծություն՝ E(X\Y), որի արժեքներն են $E(X\backslash Y=y_k)$, $k=\overline{1,m}$ թվերը, իսկ այդ արժեքները ստանալու հավանականություններն են $P_{\cdot k}$ թվերը:

Դիտողություն. Ի տարբերություն X պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասման՝ պայմանական մաթեմատիկական սպասումը՝ E(X\Y), թիվ չէ, այն պատահական մեծություն է:

Այժմ ենթադրենք՝ X և Y պատահական մեծություններն անընդհատ են՝ համապատասխանաբար $f_1(x)$ և $f_2(y)$ խտության ֆունկցիաներով: Նշանակենք f(x,y) -ով (X,Y) երկչափ պատահական մեծության խտության ֆունկցիան:

Սահմանում. X պատահական մեծության պայմանական խտության ֆունկցիա՝ Y=y պայմանով, անվանում են հետևյալ ֆունկցիան՝

$$f_1(x\backslash y)=\frac{f(x,y)}{f_2(y)},\qquad f_2(y)\neq 0\ :$$

Նման ձևով սահմանվում է նաև Y պատահական մեծության պայմանական խտության ֆունկցիան՝ X=x պայմանով՝

$$f_2(y\backslash x)=\frac{f(x,y)}{f_1(x)},f_1(x)\neq 0:$$

Օգտվելով (2.15) և (2.16) բանաձևերից՝ պայմանական խտության ֆունկցիաները կարելի է գրել հետևյալ ձևով՝

$$f_1(x\backslash y)=\frac{f(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx},\qquad f_2(y\backslash x)=\frac{f(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy}:$$

Սահմանում. X պատահական մեծության պայմանական մաթեմատիկական սպասում՝ Y=y պայմանով, անվանում են հետևյալ y-ից կախված ֆունկցիան՝

$$\varphi(y)=E(X\backslash Y=y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x\ f_1(x\backslash y)dx\ :$$

*Սահմանում**: X պատահական մեծության պայմանական մաթեմատիկական սպասում՝ Y պատահական մեծության պայմանով, անվանում են φ(Y) պատահական մեծությունը՝

$$E(X\backslash Y)=\varphi(Y):$$

Նշենք պայմանական մաթեմատիկական սպասման որոշ առավել կիրառվող հատկություններ.

1. E(E(X\Y))=E(X):

2. E(g(Y)X\Y)=g(Y)E(X/Y), որտեղ g-ն որևէ ֆունկցիա է,

3. Եթե X և Y պատահական մեծություններն անկախ են, ապա՝ E(X\Y) = E(X):

Նշված հատկությունները ճիշտ են ինչպես դիսկրետ, այնպես էլ անընդհատ պատահական մեծությունների համար:

---

* Ընդհանրապես X պատահական մեծության պայմանական մաթեմատիկական սպասումը՝ E(X\Y), ավելի ճշգրիտ սահմանվում է Լեբեգի ինտեգրալի միջոցով: Սակայն այդ սահմանումն այստեղ չի ներկայացվի բարդության պատճառով: Ցանկացողներն այն կարող են գտնել, օրինակ, հետևյալ գրքում՝ (А.А. Боровков, Теория вероятностей, 1986 г., гл.4, § 2):

ԳԼՈՒԽ 3

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ՎԻՃԱԿԱԳՐՈՒԹՅԱՆ ՏԱՐՐԵՐԸ

3.1. Վերցվածքային (ընտրանքային) բազմություն, դրա հիմնական բնութագրիչները

Յուրաքանչյուր X պատահական մեծություն լրիվ նկարագրվում է իր F(x) բաշխման ֆունկցիայով: Եթե հայտնի է բաշխման ֆունկցիան, ապա հնարավոր է որոշել պատահական մեծության՝ որևէ միջակայքում ընկնելու հավանականությունը, մաթեմատիկական սպասումը և դիսպերսիան, ինչպես նաև, սկզբնական և կենտրոնական մոմենտները:

Գործնականում, սովորաբար, հայտնի չի լինում մեզ հետաքրքրող X պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիան, հետևաբար հնարավոր չի լինում գտնել X պատահական մեծության բնութագրիչները: Այս պատճառով հարկ է լինում պատահական մեծության նկատմամբ փորձեր կամ դիտումներ կատարել:

Օրինակ, եթե X պատահական մեծությունը որևէ ապրանքի սպառումն է, ապա X-ի համար կատարված փորձի էությունն այն է, որ վերցնում ենք նախորդ ժամանակահատվածների սպառման արժեքները, որոնք X պատահական մեծության թվային արժեքներն են: Տնտեսագիտության մեջ «փորձ կատարել» նշանակում է՝ վերցնել տվյալ մեծության նախորդ ժամանակահատվածի արժեքը:

Սահմանում. $X_1, X_2, ..., X_n$ հաջորդականությունը անվանում են n ծավալով պատահական վերցվածք (վերցվածքային բազմություն կամ ընտրանք), եթե $X_1, X_2, ... X_n$ թվերը ստացվել են որպես որևէ X պատահական մեծության անկախ իրագործումներ (ռեալիզացիա):

Սահմանում. X պատահական մեծության արժեքների *բազմությունը* անվանում են գլխավոր համախմբություն:

Տրված սահմանումներից հետևում է, որ պատահական վերցվածքը գլխավոր համախմբության որևէ ենթաբազմությունն է:

Ենթադրենք՝ $X_1, X_2, ..., X_n$ հաջորդականությունը X պատահական մեծության նկատմամբ կատարված փորձերի արդյունքներն են: Պարզ է, որ փորձերից հետո այդ արդյունքները հայտնի թվեր են, իսկ փորձից առաջ դրանցից յուրաքանչյուրը, որպես փորձի հնարավոր արդյունք, պատահական մեծություն է, որն ունի նույն բաշխման ֆունկցիան և հետևաբար՝ նույն բնութագրիչները, ինչ որ՝ դիտարկվող X պատահական մեծությունը: Ընդ որում, փորձից առաջ $X_1, X_2, ..., X_n$ պատահական մեծությունների հաջորդականությունը կարող է դիտարկվել որպես անկախ պատահական մեծությունների հաջորդականություն:

Մաթեմատիկական վիճակագրության հիմնական խնդիրներից է, ելնելով փորձերի արդյունքներից, ստանալ վիճակագրական գնահատականներ անհայտ բաշխման ֆունկցիայի, բնութագրիչների և պարամետրերի համար:

Սահմանում. Վիճակագրական գնահատական ասելով հասկանում ենք կամայական ֆունկցիա` $X_1, X_2, \ldots, X_n$ վերցվածքային բազմությունից կախված`

$$\hat{\theta} = \theta_n\left(X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n\right):$$

Սահմանում. X պատահական մեծության հետ կատարված փորձերի արդյունքների միջին թվաբանականը`

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots\ldots + X_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

անվանում են X պատահական մեծության վերցվածքային միջին, իսկ $n > 1$ դեպքում.

$$\operatorname{var}(X) = S^2 = \hat{D} = \frac{\left(X_1 - \overline{X}\right)^2 + \left(X_2 - \overline{X}\right)^2 + \cdots + \left(X_n - \overline{X}\right)^2}{n-1} =$$

$$= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$$

մեծությանը` վերցվածքային դիսպերսիա:*

Համանման ձևով սահմանվում են X պատահական մեծության վերցվածքային սկզբնական և կենտրոնական մոմենտները, որոնք համապատասխանաբար ունեն հետևյալ տեսքը`

$$\overline{V}_k = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^k}{n}, \quad \overline{\mu}_k = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^k}{n}, \qquad k = 1,2, \ldots$$

---

* Այստեղ, ի տարբերություն վերցվածքային դիսպերսիայի ընդունված սահմանման, դիտարկվում է ուղղված վերցվածքային դիսպերսիան ($\frac{1}{n}$-ի փոխարեն վերցված է $\frac{1}{n-1}$), քանի որ այն ունի ավելի լավ վիճակագրական հատկություններ:

Հեշտ է նկատել, որ սահմանված բոլոր մեծությունները վիճակագրական գնահատականներ են:

Այժմ դիտարկենք $Z = (X, Y)$ երկչափ պատահական մեծությունը, որի բաշխման ֆունկցիան, հետևաբար դրա բնութագրիչները անհայտ են: Նշված անհայտ մեծությունները գնահատելու համար անհրաժեշտություն է առաջանում Z պատահական մեծության նկատմամբ կատարել n անկախ փորձեր`

$$Z_1 = (X_1, Y_1),\ Z_2 = (X_2, Y_2),\ \ldots\ldots,\ Z_n = (X_n, Y_n):$$

Ստացված հաջորդականությունը անվանում են երկչափ Z պատահական մեծության n ծավալ ունեցող վերցվածքային բազմություն:

Սահմանում. Երկչափ Z պատահական մեծության վերցվածքային միջին ասելով հասկանում ենք հետևյալ թվազույգը` $\overline{Z} = \left(\overline{X}, \overline{Y}\right)$ որտեղ`

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad \overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i :$$

Սահմանում. X և Y պատահական մեծությունների վերցվածքային (ընտրանքային) կովարիացիա ասելով հասկանում են հետևյալ մեծությունը`

$$\operatorname{Cov}(X,Y) = C_{XY} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(X_i - \overline{X}\right)\left(Y_i - \overline{Y}\right)\right]:$$

Սահմանում. Երկչափ Z պատահական մեծության կովարիացիոն մատրից անվանում են հետևյալ մատրիցը`

$$\begin{pmatrix} S_X^2 & C_{XY} \\ C_{XY} & S_Y^2 \end{pmatrix},$$

որտեղ` S_X^2 և S_Y^2 մեծությունները համապատասխանաբար X և Y պատահական մեծությունների վերցվածքային դիսպերսիաներն են:

Սահմանում. X և Y պատահական մեծությունների վերցված-քային կոռելյացիայի գործակից անվանում են՝

$$\bar{r}_{XY} = \frac{C_{XY}}{S_X S_Y}$$ մեծությունը:

3.2. Փորձնական բաշխման և խտության ֆունկցիա (հիստոգրամ)

Ենթադրենք՝ X պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիայի տեսքն անհայտ է: Կառուցենք անհայտ բաշխման ֆունկցիայի գնահատականը:

Սահմանում. Եթե վերցվածքային բազմության տարրերը դասավորված են աճման կամ նվազման կարգով, ապա ստացված հաջորդականությունը անվանում են վարիացիոն շարք:

Առանց ընդհանրությունը խախտելու, ենթադրենք՝ X_1, X_2, ...X_n վերցվածքային բազմությունը վարիացիոն շարք է: Ցանկացած x թվի համար m (x)-ով նշանակենք վարիացիոն շարքի այն տարրերի թիվը, որոնք փոքր են x-ից: Այդ տարրերի հաճախությունը կլինի՝ $\frac{m(x)}{n}$: Այսպիսով, X պատահական մեծության փորձնական բաշխման ֆունկցիա անվանում են հետևյալ ֆունկցիան՝

$$F_n(x) = \frac{m(x)}{n}:$$

Ակնհայտ է, որ

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le X_1 \\ \frac{1}{n}, & X_1 < x \le X_2 \\ \frac{2}{n}, & X_2 < x \le X_3 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \frac{k}{n}, & X_k < x \le X_{k+1} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ 1, & x > X_n \end{cases}$$

$F_n(x)$ փորձնական բաշխման ֆունկցիան ունի նույն հատկությունները, ինչ որ՝ X պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիան: Անհայտ բաշխման F (x) ֆունկցիայի և փորձնական բաշխման ֆունկցիայի միջև կապը հաստատվում է հետևյալ թեորեմի համաձայն:

Գլիվենկոյի թեորեմ. Եթե F(x) բաշխման ֆունկցիան անընդհատ է, ապա $F_n(x)$-ի և F(x)-ի առավելագույն շեղման՝ ցանկացած $\varepsilon > 0$ թվից փոքր լինելու հավանականությունը ձգտում է մեկի, երբ փորձերի n թիվը ձգտում է անվերջության, այսինքն՝

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sup_{-\infty<x<\infty} \left| F_n(x) - F(x) \right| < \varepsilon \right) = 1:$$

Գլիվենկոյի թեորեմից հետևում է, որ եթե փորձերի թիվը բավականաչափ մեծ է, ապա անհայտ F(x)-ը կարելի է փոխարինել $F_n(x)$-ով: Այս իմաստով $F_n(x)$ փորձնական բաշխման ֆունկցիան անհայտ F(x) բաշխման ֆունկցիայի համար բավականին լավ գնահատական է:

Այժմ ենթադրենք, X պատահական մեծությունն անընդհատ պատահական մեծություն է, և դրա F(x) խտության ֆունկցիան անհայտ է: Կառուցենք անհայտ խտության ֆունկցիայի համար ինչ-որ իմաստով ընդունելի գնահատական՝ $f_n(x)$, որը կանվանենք փորձնական խտության ֆունկցիա, իսկ դրա գրաֆիկը՝ հիստոգրամ:

Գոյություն ունի (a, b) միջակայք, որտեղ ընկած են փորձերից ստացված $X_1, X_2, \dots X_n$ արժեքները: Բաժանենք այն r հավասար երկարության միջակայքերի՝

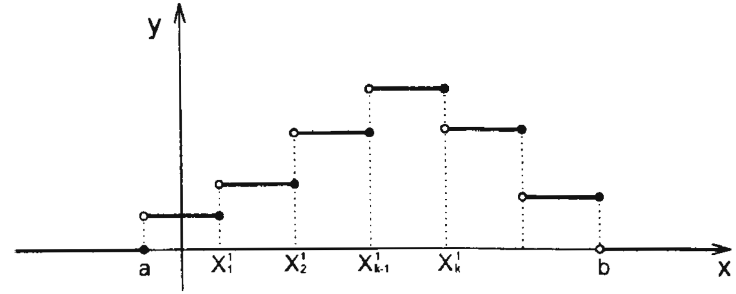
$$(a, X_1^1], (X_1^1, X_2^1], \dots, (X_{k-1}^1, X_k^1], \dots, (X_{r-1}^1, b],$$

որոնցից յուրաքանչյուրի երկարությունը $h = \frac{b-a}{r}$ է: m_k (k = 1,2, ..., r) -ով նշանակենք վերցվածքային բազմության այն արժեքների թիվը, որոնք k-րդ՝ $(X_{k-1}^1, X_k^1]$ միջակայքում են: Այս դեպքում $\frac{m_k}{n}$ (k = 1, 2, ...,r) հարաբերությունը իրենից կներկայացնի X պատահական մեծության՝ $(X_{k-1}^1, X_k^1]$ միջակայքում ընկնելու հաճախությունը:

Սահմանում. X պատահական մեծության փորձնական խտության ֆունկցիա կոչվում է հետևյալ ֆունկցիան՝

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \le a \\ \frac{1}{h} \cdot \frac{m_1}{n}, & a < x \le X_1^1 \\ \frac{1}{h} \cdot \frac{m_2}{n}, & X_1^1 < x \le X_2^1 \\ \dots\dots\dots & \\ \frac{1}{h} \cdot \frac{m_k}{n}, & X_{k-1}^1 < x \le X_k^1 \\ \dots\dots\dots & \\ \frac{1}{h} \cdot \frac{m_r}{n}, & X_{r-1}^1 < x \le X_r^1 \\ 0, & x > b \end{cases}$$

Փորձնական խտության ֆունկցիայի գրաֆիկի (հիստոգրամի) մոտավոր տեսքը կլինի հետևյալը՝



Հեշտ է ստուգել, որ փորձնական խտության ֆունկցիան ունի հավանականությունների խտության ֆունկցիայի հատկությունները՝

1. $f_n(x) \ge 0$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dx = 1$:

Անհայտ խտության f(x) ֆունկցիայի և փորձնական խտության ֆունկցիայի միջև կապը հաստատվում է հետևյալ թեորեմի միջոցով:

Թեորեմ. Եթե f(x) ֆունկցիան անընդհատ է, ապա փորձնական խտության ֆունկցիայի և անհայտ խտության ֆունկցիայի առավելագույն շեղման՝ ցանկացած ε > 0 թվից փոքր լինելու հավանականությունը ձգտում է մեկի, երբ փորձերի n թիվը ձգտում է անվերջության, այսինքն՝

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sup_{-\infty<x<\infty} \left| f_n(x) - f(x) \right| < \varepsilon\right) = 1:$$

Գոյություն ունի այս թեորեմի ավելի խիստ պնդումը, որը գրվում է հետևյալ ձևով՝

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sup_{-\infty<x<\infty} \left|f_n(x)-f(x)\right| \to 0\right)=1, \quad \text{երբ} \ n\to\infty:$$

Թեորեմից հետևում է, որ եթե փորձերի թիվը բավականաչափ մեծ է, ապա կարելի է f(x) խտության ֆունկցիան փոխարինել $f_n(x)$-ով: Այս իմաստով, $f_n(x)$-ը անհայտ խտության ֆունկցիայի համար բավականաչափ լավ գնահատական է:

3.3. Անհայտ պարամետրերի գնահատումը

Դիցուք, X պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիայի տեսքը հայտնի է, սակայն այն կախված է θ անհայտ պարամետրից՝ F (x, θ):

Սահմանում. θ անհայտ պարամետրերի $\hat{\theta}=\theta_n(X_{1,\dots}X_n)$ վիճակագրական գնահատականը կոչվում է անշեղելի, եթե տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը՝

$$E(\hat{\theta})=\theta:$$

Ընդհանրապես, եթե գնահատականը անշեղելի է, չի նշանակում, որ այն անհայտ պարամետրի ամենալավ գնահատականն է, սակայն այդ գնահատականը ոչ անշեղելի գնահատականների նկատմամբ ունի այն առավելությունը, որ դրա միջինը հավասար է գնահատվող մեծությանը: Այս տեսակետից, ուսումնասիրողը փորձում է անհայտ պարամետրի համար կառուցել անշեղելի գնահատական:

Օրինակ. Ենթադրենք X պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը անհայտ է՝ EX= a:

Որպես a անհայտ բնութագրիչի գնահատական՝ դիտարկենք $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ վերցվածքային միջինը: Ցույց տանք, որ այն անշեղելի գնահատական է.

$$E(\overline{X})=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a=\frac{1}{n}\cdot n\cdot a=a:$$

Այստեղ օգտվեցինք մաթեմատիկական սպասման հատկություններից և նրանից, որ ընտրանքի անդամները բաշխված են այնպես, ինչպես X պատահական մեծությունը:

Նույն ձևով կարելի է ցույց տալ, որ անհայտ դիսպերսիայի, X և Y պատահական մեծությունների կովարիացիայի և կոռելյացիայի գործակցի համար անշեղելի գնահատականներ կհանդիսանան համապատասխան վերցվածքային բնութագրիչները:

Սահմանում. θ անհայտ պարամետրի $\hat{\theta}=\theta_n(X_1,\cdots,X_n)$ վիճակագրական գնահատականը կոչվում է ունակային, եթե

$$P\lim_{n\to\infty}\theta_n(X_1,\cdots,X_n)=\theta:$$

Այս դեպքում նույնպես չի կարելի ասել, որ ունակային գնահատականներն ամենալավն են, սակայն եթե գնահատականը ունակային է, ապա բավականաչափ մեծ n-երի համար և ցանկացած $\varepsilon>0$ թվի համար տեղի ունի՝

$$P\left(\left|\hat{\theta}-\theta\right|<\varepsilon\right)\approx 1:$$

Օգտվելով մեծ թվերի օրենքից՝ կարելի է ցույց տալ, որ անհայտ մաթեմատիկական սպասման, դիսպերսիայի, սկզբնական և կենտրոնական մոմենտների, X և Y պատահական մեծությունների կովարիացիայի և կոռելյացիայի գործակցի համար ունակային գնահատականներ են համապատասխան վերցվածքային բնութագրիչները:

Սահմանում. θ անհայտ պարամետրի համար

$$\hat{\theta} = \theta_n(X_1,\cdots,X_n)$$

վիճակագրական գնահատականը կոչվում է էֆեկտիվ, եթե տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը՝

$$E(\theta_n(X_1,\cdots,X_n)-\theta)^2 = \underbrace{\min}_{\varphi} E(\varphi(X_1,\cdots,X_n)-\theta)^2,$$

այստեղ $\varphi(X_1,\cdots,X_n)$-ը θ անհայտ պարամետրի կամայական գնահատականն է:

Պետք է նշել, որ եթե $\hat{\theta}$ գնահատականը անշեղելի է և էֆեկտիվ, ապա դրա դիսպերսիան փոքրագույնն է անշեղելի գնահատականների դասում:

Սահմանված երեք տիպի գնահատականները մեկը մյուսի նկատմամբ բացարձակ առավելություն չունեն, եթե առաջանում է միևնույն անհայտ պարամետրի երկու վիճակագրական գնահատականների միջև ընտրության հարց, օրինակ՝ մեկը անշեղելի է, իսկ մյուսը՝ էֆեկտիվ, ապա ուսումնասիրողը պետք է ընտրի այն գնահատականը, որի վիճակագրական հատկություններն ավելի շատ են համապատասխանում լուծվող խնդրին:

Բնութագրենք սահմանված վիճակագրական գնահատականները:

Եթե գնահատականն անշեղելի է, նշանակում է, որ վերցվածքի ծավալի մեծացման հիման վրա, միավորին մոտ հավանականությամբ կարելի է պնդել, որ գնահատականը քիչ է տարբերվում գնահատվող մեծությունից:

Եթե գնահատականը ունակային է, ապա ապահովում է վերցվածքի ծավալի մեծացման միջոցով գնահատականի և գնահատվող մեծության մոտարկման ճշգրտության մեծացումը:

Եթե գնահատականը էֆեկտիվ է, ապա այն լավագույնն է՝ միջին քառակուսային շեղման մինիմումի իմաստով:

Նշենք նաև, որ անշեղելիությունը և էֆեկտիվությունը կախված չեն ընտրանքի (վերցվածքի) ծավալից, ի տարբերություն դրան, ունակայնությունը ասիմպտոտիկ հատկություն:

Ընդհանրապես գնահատականի անշեղելիությունը, որպես օրենք, ստուգվում է ուղղակի հաշվարկներով, իսկ ունակայնությունը ստուգելու համար անհրաժեշտ է օգտագործել մեծ թվերի օրենքի հետ կապված սահմանային թեորեմներ: Ավելի բարդ է գնահատականի էֆեկտիվության ստուգումը: Այս խնդրի լուծման հետ անմիջականորեն կապ ունի Ռաո-Կրամերի անհավասարությունը: Ձևակերպենք այն՝

Ռաո-Կրամերի անհավասարությունը. Դիցուք, P(x, θ), $x\in R^n$ ֆունկցիան (X_1, X_2, ... X_n) պատահական վեկտորի բաշխման խտության ֆունկցիան է՝ կախված θ պարամետրից: Ենթադրենք՝ տեղի ունեն հետևյալ պայմանները՝

1. $G=\{x\in R^n : P(x,\theta) > 0\}$ բազմությունը կախված չէ θ պարամետրից (ռեգուլյարության պայման):

2. P(x,θ) խտության ֆունկցիան կամայական $x\in G$ համար դիֆերենցելի է ըստ θ-ի և՝

$$I_n(\theta) = \int_G \left[\frac{\partial \ln P(x,\theta)}{\partial\theta}\right]^2 P(x,\theta)dx = E\left[\frac{\partial \ln P(X,\theta)}{\partial\theta}\right]^2 < \infty :$$

Այս պայմանների դեպքում տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը՝

$$V(\hat{\theta}) \geq \frac{[1+b'(\theta)]^2}{I_n(\theta)},$$

որտեղ՝ $b(\theta) = E(\hat{\theta}) - \theta$:

Հետևանք. Մասնավոր դեպքում, երբ $\hat{\theta}$ գնահատականն անշեղելի է, Ռաո-Կրամերի անհավասարությունը կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$V(\hat{\theta}) \geq \frac{1}{I_n(\theta)}:$$

$I_n(\theta)$ մեծությունն անվանում են θ-ի վերաբերյալ ինֆորմացիայի քանակ $(X_1, X_2, ..., X_n)$ բազմաչափ պատահական մեծության մեջ: Կարելի է ցույց տալ, որ եթե $X_1, ..., X_n$ պատահական մեծություններն անկախ են և միանման բաշխված $f(x,\theta)$, $x \in R^1$ խտության ֆունկցիայով (բաշխման օրենքով), ապա $I_n(\theta) = nI_1(\theta)$, որտեղ՝ $I_1(\theta)$–ը θ-ի վերաբերյալ ինֆորմացիայի քանակն է X_i պատահական մեծության մեջ ($i = \overline{1,n}$).

$$I_1(\theta) = E[\partial \ln f(X_i,\theta)/\partial\theta]^2:$$

Ռաո-Կրամերի անհավասարությունը ցույց է տալիս գնահատականի դիսպերսիայի ներքին եզրը՝ $\dfrac{[1+b'(\theta)]^2}{I_n(\theta)}$, ուստի, եթե գնահատականն անշեղելի է և Ռաո-Կրամերի անհավասարության մեջ տեղի ունի հավասարություն, ապա կարելի է պնդել, որ գնահատականը էֆեկտիվ է:

Այժմ ձևակերպենք մի թեորեմ, որի միջոցով հնարավոր է իմանալ, թե տվյալ գնահատականն անհայտ պարամետրի համար փոքրագույն դիսպերսիայով է, թե՝ ոչ:

Թեորեմ. Որպեսզի $\hat{\theta}$ գնահատականը տվյալ θ պարամետրի համար լինի փոքրագույն դիսպերսիայով, անհրաժեշտ է և բավարար, որ $P(x, \theta)^*$ ֆունկցիան ներկայացվի հետևյալ տեսքով՝

$$P(x,\theta) = h(x)e^{A\hat{\theta}+B},$$

որտեղ՝ A-ն և B-ն կախված են միայն θ-ից, իսկ h(x)-ը՝ միայն x-ից:

---

* $P(x,\theta)$ ֆունկցիան ընտրանքի տարրերով կազմված $(X_1, X_2, ... X_n)$ պատահական վեկտորի խտության ֆունկցիան է:

X պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիան սովորաբար պարունակում է որոշակի հաստատուններ, որոնք կոչվում են բաշխման պարամետրեր:

Քննարկենք այդ պարամետրերի գնահատականների կառուցման խնդիրը:

Ենթադրենք՝ X պատահական մեծությունն ունի F $(x, \theta_1, \theta_2, ...,\theta_k)$ որոշակի բաշխման ֆունկցիա, որի մեջ մտնող $\theta_1, \theta_2, ...,\theta_k$ պարամետրերն անհայտ են, այդ X պատահական մեծության նկատմամբ կատարված n անկախ փորձերից ստացվել է $X_1, X_2, ...X_n$ վերցվածքային բազմությունը: Պահանջվում է կառուցել անհայտ՝ $\theta_1, \theta_2, ...,\theta_k$ պարամետրերի համար գնահատականներ:

Ներկայացնենք այս խնդրի լուծման երկու եղանակ:

Առաջին եղանակը կոչվում է «Մոմենտների եղանակ»: Այդ եղանակի էությունն այն է, որ, իմանալով անհայտ մոմենտների գնահատականները, կարելի է ստանալ նաև անհայտ պարամետրերի գնահատականները: Հաշվի առնելով, որ մոմենտներն այդ պարամետրերից ֆունկցիաներ են, կունենանք.

$$E(X) = a(\theta_1, \theta_2, ...,\theta_k),$$

$$V(X) = b(\theta_1, \theta_2, ...,\theta_k), \tag{3.1}$$

$$E(X^{\ell}) = m_{\ell}(\theta_1,\theta_2,...,\theta_k), \quad \ell = 2,3,...$$

$$E[(X - E(X))^{\ell}] = \mu_{\ell}(\theta_1,\theta_2,...,\theta_k), \quad \ell = 3,4,...:$$

Այս հավասարություններում անհայտ միջին արժեքը, դիսպերսիան և մոմենտները փոխարինելով համապատասխան հայտնի գնահատականներով՝ $\overline{X}$, S^2, $\overline{V}_{\ell}$, $\overline{\mu}_{\ell}$ մեծություններով, կստանանք անհայտ $\theta_1, \theta_2, ...\theta_k$ պարամետրերի համար հետևյալ հավասարումների համակարգը՝

$$\overline{X} = a(\theta_1, \theta_2, ..., \theta_k),$$

$$\overline{V}_\ell = m_\ell(\theta_1, \theta_2, ..., \theta_k) \quad \ell = 2,3,...,k, \tag{3.2}$$

որը θ_1, θ_2, ... θ_k -երի նկատմամբ լուծելով՝ կստանանք որոնելի գնահատականները:

Դիտողություն. Նշենք, որ (3.2) համակարգի փոխարեն (3.1)-ից օգտվելով՝ կարելի էր կառուցել k հավասարումներով այլ համակարգ:

Օրինակ. Ենթադրենք՝ X պատահական մեծությունն ունի ցուցչային բաշխում՝

$$F(x,\theta) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1 - e^{-\theta x}, & x > 0 \end{cases}$$, որտեղ $\theta>0$ պարամետրն անհայտ է:

Ունենք, որ $E(X) = 1/\theta$, իսկ մաթեմատիկական սպասման գնահատականը՝ $\overline{X}$:

Ուստի մոմենտների եղանակի համաձայն՝ $\overline{X} = \frac{1}{\theta}$ հավասարումից կունենանք, որ՝ $\hat{\theta} = \frac{1}{\overline{X}}$:

Անհայտ պարամետրի գնահատականների կառուցման երկրորդ եղանակը կոչվում է «ճշմարտանմանության մաքսիմումի եղանակ»: Այդ եղանակի սկզբունքն այն է, որ փորձերում ստացված X_1, X_2, ... X_n արժեքները հանդիսանում են պատահական մեծության ամենահավանական արժեքները, այդ պատճառով անհայտ պարամետրերի ամենալավ գնահատականները կլինեն այն արժեքները, որոնց դեպքում փորձերում ստացված (X_1, X_2, ... X_n) արդյունքը կունենա մեծագույն հավանականությունը:

Ենթադրենք՝ (X_1, X_2, ... X_n) պատահական մեծության խտության ֆունկցիան (բաշխման օրենքը) $P(x, \theta_1, \theta_2,...\theta_k)$ ֆունկցիան է՝ $x \in R^n$, որը կախված է θ_1, θ_2,...θ_k անհայտ պարամետրերից: Խտության ֆունկցիայի մեջ x-ի փոխարեն տեղադրենք (X_1, X_2, ... X_n) վեկտորը և կատարենք հետևյալ նշանակումները՝ $L=L(X_1,X_2,...X_n, \theta_1,\theta_2,...\theta_k)=P(X_1,X_2,...X_n, \theta_1, \theta_2,...\theta_k)$, $\ell = \ln L$:

L պատահական մեծությունը անվանում են ճշմարտանմանության ֆունկցիա, իսկ ℓ-ը՝ լոգարիթմական ճշմարտանմանության ֆունկցիա:

Մաքսիմալ ճշմարտանմանության գնահատական անվանում են այն $\hat{\theta} = \hat{\theta}_{ML}$ մեծությունը, որը մաքսիմիզացնում է L ճշմարտանմանության ֆունկցիան (կամ, որ նույնն է՝ ℓ ֆունկցիան), այսինքն՝ $L(X_1,X_2,...,X_n,\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,...,\hat{\theta}_k) = \max L(X_1,X_2,...,X_n,\theta_1,\theta_2,...,\theta_k)$

Գնահատականի ML ինդեքսը անգլերեն հապավում է (Maximum Likelihood):

L ֆունկցիայի էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանից օգտվելով՝ ստացվում է հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0 \\ \cdots \\ \frac{\partial L}{\partial \theta k} = 0 \end{cases}$$

Լուծելով համակարգը անհայտ θ_1, θ_2, ... θ_k պարամետրերի նկատմամբ՝ կստանանք՝

$$\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_1(X_1,X_2,...,X_n),$$
$$\hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_2(X_1,X_2,...,X_n)$$
....
$$\hat{\theta}_k = \hat{\theta}_k(X_1,X_2,...,X_n)$$

գնահատականները:

Օրինակ. Ենթադրենք՝ X պատահական մեծությունն ունի նորմալ բաշխում

$$P(x,a,\sigma)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

խտության ֆունկցիայով, որի a և σ պարամետրերն անհայտ են:

Դիցուք, ունենք $X_1, X_2, ..., X_n$ վերցվածքային բազմությունը: Դիտարկենք $(X_1, X_2, ..., X_n)$ n - չափանի պատահական մեծության խտության ֆունկցիան $(X_1, X_2, ..., X_n)$ կետում, այն կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$L=\dot{P}(X_1,X_2,....,X_n,a,\sigma)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sigma^n}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}(X_k-a)^2}:$$

Ճշմարտանմանության սկզբունքի համաձայն՝ լուծենք հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{cases}\frac{\partial \ln L}{\partial a}=0\\ \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma}=0\end{cases},$$

որը համարժեք է՝

$$\begin{cases}\frac{1}{\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}(X_k-a)=0\\ -\frac{n}{\sigma}+\frac{1}{\sigma^3}\sum_{k=1}^{n}(X_k-a)^2=0\end{cases}$$

համակարգին, որը լուծելով՝ կունենանք.

$$a=\overline{X}$$

$$\sigma^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k-\overline{X})^2=\frac{n-1}{n}S^2:$$

Ընդհանրապես, մոմենտների եղանակով ստացված գնահատականները մեծամասամբ լինում են ունակային, իսկ մաքսիմալ ճշմարտանմանության եղանակով ստացված գնահատականները՝ ունակային և մեծ n-երի դեպքում՝ էֆեկտիվ:

3.4. Վստահելի միջակայք

Դիցուք, X պատահական մեծության բաշխման θ պարամետրն անհայտ է: Նախորդ պարագրաֆում ցույց տրվեց, թե ինչպես կարելի է θ անհայտ պարամետրի համար կառուցել, ինչ-որ իմաստով, լավ վիճակագրական գնահատական, սակայն հաճախ անհրաժեշտ է լինում կառուցել այնպիսի տիրույթ, որի մեջ կընկնի անհայտ պարամետրը՝ որոշակի հավանականությամբ:

Օրինակ, այսպիսի խնդիր կառաջանա, եթե ուսումնասիրողին չեն բավարարում ստացված գնահատականի վիճակագրական հատկությունները:

Վերևում նշված որոշակի հավանականությունն անվանում են հուսալիության մակարդակ:

Ենթադրենք՝ $X_1, X_2, ..., X_n$ հաջորդականությունը X պատահական մեծության որևէ n ծավալի վերցվածքային բազմություն է, իսկ $\alpha\in(0,1)$:

Սահմանում. θ անհայտ պարամետրի համար $D_n=D_n(X_1, X_2, ..., X_n)$ բազմությունը կոչվում է վստահելի բազմություն α հուսալիության մակարդակով, եթե տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը՝

$$P((\theta\in D_n(X_1, X_2, ..., X_n))=\alpha:$$

Եթե θ պարամետրը մեկ չափանի է, ապա D_n բազմությունը ընտրվում է որպես միջակայք և այս պատճառով «վստահելի բազմություն» տերմինի փոխարեն օգտագործում են «վստահելի միջակայք» տերմինը:

Վստահելի միջակայքի կառուցման համար կիրառվում է հետևյալ ընդհանուր մոտեցումը: Նախ՝ փնտրվում է այնպիսի $h_n(x_1, ..., x_n, \theta)$ ֆունկցիա, որ $h_n(X_1, X_2, ..., X_n, \theta)$ պատահական մեծության բաշխումը կախված չլինի θ-ից: Այնուհետև, եթե գտնված է $h_n(x_1, ..., x_n, \theta)$ ֆունկցիան, որոշակի $\alpha \in (0,1)$ թվի համար դիտարկվում է հետևյալ հավասարումը՝

$$P\left(h_n\left(X_1,...,X_n;\theta\right)\in I_n\right)=\alpha,$$

որտեղ I_n-ը միջակայք է:

Կարելի է ցույց տալ, որ եթե հայտնի է $h_n(X_1, X_2, ..., X_n, \theta)$ պատահական մեծության բաշխումը, ապա կգտնվի վերջին հավասարումը բավարարող I_n միջակայք (հնարավոր է, որ այն չլինի միակը):

Եթե $h_n(X_1, X_2, ..., X_n, \theta) \in I_n$ առնչությունից կարելի է θ-ի համար գտնել այնպիսի $D_n(X_1, X_2, ..., X_n)$ բազմություն, որ $h_n\left(X_1,...,X_n,\theta\right)\in I_n \Leftrightarrow \theta\in D_n\left(X_1,...,X_n\right)$, ապա $D_n(X_1, X_2, ..., X_n)$ բազմությունը կլինի θ-ի վստահելի բազմությունը: Իսկ եթե $h_n(X_1, X_2, ..., X_n, \theta) \in I_n$ առնչությունը հնարավոր չէ «լուծել» θ-ի նկատմամբ, ապա անհրաժեշտ է փնտրել ուրիշ $h_n(x_1, ..., x_n, \theta)$ ֆունկցիա և նույնը կատարել դրա նկատմամբ:

Օրինակ. Կառուցենք վստահելի միջակայք նորմալ բաշխված պատահական մեծության a անհայտ մաթեմատիկական սպասման համար, երբ դիսպերսիան նույնպես անհայտ է:

Այսպիսով, ենթադրվում է, որ $X \sim N(a, \sigma)$, իսկ $X_1, X_2, ..., X_n$ հաջորդականությունը X գլխավոր համախմբության որևէ վերցվածքային բազմություն է:

Հայտնի է, որ.

$$\frac{\left(\overline{X}-a\right)\sqrt{n}}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2}}=\frac{\left(\overline{X}-a\right)\sqrt{n}}{S_X}$$

պատահական մեծությունն ունի Ստյուդենտի բաշխումը՝ n-1 ազատության աստիճանով (այս պատահական մեծությունը վերևում նկարագրված $h_n(X_1, X_2, ..., X_n, \theta)$, պատահական մեծությունն է):

Ենթադրենք՝ $\alpha \in (0,1)$ որոշակի հուսալիության մակարդակ է: Օգտագործելով Ստյուդենտի բաշխման համաչափությունը և համապատասխան աղյուսակը կամ ծրագրային փաթեթը՝ կարելի է գտնել այնպիսի t_α թիվ, որ՝

$$P\left(\left|\frac{\sqrt{n}\left(\overline{X}-a\right)}{S_X}\right|\le t_\alpha\right)=\alpha:$$

Լուծենք՝

$$\left|\frac{\sqrt{n}\left(\overline{X}-a\right)}{S_X}\right|\le t_\alpha$$ անհավասարությունը a-ի նկատմամբ,

կունենանք.

$$a\in\left(\overline{X}-\frac{S_X t_\alpha}{\sqrt{n}},\overline{X}+\frac{S_X t_\alpha}{\sqrt{n}}\right),$$

ուստի՝

$$P\left(a\in\left(\overline{X}-\frac{S_X t_\alpha}{\sqrt{n}},\overline{X}+\frac{S_X t_\alpha}{\sqrt{n}}\right)\right)=\alpha:$$

Այստեղից հետևում է, որ անհայտ a մաթեմատիկական սպասման համար.

$$\left(\overline{X}-\frac{S_X t_\alpha}{\sqrt{n}},\overline{X}+\frac{S_X t_\alpha}{\sqrt{n}}\right)$$

միջակայքը կլինի վստահելի միջակայք α հուսալիության մակարդակով:

3.5. Վիճակագրական վարկածներ և դրանց ստուգումը

Սահմանում. Վիճակագրական վարկածներ կոչվում են այն ենթադրությունները, որոնք վերաբերում են պատահական մեծության անհայտ բաշխմանը, բաշխման անհայտ պարամետրերին և անհայտ բնութագրիչներին:

Այստեղ կդիտարկենք միայն անհայտ պարամետրերին կամ բնութագրիչներին վերաբերող վիճակագրական վարկածները:

Ընդհանրապես անհայտ θ պարամետրի համար առաջադրվում է երկու վարկած` $H_0 : \theta \in Z_0$ և $H_1 : \theta \in Z_1$, այստեղ Z_0 և Z_1-ը որոշակի բազմություններ են, առաջին վարկածը ենթադրություն է (H_0) այն մասին (:), որ անհայտ պարամետրը պատկանում է Z_0 բազմությանը, իսկ երկրորդ վարկածը (H_1), որ անհայտ պարամետրը պատկանում է Z_1 բազմությանը: H_0 վարկածն անվանում են զրոյական (հիմնական) վարկած, իսկ H_1 վարկածը` մրցակցող (ալտերնատիվ) վարկած:

Եթե Z բազմությունը բաղկացած է մեկ կետից ($Z=\{\theta_0\}$), ապա $H_0 : \theta \in Z$ վարկածն անվանում են պարզ վարկած, հակառակ դեպքում` բարդ:

Եթե մրցակցող վարկածը չի նշված, ապա պետք է հասկանալ, որ որպես մրցակցող վարկած է վերցված զրոյական վարկածի հակադիր ենթադրությունը, օրինակ.

Եթե $H_0 : \theta > 3$, ապա $H_1 : \theta \le 3$:

Վիճակագրական վարկածների ստուգում կամ վիճակագրական տեստ անվանում են $X_1, X_2, ..., X_n$ վերցվածքային բազմության վրա հիմնված կանոնական գործընթացը, որի արդյունքում ստացվում են հետևյալ լուծումները`

1. զրոյական վարկածը մերժելու հիմքեր չկան,
2. մերժել զրոյական վարկածը` ի օգուտ մրցակցողի:

Քանի որ վիճակագրական վարկածը ստուգելու համար օգտագործվում է $X_1, .., X_n$ պատահական վերցվածքը, ապա, բնական է, որ լինեն սխալ լուծումներ: Սրա հետ կապված, ստուգման սխալները կարող են լինել երկու տեսակի.

1. առաջին տեսակի սխալն այն է, երբ զրոյական վարկածը, լինելով ճիշտ, մերժում ենք,
2. երկրորդ տեսակի սխալն այն է, երբ ընդունվում է զրոյական սխալ վարկածը:

Առաջին և երկրորդ տեսակի սխալներ կատարելու հավանականությունները համապատասխանաբար նշանակենք`

$\alpha = P(H_1/H_0)$, $\beta = P(H_0/H_1)$,

α հավանականությունը անվանում են տեստի նշանակալիության մակարդակ, իսկ 1- β թիվը` տեստի հզորություն:

Պարզ է, որ տեստը պետք է լինի այնպիսին, որ α և β թվերը լինեն առավելագույն, սակայն հնարավոր չի լինում դրանք մինիմիզացնել միաժամանակ: Այդ պատճառով նախ ֆիքսում են տեստի նշանակալիության մակարդակը ինչ-որ թույլատրելի մակարդակում,[*] այնուհետև փորձում են գտնել ստուգման այնպիսի ձև կամ տեստ, որի հզորությունը մեծագույնն է (նույնն է, որ երկրորդ տեսակի սխալ կատարելու հավանականությունը փոքրագույնն է):

Գործնականում տեստերի կառուցման համար կիրառվում է հետևյալ մոտեցումը: Ենթադրենք` կարելի է գտնել այնպիսի $t_n = t_n (X_1, ..., X_n)$ պատահական մեծություն, որ, եթե ճիշտ է H_0

---

[*] Գործնականում նշանակալիության մակարդակը ընտրվում է այնքան փոքր, որ տվյալ խնդրի շրջանակներում այդ հավանականությամբ պատահարներ իրականում տեղի չեն ունենում: Տնտեսագիտական խնդիրներում ընդունված է, որ $\alpha \in [0,1; 0,001]$:

վարկածը, ապա դրա բաշխման ֆունկցիան հայտնի է (կամ մոտ է ինչ-որ հայտնի բաշխման): t_n պատահական մեծությունը անվանում են վիճակագրություն կամ վիճակագրական հայտանիշ: Որպես t_n հաճախ ընտրվում են նորմալ, χ^2, Ստյուդենտի և Ֆիշերի բաշխումներ ունեցող պատահական մեծությունները:

Այնուհետև t_n պատահական մեծության հնարավոր արժեքների բազմությունը տրոհում են երկու չհատվող ենթաբազմությունների, որոնցից մեկում հայտանիշի այն արժեքներն են, որոնց դեպքում վարկածը մերժվում է, իսկ մյուսում՝ այն արժեքները, որոնց դեպքում վարկածը ընդունվում է: Առաջին ենթաբազմությունը անվանում են կրիտիկական տիրույթ, իսկ երկրորդը՝ վարկածի ընդունման տիրույթ: Նշված երկու տիրույթների բաժանման (եզրային) կետերն անվանում են կրիտիկական կետեր: Կրիտիկական տիրույթի ընտրությունը կախված է α նշանակալիության մակարդակից, t_n վիճակագրությունից և մրցակցող վարկածի տեսքից: Այդ մասին մանրամասն կներկայացվի գրքի երկրորդ մասում: Եթե ընտրված է k_α կրիտիկական տիրույթը, ապա դիտարկվում է $P(t_n \in K_\alpha) = \alpha$ հավասարությունը: Եթե $t_{n\ դիտ.} \in K_\alpha$, ապա վարկածը մերժվում է՝ ի օգուտ մրցակցողի, հակառակ դեպքում հիմքեր չկան վարկածը մերժելու: Այստեղ $t_{n\ դիտ}$-ը t_n վիճակագրության այն արժեքն է, որը ստացվել է վերցվածքի տարրերը, որպես թվեր, t_n-ի մեջ տեղադրելուց:

Գոյություն ունի կապ վստահելի միջակայքի և վերևում նկարագրված վարկածի ստուգման միջև: Իրոք, եթե θ անհայտ պարամետրի համար գտնված է D_n վստահելի միջակայքը՝ $1-\alpha$ հուսալիության մակարդակով և ենթադրենք՝ դիտարկվում է $H_0:\theta=\theta_0$ վարկածը, ապա վարկածը կընդունվի (մերժելու հիմքեր չկան), երբ $\theta_0 \in D_n$, հակառակ դեպքում՝ կմերժվի:

ՄԱՍ II

ԵՐԿՈՒ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆՈՎ ՌԵԳՐԵՍԻԱՅԻ ՄՈԴԵԼ

Առաջին մասում ներկայացրել ենք հավանականության և վիճակագրության տեսությունների հիմունքները, որոնք անհրաժեշտ նախապայման են էկոնոմետրիկայի դրույթները հասկանալու, էկոնոմետրիկական մոդելները կառուցելու և գնահատելու համար:

Երկրորդ մասում մեկնաբանվում է ամենապարզ՝ երկչափ ռեգրեսիայի մոդելը, որն օգտագործվում է երկու փոփոխականների միջև հարաբերությունները բացահայտելու համար: Երկչափ մոդելում մեկ փոփոխականը՝ կախյալը, արտահայտվում է մեկ ուրիշ անկախ՝ կամ բացատրող փոփոխականի օգնությամբ:

ԳԼՈՒԽ 4

ԵՐԿՉԱՓ ՌԵԳՐԵՍԻԱՅԻ ԳԾԱՅԻՆ ՄՈԴԵԼ

4.1. Համախմբության և ընտրանքի ռեգրեսիայի ֆունկցիաներ

Ինչպես արդեն նշել ենք, էկոնոմետրիկայի ուսումնասիրության առարկան վիճակագրական տվյալներն են, իսկ գործիքը՝ ռեգրեսիայի վերլուծությունը: Էկոնոմետրիկան հիմնված է մաթեմատիկական վիճակագրության վրա, որը սովորեցնում է, թե ինչպես եզրակացություններ անել համախմբության մասին՝ ելնելով ընտրանքի տվյալներից:

Համախմբության ռեգրեսիայի ֆունկցիան (ՀՌՖ) արտահայտում է Y կախյալ փոփոխականի միջին կամ սպասվող արժեքը

յուրաքանչյուր X փոփոխականի համար: Մաթեմատիկորեն ՀՌՖ կարելի է ներկայացնել այսպես.

$$E(Y \mid X_t) = \beta_0 + \beta_1 X_t \qquad (4.1)$$

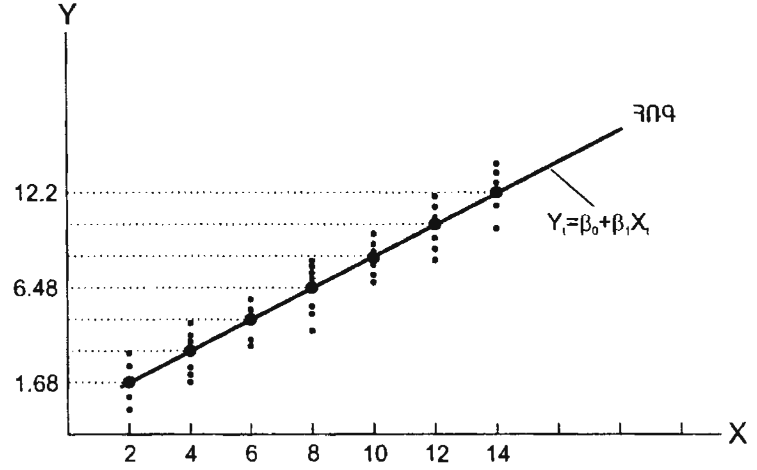
որտեղ՝ $E(Y \mid X_t)$-ն արտահայտում է Y-ի միջին կամ սպասվող արժեքը՝ պայմանավորված X_t-ի տվյալ արժեքով, կամ Y-ի պայմանական սպասվող արժեքը (տե՛ս մաս I, 2.13): Նշենք, որ այս դեպքում ենթադրվում է, որ Y-ի յուրաքանչյուր սպասվող պայմանական արժեքը գծային ֆունկցիա է X_t-ից:

Ներածությունում նշված օրինակում համախմբության ռեգրեսիայի գիծը (ՀՌԳ) բնութագրում է միջին սպառումը, այն դեպքում, երբ սպառումը տարբեր խմբերի համար տատանվում է միջինի շուրջը: ՀՌԳ-ն անցնում է Y-ի պայմանական միջինով: Եթե սկադեգրամի միջոցով փորձենք ներկայացնել ՀՌԳ-ն, ապա կտեսնենք, որ այն Y-ի միջին արժեքն է՝ տվյալ X_t-ի համար (տե՛ս գրաֆիկ 4.1): Հետևաբար, Y_t-ի տատանումները իր սպասվող արժեքից կարելի է ներկայացնել.

$$Y_t = E(Y \mid X_t) + \varepsilon_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \varepsilon_t \qquad (4.2)$$

որտեղ՝ ε_t-ն ՀՌՖ-ի սխալն է, այսինքն՝ սպառման շեղումն է միջին արժեքից: ՀՌՖ-ի սխալը պատահական մեծություն է, որն իրենից ներկայացնում է մոդելում չընդգրկված գործոնների ազդեցությունը:

Ներածությունում բերված օրինակում համախմբությունը բաղկացած է հինգ խմբից: Իրականում համախմբությունը գրեթե հնարավոր չէ դիտարկել ամբողջությամբ, հետևաբար այն գնահատելու համար օգտվում ենք ընտրանքի տվյալներից կամ ընտրանքից, ընդ որում՝ էկոնոմետրիկան ենթադրում է, որ ընտրանքը պատահական է:



Գրաֆիկ 4.1. *Սպառման պայմանական բաշխումը տարբեր խմբերի համար*

Եթե ներածությունում ներկայացված օրինակը դիտարկենք որպես համախմբություն, ապա տվյալ համախմբությունից կարող ենք պատահական որևէ ընտրանք կատարել (տե՛ս աղյուսակ 4.1):

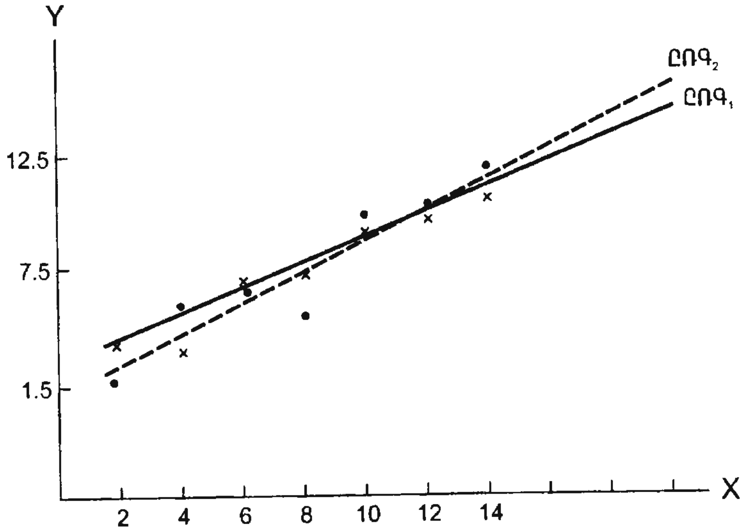
Աղյուսակ 4.1. *Սպառման կախվածությունը եկամտից*

Սպառում (Y) (հազ. դրամ)	*1.6*	*2.4*	*4.5*	*7.5*	*8.5*	*10*	*11.4*
Եկամուտներ (X) (հազ. դրամ)	*2.0*	*4.0*	*6.0*	*8.0*	*10*	*12*	*14*

Տվյալ դեպքում կարող ենք տարբեր ընտրանքներ կազմել (տե՛ս գրաֆիկ 4.2), բայց դրանցից որն ավելի ստույգ կներկայացնի իրական համախմբությունը՝ դժվար է ասել: Միայն կարելի է նշել, որ ընտրանքը իրական համախմբության մոտավորեցումն է:

Համախմբության ռեգրեսիայի գիծը տեսական գաղափար է,

հետևաբար ՀՌԳ-ի գործակիցները անհայտ են: Համախմբության յուրաքանչյուր տրված X_t-ի համար Y_t-ն ստոխաստիկ փոփոխական է՝ հավանականության պայմանական բաշխումով և $E(Y \mid X_t) = \beta_0 + \beta_1 X_t$ միջինով:

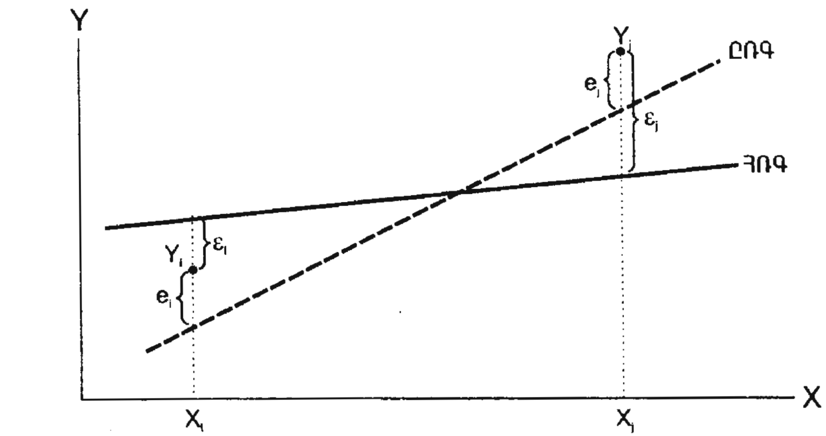


Գրաֆիկ 4.2. *Ռեգրեսիայի գիծը երկու տարբեր ընտրանքների համար*

Ընտրանքի ռեգրեսիայի գիծը (ԸՌԳ) էմպիրիկ է: ԸՌԳ-ի յուրաքանչյուր տրված X_t-ի համար ընտրանքի Y կախյալ փոփոխականը Y-ի դիտարկելի կամ գնահատված արդյունքն է: ԸՌԳ-ը կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով.

$$Y_t = b_0 + b_1X_t + e_t \qquad (4.3)$$

որտեղ՝ e_t – ն ընտրանքի մնացորդն է: Նշենք, որ, ի տարբերություն սխալի, մնացորդը դիտարկելի է: Հետևաբար սխալը գնահատվում է մնացորդի միջոցով կամ ավելի ճիշտ՝ մոտավորեցվում է դրա միջոցով:



Գրաֆիկ 4.3. *Համախմբության և ընտրանքի ռեգրեսիայի գծերը*

Այսպիսով, կարող ենք եզրակացնել, որ ռեգրեսիայի վերլուծության հիմնական նպատակը ընտրանքի ռեգրեսիայի գծի հիման վրա համախմբության ռեգրեսիայի գծի գնահատումն է (տե՛ս գրաֆիկ 4.3): Ընդ որում, ԸՌԳ-ը կարող է գերազանցել ՀՌԳ-ը, ինչպես X_j-ում և զիջել ՀՌԳ-ն, ինչպես X_i-ում, և այդ տատանումները անխուսափելի են:

4.2. Փոքրագույն քառակուսիների մեթոդը

Ինչպես համոզվեցինք, համախմբության ռեգրեսիայի գիծը կարելի է գնահատել ընտրանքի ռեգրեսիայի գծի հիման վրա: Գոյություն ունեն ԸՌԳ-ի գնահատման մի քանի մեթոդներ: Մենք կներկայացնենք փոքրագույն քառակուսիների մեթոդը, որը մշակվել է գերմանացի մաթեմատիկոս Կարլ Գաուսի կողմից և մեծ կիրառություն ունի էկոնոմետրիկայում:

Ենթադրենք՝ երկչափ համախմբության ռեգրեսիայի ֆունկցիան է՝

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \varepsilon_t$$

Քանի որ այն դիտարկելի չէ, ուստի դա գնահատում ենք ընտրանքի ռեգրեսիայի ֆունկցիայով՝

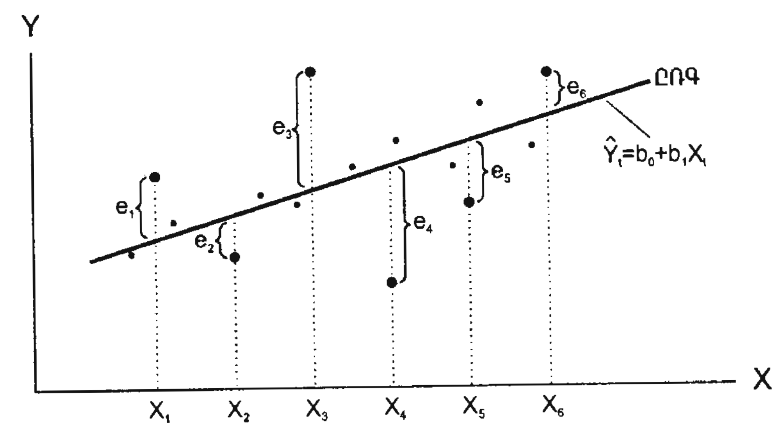
$$Y_t = b_0 + b_1 X_t + e_t = \hat{Y} + e_t$$

որտեղ՝ $\hat{Y}$ -ը Y-ի գնահատված արժեքն է:

Այստեղից՝

$$e_t = Y_t - b_0 - b_1 X_t = Y_t - \hat{Y} \qquad (4.4)$$

(4.4)-ից երևում է, որ մնացորդները իրական և գնահատված Y-ի տատանումներն են:



Գրաֆիկ 4.4. *Ընտրանքի ռեգրեսիայի գիծը և մնացորդների սփռվածությունը*

Մեր հիմնական նպատակն է ԸՌԳ-ն ընտրել այնպես, որ այն հնարավորին չափ մոտ լինի իրական Y-ին: Այդ նպատակով ԸՌԳ-ն պետք է կառուցել այնպես, որ մնացորդների գումարը՝

$\sum_{t=1}^{n} e_t$, լինի որքան հնարավոր է փոքր: Չափանիշ ընդունելով $\sum_{t=1}^{n} e_t = \sum_{t=1}^{n}\left(Y_t - \hat{Y}\right)$-ը նվազագույնի հասցնելը՝ հնարավոր է, որ այն հավասար լինի զրոյի այն դեպքում, երբ մնացորդները գտնվեն լայն միջակայքերում (տե՛ս գրաֆիկ 4.4): Որպեսզի խուսափենք տվյալ հիմնախնդրից, կարող ենք օգտվել փոքրագույն քառակուսիների չափանիշից, որի դեպքում ԸՌԳ-ը կհաստատագրվի այնպես, որ միջին քառակուսային շեղումը՝ $\sum_{t=1}^{n} e_t^2 = \sum_{t=1}^{n}\left(Y_t - \hat{Y}\right)^2$, լինի ամենափոքրը:

Տվյալ դեպքում $\sum_{t=1}^{n} e_t^2$ -ն ռեգրեսիայի մնացորդների քառակուսին է, ընդ որում, $\sum_{t=1}^{n} e_t$ -ն քառակուսի բարձրացնելու դեպքում ավելի մեծ կշիռ կստանան այն մնացորդները, որոնք ավելի մեծ միջակայքերում են: Այժմ գտնենք b_0 և b_1 գործակիցները այնպես, որ $\sum_{t=1}^{n} e_t^2$ լինի նվազագույնը.

$$\min \rightarrow \sum_{t=1}^{n} e_t^2 = \sum_{t=1}^{n} (Y_t - b_0 - b_1X_t)^2$$

Այդ նպատակով հավասարումը մասնակի ածանցենք ըստ b_0 -ի և b_1-ի և ստացած հավասարումները հավասարեցնենք զրոյի.

$$\frac{\partial \sum e_t^2}{\partial b_0} = -2\sum_{t=1}^{n}\left(Y_t - b_o - b_1X_t\right) \qquad (4.5)$$

$$\frac{\partial \sum e_t^2}{\partial b_1} = -2\sum_{t=1}^{n} X_t\left(Y_t - b_o - b_1X_t\right):$$

b_0-ի համար մասնակի ածանցյալը հավասարեցնելով զրոյի՝

$$\sum_{t=1}^{n} Y_t - \sum_{t=1}^{n} b_0 - b_1\sum_{t=1}^{n} X_t = 0$$

և բաժանելով n-ի, ստանում ենք.

$$b_0 = \overline{Y} - b_1\overline{X} \qquad (4.6)$$

որտեղ՝ $\overline{Y}$ և $\overline{X}$ -ն համապատասխան գործակիցների միջին արժեքներն են, այսինքն՝ $\overline{X} = (1/n)\sum_{t=1}^{n} X_t$ և $\overline{Y} = \left(\frac{1}{n}\right)\sum_{t=1}^{n} Y_t$:

Տեղադրելով ստացված b_0-ն 4.5-ի երկրորդ հավասարման մեջ և հավասարեցնելով զրոյի՝ կունենանք.

$$\sum_{t=1}^{n} X_tY_t - \left(\overline{Y} - b_1\overline{X}\right)\sum_{t=1}^{n} X_t - b_1\sum_{t=1}^{n} X_t = 0$$

Քանի որ $\sum_{t=1}^{n} X_t = n\overline{X}$, ապա՝

$$b_1 = \frac{\sum_{t=1}^{n} X_tY_t - n\overline{XY}}{\sum_{t=1}^{n} X_t^2 - n\overline{X}^2}: \qquad (4.7)$$

Տվյալ b_0, b_1 գործակիցները անվանում են համահարթված OLS (Ordinary Least Square) գործակիցներ, քանի որ հաշվարկված են փոքրագույն քառակուսիների չափանիշով: Դրանք կետային գործակիցներ են, որովհետև տվյալ ընտրանքի համար ունեն մեկ ստույգ արժեք:

Դիտողություն. OLS մեթոդով գնահատված ԸՌԳ-ը պարտադիր հատում է $\overline{X}$-ի և $\overline{Y}$-ի միջին արժեքները, քանի որ (4.6) հավասարումից կստանանք.

$$\overline{Y} = b_0 + b_1\overline{X} \qquad (4.8)$$

Նշանակենք՝

$x_t = X_t - \overline{X}$, և

$y_t = Y_t - \overline{Y}$,

որտեղ՝ x_t-ն և y_t-ն ներկայացնում են համապատասխան փոփոխականների շեղումը իրենց միջին արժեքից: Փորձենք գնահատել՝

$$\min \rightarrow \sum_{t=1}^{n} (y_t - b_0 - b_1x_t)^2$$

Վերը նշված օրինակի նմանությամբ հաշվարկված գործակիցներն են (այսուհետև հակիրճության նպատակով $\sum\limits_{t=1}^{n}$-ն կներկայացնենք առանց ինդեքսների)՝

$$b_0=0, \quad b_1 = \frac{\sum x_t y_t}{\sum x_t^2} = \frac{\sum (X_t - \overline{X})(Y_t - \overline{Y})}{\sum (X_t - \overline{X})^2} \qquad (4.9)$$

Այսպիսով, ստացանք անկյունային գործակցի գնահատման նոր հավասարում, որի միջոցով կարելի է ներկայացնել՝

$$y_t = b_1x_t + e_t \qquad (4.10)$$

Այս հավասարման մեջ ազատ անդամը բացակայում է, որը բավականին հեշտացնում է ռեգրեսիայի արդյունքների հաշվարկները:

4.3. Դասական գծային ռեգրեսիայի մոդելի ենթադրությունները

OLS գործակիցները ստանալուց հետո հարց է ծագում՝ որքանով է ԸՌԳ-ը ճիշտ ներկայացնում իրական ՅՌԳ-ը: Մեզ համար արդեն պարզ է, որ Y-ը կախյալ է ինչպես բացատրող փոփոխականից, այնպես էլ սխալից: Ինչպես արդեն նկատեցինք, X բացատրող փոփոխականը իր բնույթով ստոխաստիկ չէ՝ ի տարբերություն սխալի, որը մոդելում չբացահայտված փոփոխականների ազդեցության չափն է Y-ի վրա: Հետևաբար, մինչև որոշակի պատկերացում չկազմենք սխալի վերաբերյալ, չենք կարող վստահ լինել որ ԸՌՖ-ը ճիշտ է բնութագրում ՅՌՖ-ը: Այդ նպատակով դասական գծային ռեգրեսիայի մոդելը (ԴԳՌՄ) որոշակի ենթադրություններ է կատարում ռեգրեսիայի ֆունկցիայի և սխալի վերաբերյալ:

Դասական գծային ռեգրեսիայի մոդելի ենթադրություններն են.

1. Ռեգրեսիայի մոդելը գծային է պարամետրերով.

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1X_t + \varepsilon_t \qquad (4.11)$$

Այն կարող է լինել ոչ գծային փոփոխականներով՝

$Y_t = \beta_0 + \beta_1X_t^2 + \varepsilon_t$, բայց՝ գծային պարամետրերով:

Ապացույց.

Ինչպես գիտենք.

$$b_1 = \frac{\sum x_t y_t}{\sum x_t^2} = \frac{\sum (X_t - \overline{X})(Y_t - \overline{Y})}{\sum (X_t - \overline{X})^2} = \frac{\sum (X_t - \overline{X})Y_t - \overline{Y}\sum (X_t - \overline{X})}{\sum (X_t - \overline{X})^2} =$$

$$= \frac{\sum (X_t - \overline{X})Y_t}{\sum (X_t - \overline{X})^2}$$

եթե $\frac{X_t-\overline{X}}{\sum\left(X_t-\overline{X}\right)^2}$ նշանակենք K, այն կլինի ոչ ստոխաստիկ, քանի որ X-ը ստոխաստիկ չէ: Հետևաբար

$$b_1=\sum K_tY_t \qquad (4.12)$$

կամ

$$b_1 = K_1Y_1 + K_2Y_2 + ...+ K_nY_n :$$

Քանի որ K-ն ստոխաստիկ չէ, ապա b-ն գծային ֆունկցիա է ընտրանքի Y-ից: Հետևաբար, ռեգրեսիայի մոդելը գծային է պարամետրերով:

2. Սխալի միջին կամ սպասվող արժեքը հավասար է զրոյի.

$E(\varepsilon_t)=0$

Այսինքն՝ տրված X-ի համար սխալի պայմանական միջին արժեքը հավասար է զրոյի: Ասվածն ավելի պատկերավոր կարող ենք ներկայացնել գրաֆիկի միջոցով (տե՛ս գրաֆիկ 4.5), որտեղից երևում է, որ եթե սխալը պարբերաբար ազդեցություն չունի Y-ի միջին արժեքի վրա, ապա դրա դրական և բացասական արժեքները միմյանց չեզոքացնում են:

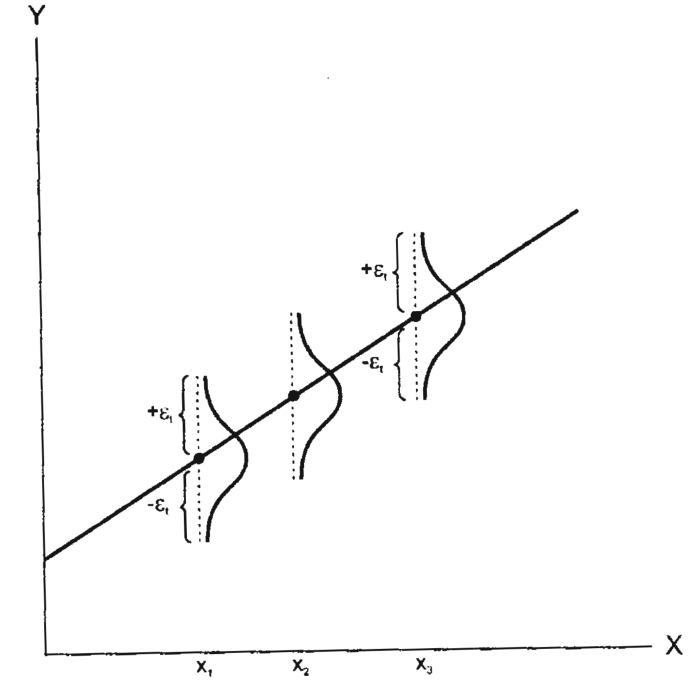
3. X_t - ն ստոխաստիկ չէ.

Ներածությունում ներկայացված օրինակից տեսնում ենք, որ նախ՝ X-ի արժեքը պետք է հաստատագրվի յուրաքանչյուր խմբի համար, ապա դիտարկվի Y-ի փոփոխությունը: Հետևաբար, X_t -ն հաստատուն է:

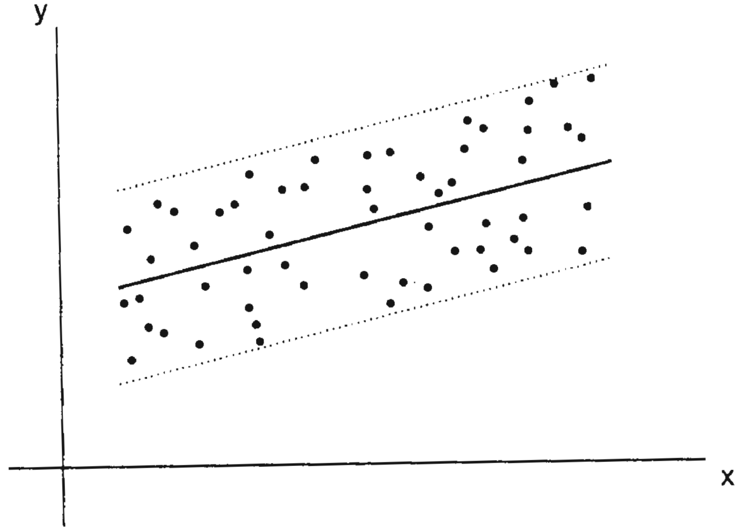
4. Սխալի դիսպերսիան հոմոսկեդաստիկ (համացրիվ) է.

$var(\varepsilon)=\sigma^2$

Տրված X -ի համար սխալի դիսպերսիան հաստատուն է, այսինքն՝ հոմոսկեդաստիկ է (տե՛ս գրաֆիկ 4.6ա):



Գրաֆիկ 4.5 *Սխալի պայմանական բաշխումը*



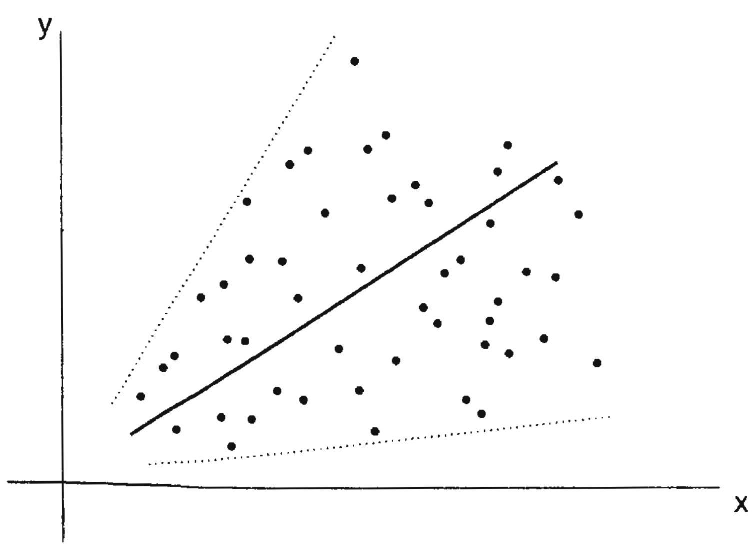
Գրաֆիկ 4.6 *ա) Սխալի հոմոսկեդաստիկ (համացրիվ) բաշխում*

Եթե տրված X-ի համար Y-ի արժեքն իր միջին արժեքից տատանվում է ոչ հաստատուն դիսպերսիայով, այսինքն՝ սխալի պայմանական դիսպերսիան տատանվում է Y-ի հետ միասին, ապա այն հետերոսկեդաստիկ (տարացրիվ) է (տե՛ս գրաֆիկ 4.6 բ).

5. Սխալների միջև չկա ավտոկոռելյացիա.

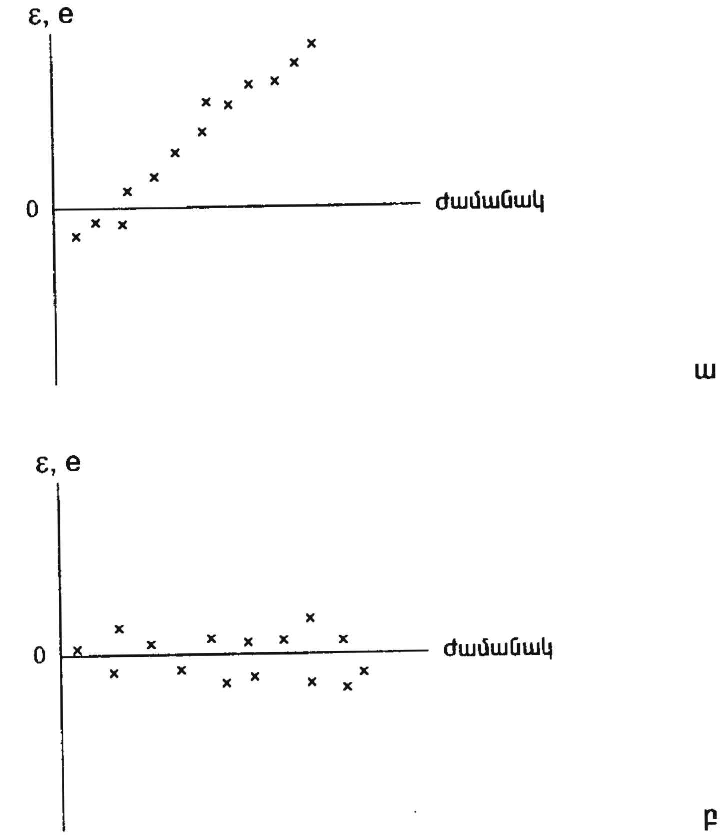
$cov(\varepsilon_t \varepsilon_{t-j}) = 0$, *բոլոր* $j \neq 0$ *արժեքների համար:*

Եթե սխալների միջև չկա հերթական կոռելյացիա կամ ավտոկոռելյացիա, ապա սխալները միմյանցից կախյալ չեն, այսինքն՝ անկախ են: Ավտոկոռելյացիան դիտարկումների միջև եղած կոռելյացիան է ժամանակի ընթացքում կամ տարածությունում:



Գրաֆիկ 4.6. *բ) Սխալի հետերոսկեդաստիկ (տարացրիվ) բաշխում*

Եթե գրաֆիկի օգնությամբ տեղադրենք սխալները ըստ ժամանակի, կարող ենք տեսնել, որ առաջին դեպքում սխալների միջև կա դրական կախվածություն (գրաֆիկ 4.7 ա), իսկ երկրորդ դեպքում սխալները միմյանցից անկախ են (գրաֆիկ 4.7 բ):



Գրաֆիկ 4.7 ա) *Դրական ավտոկոռելյացիա*
բ) Զրո կոռելյացիա

Դասական գծային ռեգրեսիայի մոդելը ենթադրում է, որ ռեգրեսիայի սխալների միջև չկա կոռելյացիա, քանի որ, եթե երկու սխալների միջև կա դրական կամ բացասական կոռելյացիա, ապա Y-ը կախյալ է ոչ միայն ε_t-ից, այլ նաև ε_{t-j}-ից:

6. Ռեգրեսիայի մոդելը ճիշտ է բնորոշված:

Այսինքն՝ ռեգրեսիայի մոդելը բնորոշման շեղում կամ բնորոշման սխալ չի պարունակում: Դա նշանակում է, որ մոդելը ընդգրկում է ճիշտ բացատրող փոփոխականներ, և պարզ է դրա ֆունկցիոնալ ձևը:

7. *Մոդելը չի պարունակում բազմակոլինեարություն*, այսինքն` մոդելում ընդգրկված երկու փոփոխականների միջև չկա հաստատուն գծային կախվածություն:

4.4. Գաուս-Մարկովի թեորեմը

Դասական գծային ռեգրեսիայի ենթադրությունների պայմաններում OLS մեթոդով հաշվարկված իրական գործակիցների վիճակագրական հատկությունները ձևակերպված են Գաուս-Մարկովի թեորեմում:

Գաուս - Մարկովի թեորեմը. Դասական գծային ռեգրեսիայի մոդելի ենթադրությունների պայմաններում OLS գործակիցները բոլոր անշեղ գծային գործակիցների միջև ունեն նվազագույն դիսպերսիա, այսինքն` լավագույն գծային անշեղելի գործակիցներ են` անգլերեն BLUE (Best Linear Unbaised Estimators):

Հետևաբար, OLS b_0 և b_1 գործակիցները`

- գծային են
- անշեղելի են`

$E(b_0) = \beta_0$

$E(b_1) = \beta_1$

- ունեն նվազագույն դիսպերսիա:

Ապացուցենք, որ b_1 գործակիցն անշեղելի է, այսինքն`

$E(b_1) = \beta_1$

Համաձայն (4.12)-ի`

$$b_1 = \sum K_tY_t = \sum K_t(\beta_0+\beta_1X_t+\varepsilon_t)$$

Հետևաբար`

$$b_1 = \beta_0\sum K_t + \beta_1\sum K_tX_t+\sum K_t\varepsilon_t$$

Ինչպես գիտենք`

$$\sum K_t = \sum\frac{(X_t-\overline{X})}{\sum(X_t-\overline{X})^2} = \frac{1}{\sum(X_t-\overline{X})^2}\cdot\sum(X_t-\overline{X})$$

և քանի որ $\sum(X_t-\overline{X})=0$, ապա`

$$\sum K_t = \frac{\sum(X_t-\overline{X})}{\sum(X_t-\overline{X})^2}=0$$

Իր հերթին` $\sum K_tX_t = 1$:

Հետևաբար`

$$b_1 = \beta_1 + \sum K_t\varepsilon_t \qquad (4.13)$$

Կամ սպասման արժեքների տեսքով`

$$E(b_1) = \beta_1 + E\left(\sum K_t\varepsilon_t\right)$$

Քանի որ K_t-ն ստոխաստիկ չէ, ապա.

$$E(b_1) = \beta_1 + \sum K_tE(\varepsilon_t)$$

Համաձայն ԳԴՌՄ-ի ենթադրություն 2-ի` $E(\varepsilon_t)=0$

Հետևաբար`

$$E(b_1) = \beta_1 \qquad (4.14)$$

Ինչն էլ պահանջվում էր ապացուցել:

Ապացուցենք, որ b_1 գործակիցն ունի նվազագույն դիսպերսիա: Դրա համար պետք է պարզել, թե ինչի է հավասար b_1-ի դիսպերսիան:

Առաջին մասում նշված բնութագրության համաձայն՝

$$var(b_1) = E\left[(b_1 - E(b_1))^2\right]$$

Քանի որ $E(b_1) = \beta_1$,
հետևաբար՝

$$var(b_1) = E\left[(b_1 - \beta_1)^2\right]$$

Համաձայն 4.13-ի՝

$b_1 - \beta_1 = \sum K_t\varepsilon_t$, այսինքն՝

$$var\,b_1 = E\left[\left(\sum K_t\varepsilon_t\right)^2\right] = E[(K_1\varepsilon_1 + K_2\varepsilon_2 + \ldots K_n\varepsilon_n +$$

$$+ 2K_1K_2\varepsilon_1\varepsilon_2 + 2K_2K_3\varepsilon_2\varepsilon_3 + 2K_{n-1}K_n\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n\ )^2\ ]$$

Կամ՝

$$var(b_1) = E\left[(K_1^2\varepsilon_1^2 + K_2^2\varepsilon_2^2 + \ldots K_n^2\varepsilon_n^2 + 2K_1K_2(\varepsilon_1\varepsilon_2) + \ldots\right.$$
$$\left.\cdots + 2K_{n-1}K_n(\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n)\ \right]$$

Կամ

$var\,(b_1) = K_1^2E(\varepsilon_1^2) + K_2^2E(\varepsilon_2^2) + \ldots + K_n^2E(\varepsilon_n^2) + 2K_1K_2E(\varepsilon_1\varepsilon_2) +$
$\ldots + 2K_{n-1}K_nE(\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n)$

Համաձայն ԴԳՌՄ-ի ենթադրություն 4-ի՝ var(b)-constant

$$E(\varepsilon_1)^2 = \sigma^2 \text{ և } E(\varepsilon_n)^2 = \sigma^2$$

և համաձայն ԳԴՌՄ-ի ենթադրություն 5-ի՝ $E(\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n) = 0$

Հետևաբար՝

$$var(b_1) = K_1^2\sigma^2 + K_2^2\sigma^2 + \ldots + K_n^2\sigma^2 = \sigma^2\sum K_t^2$$

$$var(b_1) = \sigma^2\frac{\sum(X_t - \overline{X})^2}{\left(\sum(X_t - \overline{X})^2\right)^2} = \frac{\sigma^2}{\sum(X_t - \overline{X})^2}$$

Նշենք, որ միայն ԴԳՌՄ-ի ենթադրությունների պայմաններում է. $var(b_1) = \dfrac{\sigma^2}{\sum(X_t - \overline{X})^2}$

Որպեսզի ապացուցենք, որ b_1-ն ունի նվազագույն դիսպերսիա, համեմատենք β_1-ի այլընտրանքային b^* գործակցի հետ, ենթադրելով, որ վերջինս նույնպես գծային գործակից է՝ նվազագույն դիսպերսիայով:

Ընդունենք՝ $b^* = \sum W_tY_t$

որտեղ՝ W_t –ն ստոխաստիկ չէ, քանի որ ենթադրվում է, որ b^* -ն գծային և անշեղելի գործակից է: Ուստի՝

$$b^* = \sum W_tY_t\ = \sum W_t(b_0+b_1X_t+\varepsilon_t) = b_0\sum W_t + b_1\sum W_tX_t + \sum W_t\varepsilon_t$$

Կամ սպասման արժեքների տեսքով՝

$$E(b^*) = b_0\sum W_t + b_1\sum W_tX_t + \sum W_tE(\varepsilon_t)$$

Վերջին գումարելին, ԴԳՌՄ-ի ենթադրության համաձայն, հավասար է զրոյի, քանի որ $E(\varepsilon_t) = 0$: Հետևաբար.

$$E(b^*) = b_0\sum W_t + b_1\sum W_tX_t$$

Որպեսզի b^*-ն լինի անշեղելի, $\sum W_t$-ն պետք է հավասար լինի զրոյի և $\sum W_tX_t$-ն պետք է հավասար լինի մեկի: Այդ դեպքում՝

$E(b^*) = \beta_1$

Այժմ` $var(b^*) = var(\sum W_t Y_t) = \sum W_t^2 var(Y_t)$

Քանի որ,

$var(Y_t) = var(\varepsilon_t) = \sigma^2$

ապա`

$$var(b^*) = \sigma^2 \sum W_t^2 = \sigma^2 \sum (W_t - K_t + K_t)^2 = \sigma^2 \sum (W_t - K_t)^2 +$$
$$+ \sigma^2 \sum K_t^2 + 2\sigma^2 \sum (W_t - K_t) K_t$$

Հավասարման վերջին գումարելին հավասար է զրոյի, որովհետև.

$$\sum W_t K_t - \sum K_t^2 = \frac{\sum W_t X_t}{\sum (X_t - \bar{X})^2} - \frac{1}{\sum (X_t - \bar{X})^2}$$

Քանի որ $\sum W_t X_t = 1$, ապա`

$$\sum W_t K_t - \sum K_t^2 = \frac{1}{\sum (X_t - \bar{X})^2} - \frac{1}{\sum (X_t - \bar{X})^2} = 0$$

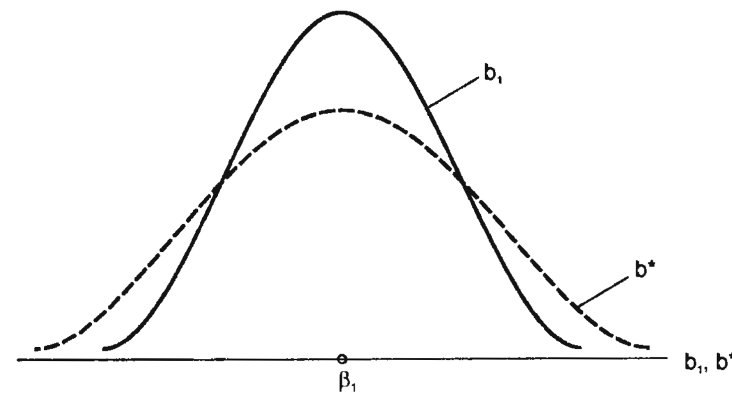
Հետևաբար`

$$var(b^*) = \sigma^2 \sum (W_t - K_t)^2 + \sigma^2 \frac{\sum (X_t - \bar{X})^2}{\left(\sum (X_t - \bar{X})^2\right)^2}$$

$$var(b^*) = \sigma^2 \sum (W_t - K_t)^2 + \frac{\sigma^2}{\sum (X_t - \bar{X})^2} \qquad (4.15)$$

Քանի որ (4.15) հավասարման առաջին գումարելին դրական է, կարող ենք ասել որ, $var(b^*) > var(b_1)$, այսինքն` b^*-ի

բաշխումն իր միջին արժեքից ավելի ցրված է, քան b_1-ինը: Հետևաբար b_1-ը բոլոր անշեղելի գործակիցների միջև ունի նվազագույն դիսպերսիա, ինչն էլ պահանջվում էր ապացուցել (տե՛ս գրաֆիկ 4.8):



Գրաֆիկ 4.8. *b_1-ի և b^*-ի բաշխումների ցրվածությունը*

Ինչպես տեսանք,

$$var(b_1) = \frac{\sigma^2}{\sum (X_t - \bar{X})^2} = \frac{\sigma^2}{\sum x_t^2} \qquad (4.16)$$

որի ստանդարտ սխալը`

$$S_{b_1} = \sqrt{var(b_1)} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{\sum x_t^2}} \qquad (4.17)$$

Համապատասխանաբար b_0-ն բոլոր անշեղելի գործակիցների մեջ ունի նվազագույն դիսպերսիա, որը հավասար է*.

---

* Ապացույցը, որ b_0-ն նույնպես անշեղելի է` նվազագույն դիսպերսիայով, տե՛ս Магнус Я.П. Эконометрика. М.,2000, էջ.38:

$$var(b_0) = \frac{\sum X_t^2}{n\sum X_t^2}\sigma^2 \qquad (4.18)$$

և որի ստանդարտ սխալն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$S_{b_0} = \sqrt{var(b_0)} = \sqrt{\frac{\sum X_t^2}{n\sum X_t^2}}\sigma \qquad (4.19)$$

Համոզվեցինք, որ OLS մեթոդով հաշվարկված գործակիցներն անշեղելի են և ունեն նվազագույն դիսպերսիա:

Գործակիցների դիսպերսիան հակառակ համեմատական է $\sum X_t^2$ -ին: Այսինքն՝ ինչքան մեծ լինեն X_t-ի փաստացի տատանումները կամ X_t-ի քանակները, այնքան b_1-ի դիսպերսիան փոքր կլինի:

Նշենք նաև, որ b_0, b_1 գործակիցները միմյանցից կախյալ են, և դրանց կախվածության չափը որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$Cov(b_0 b_1) = -\overline{X}\,var(b_1) = -\overline{X}\left(\frac{\sigma^2}{\sum X_t^2}\right) \qquad (4.20)$$

Քանի որ b_1 դիսպերսիան դրական է, ապա b_o և b_1 կովարիացիան կախված է $\overline{X}$-ի նշանից: Եթե $\overline{X}$-ը բացասական է, ապա b_o և b_1 կովարիացիան դրական է և՝ հակառակը*:

* Gujarati. Damodar N. : Basic Econometrics., McGraw-Hill., New York. 1995.

4.5. Սխալների դիսպերսիայի գնահատումը

Նշվեց, որ փոքրագույն քառակուսիների մեթոդով գնահատված գործակիցները բոլոր անշեղ գծային գործակիցների մեջ ունեն նվազագույն դիսպերսիա: Այսինքն՝ b_0-ն, b_1-ը լավագույն գծային անշեղելի գործակիցներ են:

Սակայն b_0, b_1 գործակիցների դիսպերսիան գնահատելու համար անհրաժեշտ է պարզել, թե ինչի է հավասար սխալի դիսպերսիան՝ σ^2:

Փոքրագույն քառակուսիների մեթոդով սխալի դիսպերսիան, որը տրված X_t-ի համար իրենից ներկայացնում է ε_t-ի և Y_t-ի պայմանական դիսպերսիան, գտնելու համար օգտվենք հետևյալ հավասարումից.

$$\sigma^2 = var(\varepsilon_t) = E\left[\left(\varepsilon_t - E(\varepsilon_t)\right)^2\right] = E(\varepsilon_t^2)$$

Քանի որ $E(\varepsilon_t) = 0$ (տե՛ս ենթադրություն 2), և ε_t -ն դիտարկելի չէ, այն մոտավորեցվում է e_t-ի միջոցով.

$$S_e^2 = \frac{\sum e_t^2}{d.f.}$$

Տվյալ դեպքում ազատության աստիճանը (d.f) (տե՛ս մաս I, 3.4). հավասար է՝ (n-2), այսինքն՝ դիտարկումների քանակից հանած երկու, քանի որ ունենք երկու՝ β_0 և β_1 գործակիցներ: Հետևաբար կստանանք.

$$S_e^2 = \frac{\sum e_t^2}{n-2} \qquad (4.21)$$

Աղյուսակ 4.2. *Եկամուտների և սպառման ծավալների հաշվարկումը փոքրագույն քառակուսիների մեթոդով*

Y_t	X_t	X_tY_t	X_t^2	$Y_t=b_0+b_1X_t$	$e_t= Y_t -Y_t$	e_t^2	$Y_t - Y$	$(Y_t - Y)^2$
1.6	2.0	3.2	4	1.34	0.26	0.068	-4.96	24.602
2.4	4.0	9.6	16	3.08	-0.64	0.41	-4.16	17.306
4.5	6.0	27.0	36	4.82	-0.32	0.102	-2.06	4.244
7.5	8.0	60.0	64	6.56	0.94	0.884	0.94	0.884
8.5	10.0	85.0	100	8.30	0.20	0.04	1.94	3.764
10.0	12.0	120.0	144	10.04	-0.04	0.002	3.44	11.834
11.4	14.0	159.6	196	11.78	-0.38	0.144	4.84	23.426
$\Sigma Y=$ 45.9	$\Sigma X_t=$ 56.0	$\Sigma X_tY=$ 464.4	$\Sigma X_t=$ 560			$\Sigma e_t^2=$ 1.65		$\Sigma (Y_t -Y)^2$ =86.06

$$b_1 = \frac{\sum X_tY_t - n\overline{X}\overline{Y}}{\sum X_t^2 - n\overline{X}^2} = \frac{464.4 - 7\cdot 8\cdot 6.56}{560 - 7(8)^2} \approx 0.87$$

$$b_0 = \overline{Y} - b_1\overline{X} = 6.56 - 8\cdot 0.87 = -0.4$$

$$S_e^2 = \frac{\sum e_t^2}{n-2} = \frac{1.65}{5} = 0.33$$

$$S_{b_0}^2 = \frac{S_e^2 \cdot \sum X_t^2}{n\left(\sum X_t^2 - n\overline{X}^2\right)} = \frac{0.33\cdot 560}{7(560 - 7\cdot 64)} = 0.24 \quad S_{b_0} = 0.49$$

$$S_{b_1}^2 = \frac{S_e^2}{\sum X_t^2 - n\overline{X}^2} = \frac{0.33}{560 - 7\cdot 64} = 0.003 \qquad S_{b_1} = 0.055$$

S_e^2-ն իրական, բայց անհայտ σ^2-ի կետային գործակիցն է, որի ստանդարտ սխալն է.

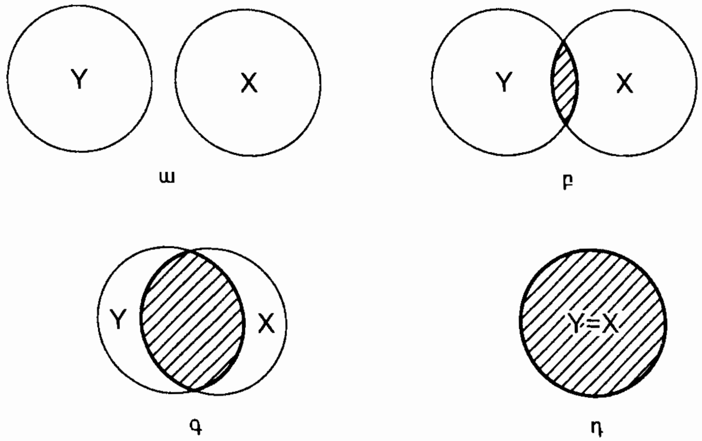
$$S_e = \sqrt{S_e^2} = \sqrt{\frac{\sum e_t^2}{n-2}} \tag{4.22}$$

Նշենք, որ S_e-ն նաև գնահատման ստանդարտ սխալն է, քանի որ այն Y- ի շեղումն է իր միջին պայմանական արժեքից:

4.6. Դետերմինացիայի գործակիցը

Ռեգրեսիայի մոդելը կարելի է դիտարկել նաև այն տեսանկյունից, թե ինչ չափով է X- ի ինֆորմացիան բացատրում և հետագայում կանխատեսում Y-ի վարքագիծը: Եթե Y-ի տատանումները 100%-ով բացատրվում են X-ի ինֆորմացիայով (տե՛ս գրաֆիկ 4.9 դ), ապա կարող ենք ասել, որ մեր բոլոր դիտարկումները ընտրանքի ռեգրեսիայի գծի վրա են, այսինքն՝ այն ամբողջովին ընդգրկում է տրված տվյալները: Եվ հակառակը, հնարավոր է, որ X-ի ինֆորմացիան ընդհանրապես չբացատրի Y-ի վարքագիծը (տե՛ս գրաֆիկ 4.9 ա):

Դետերմինացիայի գործակիցը ցույց է տալիս, թե ինչ չափով է ընտրանքի ռեգրեսիայի գիծը ընդգրկում տվյալները: Եթե բոլոր դիտարկումները ռեգրեսիայի գծի վրա են, ապա դետերմինացիայի գործակիցը հավասար է մեկի (գրաֆիկ 4.9 դ): Հակառակ դեպքում, հավասար է զրոյի (գրաֆիկ 4.9 ա): Այսինքն՝ կարելի է եզրակացնել. ինչքան մնացորդները մոտ են ռեգրեսիայի գծին, այնքան դետերմինացիայի գործակիցն ավելի մեծ է (տե՛ս գրաֆիկ 4.9 գ) և՝ հակառակը (տե՛ս գրաֆիկ 4.9 բ):



Գրաֆիկ 4.9. *Դետերմինացիայի գործակցի արժեքները՝*
ա) $r^2=0$, դ) $r^2=1$

Դետերմինացիայի գործակիցը հաշվելու համար (4.4)-ը ներկայացնում ենք.

$Y_t=\hat{Y}+e_t$ տեսքով: Հավասարության երկու կողմից հանելով $\overline{Y}$, կստանանք $(Y_t-\overline{Y})=(\hat{Y}_t-\overline{Y})+e_t$

Երկու կողմից բարձրացնելով քառակուսի և արտահայտելով գումարի ($\sum$) տեսքով՝ կստանանք.

$$(Y_t-\overline{Y})^2=(\hat{Y}_t-\overline{Y})^2+e_t^2+2(\hat{Y}_t-\overline{Y})e_t$$

$$\sum(Y_t-\overline{Y})^2=\sum(\hat{Y}_t-\overline{Y})^2+\sum e_t^2+2\sum(\hat{Y}_t-\overline{Y})e_t$$

Հավասարման վերջին գումարելին՝

$2\sum(\hat{Y}_t-\overline{Y})e_t$, հավասար է զրոյի, որովհետև.

$\sum e_t=0$

Հետևաբար՝

$$\underset{\substack{\downarrow\\ TSS}}{\sum(Y_t-\overline{Y})^2}=\underset{\substack{\downarrow\\ ESS}}{\sum(\hat{Y}_t-\overline{Y})^2}+\underset{\substack{\downarrow\\ RSS}}{\sum e_t^2}$$

որտեղ՝

TSS (Total Sum of Squares) - ներկայացնում է Y-ի ընդհանուր դիսպերսիան իր միջին արժեքից,

ESS (Explained Sum of Squares) - ներկայացնում է մոդելում բացատրված դիսպերսիան,

RSS (Residual Sum of Squares) - ներկայացնում է մոդելում չբացատրված դիսպերսիան:

Քանի որ՝ TSS=ESS+RSS,

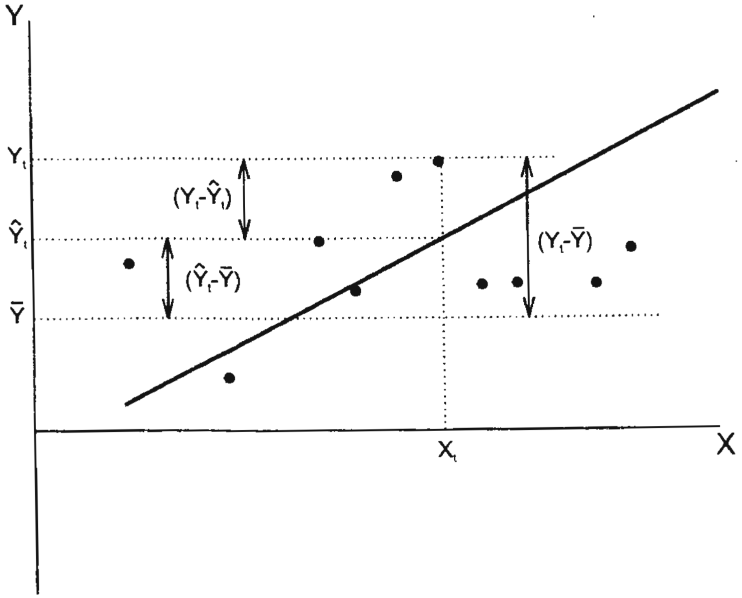
իսկ դետերմինացիայի գործակիցն, ինչպես արդեն ասվել է, ցույց է տալիս մոդելում բացատրված դիսպերսիան, և հավասար է՝

$$r^2=\frac{ESS}{TSS}=\frac{\sum(\hat{Y}-\overline{Y})}{\sum(Y_t-\overline{Y})^2}=1-\frac{RSS}{TSS}=1-\frac{\sum e_t^2}{\sum(Y_t-\overline{Y})^2} \qquad (4.23)$$

Ինչպես տեսնում ենք, դետերմինացիայի գործակիցը դրական է, գտնվում է զրոյից մեկ միջակայքում և գնահատում է Y-ի այն մասը, որը բացատրված է ռեգրեսիայի մոդելով (տե՛ս գրաֆիկ 4.10):

Իր բնույթով դետերմինացիայի գործակիցը շատ մոտ է առաջին մասում ներկայացված կոռելյացիայի գործակցին, որը կարելի է հաշվել նաև դետերմինացիայի գործակցի միջոցով.

$$r=\pm\sqrt{r^2} \qquad (4.24)$$



Գրաֆիկ 4.10. *Y-ի շեղումները միջին արժեքից*

Ի տարբերություն դետերմինացիայի գործակցի, կոռելյացիայի գործակիցը կարող է լինել ինչպես դրական, այնպես էլ բացասական: Այն կարող է գտնվել -1-ից +1 միջակայքում: Սակայն ռեգրեսիայի վերլուծության տեսանկյունից դետերմինացիայի գործակիցը նախընտրելի է, քանի որ ցույց է տալիս, թե կախյալ փոփոխականի դիսպերսիայի որ համամասնությունն է բացատրված X բացատրող փոփոխականով:

Օրինակ 1. Այժմ, երբ արդեն գիտենք՝ ինչպես գնահատել ռեգրեսիայի մոդելի գործակիցները և կարող ենք հաշվել դետերմինացիայի գործակիցը, փորձենք գնահատել ներդրումների և վերջնական արդյունքի միջև կապը: Այդ նպատակով օգտագործենք աղյուսակ 4.3-ի տվյալները:

Աղյուսակ 4.3.* *ՀՆԱ-ի օգտագործումը (1996 թ. հաստատուն գներով)*

		Համախառն ներքին արդյունքը	Համախառն ներդրումներ
1996	1 եռ.	84.6	10.5
	2 եռ.	134.3	25.2
	3 եռ.	219.0	36.1
	4 եռ.	223.3	60.1
1997	1 եռ.	87.1	12.7
	2 եռ.	137.0	23.5
	3 եռ.	266.6	43.6
	4 եռ.	232.5	59.0
1998	1 եռ.	92.8	10.7
	2 եռ.	146.7	24.2
	3 եռ.	243.4	45.3
	4 եռ.	250.4	66.8
1999	1 եռ.	97.1	12.0
	2 եռ.	154.9	34.7
	3 եռ.	261.0	43.9
	4 եռ.	244.5	49.5
2000	1 եռ.	97.4	12.9
	2 եռ.	160.6	36.0
	3 եռ.	268.7	46.0
	4 եռ.	276.5	57.6

Փոքրագույն քառակուսիների մեթոդով գնահատված ռեգրեսիայի վերլուծության արդյունքներն են՝

$$\widehat{ՀՆ} = -8.92 + 0.24\ ՀՆԱ \qquad r^2=0.8 \qquad S_e=7.46$$
$$(4.819)\ (0.025)$$

---

* Հայաստան. Տնտեսական միտումներ. Եռամսյակային թողարկում, Հունվար-մարտ, 2001 թ.:

Փակագծերում բերված են գործակիցների ստանդարտ սխալները: Ինչպես տեսնում ենք, b_1=0.24, այսինքն՝ մեկ միավոր վերջնական արդյունքի աճին համապատասխան՝ ներդրումները կազմում են 0.24*:

Ամփոփում

Համախմբության ռեգրեսիայի գիծը տեսական գաղափար է ՀՌԳ-ի յուրաքանչյուր տրված X-ի համար, սխալն ստոխաստիկ է, և դրա հավանականության պայմանական բաշխումը համընկնում է Y-ի բաշխմանը:

Ընտրանքի ռեգրեսիայի գիծը (ԸՌԳ) էմպիրիկ է, ԸՌԳ-ի մնացորդը սխալի դիտարկված արժեքն է: Ընտրանքի ռեգրեսիայի ֆունկցիայի գործակիցները համախմբության գործակիցների կետային գնահատականներն են: Հետևաբար դրանցից յուրաքանչյուրը պատահական մեծություն է՝ համապատասխան միջինով, դիսպերսիայով և ստանդարտ սխալով:

Ռեգրեսիայի վերլուծության հիմքը դասական մոդելն է, որի ենթադրությունները կարևոր են վիճակագրական վերլուծության համար: Դասական ռեգրեսիայի մոդելի ենթադրությունների պայմաններում փոքրագույն քառակուսիների մեթոդով գնահատված գործակիցները բոլոր անշեղելի գծային գործակիցների միջև ունեն նվազագույն դիսպերսիա, դրանք լավագույն գծային անշեղելի գործակիցներ են:

Դետերմինացիայի գործակիցը ցույց է տալիս, թե Y-ի տատանումների որ մասն է բացատրվում X-ի տատանումներով:

---

* Տվյալ դեպքում ենթադրվում է, որ ԴԳՌՄ-ի ենթադրությունները խախտված չեն :

ՀԱՐՑԵՐ ԵՎ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

Հարցեր

4.1. Բացատրեք հետևյալ հասկացությունների իմաստը՝

ա) բացատրող փոփոխական
բ) կախյալ փոփոխական
գ) համախմբության ռեգրեսիայի գիծ
դ) գծային ռեգրեսիայի մոդել
ե) սխալի հոմոսկեդաստիկ բաշխում
զ) ռեգրեսիայի մնացորդ (e_t)
է) ընտրանքի ռեգրեսիայի գիծ
ը) դետերմինացիայի գործակից

4.2. Բացատրեք.

ա) Ինչո՞վ է տարբերվում ռեգրեսիայի սխալը ռեգրեսիայի մնացորդից:

բ) Ինչու՞ են փոքրագույն քառակուսիների մեթոդով գնահատված ռեգրեսիայի գործակիցները համարվում լավագույն անշեղելի գործակիցներ:

գ) Ինչո՞վ են տարբերվում պատահական փոփոխականի պայմանական և ոչ պայմանական սպասումները:

դ) Ինչո՞վ է տարբերվում դետերմինացիայի գործակիցը կոռելյացիայի գործակցից:

4.3. Փորձեք բացահայտել, թե տեսականորեն ինչ նշան պետք է ունենա անկյունային գործակիցը հետևյալ դեպքերում.

Կախյալ փոփոխական	Բացատրող փոփոխական
ա) ներդրումներ	տոկոսադրույք
բ) ապրանքի պահանջարկ	ապրանքի գին
գ) սպառում	եկամուտներ
դ) փողի պահանջարկ	տոկոսադրույք
ե) փողի առաջարկ	տոկոսադրույք
զ) նախագահի հեղինակություն	ինֆլյացիայի տեմպեր

Խնդիրներ

4.4. X-ի և Y-ի հինգ դիտարկումներից հետո ստացվել են հետևյալ արդյունքները՝

$$\sum Y^2 = 676$$

$$\sum X^2 = 1089 \text{ և } \sum XY = 200.5$$

Գնահատե՛ք ռեգրեսիայի գործակիցները:

4.5. Եթե ունենք X և Y փոփոխականներ, և b_1-ը X-ի ռեգրեսիայի անկյունային գործակիցն է՝ Y-ից կախված, իսկ b_2-ը՝ Y-ի ռեգրեսիայի անկյունային գործակիցը՝ X-ից կախված, ապա ցույց տվեք՝

ա) ինչի՞ է հավասար b_0 և b_1 գործակիցների արտադրյալը,

բ) որ $b_0 = 1/b_1$ միայն այն դեպքում, երբ $r^2 = 1$:

4.6. Երկչափ ռեգրեսիայի մոդելի՝ $Y_t = b_0 + b_1X_t + e_t$, X փոփոխականը երեքով բազմապատկելը ինչպիսի ազդեցություն կունենա ռեգրեսիայի մոդելի գործակիցների, դրանց ստանդարտ սխալների և ռեգրեսիայի մնացորդների վրա:

4.7. *Աղյուսակում տրված է 1996-2000թթ. ՀՀ համախառն ներքին արդյունքը՝ հաշվարկված ընթացիկ և 1996թ. հաստատուն գներով*[*]

		Համախառն ներքին արդյունք (ընթացիկ գներով, մլրդ դրամ)	Համախառն ներքին արդյունք (1996թ. հաստատուն գներով)
1996	1 եռ.	82.5	84.6
	2 եռ.	133.6	134.3
	3 եռ.	219.1	219.0
	4 եռ.	231.0	223.3
1997	1 եռ.	93.3	87.1
	2 եռ.	159.2	137.0
	3 եռ.	266.2	266.6
	4 եռ.	285.6	232.5
1998	1 եռ.	124.7	92.8
	2 եռ.	198.0	146.7
	3 եռ.	308.3	243.4
	4 եռ.	324.4	250.4
1999	1 եռ.	130.2	97.1
	2 եռ.	216.9	154.9
	3 եռ.	325.7	261.0
	4 եռ.	314.6	244.5
2000	1 եռ.	131.0	97.4
	2 եռ.	218.5	160.6
	3 եռ.	328.0	268.7
	4 եռ.	355.8	276.5

[*] Հայաստան. Տնտեսական միտումներ. Եռամսյակային թողարկում, Հունվար-մարտ, 2001 թ.:

ա) տեղադրելով նախ՝ ընթացիկ գներով ՀՆԱ-ն ըստ ժամանակի և ընդունելով, որ ՀՆԱ-ն կախյալ է ժամանակից, փոքրագույն քառակուսիների մեթոդով գնահատեք մոդելի գործակիցները, ապա նույնը կատարեք հաստատուն գներով ՀՆԱ-ի համար:

բ) գնահատված գործակիցների հիման վրա բնութագրեք ինֆլյացիայի տեմպի դինամիկան տրված տարիների համար:

4.8. Աղյուսակ 4.2-ի արդյունքների հիման վրա գնահատեք սպառման միջին էլաստիկությունը

4.9. Ներկայացված տվյալների հիման վրա գնահատեք դետերմինացիայի գործակիցը, նախ՝ ազատ անդամի առկայությամբ, ապա՝ առանց ազատ անդամի:

Y	70	65	53	50	35	30	25
X	5	11	15	17	20	19	27

ԳԼՈՒԽ 5

ՏԻՐՈՒՅԹԻ ԳՆԱՀԱՏՈՒՄ ԵՎ ՎԱՐԿԱԾԻ ՍՏՈՒԳՈՒՄ

Վիճակագրական եզրակացության օգնությամբ կարելի է ստուգել՝ հնարավոր է արդյոք ընտրանքի հիման վրա գնահատել համախմբությունը: Նախորդ գլխում ցույց տվեցինք՝ ինչպես գնահատել ռեգրեսիայի գործակիցները, որոնք կետային են, քանի որ յուրաքանչյուր ընտրանքի համար ունեն մեկ արժեք: Գնահատման տեսությունը բաղկացած է երկու մասից՝ կետային և տիրույթային: Հետևաբար, եթե գործակիցների գնահատումը վիճակագրության մի կողմն է, ապա վարկածի ստուգումը՝ մյուս կողմը:

5.1. Դասական նորմալ գծային ռեգրեսիայի մոդել

OLS գործակիցների վիճակագրական հատկությունները բացահայտելուց հետո հարց է ծագում, թե դրանք ինչպիսի բաշխման ծև ունեն: Քանի որ այդ գործակիցները գծային կախվածություն ունեն Y-ից, և Y-ն իր հերթին գծային կախվածություն ունի ε_t -ից, ապա կարող ենք ասել, որ b_0, b_1 գործակիցները գծային կախվածություն ունեն սխալից: Հետևաբար, գործակիցների բաշխման ձևը պարզելու համար անհրաժեշտ է սխալի բաշխման վերաբերյալ ևս մեկ ենթադրություն անել:

Նշենք, որ մինչև այժմ սխալի մասին ենթադրությունները վերաբերում էին դրա բնույթին, այլ ոչ թե դրա բաշխմանը:

Դասական նորմալ գծային ռեգրեսիայի մոդելը ենթադրում է, որ ամեն մի սխալ նորմալ է բաշխված զրո միջինով և σ^2 դիսպերսիայով:

Ինչպես ասվել է, սխալը իրենից ներկայացնում է այն բոլոր գործոնների ազդեցությունները, որոնք ուղղակիորեն ընդգրկված չեն մոդելում: Եթե այդ գործոնների ազդեցությունը փոքր է և պատահական բնույթ ունի, ապա համաձայն կենտրոնական սահմանային թեորեմի (տե՛ս մաս I, 2.11)՝ սխալը նորմալ է բաշխված: Քանի որ յուրաքանչյուր գծային կախյալ փոփոխական ինքնին նորմալ է բաշխված, ապա b_0, b_1 գործակիցները ևս նորմալ են բաշխված:

Հետևաբար, եթե $\varepsilon_t \sim N(0;\sigma^2)$, ապա b_0-ն նորմալ բաշխված է β_0 միջինով և σ_{b0}^2 դիսպերսիայով.

$b_0 \sim N(\beta_0, \sigma_{b0}^2)$,

որի Z գործակիցը ստանդարտացված նորմալ բաշխման է ենթարկվում զրո միջինով և 1 դիսպերսիայով.

$$Z = \frac{b_0 - \beta_0}{\sigma_{b_0}}, \quad Z \sim N(0,1)$$

Ստյուդենտի t բաշխման համաձայն.

$$t_{n-2} = \frac{b_0 - \beta_0}{S_{b_0}}$$

Համապատասխանաբար b_1-ի համար՝

$b_1 \sim N(\beta_1, \sigma_{b1}^2)$

որտեղ՝

$$Z = \frac{b_1 - \beta_1}{\sigma^2_{b_1}}, \quad Z \sim N(0,1)$$

$$t_{n-2} = \frac{b_1 - \beta_1}{S_{b_1}}$$

Նշենք նաև, որ նորմալացված ենթադրության պայմաններում $\chi^2 = (n-2)\frac{S_e^2}{\sigma^2}$

ենթարկվում է χ^2 բաշխման՝ (n-2) ազատության աստիճանով:

Նորմալացված ենթադրության պայմաններում OLS գործակիցներն ունեն հետևյալ հատկությունները.

- անշեղելի են,
- ունեն նվազագույն դիսպերսիա,
- պարբերաբար են, այսինքն՝ ինչքան մեծ են ընտրանքի ծավալները, այնքան գործակիցները մոտ են իրենց իրական արժեքներին:

Այսպիսով, նորմալացված ենթադրության պայմաններում OLS գործակիցներն ունեն նվազագույն դիսպերսիա՝ անկախ նրանից՝ գծային են, թե՝ ոչ: Այսինքն՝ նորմալացված ենթադրության պայմաններում OLS-ի գործակիցները լավագույն անշեղելի գործակիցներ են:

Նշենք նաև, որ նորմալացված ենթադրությունը հնարավորություն է տալիս նորմալ, t և χ^2 բաշխումներն օգտագործել վիճակագրական վարկածները ստուգելու համար:

5.2. Վարկածի ստուգում

Վարկածի ստուգումը կարևոր դեր ունի վիճակագրությունում: Հետևաբար մեր հաջորդ քայլն է՝ ներկայացնել, թե ինչպես կառուցել վստահելիության (վստահելի) տիրույթ և վիճակագրորեն ստուգել վարկածը:

Վարկածն ստուգելիս հնարավոր է նախօրոք հստակ սպասումներ ունենալ գործակիցների վերաբերյալ: Բնականաբար, ուսումնասիրության բնագավառը պետք է առաջարկի վարկածի բնույթը: Վարկածի ստուգման հիմնական նպատակն է՝ պարզել, թե գնահատված արդյունքներն ինչքանով են համապատասխանում առաջարկված վարկածին:

Ինչպես արդեն նշել ենք, վիճակագրությունում առաջարկված վարկածն անվանվում է զրոյական վարկած՝ H_0, որն ստուգվում է ի հակադրում այլընտրանքայինի՝ H_1-ի:

Վիճակագրությունում մեծ տարածում է գտել զրոյական վարկածի առաջարկումը՝ H_0:β=0, քանի որ այն պարզում է՝ իրականում Y-ը կախյալ է X-ից, թե՝ ոչ: Սակայն վարկածը հիմնականում պետք է կառուցվի տեսության սպասումներին համապատասխան:

Չորրորդ գլխում ներկայացված օրինակի համար կարող ենք կանխատեսել, որ համախառն ներդրումները դրական կախվածություն ունեն վերջնական արդյունքից: Հետևաբար կարող ենք զրոյական վարկած առաջարկել՝ H_0:β_1=0.3՝ ի հակադրում այլընտրանքայինի՝ H_1:$\beta_1 \neq 0.3$: Այսինքն՝

H_0: β_1= 0.3

H_1: $\beta_1 \neq 0.3$

Տվյալ օրինակում գնահատված b_1-ը հավասար է 0.24 -ի, բայց 0.24-ը վիճակագրորեն տարբեր է 0.3-ից, թե՝ ոչ, արդեն վարկածի ստուգման հարց է:

Արդեն ասվել է՝ $b_1 \sim N(\beta_1, \sigma^2_{b_1})$, որի

$$Z = \frac{b_1 - \beta_1}{\sigma^2_{b_1}}; \text{ և } Z \sim N(0,1)$$

$$t_{n-2} = \frac{b_1 - \beta_1}{S_{b_1}}$$

որտեղ՝ S_{b_1} գործակիցը գնահատված ստանդարտ սխալն է:

Ընդունելով $\propto$ = 5%՝ Ստյուդենտի t բաշխումով կառուցենք վստահելի (ընդունման) տիրույթ b_1-ի համար.

$$P\left(b_1 - t_{n-2,\alpha/2} \cdot S_{b_1} \langle \beta_1 \langle b_1 + t_{n-2,\alpha/2} \cdot S_{b_1}\right) = 0.95 \qquad (5.1)$$

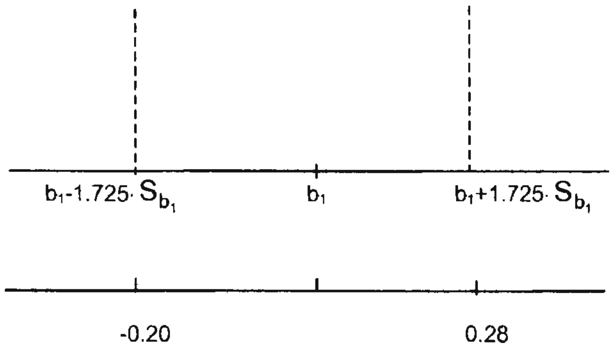
որտեղ՝ $t_{\propto/2}$-ն t-ի կրիտիկական կետն է՝ $\propto/2$ նշանակալիության մակարդակով: Վստահելի տիրույթը կրիտիկական տիրույթից բաժանող կետերը կոչվում են կրիտիկական կետեր:

Վերը նշված հավասարումը β_1-ի 95% վստահելի տիրույթն է, և եթե զրոյական վարկածով առաջարկված արժեքը վստահելի միջակայքում է, ապա պետք է ընդունել վարկածը: Վստահելի տիրույթից դուրս գտնվող միջակայքն անվանվում է մերժման կամ կրիտիկական տիրույթ, և եթե առաջարկված β_1 -ը կրիտիկական միջակայքում է, ապա պետք է մերժել առաջարկված վարկածը (տե՛ս գրաֆիկ 5.2): Անդրադառնալով մեր օրինակին՝ t բաշխման ֆունկցիայի աղյուսակից (տե՛ս հավելված III) $\propto/2$= 2.5%-ի համար գտնենք 18 ազատության աստիճանով կրիտիկական t-ի արժեքը, որը հավասար է 1.725:

Արդեն հաշվարկված արդյունքները տեղադրելով (5.1)-ում, կստանանք.

$P(0.24-1.725 \cdot 0.025 \leq \beta_1 \leq 0.24+1.725 \cdot 0.025) = 0.95$, այսինքն,

$P(-0.20 \leq \beta_1 \leq 0.28) = 0.95$:



Գրաֆիկ 5.1. *β_1-ի 95% վստահելի միջակայքը*

Քանի որ զրոյական վարկածով առաջարկված β_1 -ը վստահելի միջակայքից դուրս է (տե՛ս գրաֆիկ 5.1), ապա վարկածը մերժվում է:

Նշենք, որ σ^2 համար վստահելի միջակայք կառուցվում է χ^2 բաշխումով, քանի որ, ինչպես գիտենք, նորմալացված ենթադրության պայմաններում.

$$\chi^2=(n-2)\frac{S_e^2}{\sigma^2}$$

Հետևաբար՝ σ^2 - ի 95% վստահելի տիրույթն է.

$$P\left[(n-2)\frac{S_e^2}{\chi^2_{\alpha/2}}\le\sigma^2\le(n-2)\frac{S_e^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}}\right]=0.95 \qquad (5.2)$$

որտեղ՝ $\chi^2_{\alpha/2}$ և $\chi^2_{1-\alpha/2}$ -ն χ^2 բաշխման կրիտիկական կետերն են:

Նշենք, որ ներկայացված եղանակից բացի, վիճակագրությունում գոյություն ունի վարկածը ստուգելու ևս մեկ եղանակ, որի օգնությամբ կարելի է հեշտությամբ ստուգել առաջարկված զրոյական վարկածը: Արդեն ներկայացված օրինակով բացատրենք այս եղանակի օգտագործումը: Գիտենք, որ նորմալացված ենթադրության պայմաններում.

$$t=\frac{b_1-\beta_1}{S_{b_1}}$$

(5.1) –ը ուղղակիորեն հաշվարկելու կարիք չկա, քանի որ զրոյական վարկածով առաջարկված է, որ իրական β_1=0.3: Հետևաբար՝

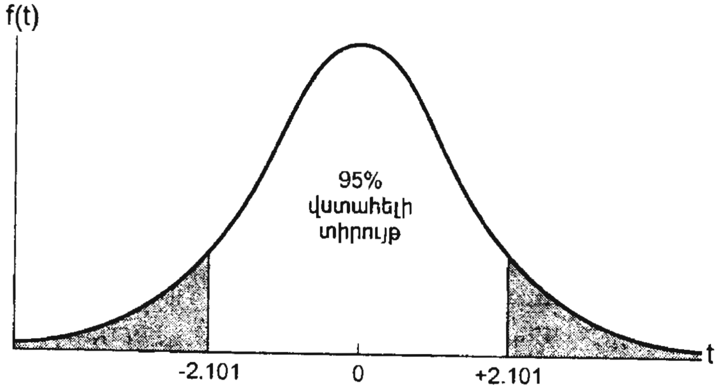
$$t=\frac{b_1-0.3}{S_{b_1}}$$

եթե $\left|\frac{b_1-\beta_1}{S_{b_1}}\right|$ բացարձակ արժեքը մեծ է համապատասխան ազատության աստիճանով t-ի կրիտիկական արժեքից, ապա զրոյական վարկածը մերժվում է,

եթե $\left|\frac{b_1-\beta_1}{S_{b_1}}\right|$ բացարձակ արժեքը փոքր է համապատասխան ազատության աստիճանով t-ի կրիտիկական արժեքից, ապա զրոյական վարկածը ընդունվում է:

Նշենք, որ t- ն վիճակագրորեն նշանակալից է, եթե կրիտիկական տիրույթի սահմաններում է, և առաջարկված զրոյական վարկածը մերժվում է: Հակառակ դեպքում, երբ այն վստահելի տիրույթում է, ապա ասում են՝ t-ն վիճակագրորեն նշանակալից չէ, և առաջարկված վարկածը ընդունվում է: Եթե ուշադիր դիտարկենք t-ի բաշխման աղյուսակը, ապա կնկատենք, որ տրված ազատության աստիճանով t-ի արժեքի մեծ լինելու հավանականությունը աստիճանաբար փոքրանում է: Հետևաբար t-ի մեծ արժեքը զրոյական վարկածի մերժման պայման է: Ավելին, համաձայն «2-t» նշանակալիության կարգի՝ 20-ից ավելի ազատության և α= 5 նշանակալիության մակարդակով առաջարկված զրոյական վարկածը՝ $H_0:\beta_1=0$, կարող է մերժվել, եթե t-ի արժեքը մեծ է երկուսից:

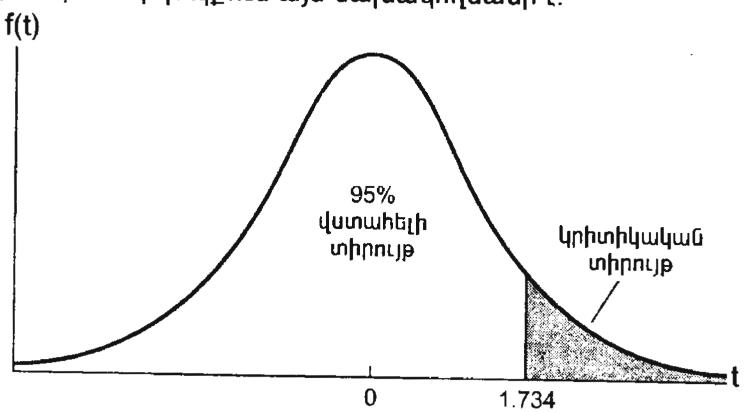
Վերը նշված վարկածը երկկողմանի է, քանի որ այլընտրանքային վարկածը որոշակիորեն չի կանխորոշում՝ իրական β_1-ը մեծ է թե փոքր զրոյական վարկածով առաջարկված արժեքից, այսինքն՝ նկատի է առնում հավանականության բաշխման երկու հակադիր մասերը (տե՛ս գրաֆիկ 5.2):



Գրաֆիկ 5.2. *18 ազատության աստիճանով երկկողմանի տեստի վստահելի և կրիտիկական տիրույթները*

Վարկածը միակողմանի է, եթե այլընտրանքային վարկածը կանխորոշում է, որ իրական β_1-ը մեծ է զրոյական վարկածով առաջարկված արժեքից: Այսպես օրինակ, եթե զրոյական վարկածն առաջարկում է, որ $H_0:\beta_1=0.3$, իսկ այլընտրանքայինը՝

H_1: $\beta_1>0.3$, ապա վարկածը աջակողմանի է (տե՛ս գրաֆիկ 5.3), հակառակ դեպքում այն ձախակողմանի է:



Գրաֆիկ 5.3. *18 ազատության աստիճանով աջակողմանի տեստի կրիտիկական տիրույթը*

Աղյուսակի օգնությամբ ներկայացնենք t տեստի եզրակացության կանոնները β_o, β_1-ի համար

Աղյուսակ 5.1. *t տեստի եզրակացության կանոնները*

Վարկածի ձևը	Վարկած	Մերժել H_0, եթե	Վարկած	Մերժել H_0 , եթե
Երկկողմանի	H_0: $\beta_0=0$ H_1: $\beta_0\neq 0$	$\|t\| \geq t_{\alpha/2,n-2}$	H_0: $\beta_1=0$ H_1: $\beta_1\neq 0$	$\|t\| \geq t_{\alpha/2,n-2}$
Աջակողմանի	H_0: $\beta_0=0$ H_1: $\beta_0>0$	$\|t\| \geq t_{\alpha,n-2}$	H_0: $\beta_1=0$ H_1: $\beta_1>0$	$\|t\| \geq t_{\alpha,n-2}$
Ձախակողմանի	H_0: $\beta_0=0$ H_1: $\beta_0<0$	$\|t\| \geq t_{\alpha,n-2}$	H_0: $\beta_1=0$ H_1: $\beta_1<0$	$\|t\| \geq t_{\alpha,n-2}$

Այժմ կարող ենք տվյալ եղանակով ստուգել գործակիցների նշանակալիությունը:

b_1 -ի համար՝ t= (0.24-0.3)/0.02=|-3|=3:

Քանի որ 3>2.101-ից, հետևաբար զրոյական վարկածը մերժվում է, այսինքն՝ b_1-ը վիճակագրորեն նշանակալից է:

Նույն մոտեցմամբ հնարավոր է հեշտությամբ ստուգել σ^2 -ի նշանակալիությունը, որի եզրակացության կանոնները ներկայացված են 5.2 աղյուսակում:

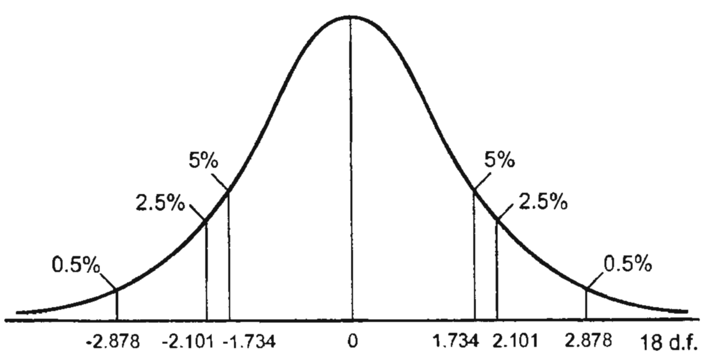
Արդեն պարզ է, որ վարկածը կառուցելուց հետո դժվար չէ ստուգելը, սակայն վարկածի մերժումը կամ ընդունումը կախված է նաև α-ի նշանակալիության մակարդակից (տե՛ս գրաֆիկ 5.4): Իրականում դժվար է ասել, թե α-ի որ մակարդակն է նախընտրելի, քանի որ, եթե փորձենք նվազեցնել առաջին տեսակի սխալի հավանականությունը, երբ մերժվում է ճիշտ վարկածը, ապա երկրորդ տեսակի սխալի հավանականությունը մեծանում է, երբ ընդունվում է ոչ ճիշտ վարկածը: Հիմնախնդիրը լուծելու նպատակով վիճակագրությունը առաջարկում է գտնել p-ի արժեքը, որը t տեստի ստույգ նշանակալիության մակարդակն է:

Աղյուսակ 5.2. *χ տեստի եզրակացության կանոնները*

Վարկածի ձևը	Վարկած	Մերժել H_0, եթե
Երկկողմանի	$H_0{:}\sigma^2=\sigma_0^2$ $H_0{:}\sigma^2\neq\sigma_0^2$	$(n-2)\dfrac{S_e^2}{\sigma^2}\geq\chi^2_{\alpha/2,n-2}$ կամ $(n-2)\dfrac{S_e^2}{\sigma^2}\leq\chi^2_{1-\alpha/2,n-2}$
Աջակողմանի	$H_0{:}\sigma^2=\sigma_0^2$ $H_0{:}\sigma^2>\sigma_0^2$	$(n-2)\dfrac{S_e^2}{\sigma^2}\geq\chi^2_{\alpha,n-2}$
Ձախակողմանի	$H_0{:}\sigma^2=\sigma_0^2$ $H_0{:}\sigma^2<\sigma_0^2$	$(n-2)\dfrac{S_e^2}{\sigma^2}\leq\chi^2_{1-\alpha,n-2}$

Հետևաբար, p-ն զրոյական վարկածը մերժելու նվազագույն մակարդակն է: Մեր օրինակի դեպքում հավանականությունը, որ t -ն կլինի 9.83, 18 ազատության աստիճանով երկկողմանի տեստի համար, 0.0001-ից փոքր է:

Հետևաբար p-ի արժեքը, որն իրենից ներկայացնում է տեստի հստակ նշանակալիությունը, բավականին փոքր է, այսինքն՝ տեստը վիճակագրորեն նշանակալից է:



Գրաֆիկ 5.4. *18 ազատության աստիճանով երկկողմանի վարկածի t –ն α-ի տարբեր մակարդակների դեպքում*

Կարող ենք եզրակացնել, որ ինչքան մեծ է t-ի արժեքը և համապատասխանաբար փոքր է p-ի արժեքը, այնքան տեստը վիճակագրորեն նշանակալից է:

5.3. Ռեգրեսիայի վերլուծության արդյունքների գնահատումը

Ինչպես արդեն նշել ենք, գծային ռեգրեսիայի դասական մոդելի (ԴԳՌՄ) ենթադրությունները կարևոր դեր ունեն գործակիցների նշանակալիության համար: Հետևաբար, գործակիցները գնահատելուց հետո կարևոր է ստուգել՝ բավարարում են, արդյոք, ռեգրեսիայի արդյունքները դասական պայմանները, թե՝ ոչ: Այդ նպատակով կարող ենք ռեգրեսիայի մոդելի արդյունքների բավարար լինելու վերաբերյալ որոշակի չափանիշներ սահմանել.

- գործակիցները պետք է ունենան տեսականորեն ճիշտ նշան և չափ,
- անկյունային գործակիցը պետք է նշանակալիորեն տարբերվի զրոյից,
- դետերմինացիայի գործակցի մակարդակը պետք է լինի բավականաչափ բարձր,
- ռեգրեսիայի մոդելը պետք է բավարարի ԴԳՌՄ-ի ենթադրությունները, հետևաբար՝ մոդելի սխալները պետք է նորմալ բաշխված լինեն, և մոդելը չպետք է պարունակի՝
  - բնորոշման սխալ,
  - բազմակոլինեարություն,
  - հետերոսկեդաստիկություն,
  - ավտոկոռելյացիա:

Սխալների նորմալ լինելու ենթադրությունը ստուգելու նպատակով, ռեգրեսիայի վերլուծության մնացորդները կարելի է ներկայացնել հիստոգրամի միջոցով, որը հնարավորություն կտա որոշակի կարծիք կազմել հավանականության բաշխման խտության տեսքի վերաբերյալ: Նշենք, որ եթե բաշխման տեսքը նման է նորմալ բաշխման տեսքին, ապա կարելի է ենթադրել, որ սխալները նորմալ են բաշխված:

Օրինակ 2.

Գնահատենք քեյնսյան սպառման սահմանային հակումը ՀՀ համար, այնուհետև ստուգենք՝ բավարարում են, արդյոք, մոդելի արդյունքները դասական գծային մոդելի ենթադրությունները:

Սպառման սահմանային հակումը գնահատելու համար օգտվենք ՀՀ ազգային վիճակագրական ծառայության 2000թ. հրապարակած տվյալներից (տե՛ս աղյուսակ 5.3):

Աղյուսակ 5.3*.

Բնակչության դրամական եկամուտների և ծախսերի դինամիկան

Տարի/ամիս	Բնակչության դրամական եկամուտները (մլն դրամ)	Բնակչության դրամական ծախսերը (մլն դրամ)
1999թ. հունվար	37927.7	43559.7
փետրվար	36321.4	35628.7
մարտ	43127.1	43616.5
ապրիլ	40587.4	40477.5
մայիս	45292.6	44334.4
հունիս	47413.6	46961.7
հուլիս	52172.9	51610.2
օգոստոս	47973.3	49597.8

* Հայաստանի Հանրապետության սոցիալ-տնտեսական վիճակը 2000 թ. հունվար-դեկտեմբերին:

Տարի/ամիս	Բնակչության դրամական եկամուտները (մլն դրամ)	Բնակչության դրամական ծախսերը (մլն դրամ)
սեպտեմբեր	60242.7	58839.9
հոկտեմբեր	64429.6	64292.1
նոյեմբեր	60276.0	59732.3
դեկտեմբեր	91327.4	93014.7
2000թ. հունվար	48068.6	46533.3
փետրվար	31212.5	39605.7
մարտ	46320.8	44648.9
ապրիլ	39915.0	41635.4
մայիս	46970.9	45457.9
հունիս	51404.1	50117.6
հուլիս	61501.4	55873.2
օգոստոս	62369.3	60292.5
սեպտեմբեր	67564.2	64794.5
հոկտեմբեր	58990.8	57849.7
նոյեմբեր	78272.5	69322.6
դեկտեմբեր	105783.6	105851.7

Փոքրագույն քառակուսիների մեթոդով գնահատված ռեգրեսիայի արդյունքներն են (MINITAB ծրագրային փաթեթի միջոցով կատարված ռեգրեսիայի արդյունքները ներկայացված են տվյալ գլխի հավելված 5.1-ում).

$$\widehat{\text{ԲԴԾ}} = 3519 + 0.93\,\text{ԲԴԵ}$$

$$S_{b_0,b_1} = (2109) \quad (0.0365)$$

$$t = (1.67) \quad (25.42):$$

Ինչպես տեսնում ենք՝

- սպառման սահմանային հակումը դրական է և հավասար է 0.93, ինչը համապատասխանում է Քեյնսի դրույթին,

- անկյունային գործակցի արժեքը նշանակալիորեն տարբերվում է զրոյից, քանի որ դրա t- ի արժեքը չափազանց մեծ է, հետևաբար՝ տեստը նշանակալից է,
- դետերմինացիայի գործակիցը հավասար է 0.97, հետևաբար կարող ենք ասել, որ բնակչության դրամական ծախսերը 97%-ով բացատրվում են բնակչության դրամական եկամուտներով,
- ռեգրեսիայի մնացորդների հիստոգրամը ներկայացված է հավելված 5.1-ի գրաֆիկ (ա)-ում, համաձայն որի սխալները նորմալ են բաշխված,
- քանի որ մոդելը երկչափ է, ապա բազմակոլինեարության հիմնախնդիր չի առաջանա (տե՛ս հավելված II Ա):
- հավելված 5.1-ի գրաֆիկ (բ) –ի օգնությամբ կարող ենք նկատել, որ մոդելի մնացորդները համաչափ են բաշխված, հետևաբար մոդելը չի պարունակում հետերոսկեդաստիկություն (տե՛ս հավելված II Բ):
- տեղադրելով մնացորդները ըստ ժամանակի կախվածության կհամոզվենք, որ մոդելում չկա ավտոկոռելյացիա (տե՛ս հավելված 5.1-ի գրաֆիկ (գ), DW վիճակագրականը՝ 2.32 է, որը նույնպես վկայում է, որ մոդելում չկա դրական կամ բացասական կոռելյացիա (տե՛ս հավելված II Գ),

Այս ամենը վկայում է, որ մոդելը բավարարում է վերը նշված չափանիշները: Հետևաբար կարող ենք եզրակացնել, որ սպառման սահմանային հակումը ՀՀ համար հավասար է 0.93: Այսինքն՝ եկամուտները մեկ միավորով ավելանալու դեպքում ծախսումները կավելանան 0.93-ով, կամ եկամուտները 1000 դրամով ավելանալու դեպքում, ծախսումները կկազմեն 930 դրամ:

Ամփոփում

Կետային և տիրույթային գնահատումը վիճակագրության երկու բաղադրիչներն են: Առաջինով գնահատվում են ռեգրեսիայի մոդելի գործակիցները, երկրորդով եզրակացություն է կատարվում գործակիցների նշանակալիության վերաբերյալ:

Վարկածը կարելի է ստուգել երկու եղանակով: Առաջինի դեպքում վստահելի տիրույթ է կառուցվում համապատասխան գործակցի համար, և եթե զրոյական վարկածով առաջարկված արժեքը գտնվում է այդ տիրույթից դուրս, ապա վարկածը մերժվում է: Հակառակ դեպքում՝ ընդունվում է: Երկրորդ եղանակի միջոցով ուղղակիորեն հաշվարկվում է t-ի արժեքը՝ անհայտ β-ի արժեքի փոխարեն տեղադրելով զրոյական վարկածով առաջարկված արժեքը: Եթե ստացված արդյունքը գերազանցում է t-ի կրիտիկական արժեքը, ապա վարկածը մերժվում է, հակառակ դեպքում՝ ընդունվում է:

Առաջին կամ երկրորդ տեսակի սխալ թույլ տալուց խուսափելու համար անհրաժեշտ է հաշվարկել վիճակագրության տեստի p արժեքը, որը ցույց է տալիս զրոյական վարկածով առաջարկված արժեք ստանալու ստույգ հավանականությունը:

Վարկածը ստուգելուց հետո անհրաժեշտ է ստուգել, թե բավարարում է, արդյոք, մոդելը գծային դասական ռեգրեսիայի մոդելի ենթադրությունները: Այդ նպատակով պետք է հայտնաբերել խախտված ԳԴՌՄ-ի ենթադրությունների առկայությունը: ԳԴՌՄ-ի ենթադրությունների խախտումները հնարավոր է հայտնաբերել գրաֆիկի օգնությամբ, որը ներկայացվել է օրինակ 2-ում: Նշենք, որ էկոնոմետրիկայում առաջարկվում են խախտումների հայտնաբերման բազմաթիվ տեստեր, որոնցից մի քանիսը ներկայացրել ենք հավելվածներում:

ՀԱՐՑԵՐ ԵՎ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

Հարցեր

5.1. Բացատրեք հետևյալ հասկացությունների իմաստը.

ա) զրոյական վարկած
բ) նշանակալիության մակարդակ
գ) այլընտրանքային վարկած
դ) կրիտիկական կետեր
ե) մերժման տիրույթ
զ) ստույգ նշանակալիության մակարդակ
է) երկկողմանի վարկած:

5.2. Բացատրեք.

Ինչո՞վ է տարբերվում դասական գծային ռեգրեսիայի մոդելը դասական նորմալ գծային ռեգրեսիայի մոդելից:

5.3. Ի՞նչ եք կարծում.

ա) Կարելի է, արդյոք, ռեգրեսիայի վերլուծության արդյունքները համարել բավարար, եթե խախտված է նորմալության պայմանը:

բ) Հնարավոր է, արդյոք, որ դետերմինացիայի գործակցի մակարդակը լինի բավականաչափ ցածր (զրոյին մոտ), սակայն գործակիցները լինեն նշանակալից:

գ) Կարող է, արդյոք, t տեստը լինել նշանակալից, երբ α=5% և չլինել նշանակալից, երբ α=10%:

դ) Կարելի է, արդյոք, ենթադրել, որ նորմալության ենթադրության պայմաններում մնացորդների գումարը պետք է հավասար լինի զրոյի:

Խնդիրներ

5.4. Ներածությունում բերված օրինակից կազմեք պատահական ընտրանք: Գնահատեք տվյալ ընտրանքի գործակիցները և դրանց համար կառուցեք 95% վստահելի տիրույթ: Ստուգեք վարկածը՝ $H_0 : \beta_1 = 0$, $H_1 : \beta_1 \neq 0$:

5.5. Ռեգրեսիայի վերլուծությունից պարզվել են հետևյալ արդյունքները՝

$$\hat{Y}_t = 12.03 - 2.15 X_t$$

$$S_{b_0,b_1} = (0.632) \quad (\quad) \qquad r^2 = 0.88$$

$$t = (\quad) \quad (-8.431) \qquad n = 12$$

Լրացրեք բաց թողնված արդյունքները:

5.6. Գլուխ 4-ում նշված օրինակի՝ b_0 գործակցի համար կառուցեք 95% վստահելի տիրույթ և ստուգեք զրոյական վարկածը: Նույն գործակցի համար կառուցեք 90% վստահելի տիրույթ՝ ստուգելով վերը նշված վարկածը: Ի՞նչ եք կարծում, տվյալ դեպքում α-ի որ մակարդակն է նախընտրելի և ինչու:

5.7. *Աղյուսակում տրված են ԱՄՆ դոլարի, եվրոյի և ռուսական ռուբլու հաշվարկային փոխարժեքները ՀՀ դրամով*
*(2000 թ. տվյալներով)**

Ամիս	1 ԱՄՆ դոլար	1 ՌՌ	1 ԵՎՐՈ
Հունվար	526.91	18.31	535.24
Փետրվար	527.86	18.06	519.66
Մարտ	527.47	18.25	508.84

* Հայաստանի Հանրապետության սոցիալ-տնտեսական վիճակը, հունվար-դեկտեմբեր, 2000թ.:

Ամիս	1 ԱՄՆ դոլար	1 ՌՌ	1 ԵՎՐՈ
Ապրիլ	530.90	18.48	503.99
Մայիս	534.14	18.79	482.97
Հունիս	543.64	19.12	515.32
Հուլիս	548.11	19.58	516.27
Օգոստոս	540.49	19.46	490.18
Սեպտեմբեր	539.96	19.39	472.15
Հոկտեմբեր	544.69	19.48	467.45
Նոյեմբեր	555.46	19.94	475.10
Դեկտեմբեր	554.56	19.75	479.96

ա) Յուրաքանչյուր փոխարժեքի համար հաշվարկեք մոդելի գործակիցները.

$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \varepsilon_t$

որտեղ՝

Y_t-ն փոխարժեքի փոփոխությունն է՝ ըստ ժամանակի,

X_t–ն ժամանակն է (t=1,2,...12),

ε_t-ն մոդելի սխալն է:

բ) Ինչ եզրակացություն կարելի է անել յուրաքանչյուր փոխարժեքի վերաբերյալ:

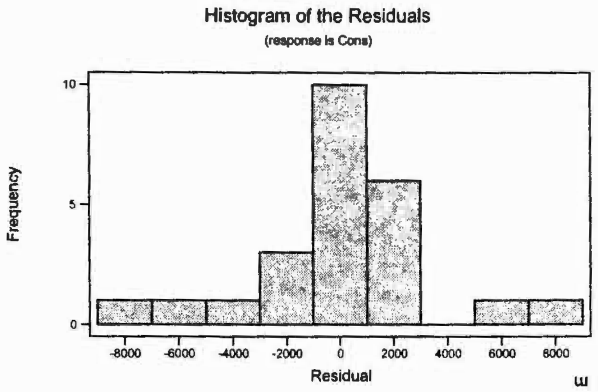
գ) Յուրաքանչյուր երկրի փոխարժեքի b_1 անկյունային գործակցի համար ստուգեք վարկածը, ըստ որի՝ այն հավասար չէ զրոյի:

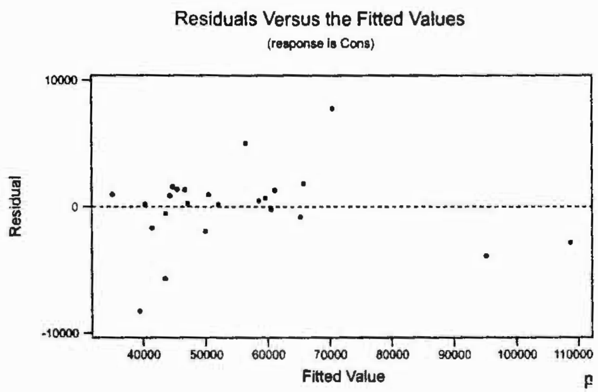
դ) Ինչի է հավասար ռուսական ռուբլու փոխարժեքի գործակցի հստակ նշանակալիության մակարդակը:

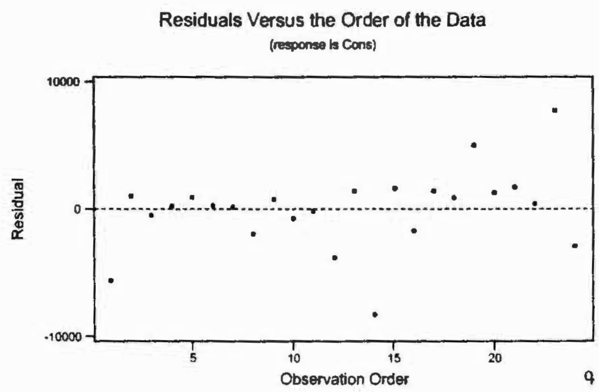
Հավելված 5.1

Regression Analysis: Cons versus Inc

```
The regression equation is
Cons = 3519 + 0.927 Inc

Predictor        Coef     SE Coef        T        P
Constant         3519        2109     1.67    0.109
Cons          0.92736     0.03648    25.42    0.000

S = 3062        R-Sq = 96.7%     R-Sq(adj) = 96.6%

Analysis of Variance

Source      DF          SS           MS        F        P
Regression   1  6059521215   6059521215   646.41    0.000
Residual/   22   206231633      9374165
Error
Total       23  6265752848

Unusual Observations
Obs   Cons     Inc     Fit    SE Fit   Residual   St Resid
24  105784  105852  101619   1947       4233        1.79

Durbin-Watson statistic = 2.32
```







ՄԱՍ III

ԲԱԶՄԱԿԻ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆՆԵՐՈՎ ՌԵԳՐԵՍԻԱՅԻ ՄՈԴԵԼ

Մեկ անկախ փոփոխականով ռեգրեսիայի մոդելը կիրառվում է երկու քանակական փոփոխականների հարաբերակցության բացահայտման համար, սակայն դա չի նշանակում, որ ռեգրեսիայի հավասարումների միջոցով վերլուծությունը կարող է օգտագործվել միայն երկու փոփոխականների փոխկապվածությունը բացահայտելու համար։ Ստորև կներկայացվեն մեկից ավելի անկախ փոփոխականներով ռեգրեսիայի մոդելի հիմունքները, այսպես կոչված՝ բազմակի ռեգրեսիան։

ԳԼՈՒԽ 6

ԲԱԶՄԱՉԱՓ ՌԵԳՐԵՍԻԱՅԻ ԳԾԱՅԻՆ ՄՈԴԵԼ

6.1. Բազմակի փոփոխականներով ռեգրեսիայի մոդելի ընդհանուր բնութագիրը

Ենթադրենք՝ գոյություն ունեն իրարից անկախ k փոփոխականներ, որոնք ազդում են մեկ այլ փոփոխականի վրա: Այսօրինակ մոդելը կարելի է ներկայացնել հետևյալ կերպ.

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + ... + \beta_k x_{kt} + e_t \qquad (6.1)$$

որտեղ՝ Y-ը կախյալ փոփոխական է, իսկ x_1, x_2,... x_k-ն անկախ փոփոխականներ են, β_0, β_1, β_2...β_k -ն գործակիցներն են, իսկ e_t-ն մնացորդն է: Ընդ որում, անկախ փոփոխականները կարող են

հանդես գալ որպես այլ փոփոխականներից ֆունկցիաներ կամ ենթարկվել ձևափոխությունների:

Պարզության համար բազմակի փոփոխականներով ռեգրեսիայի մոդելը ներկայացնենք երեք փոփոխականներով մոդելի տեսքով.

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + e_t \qquad (6.2)$$

Այստեղ β_0-ն կոչվում է ազատ անդամ: Որոշ հեղինակներ (Գուջարատի, Ջոնսոն) համարում են, որ այս գործակիցը ցույց է տալիս այն բոլոր փոփոխականների միջինացված ազդեցությունը, որոնք չեն ընդգրկվել մոդելում: Ընդունված է այս գործակիցը ներկայացնել որպես կախյալ փոփոխականի միջինացված արժեք, երբ անկախ փոփոխականները հավասար են զրոյի կամ ֆիքսված են: Անկախ փոփոխականների բազմապատկիչները կոչվում են մասնակի ռեգրեսիայի գործակիցներ: Հարկ է նշել, որ փոքրագույն քառակուսիների մեթոդի օգտագործմամբ ռեգրեսիայի գործակիցների հաշվարկման ժամանակ ռեգրեսիայի մոդելի հիմնական ենթադրությունները պահպանվում են նաև բազմակի փոփոխականների դեպքում:

Այս ենթադրությունները հաշվի առնելով՝ կարելի է պնդել, որ կախյալ փոփոխականի միջին պայմանական սպասվող արժեքը, որը պայմանավորված է անկախ փոփոխականների ֆիքսված արժեքով, ներկայացվում է այսպես.

$$E(y_t | x_{1t}, x_{2t}) = \beta_0 + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t}$$

Այսպիսով, կարելի է եզրահանգել, որ բազմակի ռեգրեսիայի վերլուծություններն անկախ փոփոխականների պայմանական ֆիքսված արժեքների ռեգրեսիա են և, փաստորեն, ներկայացնում են կախյալ փոփոխականի միջինացված արժեքը անկախ փոփոխականների տվյալ արժեքների դեպքում:

Ռեգրեսիայի գործակիցների հաշվարկման համար կիրառվող մեթոդներից լայն տարածում ունի հաշվարկման փոքրագույն քառակուսիների մեթոդը (OLS): Այս մեթոդը ենթադրում է մնացորդների քառակուսիների գումարի մինիմիզացում: (6.2) մոդելը կարելի է ներկայացնել.

$$Y_t = b_0 + b_1X_{1t} + b_2X_{2t} + e_t \qquad (6.3)$$

որտեղ՝ b_0, b_1, b_2 գործակիցները համապատասխանաբար β_0, β_1, β_2-ի հաշվարկված արժեքներն են ընտրանքի համար: b_0, b_1, b_2-ը կարելի է հաշվարկել՝ կիրառելով OLS մեթոդը: Այսպես, (6.3)-ից կստացվի.

$$e_t = Y_t - b_0 - b_1X_{1t} - b_2X_{2t} \qquad (6.4)$$

(6.4)-ը քառակուսի աստիճան բարձրացնելով՝ կստանանք իրական Y_t-ի և հաշվարկված Y_t-ի բացարձակ տարբերության քառակուսիները, այնուհետև՝ այդ քառակուսիների գումարը.

$$\sum e_t^2 = \sum(Y_t - b_0 - b_1X_{1t} - b_2X_{2t})^2 \qquad (6.5)$$

Ինչպես նշվել է նախորդ գլուխներում, փոքրագույն քառակուսիների մեթոդը մնացորդների քառակուսիների մինիմիզացման խնդիր է, որը լուծելու համար (6.5)-ը ածանցում ենք ըստ b_0, b_1, b_2 գործակիցների և հավասարեցնում 0-ի:

$$\frac{\partial \sum e_t^2}{\partial \sum b_0} = 2\sum(Y_t - b_0 - b_1X_{1t} - b_2X_{2t})(-1) = 0 \qquad (6.6)$$

$$\frac{\partial \sum e_t^2}{\partial \sum b_1} = 2\sum(Y_t - b_0 - b_1X_{1t} - b_2X_{2t})(-X_{1t}) = 0$$

$$\frac{\partial \sum e_t^2}{\partial \sum b_2} = 2\sum(Y_t - b_0 - b_1X_{1t} - b_2X_{2t})(-X_{2t}) = 0$$

Այնուհետև, պարզեցնելով (6.6)-ը՝ կստանանք.

$$\overline{Y} = b_0 + b_1\overline{X}_1 + b_2\overline{X}_2$$

$$\sum Y_tX_{1t} = b_0\sum X_{1t} + b_1\sum X_{1t}^2 + b_2\sum X_{1t}X_{2t} \qquad (6.7)$$

$$\sum Y_tX_{2t} = b_0\sum X_{2t} + b_2\sum X_{2t}^2 + b_1\sum X_{1t}X_{2t}$$

Գումարման նշանը վերաբերում է յուրաքանչյուր փոփոխականի տվյալների բազմության n տարրերին: Փոփոխականներից յուրաքանչյուրի համար կատարենք

$x_{1t} = X_{1t} - \overline{X}_{1t}$, $x_{2t} = X_{2t} - \overline{X}_{2t}$, $y_t = Y_t - \overline{Y}_t$ նշանակումները,

որտեղ $\overline{X}_{1t}, \overline{X}_{2t}, \overline{Y}_t$ -ն համապատասխան փոփոխականների պարզ թվաբանական միջինն են: Լուծելով (6.7) հավասարումների համակարգը, որը, փաստորեն, երեք հավասարում է՝ երեք (b_0, b_1, b_2) անհայտով, կստանանք.

$$b_0 = \overline{Y} - b_1\overline{X}_1 - b_2\overline{X}_2 \qquad (6.8)$$

$$b_1 = \frac{(\sum y_tx_{1t})(\sum x_{2t}^2) - (\sum y_tx_{2t})(\sum x_{1t}x_{2t})}{(\sum x_{1t}^2)(\sum x_{2t}^2) - (\sum x_{1t}x_{2t})^2} \qquad (6.9)$$

$$b_2 = \frac{(\sum y_tx_{2t})(\sum x_{1t}^2) - (\sum y_tx_{1t})(\sum x_{1t}x_{2t})}{(\sum x_{1t}^2)(\sum x_{2t}^2) - (\sum x_{1t}x_{2t})^2} \qquad (6.10)$$

Ինչպես երևում է (6.9) և (6.10) հավասարումներից, b_1-ի և b_2-ի հայտարարները նույնն են, և երկուսն էլ հանդես են գալիս որպես պարզ ռեգրեսիայի մոդելի լրացումներ: Բազմակի ռեգրեսիայի գործակիցների հաշվարկումը առավել պարզ պատկերացնելու համար, բազմակի ռեգրեսիայի մոդելը բնութագրող հավասարումների համակարգը հնարավոր է ներկայացնել մատրիցնե-րի միջոցով: Յուրաքանչյուր բազմակի փոփոխականներով մոդե-լ, անկախ փոփոխականների թվից, կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով.

$$
\begin{aligned}
y_1 &= \beta_0 + \beta_1 x_{11} + \beta_2 x_{21} + \ldots + \beta_k x_{k1} + \varepsilon_1 \\
y_2 &= \beta_0 + \beta_1 x_{12} + \beta_2 x_{22} + \ldots + \beta_k x_{k2} + \varepsilon_2 \qquad (6.11) \\
&- - - - - - - - - - - - - - - - - - \\
y_n &= \beta_0 + \beta_1 x_{1n} + \beta_2 x_{2n} + \ldots + \beta_k x_{kn} + \varepsilon_n
\end{aligned}
$$

Կախյալ փոփոխականներն առանձին ներկայացնենք Y վեկտոր մատրիցի տեսքով, իսկ անկախ փոփոխականները՝ X n x k - չափանի մատրիցի տեսքով, որի ռանգը հավասար է k

$$
Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ - \\ Y_n \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{21} & X_{k1} \\ 1 & X_{12} & X_{22} & X_{k2} \\ - & - & - & - \\ 1 & X_{1n} & X_{2n} & X_{kn} \end{bmatrix} \qquad (6.12)
$$

$$
\beta = [\beta_0 \beta_1 - \beta_k] \qquad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ - \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}
$$

Այսինքն՝ ստացվում է, որ (6.11) հավասարումների համա-կարգը կարելի է նույնացնել.

$$Y = X\beta + \varepsilon \qquad (6.13)$$

հավասարման հետ, որը կոչվում է ընդհանուր գծային ռեգրեսիա-յի մոդելի մատրիցային արտահայտություն: Այսօրինակ նշանա-կումները զգալիորեն կիեշտացնեն մոդելում ռեգրեսիայի գործա-կիցների հաշվարկումները 1-ից ավելի անկախ փոփոխականնե-րի դեպքում:

Օգտագործելով (6.5) հավասարումը և (6.12) նշանակումնե-րը՝ (6.4) հավասարման քառակուսիների գումարը կարելի է ներ-կայացնել հետևյալ տեսքով.

$$\sum_{t=1}^{n} \varepsilon_t^2 = \sum_{t=1}^{n} (Y_t - X_t\beta)^2 \qquad (6.14)$$

(6.14)-ում՝սխալների քառակուսիների մինիմիզացման խնդրի առարկա է ռեգրեսիայի β_0 (համախմբության համար) և b_0 (ընտ-րանքի համար) գործակիցների հաշվարկումը: Պետք է նկատի ու-նենալ, որ X, y, β, b, ε-ն հանդես են գալիս որպես համապատաս-խան փոփոխականների մատրիցներ (6.12), ընդ որում՝ β-ն, ε-ն վերաբերում են մոդելում ընդգրկված փոփոխականների հա-մախմբությանը, իսկ b-ն և e-ն՝ այդ նույն փոփոխականների ընտ-րանքին*:

$$\min S(\beta) = \varepsilon'\varepsilon = (Y - X\beta)'(Y - X\beta) \qquad (6.15)$$

$$S(\beta) = Y'Y + 2\beta'X'Y + \beta'X'X\beta = Y'Y - 2Y'X\beta + \beta'X'X\beta$$

$$\frac{\partial S(\beta)}{\partial \beta} = -2X'Y + 2X'X\beta = 0$$

Ենթադրենք՝ b-ն հանդիսանում է լուծում այս հավասարման համար, որը նշանակում է՝ b-ն պետք է բավարարի հետևյալ պայ-մանը.

$$X'Xb = X'Y \qquad (6.16)$$

---

* Համաձայն Գաուս-Մարկովի թեորեմի՝ դասական գծային ռեգրեսիայի մոդելում մնացորդների փոքրագույն քառակուսիների մեթոդով հաշվարկված b գործակիցը նվազագույն վարիացիայով գծային անշեղելի հաշվարկված β-ն է: Ցանկացած հաստատունի վեկտորի՝ (w), համար գծային անշեղելի (w,β) նվազագույն վարիացիան դասական գծային ռեգրեսիայի մոդելում նույնանում է wb-ի հետ:

Այսպիսով, բազմակի փոփոխականներով ռեգրեսիայի մոդելում անկախ փոփոխականների գործակիցները կարող ենք ներկայացնել հետևյալ կերպ.

$$b = (X'X)^{-1}X'Y \qquad (6.17)$$

b-ն հանդես է գալիս որպես ռեգրեսիայի հավասարման գործակիցների վեկտոր: b_1-ը կախյալ փոփոխականի միջին արժեքի փոփոխությունն է՝ $E(Y \mid X_1,X_2)$*, X_1 անկախ փոփոխականի մեկ միավորով փոփոխության նկատմամբ, երբ X_2 անկախ փոփոխականը ֆիքսված է: Այլ կերպ ասած՝ դա $E(Y \mid X_1,X_2)$ –ի անկյունային գործակիցն է X_1-ի նկատմամբ, երբ X_2-ը ֆիքսված է՝ արտացոլելով X_1 անկախ փոփոխականի ուղղակի ազդեցությունը կախյալ փոփոխականի միջին արժեքի վրա: Նույն ձևով, b_2-ը կախյալ փոփոխականի միջինացված արժեքի փոփոխությունն է՝ $E(Y \mid X_1,X_2)$, X_2 անկախ փոփոխականի մեկ միավորով փոփոխության նկատմամբ, երբ X_1 անկախ փոփոխականը ֆիքսված է: Այլ կերպ ասած, դա $E(Y \mid X_1,X_2)$ -ի անկյունային գործակիցն է X_2-ի նկատմամբ, երբ X_1-ը ֆիքսված է՝ արտացոլելով X_2 անկախ փոփոխականի ուղղակի ազդեցությունը կախյալ փոփոխականի միջին արժեքի վրա: Վերը նշվածը հստակեցնելու համար դիտարկենք հետևյալ օրինակը** ՀՆԱ իրական արժեքի (Y) ֆունկցիոնալ կախվածությունը ՀՆԱ ընթացիկ գներով արժեքից (X_1) և գների ինդեքսից (X_2): ՀՆԱ իրական արժեքը հաշվարկվում է՝ ելնելով ՀՆԱ ընթացիկ գներով արժեքից և գների ինդեքսի միջոցով հաշվարկված գների դեֆլյատորի կիրառման միջոցով: Սակայն

* Երբ ընտրանքի տվյալների թիվը մեծանում է, ապա $E(Y \mid X_1,X_2)$ –ն հավասարվում է դրա միջինին:

** Օրինակի համար հիմք հանդիսացող թվային տվյալները ներկայացված են հավելված 6.1-ում:

այս փոփոխականներից յուրաքանչյուրի ազդեցությունը առանձին կարող է հանդես գալ հետևյալ կերպ: Ենթադրենք՝ անհրաժեշտ է հասկանալ գների աճի ազդեցությունը ՀՆԱ իրական արժեքի վրա: Պետք է կատարել հետևյալ քայլերը.

1.Կազմել ռեգրեսիայի հավասարում՝ իրական գներով ՀՆԱ-ն որպես կախյալ, իսկ գների ինդեքսը՝ անկախ փոփոխական օգտագործելով.

$$Y_t = b_0 + b_{12}X_{2t} + \hat{e}_{1t} \qquad (6.18)$$

Սա պարզ ռեգրեսիայի հավասարում է, որտեղ X_{2t} -ն գների ինդեքսն է:

2. Կազմել ռեգրեսիայի հավասարում՝ ընթացիկ գներով ՀՆԱ-ն որպես կախյալ, իսկ գների ինդեքսը՝ անկախ փոփոխական օգտագործելով.

$$X_{1t} = b_1 + b_{22}X_{2t} + \hat{e}_{2t} \qquad (6.19)$$

որտեղ e_{2t}-ն նույնպես մնացորդային արժեք է:

Այսպիսով, (6.18)-ից և (6.19)-ից հետևում է, որ.

$$\hat{e}_{1t} = Y_t - b_0 - b_{12}X_{2t} = Y_t - \hat{Y}_t \qquad (6.20)$$

$$\hat{e}_{2t} = X_{1t} - b_1 - b_{22}X_{2t} = X_{1t} - \hat{X}_{1t} \qquad (6.21)$$

որտեղ $\hat{Y}_1$-ն և $\hat{X}_{1t}$-ն հաշվարկվում են (6.18) և (6.19) ռեգրեսիաների հավասարումներից:

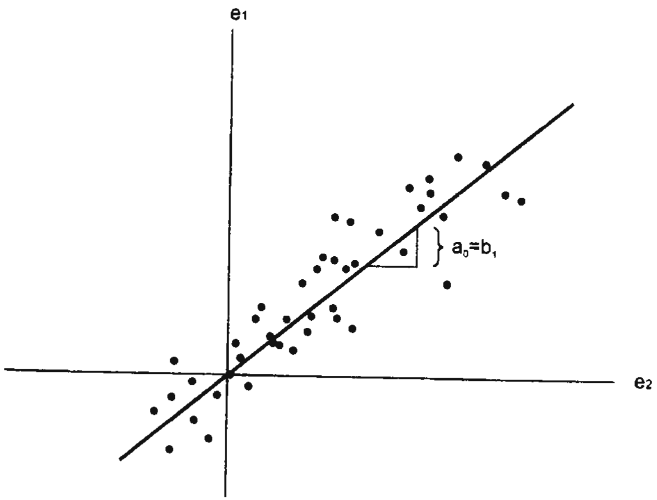
$\hat{e}_{1t}$-ն Y_t-ի արժեքն է՝ առանց X_{2t} անկախ փոփոխականի ազդեցության, իսկ $\hat{e}_{2t}$-ն X_{1t}-ի արժեքն է՝ առանց X_{2t} անկախ փոփոխականի ազդեցության: Այսպիսով, $\hat{e}_{1t}$ և $\hat{e}_{2t}$ մնացորդները, փաստորեն, Y_t և X_{1t} փոփոխականներն են՝ առանց X_{2t} փոփոխականի ազդեցության:

Կազմենք ռեգրեսիայի հավասարում՝ $\hat{e}_{1t}$ և $\hat{e}_{2t}$ փոփոխականներով.

$$\hat{e}_{1t} = a_0 + a_1\hat{e}_{2t} + \hat{e}_{3t} \qquad (6.22)$$

որտեղ $\hat{e}_{3t}$-ն մնացորդն է: a_1-ը (6.22) հավասարման մեջ մեկնաբանվում է որպես X_1 փոփոխականի ուղղակի ազդեցություն Y-ի վրա կամ կախյալ փոփոխականի իրական անկյունային գործակիցը X_1-ի նկատմամբ, այսինքն՝ b_1-ի հաշվարկված արժեքը:

Երկրաչափորեն այն կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով.



Գրաֆիկ 6.1. *Իրական գներով ՀՆԱ փոփոխությունը՝ կախված ընթացիկ գներով ՀՆԱ-ից*

6.2. Վարկածներ

Պետք է նկատի ունենալ, որ որոշակի մեթոդներով հաշվարկումը դեռ չի նշանակում, թե ստացված գործակիցներն ամբողջությամբ կամ մասնակիորեն կարող են արտացոլել կախյալ փոփոխականի վրա անկախ փոփոխականների ազդեցությունը, եթե մոդելը չի բավարարում դասական գծային մոդելի հիմնական ենթադրությունները: Ինչպես արդեն ներկայացվել է, հիմնական ենթադրությունն է այն փաստը, որ մոդելի մնացորդային արժեքները պետք է ունենան նորմալ բաշխում՝ 0-ի հավասար միջինով և կայուն վարիացիայով: Միևնույն ենթադրությունները, նույնպես նշվել է, տարածվում են բազմակի ռեգրեսիայի մոդելի վրա:

Երկու փոփոխականով մոդելի համար նախ և առաջ պետք է հաշվարկել ռեգրեսիայի գործակիցների վարիացիան և կայուն սխալը, որոնք կարող են որոշակի պատկերացում տալ ռեգրեսիայի գործակիցների՝ տարբեր ընտրանքների դեպքում ունեցած փոփոխականության վերաբերյալ: Այս ցուցանիշի հաշվարկումը կատարվում է երկու հիմնական՝ պարամետրերի իրական արժեքների համար վստահելի միջակայքեր սահմանելու և վիճակագրական վարկածների տեստավորման նպատակով: Ռեգրեսիայի գործակիցների վարիացիան և կայուն սխալները հաշվարկվում են ներքոնշյալ հավասարումների միջոցով, որոնք ստացվում են (6.8), (6.9) և (6.10) հավասարումներից.

$$\mathrm{var}(b_0) = \left[\frac{1}{n} + \frac{\overline{X}_1^2\sum x_{2t}^2 + \overline{X}_2^2\sum x_{1t}^2 - 2\overline{X}_1\overline{X}_2\sum x_{1t}x_{2t}}{\sum x_{1t}^2\sum x_{2t}^2 - (\sum x_{1t}x_{2t})^2}\right] \times \sigma^2 \qquad (6.23)$$

$$S_{b_0} = \sqrt{\mathrm{var}(b_0)} \qquad (6.24)$$

$$\mathrm{var}(b_1) = \left[\frac{\sum x_{2t}^2}{(\sum x_{1t}^2)(\sum x_{2t}^2) - (\sum x_{1t}x_{2t})^2}\right] \times \sigma^2 \qquad (6.25)$$

$$S_{b_1} = \sqrt{var(b_1)} \qquad (6.26)$$

$$var(b_2) = \left[\frac{\sum x_{1t}^2}{(\sum x_{1t}^2)(\sum x_{2t}^2) - (\sum x_{1t}x_{2t})^2}\right] \times \sigma^2 \qquad (6.27)$$

$$S_{b_2} = \sqrt{var(b_2)} \qquad (6.28)$$

(6.24), (6.26) և (6.28) հավասարումները համապատասխանաբար ցույց են տալիս b_0, b_1, b_2 գործակիցների կայուն սխալները: Պետք է նկատի ունենալ, որ (6.23), (6.25) և (6.27) հավասարումներում σ^2-ը համախմբության սխալի իրական վարիացիան է: Այս՝ իրականում անհայտ ցուցանիշը, հաշվարկվում է՝

$$S_e^2 = \frac{\sum e_t^2}{n-3} \qquad (6.29)$$

որտեղ S_e^2-ը հանդես է գալիս որպես σ^2-ի հաշվարկված արժեք:

Նշենք, որ $S_e = \sqrt{S_e^2}$ ռեգրեսիայի կայուն սխալն* է, որը ցույց է տալիս հաշվարկված ռեգրեսիայի գծից Y արժեքների կայուն տատանումը: (6.29) հավասարման մեջ $\sum e_t^2$-ն մնացորդների քառակուսիների գումարն է, հաշվարկվում է $\sum e_t^2 = (Y_t - \hat{Y}_t)^2$ բանաձևով, որը կարելի է նույնացնել հետևյալ հավասարման հետ.

$$\sum e_t^2 = \sum(e_t e_t) = \sum e_t(y_t - b_1x_{1t} - b_2x_{2t}) =$$

$$= \sum e_t y_t - b_1\sum e_t x_{1t} - b_2\sum e_t x_{2t} = \sum e_t y_t = \qquad (6.30)$$

$$= \sum (y_t - b_1x_{1t} - b_2x_{2t})(y_t) =$$

* Հանդես է գալիս միայն դրական արժեքով:

$$= \sum y_t^2 - \left(b_1\sum y_t x_{1t} + b_2\sum y_t x_{2t}\right) = TSS - RSS^*$$

(6.29) հավասարման մեջ (n-3)-ը ազատության աստիճանն է: n-ը՝ փոփոխականներից յուրաքանչյուրի բազմության տվյալների թիվը, իսկ 3-ը՝ մոդելի գործակիցների թիվը: Նշենք, որ ազատության աստիճանը ընտրանքի տվյալների թվի և ռեգրեսիայի գործակիցների բացարձակ տարբերությունն է: Ընդհանրացնելով ասենք, որ ազատության աստիճանը նվազում է՝ ելնելով մոդելում անկախ փոփոխականների թվից. օրինակ՝ 3 անկախ փոփոխականներով մոդելում ազատության աստիճանը հավասար կլինի (n-4)-ի:

Ընդհանուր առմամբ, մոդելի, հետևաբար՝ համապատասխան վարկածների ստուգումը ներառում է մի քանի հաջորդական քայլեր.

1. *Առանձին գործակիցների նշանակալիության ստուգում՝ վարկածի ստուգումով:*
2. *Ամբողջական մոդելի նշանակալիության ստուգում, այսինքն՝ անկյունային գործակիցների՝ 0-ի հավասար լինելու կամ դետերմինացիայի գործակցի (R^2)՝ 0-ի հավասար լինելու փաստի ստուգում:*
3. *Երկու կամ ավելի գործակիցների հավասարության ստուգում:*
4. *Գործակիցների՝ որոշակի պայմանների բավարարելու ստուգում:*
5. *Որոշակի սահմանափակումներին ռեգրեսիայի մոդելի համապատասխանության ստուգում:*
6. *Ռեգրեսիայի մոդելի ֆունկցիոնալ ձևի ստուգում:*

* Բացատրությունը հաջորդ մասում:

Ենթադրենք՝ անհրաժեշտ է ստուգել բազմակի ռեգրեսիայի անկախ փոփոխականներից որևէ մեկի ազդեցությունը կախյալ փոփոխականի վրա: Այսինքն, պետք է ստուգել՝ արդյոք բազմակի ռեգրեսիայի գործակիցները տարբերվում են 0-ից, թե՝ ոչ: Այս ենթադրությունն էլ հենց կհանդիսանա զրոյական վարկած: Քանի որ b_0, b_1, b_2-ը ունեն նորմալ բաշխում և համապատասխանաբար՝ β_1, β_2, β_3-ի հավասար միջին, փոքրագույն քառակուսիների մեթոդի հիմնական՝ (6.23), (6.25) և (6.27) ենթադրությունները համադրելով σ^2-ին S_e^2-ով փոխարինելու հնարավորության հետ՝ կարելի է պնդել, որ ռեգրեսիայի գործակիցներն ունեն t (Ստյուդենտի) բաշխում:

Այսինքն՝

$$t = \frac{b_0 - \beta_0}{S_{b_0}} \sim t_{(n-3)} \qquad (6.31)$$

$$t = \frac{b_1 - \beta_1}{S_{b_1}} \sim t_{(n-3)} \qquad (6.32)$$

$$t = \frac{b_2 - \beta_2}{S_{b_2}} \sim t_{(n-3)} \qquad (6.33)$$

որտեղ՝ (n-3)-ը t բաշխման ազատության աստիճանն է, երեք փոփոխականով բազմակի ռեգրեսիայի մոդելի դեպքում:

Անդրադառնանք մեր օրինակին.

$$Y_t = b_0 + b_1 X_{1t} + b_2 X_{2t} + e_t \qquad (6.34)$$

որտեղ՝ Y_t - ՀՆԱ$_{\text{իրական գներով (t)}}$

X_{1t} - ՀՆԱ$_{\text{ընթացիկ գներով (t)}}$

X_{3t} - գների ինդեքս$_{\text{(t)}}$

t - ժամանակահատված:

Անհրաժեշտ է հաշվարկել ՀՆԱ $_{\text{ընթացիկ գներով}}$ և գների ինդեքս փոփոխականների ազդեցությունը ՀՆԱ $_{\text{իրական գներով}}$ փոփոխականի վրա: Մասնավորապես, պետք է հաշվարկել ՀՆԱ $_{\text{ընթացիկ գներով}}$ ազդեցությունը ՀՆԱ $_{\text{իրական գներով}}$ ցուցանիշի վրա: Այս դեպքում 0-ական վարկածը կներկայացվի (6.35)-ի տեսքով, իսկ այլընտրանքային վարկածը՝ (6.36)-ի տեսքով.

$$H_0 : \beta_1 = 0 \qquad (6.35)$$

$$H_1 : \beta_1 \neq 0 \qquad (6.36)$$

0-ական վարկածը ցույց է տալիս, որ, ֆիքսելով գների ինդեքս փոփոխականը (X_2), ՀՆԱ ընթացիկ գներով արժեքը (X_1) ազդեցություն չունի ՀՆԱ իրական ծավալի (Y) վրա: Այլընտրանքային (H_1) վարկածը ենթադրում է զրոյական վարկածի (H_0) հերքում, այսինքն, ՀՆԱ ընթացիկ գներով արժեքի (X_1) ազդեցությունը ՀՆԱ իրական գների (Y) վրա հավասար չէ 0-ի, որը նշանակում է, որ t տեստը երկկողմանի է՝ դրական կամ բացասական: Այս վարկածը ստուգելու համար կարող ենք օգտագործել t տեստը՝ t կրիտիկական արժեքը b_0, b_1, b_2 գործակիցների համար հաշվարկելով (6.31) - (6.33) հավասարումներից՝

$$t = \frac{b_1 - \beta_1}{S_{b_1}} = \frac{b_1}{S_{b_1}} = \frac{0{,}83596}{0{,}03287} = 25{,}43 \qquad (6.37)^*$$

որտեղ՝ β_1=0՝ համաձայն (6.35) հավասարման, (6.37) հավասարման միջոցով հաշվարկված t-ն ունի Ստյուդենտի բաշխում՝ 5-3=2 ազատության աստիճանով:

* (6.37) հավասարման համար հիմք է հանդիսանում պայմանական օրինակ ՀՆԱ իրական ծավալների վերաբերյալ, և այդ հաշվարկները կատարված են պայմանական տվյալների հիման վրա:

Զրոյական վարկածը հերքելու համար օգտագործվում են երկու հիմնական մոտեցումներ: Այն է.

- վստահելի միջակայքերի միջոցով ստուգում,
- նշանակալիության ստուգում:

Նշանակալիության ստուգման դեպքում, ինչպես արդեն նշվել է նախորդ գլուխներում, կարևոր է նշանակալիության մակարդակի՝ α-ի որոշումը:

$$P(-t_{\frac{\alpha}{2}(n-k)} \le t \le t_{\frac{\alpha}{2}(n-k)}) = 1-\alpha \qquad (6.38)$$

Այս մեթոդով ստուգման ժամանակ փաստորեն հաշվարկվում է (6.31)-(6.33) հավասարումների միջոցով հաշվարկված t արժեքի՝ (6.38) հավասարումը բավարարելու պայմանը: Եթե այն չի բավարարվում, ապա հերքվում է զրոյական վարկածը, այն է՝ ռեգրեսիայի համապատասխան գործակիցը չի բավարարի զրոյի հավասարվելու պայմանը:

Մեր օրինակի դեպքում եթե ընդունենք՝ α=0.05 կամ $\alpha = 5\%$, ապա 2 ազատության աստիճանի համար կստացվի հետևյալ հավասարումը՝

$$P(-4.30 \le t \le 4.30) = 0.95 \qquad (6.39)$$

(6.39)-ում տեղադրելով (6.37)-ից հաշվարկված t-ի արժեքը, կստացվի՝

$$P(-4.30 \le 25.43 \le 4.30) \ne 0.95 \qquad (6.40)$$

Այսինքն՝ հերքվում է զրոյական վարկածը:

Վստահելի միջակայքերի միջոցով վարկածների ստուգման համար ևս հիմք է հանդիսանում (6.38)-ը: Այն համադրելով (6.32)-ի հետ, կստանանք.

$$P(-t_{\frac{\alpha}{2}(n-k)} \le \frac{b_1-\beta_1}{S_{b_1}} \le t_{\frac{\alpha}{2}(n-k)}) = 1-\alpha$$

$$P(b_1 - t_{\frac{\alpha}{2}(n-k)} * S_{b_1} \le \beta_1 \le b_1 + t_{\frac{\alpha}{2}(n-k)} * S_{b_1}) = 1-\alpha \qquad (6.41)$$

$$b_1 - t_{\frac{\alpha}{2}(n-k)} * S_{b_1} \le \beta_1 \le b_1 + t_{\frac{\alpha}{2}(n-k)} * S_{b_1}$$

որը β_1-ի համար 95% վստահելի միջակայքն է, և նշանակում է, որ զրոյական վարկածը կարող է հերքվել, եթե β_1-ը այդ միջակայքում չէ:

Վստահելի միջակայքերի օգտագործման միջոցով վարկածների ստուգման առավել գործնական մոտեցում է (6.37) հավասարման միջոցով հաշվարկված t-ի արժեքի համեմատությունը t կրիտիկական արժեքի հետ: Այսպես, եթե հաշվարկված t-ի արժեքը գերազանցում է նշանակալիության ընտրված α մակարդակը և տվյալ ռեգրեսիայի մոդելի ազատության աստիճանին համապատասխանող t-ի կրիտիկական կետը, ապա կարելի է հերքել 0-ական վարկածը: Համաձայն մեր օրինակի տվյալների.

$t_{կրիտ.} = 4{,}30$

$t_{հաշվարկված} = 25{,}43$

$t_{կրիտ.} = 4{,}30 < t_{հաշվարկված} = 25{,}43$,

հետևաբար կարելի է հերքել զրոյական վարկածը:

Այսպիսով, նկարագրված մեթոդները կարելի է օգտագործել՝ ստուգելու համար յուրաքանչյուր գործակցի՝ 0-ի հավասար լինելու վարկածը՝ կատարելով վերը նկարագրված հաջորդական քայլերը: Վերոհիշյալ օրինակում գործակիցներից յուրաքանչյուրը նշանակալից է վիճակագրորեն, այսինքն՝ զգալիորեն տարբեր է 0-ից:

Մոդելի նշանակալիության ստուգումը ենթադրում է ռեգրեսիայի մոդելի բոլոր գործակիցների՝ 0-ի հավասար լինելու փաստի ստուգում, իսկ մոդելի պիտանիությունը ստուգելու համար հաշվի է առնվում բազմակի դետերմինացիայի գործակցի չափը: Նախորդ հատվածում նկարագրված մեթոդը ենթադրում էր մոդելի գործակիցների առանձին-առանձին ստուգում, որը չի կարող բավարար համարվել նշանակալիության մասին եզրակացություններ անելու համար: Այսինքն, եթե ռեգրեսիայի գործակիցներից յուրաքանչյուրը առանձին-առանձին հավասար չէ 0-ի, չի նշանակում, որ գործակիցները միասին հավասար չեն լինի 0-ի:

Այսպիսով, պետք է ստուգել հետևյալ վարկածը.

$H_0:\beta_1=\beta_2=0$

$$H_0 : \beta_1 \neq \beta_2 \neq 0 \qquad (6.42)$$

Այսօրինակ վարկածի ստուգումը կոչվում է ընդհանուր մոդելի ստուգում, որը նշանակում է՝ ստուգել X_1, X_2 անկախ փոփոխականների ազդեցությունը Y կախյալ փոփոխականի վրա: Նշենք, որ այն նույնանում է՝

$H_0: R^2=0$

$$H_1 : R^2 \neq 0 \qquad (6.43)$$

վարկածի հետ, որտեղ R^2-ը բազմակի ռեգրեսիայի հավասարման դետերմինացիայի գործակիցն է: Ինչպես արդեն սահմանվել է, դետերմինացիայի (r^2) գործակիցը ցույց է տալիս կախյալ փոփոխականի վարիացիայի՝ անկախ փոփոխականով պայմանավորված լինելու աստիճանը կամ տոկոսը: Նույնը կարելի է ասել բազմակի ռեգրեսիայի հավասարումների մասին: Այսինքն, բազմակի դետերմինացիայի գործակիցը ցույց է տալիս տվյալ ռեգրեսիայի հավասարման մեջ բոլոր անկախ փոփոխականների կողմից կախյալ փոփոխականի վարիացիան բնութագրող մասը կամ տոկոսը: Բազմակի դետերմինացիայի գործակիցը նշանակվում է

Բազմակի ռեգրեսիայի դեպքում ևս տեղի ունի՝

$$TSS = ESS + RSS \qquad (6.44)^{*}$$

հավասարությունը , որտեղ՝

TSS = ընդհանուր քառակուսիների գումարին,

ESS= հաշվարկված քառակուսիների գումարին,

RSS= մնացորդների քառակուսիների գումարին:

R^2-ը, երկու փոփոխականով ռեգրեսիայի դետերմինացիայի գործակցի նման, հաշվարկվում է $R^2=\frac{ESS}{TSS}$ բանաձևով, որը կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով.

$$R^2=\frac{b_1\sum y_t x_{1t}+b_2\sum y_t x_{2t}}{\sum y_t^2}$$

կամ

$$R^2=1-\frac{RSS}{TSS}=1-\frac{\sum e_t^2}{\sum y_t^2} \qquad (6.45)$$

Նշենք, որ բազմակի դետերմինացիայի գործակիցն ունի միայն դրական նշան և կարող է գտնվել 0-ից 1 միջակայքում կամ 0-ից 100 միջակայքում՝ եթե արտահայտվում է տոկոսներով: Այս ցուցանիշի մեկ այլ կարևոր մեկնաբանություն է այն, որ R^2-ը ցույց է տալիս, թե որքանով է ընտրված մոդելը համապատասխանում իրականությանը: Վերոհիշյալ օրինակում R^2=99%:

Գործնականում շատ հաճախ են դեպքերը, երբ բազմակի ռեգրեսիայի անկախ փոփոխականներից յուրաքանչյուրը կարող է ազդեցություն չունենալ կախյալ փոփոխականի վրա, սակայն բոլոր անկախ փոփոխականները միասին կարող են ամբողջու-

*

թյամբ բնութագրել կախյալ փոփոխականը: Սա նշանակում է, որ (6.42) կամ (6.43) վարկածի ստուգման համար t տեստը կիրառելի չէ:

(6.42) կամ (6.43) վարկածը ստուգելու համար սովորաբար կիրառվում է վարիացիայի վերլուծության մեթոդը (ANOVA), որը, փաստորեն, (6.45) հավասարման առանձին տարրերի վերլուծությունն է:

Աղյուսակ 6.1. *Վարիացիայի վերլուծության ANOVA մեթոդը՝ երեք փոփոխականով մոդելի համար*

Վարիացիայի աղբյուրը	Քառակուսիների գումարը	Անկախության աստիճանը	Քառակուսիների գումարի միջինը
ESS	$b_1\sum y_t x_{1t} + b_2\sum y_t x_{2t}$	2	$\frac{b_1\sum y_t x_{1t} + b_2\sum y_t x_{2t}}{2}$
RSS	$\sum e_t^2$	n-3	$\frac{\sum e_t^2}{n-3}$
TSS	$\sum y_t^2$	n-1	

Ինչպես արդեն նշվել է, քառակուսիների յուրաքանչյուր գումար ունի իր համապատասխան ազատության աստիճանը, այսինքն՝ տվյալների այն քանակությունը, որի հիման վրա հաշվարկվել է: Մեր օրինակի դեպքում այն կունենա հետևյալ տեսքը.

TSS* – n-1=5-1=4

RSS – n-3 = 5-3 = 2

ESS - 2

* TSS-ի համար ազատության աստիճանը միշտ հավասար է n-1, իսկ RSS-ի և ESS-ի համար ազատության աստիճանը կախված է մոդելում ընդգրկված փոփոխականների թվից:

Ենթադրելով RSS-ի նորմալ բաշխում, որը OLS մեթոդի հիմնական ենթադրություններից է, (6.42) կամ (6.43) վարկածը ստուգելու համար պետք է նկատի ունենալ, որ վարիացիայի վերլուծության (ANOVA) արդյունքում (6.46) -ով հաշվարկված F փոփոխականը համարիչում ունի 2, իսկ հայտարարում՝ n-3 ազատության աստիճանով Ֆիշերի բաշխում.

$$F = \frac{ESS/2}{RSS/n-3} = \frac{b_1\sum y_t x_{1t} + b_2\sum y_t x_{2t}/2}{\sum e_t^2/n-3} \qquad (6.46)$$

Ընդհանրապես, եթե ռեգրեսիայի մոդելն ունի k փոփոխականներ, իսկ դրանցից յուրաքանչյուրը՝ n անդամներից կազմված ընտրանք, ապա F-ի հաշվարկված արժեքը համարիչում կունենա (k-1) ազատության աստիճան, իսկ հայտարարում՝ (n-k) ազատության աստիճան:

$$F = \frac{ESS/k-1}{RSS/n-k} = \frac{b_1\sum y_t x_{1t} + b_2\sum y_t x_{2t}/k-1}{\sum e_t^2/n-k} \qquad (6.47)$$

$$F = \frac{R^2/k-1}{(1-R^2)/n-k} \qquad (6.48)$$

F-ի հաշվարկված արժեքը կախյալ փոփոխականի՝ անկախ փոփոխականներով «բացատրվող» վարիացիայի հարաբերությունն է կախյալ փոփոխականի «չբացատրվող» վարիացիային:

(6.47) և (6.46)-ից կարելի է եզրակացնել, որ եթե ռեգրեսիայի գործակիցները հավասար են, ապա կախյալ փոփոխականի փոփոխվելու հատկությունը կախված է միայն մնացորդի վարիացիայից: Եթե ենթադրենք, որ H_0-ն սխալ ենթադրություն է (6.42), ապա.

$$E\left(\frac{\sum e_t^2}{n-3}\right) = E(S_e^2) = \sigma^2 \qquad (6.49)$$

$$\frac{E(b_1\sum y_t x_{1t} + b_2\sum y_t x_{2t})}{2} = \sigma^2$$

(6.49) հավասարությունները չեն պահպանվի, որի հետևանքով (6.46)-ում և (6.47)-ում F-ի համարիչը զգալիորեն ավելի կլինի հայտարարից: Վարկածը հերքելու համար պետք է հաշվի առնել, որ եթե (6.47)-ի միջոցով հաշվարկված F-ի արժեքը գերազանցում է նշանակալիության ընտրված α մակարդակը և տվյալ ռեգրեսիայի մոդելի ազատության աստիճանին համապատասխան F-ի կրիտիկական արժեքը, ապա կարելի է հերքել զրոյական վարկածը:

(6.45) և (6.47) հավասարումներից պարզ է դառնում F-ի և R^2-ի ուղղակի կապը, որտեղից կարելի է եզրակացնել, որ $H_0{:}\beta_1=\beta_2=0$ և $\beta_0{:}R^2=0$ ունեն միևնույն իմաստը: Սա նշանակում է, որ հերքելով $H_0{:}\ \beta_1=\beta_2=0$ վարկածը, կհերքենք նաև $H_0{:}R^2=0$ վարկածը:

Մեր օրինակում F=1120.80, որը զգալիորեն գերազանցում է F=19 կրիտիկական արժեքը α=0,05 մակարդակում, հետևաբար կարելի է հերքել զրոյական վարկածը:

Բազմակի ռեգրեսիայի մոդելների ընդհանուր նշանակալիության ստուգման մեկ այլ՝ առավել կարևոր ցուցանիշ է համարվում, այսպես կոչված՝ հարմարեցված դետերմինացիայի բազմակի գործակիցը:

$$R^2 = 1-\frac{RSS/(n-k)}{TSS/(n-1)} = 1-\frac{RSS(n-1)}{TSS(n-k)} = 1-(1-R^2)\frac{n-1}{n-k} \qquad (6.50)$$

(6.45) հավասարումից հետևում է, որ ռեգրեսիայի մոդելում ինչքան մեծ է անկախ փոփոխականների թիվը, այնքան դետերմինացիայի R^2 գործակիցը մեծ կլինի: Ստացվում է, որ մոդելի որակը, կախված դրա անկախ փոփոխականների քանակից, կբարձրանա, որը, իհարկե ճիշտ եզրակացություն չէ: Դետերմինացիայի գործակցի նման հատկությունը պայմանավորված է դրա հաշվարկման ժամանակ ազատության աստիճանի բացակայությամբ: Այսինքն՝ ստացվում է, որ տարբեր քանակությամբ անկախ փոփոխականներով ռեգրեսիայի մոդելները համեմատելիս հաշվի չի առնվում անկախ փոփոխականների թիվը, որը այդ համեմատությունը դարձնում է անիմաստ: Այս նպատակով (6.50) բանաձևով հաշվարկվում է հարմարեցված դետերմինացիայի գործակիցը: Յարմարեցված դետերմինացիայի գործակիցն ունի հետևյալ հատկությունները.

ա) k>1, $\bar{R}^2 \le R^2$, եթե անկախ փոփոխականների թիվը մոդելում աճում է, ապա հարմարեցված դետերմինացիայի գործակիցը փոքրանում է դետերմինացիայի գործակցից,

բ) հարմարեցված դետերմինացիայի գործակիցը կարող է լինել բացասական, հատկապես, եթե փոփոխականների տվյալների թիվը փոքր է մոդելում ընդգրկված փոփոխականների քանակից՝ n<k:

Ենթադրենք, բազմակի ռեգրեսիայի մոդելում պետք է ստուգել 2 կամ ավելի անկախ փոփոխականների փոխհավասարությունը: Գործնականում այս ենթադրությունը կարելի է նույնացնել արտադրական որևէ ֆունկցիայի սահմանափակումների ստուգման հետ: Ենթադրենք, ունենք ռեգրեսիայի հետևյալ մոդելը.

$$Y_t = b_0 + b_1X_{1t} + b_2X_{2t} + e_t \qquad (6.51)$$

Զրոյական և այլընտրանքային վարկածները համապատասխանաբար կունենան հետևյալ տեսքը.

$$H_0: \beta_1 = \beta_2 \qquad \beta_1 - \beta_2 = 0 \qquad (6.52)$$

$$H_0 : \beta_1 \neq \beta_2 \qquad \beta_1 - \beta_2 \neq 0 \tag{6.53}$$

(6.52)-ում ներկայացված զրոյական վարկածը նշանակում է, որ (6.51) ռեգրեսիայի անկախ փոփոխականները հավասար ազդեցություն ունեն կախյալ փոփոխականի վրա: Այս վարկածի ստուգման համար ևս կօգտագործվի t տեստը, իսկ անհրաժեշտ t կրիտիկական արժեքը կհաշվարկվի՝

$$t = \frac{(b_1 - b_2) - (\beta_1 - \beta_2)}{S_{(b_1 - b_2)}} \sim t_{(n-3)}, \tag{6.54}$$

որը պարզեցնելով կստացվի՝

$$t = \frac{b_1 - b_2}{\sqrt{var(b_1) + var(b_2) - 2\,cov(b_1 b_2)}} \sim t_{(n-3)} \tag{6.55}$$

(6.54) կամ (6.55) հավասարումների միջոցով հաշվարկված t արժեքը համեմատելով t–ի ընտրված α մակարդակում n-3 ազատության աստիճանով կրիտիկական արժեքի հետ՝ կհերքենք (6.52) վարկածը, եթե հաշվարկված t-ն մեծ է t կրիտիկականից:

Նշենք, որ ռեգրեսիայի գործակիցների որոշակի սահմանափակումների համապատասխանությունը ստուգվում է միևնույն տրամաբանությամբ:

Ամփոփում

Այս գլխում ներկայացվեցին գծային բազմակի ռեգրեսիայի մոդելի հիմունքները՝ ամենապարզ բազմակի ռեգրեսիայի օրինակով: Գլխի հիմնական նպատակն էր պատկերացում կազմել բազմակի ռեգրեսիայի մոդելի մասին, ինչպես նաև մեկնաբանել բազմակի ռեգրեսիայի մոդելի գործակիցների ու դրանց նշանակալիության հաշվարկման սկզբունքը:

Մեկ այլ էական հատկանիշ ևս ներկայացվեց այս գլխում. բազմակի ռեգրեսիայի մոդելը գնահատելիս կարևոր է ընդհանուր մոդելի նշանակալիության ստուգումը:

Հավելված 6.1

The regression equation is

$$ՀՆԱ_{իրական} = 837 + 0,836\ ՀՆԱ_{ընթացիկ} - 5,27\ գների\ ինդեքս$$

Predictor	Coef	SE Coef	T	P
Ազատ անդամ	837,48	28,75	29,13	0,001
ՀՆԱ ընթացիկ	0,83596	0,03287	25,43	0,002
գների ինդեքս	-5,2724	0,3478	-15,16	0,004

S = 2,406   R-Sq = 99,9%   R-Sq(adj) = 99,8%

ANOVA

Source	DF	SS	MS	F	P
Regression	2	12980,4	6490,2	1120,80	0,001
Residual Error	2	11,6	5,8		
Total	4	12992,0			

Պայմանական օրինակի տվյալներ

ՀՆԱ իրական	ՀՆԱ ընթացիկ	Գների ինդեքս	Սղած
661.2	661.2	138.1	5.5
683.2	804.3	157.2	21.8
733.3	955.4	170.8	-1.3
757.5	987.4	171.8	2.0
803.0	1033.3	170.5	0.4

ԳԼՈՒԽ 7

ՌԵԳՐԵՍԻԱՅԻ ՄՈԴԵԼԻ ՖՈՒՆԿՑԻՈՆԱԼ ՁԵՎԵՐ

Ինչպես արդեն նշվել է նախորդ գլուխներում, ռեգրեսիայի հավասարումը կախյալ և անկախ փոփոխականների գծային փոխկախվածությունը ներկայացնող հավասարում է: Սակայն իրականում, երկու կամ ավելի փոփոխականների միջև ուղղակի գծային կախվածությունը հազվադեպ է. որպես կանոն, այդ կախվածությունները ոչ գծային են:

Ռեգրեսիայի մոդելում անկախ փոփոխականների ոչ գծային ձևով հանդես գալը կոչվում է մոդելի ոչ գծային արտահայտություն՝ ըստ փոփոխականների: Ռեգրեսիայի մոդելը կոչվում է ոչ գծային միայն և միայն այն դեպքում, երբ մոդելի պարամետրերը հանդես են գալիս ոչ գծային կախվածությամբ: Գործնականում ամենաշատը կիրառվում են հետևյալ ֆունկցիոնալ ձևերը.

- Լոգարիթմական գծային մոդել,

- Մասնակի լոգարիթմական մոդել,
- Հակադարձ մեծության մոդելներ:

7.1. Լոգարիթմական գծային մոդել

Ենթադրենք՝ որևէ տնտեսական երևույթ տեսականորեն բնութագրելու համար օգտագործվում է հետևյալ ֆունկցիոնալ կախվածության մոդելը.

$$Y_t = b_0 X_{1t}^{b_1} u^{e_t} \qquad (7.1)$$

որը, բնական հիմքով լոգարիթմելով, կարող է ներկայացվել հետևյալ տեսքով.

$$\ln Y_t = \ln b_0 + b_1 \ln X_{1t} + e_t \qquad (7.2)$$

կամ

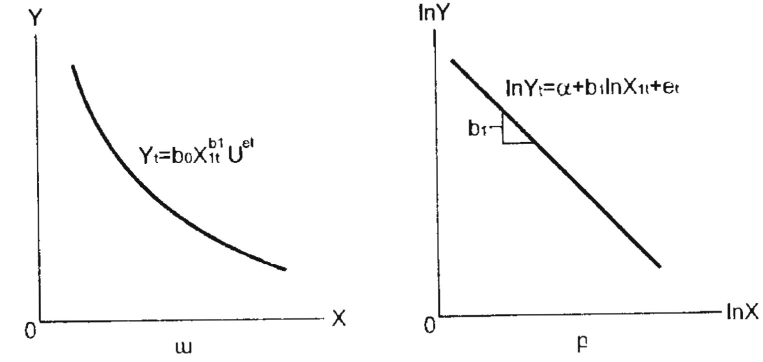
$$\ln Y_t = \alpha + b_1 \ln X_{1t} + e_t \qquad (7.3)$$

որտեղ $\alpha = \ln b_0$:

Այս մոդելը գծային է ըստ պարամետրերի, այսինքն, լոգարիթմելով փոփոխականները, ռեգրեսիայի գործակիցները կարելի է հաշվարկել OLS մեթոդով, քանի որ լոգարիթմելիս փոխվում են միայն փոփոխականների տվյալների արժեքները:

Այս մեթոդի կիրառման դեպքում հատկանշականն այն է, որ b_1 գործակիցը ցույց է տալիս Y փոփոխականի էլաստիկությունը X փոփոխականի նկատմամբ, այսինքն՝ Y-ի տոկոսային արտահայտությամբ փոփոխությունը X-ի տոկոսային փոփոխության նկատմամբ: Սակայն հարկ է նշել, որ մոդելը ենթադրում է կայուն էլաստիկություն X և Y փոփոխականների միջև: Ասենք նաև, որ

լոգարիթմական մոդելում ազատ անդամը ձեռք է բերում երկրորդական նշանակություն:



Գրաֆիկ 7.1. *ա) իրական ֆունկցիա*
բ) ֆունկցիայի գծային ռեգրեսիայի մոդելի տեսքով ներկայացում

7.2. Մասնակի լոգարիթմական մոդել

Որպես կանոն, տնտեսագետներին հետաքրքրող ամենատական խնդիրներից է այս կամ այն ցուցանիշի աճի տեմպի որոշումը: Այդպիսի մոդելը կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով.

$$Y_t = Y_0(1+r)^t \qquad (7.4)$$

որտեղ r-ը t-ժամանակում Y-ի աճն է: Լոգարիթմելով երկու կողմից (7.4) հավասարությունը, մոդելը կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով.

$$\ln Y_t = \ln Y_0 + t\ln(1+r) + e_t \qquad (7.5)$$

որտեղ կատարելով $b_0 = \ln Y_0$ և $b_t = \ln(1+r)$ տեղադրումները՝ արդյունքում կունենանք.

$$\ln Y_t = b_0 + b_1 t + e_t \qquad (7.6)$$

Նկատի ունենանք, որ այս մոդելը նման է յուրաքանչյուր այլ գծային մոդելի, այն առանձնահատկությամբ, որ կախյալ փոփոխականը ունի լոգարիթմական ձև, իսկ t փոփոխականը ցույց է տալիս ժամանակը և ընդունում է 1,2,3....n արժեքներ: Այս տիպի մոդելները կոչվում են մասնակի լոգարիթմական մոդելներ, քանի որ միայն մեկ փոփոխական է հանդես գալիս լոգարիթմական փոխակերպման տեսքով: Այս մոդելի ռեգրեսիայի գործակիցը իրենից ներկայացնում է t կայուն կամ հարաբերական փոփոխությունը՝ Y_t ժամանակի փոփոխությանը համապատասխան: Այսինքն՝ b_1 ռեգրեսիայի գործակիցը Y_t փոփոխականի հարաբերական փոփոխության և t ժամանակի փոփոխության քանակն է:

7.3. Հակադարձ մեծության մոդելներ

Ներքոնշյալ տիպի մոդելները կոչվում են հակադարձ մեծության մոդելներ.

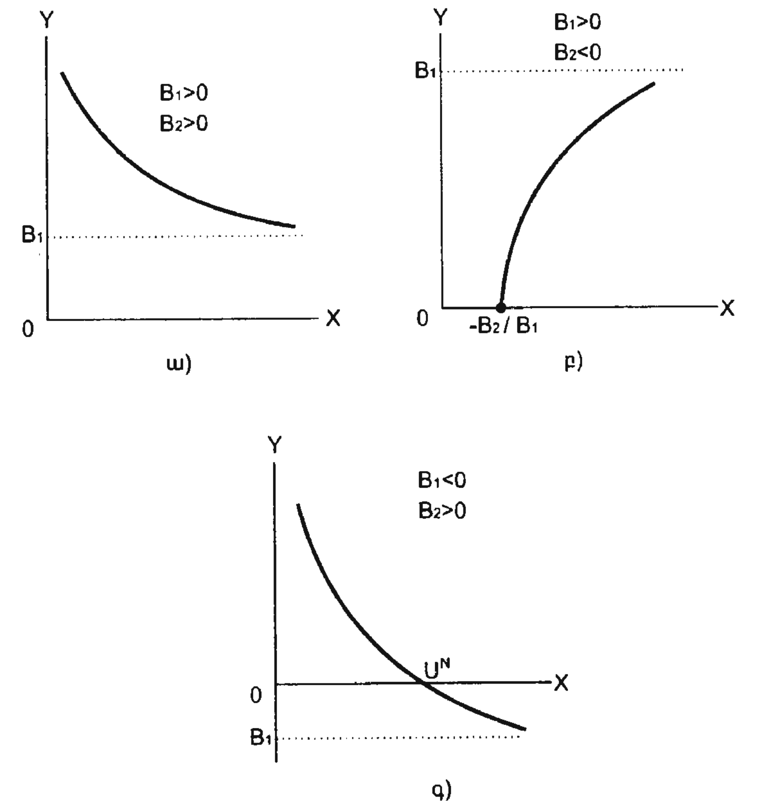
$$Y_t = B_1 + B_2\left(\frac{1}{X_{1t}}\right) + e_t \qquad (7.7)$$

Այս մոդելները գծային են ըստ գործակիցների, չնայած ըստ անկախ փոփոխականների՝ գծային չեն: (7.7) տիպի հակադարձ մեծության մոդելի առանձնահատկություններից կարելի է նշել

այն, որ անկախ փոփոխականի աճը՝ $B_2\left(\frac{1}{X_t}\right)$, մոտեցնում է 0-ի, իսկ կախյալ փոփոխականը ձգտում է B_1-ի:

Տնտեսագիտության մեջ, որպես հակադարձ մեծության մոդելի օրինակ, կարելի է ներկայացնել Ֆիլիպսի կորը:

Գրաֆիկորեն հակադարձ մեծության մոդելները կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով.



Գրաֆիկ 7.2. *Հակադարձ մեծության մոդելներ*

Ամփոփում

Ներկայացվեցին բազմակի ռեգրեսիայի մոդելի տարբեր ֆունկցիոնալ ձևեր, դրանց առանձնահատկություններն ու կիրառման գործնական ոլորտները: Ֆունկցիոնալ ձևերի դասակարգումը համառոտ կարելի է ներկայացնել հետևյալ աղյուսակի տեսքով:

Մոդելի տեսակը	Ֆունկցիոնալ ձևը	Էլաստիկությունը
Գծային	$Y = b_0 + b_1X$	$b_1\left(\frac{X}{Y}\right)$
Լոգարիթմական գծային	$\ln Y = b_0 + b_1 \ln X$	b_1
Մասնակի լոգարիթմական	$\ln Y = b_0 + b_1X$ $Y = b_0 + b_1 \ln X$	$b_1(X)$ $b_1\left(\frac{1}{Y}\right)$
Հակադարձ մեծության	$Y = b_0 + b_1\left(\frac{1}{X}\right)$	$-b_1\left(\frac{1}{XY}\right)$

ՀԱՐՑԵՐ ԵՎ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

Հարցեր

1. Սահմանեք բազմակի ռեգրեսիա հասկացությունը. ինչով է այն տարբերվում պարզ ռեգրեսիայից:
2. Նշեք t տեստի օգտագործման առանձնահատկությունները բազմակի ռեգրեսիայում:

3. Նշեք F և t տեստերի օգտագործման առանձնահատկությունները բազմակի ռեգրեսիայում
4. Բացատրեք R^2 և R^2 հարմարեցվածի տարբերությունները և օգտագործման առանձնահատկությունները:

Խնդիրներ

Խնդիր 1

Կատարելով վերլուծություն՝ ստացվել են հետևյալ հիմնական տվյալները

The regression equation is
Վերջնական սպառում = 87183 + 3.71 Մասնավոր ներդրումներ + 4.16 զուտ եկամուտ

Predictor	Coef	SE Coef	T	P
Ազատ անդամ	87183	15546	5.61	0.000
Մասնավոր ներդ.	3.7138	0.4763	7.80	0.000
Զուտ եկամուտ	4.160	1.884	2.21	0.037

S = 38428 R-Sq = 81.9% R-Sq(adj) = 80.5%

Analysis of Variance

Source	DF	SS	MS	F	P
Regression	2	1.67313E+11	83656437058	56.65	0.000
Residual Error	25	36917602990	1476704120		
Total	27	2.04230E+11			

Durbin-Watson statistic = 1.38

ա) գնահատեք մոդելի նշանակալիությունը,
բ) գնահատեք անկախ փոփոխականների նշանակալիությունը,
գ) մեկնաբանեք անկախ փոփոխականների ազդեցությունը կախյալ փոփոխականի վրա:

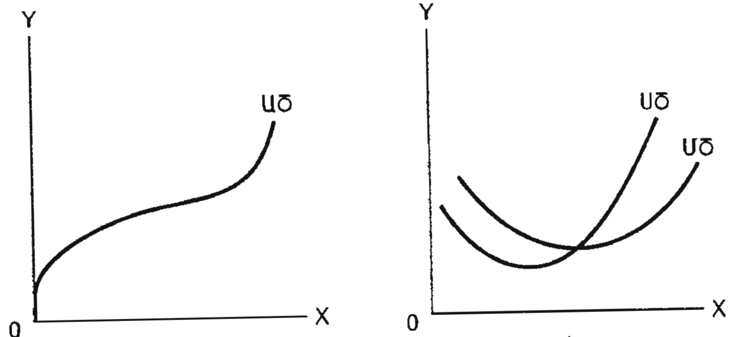
Խնդիր 2

Կազմեք տնտեսական վերլուծության ռեգրեսիայի մոդել՝ օգտագործելով աղյուսակի տվյալները: Մեկնաբանեք ռեգրեսիայի գործակիցների սպասվող նշանները:

	Անվանական ՀՆԱ, մլն դրամ	Վերջնական սպառման ծախսեր, մլն դրամ	Համախառն կուտակում, մլն դրամ	Մասնավոր ներդրումներ, մլն դրամ
1996/1	82490.5	114983.1	9926.0	3868.0
1996/2	133606.4	155611.8	24975.4	19045.4
1996/3	219061.0	236645.9	36042.9	26932.9
1996/4	226051.1	231025.7	61338.3	55641.3
1997/1	93334.8	142488.7	14744.4	10000.4
1997/2	159224.0	202142.4	24639.3	18555.3
1997/3	266218.9	281733.5	48299.1	40897.1
1997/4	285557.9	296494.1	65667.8	55957.8
1998/1	124683.7	172961.6	16321.6	12029.6
1998/2	198020.6	244636.5	28629.9	22405.9
1998/3	308304.3	309968.0	58811.6	42560.6
1998/4	324376.2	334344.9	79061.4	59404.4
1999/1	130215.9	166121.8	19585.6	11510.6
1999/2	216913.3	229707.3	43363.2	29697.2
1999/3	325719.0	329640.2	59312.3	44224.3
1999/4	314595.9	343686.3	58957.7	50775.7
2000/1	130015.8	174036.0	21787.6	17886.4
2000/2	217449.7	241640.4	42211.5	34478.8
2000/3	329062.3	337411.9	60606.2	47688.6
2000/4	354810.5	370406.9	67673.1	51350.9
2001/1	150636.9	183700.0	21387.2	15822.0
2001/2	234397.5	261556.8	43659.4	34356.0
2001/3	387696.0	383487.4	75116.6	63050.7
2001/4	402756.7	404630.9	78852.5	64947.5

Խնդիր 3

Համեմատեք հետևյալ գրաֆիկները.



ա) բ)

ա) որոշեք ամբողջական ծախսերի ֆունկցիոնալ ձևը,
բ) որոշեք սահմանային և միջին ծախսերի ֆունկցիոնալ ձևերը:

Խնդիր 4

Ինչպիսի ֆունկցիոնալ ձև է անհրաժեշտ ընտրել հետևյալ կախվածությունը բնութագրելու համար.

ա) $Y = K^{\alpha}(AL)^{1-\alpha}$

բ) $Y = c_1^{\frac{1}{2}} + c_2^{\frac{1}{2}}$

Խնդիր 5

Գնահատեք մոդելը և որոշեք ստորև բերված օրինակի կախյալ փոփոխականի էլաստիկությունը: Բացատրեք մոդելի իմաստը.

Ln*(Շինարարության ծավալը տնտեսությունում)* = 1.64 + 0.0175 ժամանակ

Predictor	Coef	SE Coef	T	P
Ազատ անդամ	1.6367	0.1321	12.39	0.000
ժամանակ	0.017492	0.007207	2.43	0.022

S = 0.3589 R-Sq = 16.9% R-Sq(adj) = 14.0%

Analysis of Variance

Source	DF	SS	MS	F	P
Regression	1	0.7588	0.7588	5.89	0.022
Residual Error	29	3.7357	0.1288		
Total	30	4.4945			

ՀԱՎԵԼՎԱԾ I

ՄԱՏՐԻՑԱՅԻՆ ՀԱՆՐԱՀԱՇԻՎ

1.1. Գործողություններ մատրիցների հետ

Սահմանում. Թվերից կազմված կամայական ուղղանկյունաձև աղյուսակը, որի տողերի թիվը հավասար է n-ի, իսկ սյուների թիվը՝ m-ի անվանում են n x m – չափանի *մատրից.*

Սովորաբար մատրիցները նշանակում են լատինական այբուբենի մեծատառերով, օրինակ՝

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots\cdots a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} \cdots\cdots a_{2m} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots\cdots a_{nm} \end{pmatrix} \quad \text{կամ} \quad A = (a_{ij})_{i=\overline{1,n}\ ,\ j=\overline{1,m}}:$$

Սահմանում. A և B մատրիցները հավասար են, եթե համընկնում են դրանց չափողականությունները, և հավասար են մատրիցները կազմող համապատասխան թվերը (տարրերը):

Սահմանում. Եթե $A = (a_{ij})$ և $B = (b_{ij})$ մատրիցներն ունեն նույն n x m չափողականությունը, ապա դրանց գումար (տարբերություն) կոչվում է այն n x m չափողականությունը ունեցող $A + B = C=(c_{ij})$ մատրիցը, որի c_{ij} տարրը հավասար է a_{ij} և b_{ij} տարրերի գումարին (տարբերությանը); $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$:

Օրինակ.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\pm b_{11} & a_{12}\pm b_{12} & a_{13}\pm b_{13} \\ a_{21}\pm b_{21} & a_{22}\pm b_{22} & a_{23}\pm b_{23} \end{pmatrix}$$

Սահմանում. n x m չափողականությամբ $A=(a_{ij})$ մատրիցի և α թվի արտադրյալ կոչվում է այն n x m չափողականությամբ մատրիցը $\alpha A = C = (c_{ij})$, որի համար՝

$C_{ij} = \alpha a_{ij}$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$:

Օրինակ.

$$\alpha\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\cdot a_{11} & \alpha\cdot a_{12} & \alpha\cdot a_{13} \\ \alpha\cdot a_{21} & \alpha\cdot a_{22} & \alpha\cdot a_{23} \end{pmatrix}:$$

Սահմանում. n x m չափողականությամբ $A=(a_{ij})$ մատրիցի շրջված մատրից կոչվում է այն m x n չափողականությամբ $A'=(a'_{ij})$ մատրիցը, որի համար $a'_{ij}=a_{ji}$:

Օրինակ. $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ մատրիցի շրջված մատրիցը կլինի՝

$A'=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ մատրիցը:

Սահմանում. Եթե $A=(a_{ij})$ և $B=(b_{ij})$ մատրիցները համապատասխանաբար ունեն n x m և m x k չափողականություններ, ապա A և B մատրիցների արտադրյալ անվանում են n x k չափողականություն ունեցող այն $AB = C = (c_{ij})$ մատրիցը, որի համար՝

$$c_{ij}=\sum_{s=1}^{n} a_{is}\cdot b_{sj}, \quad i=\overline{1,n} \quad j=\overline{1,k}:$$

Օրինակ

$$AB=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot 0+0\cdot 0 & 1\cdot 2+0\cdot 0 & 1\cdot 3+0\cdot 1 \\ 0\cdot 1+0\cdot 0 & 0\cdot 2+0\cdot 0 & 0\cdot 3+0\cdot 1 \\ -1\cdot 1+2\cdot 0 & -1\cdot 2+2\cdot 0 & -1\cdot 3+2\cdot 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}:$$

Սահմանում. Եթե մատրիցի տողերի թիվը հավասար է սյուների թվին, ապա մատրիցն անվանում են քառակուսային մատրից:

Օրինակ.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots\cdots a_{nn} \end{pmatrix}$$

մատրիցը քառակուսային է n x n չափողականությամբ:

Սահմանում. n x n չափանի քառակուսային մատրիցի $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ տարրերի համախմբությունն անվանում են մատրիցի գլխավոր անկյունագիծ:

Սահմանում. Քառակուսային մատրիցը կոչվում է անկյունագծային, եթե դրա գլխավոր անկյունագծին չպատկանող տարրերը հավասար են զրոյի:

Օրինակ. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$:

Սահմանում. Անկյունագծային մատրիցը, որի գլխավոր անկյունագծին պատկանող տարրերը հավասար են մեկի, կոչվում է միավոր մատրից:

Միավոր մատրիցը սովորաբար նշանակում են I կամ E:

Օրինակ.

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ մատրիցը 3 x 3 չափանի միավոր մատրից է:

Սահմանում. Զրոյական մատրից կոչվում է այն *մատրիցը*, որի բոլոր տարրերը հավասար են զրոյի:

Թվարկենք մատրիցների գործողությունների հետ կապված հիմնական հատկությունները՝

1. $A + B = B + A$
2. $(A+B)+C = A+(B+C)$
3. $\alpha(A+B)= \alpha A+\alpha B$
4. $A+0=A$
5. $(A\pm B)=A'+B'$
6. $(A')'=A$
7. $AI=IA=A$
8. $A(B+C)= AB+AC$
9. $(A+B)C = AC+BC$
10. $A\cdot(BC) =(AB)\cdot C$
11. $(AB)'= B' A$, $(ABC)'= C'\cdot B'\cdot A'$
12. $A0 = 0$:

Դիտողություն. Ընդհանրապես, մատրիցների արտադրյալը փոխատեղման հատկությամբ օժտված չէ՝ $AB \neq BA$:

1.2. Մատրիցի հետքը և որոշիչը (դետերմինանտ)

Սահմանում. Քառակուսային մատրիցի հետք անվանում են գլխավոր անկյունագծի վրա գտնվող տարրերի գումարը՝

$tr(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$:

Մատրիցի հետքը բավարարում է հետևյալ հատկությունները՝

1) $tr (AB) = tr (BA)$,
2) $tr (I_n) = n$, որտեղ I_n-ը n x n - չափանի միավոր մատրից է,
3) $tr (\alpha A) = \alpha tr (A)$,
4) $tr(A') = tr (A)$,
5) $tr (A \pm B) = tr (A) \pm tr (B)$:

Սահմանում. n x n - չափանի A մատրիցի որոշիչ (դետերմինանտ) $|A|$, det(A) անվանում են A մատրիցից կախված այն թվային ֆունկցիան, որը բավարարում է հետևյալ հատկությունները՝

1. Եթե n = 1, ապա $|A| = a_{11}$:
2. Եթե n > 1, ապա $|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}|A_{ij}|$, որտեղ A_{ij} մատրիցը (n-1)x (n-1) -չափանի մատրից է, որը ստացվում է A մատրիցից i-րդ տողը և j-րդ սյունը ջնջելով:

A_{ij} մատրիցի որոշիչն անվանում են A մատրիցի n-1 կարգանի մինոր:

Օրինակ. եթե n = 2, ապա $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$,

եթե n = 3, ապա՝

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}:$$

Թվարկենք մատրիցի որոշիչի հետ կապված հիմնական հատկությունները՝

1. $|AB| = |A||B|$,
2. $|\Delta| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$, որտեղ Δ -ն n x n - չափանի անկյունագծային մատրից է,
3. $|I_n| = 1$,
4. $|\alpha A| = \alpha^n |A|$,
5. $|A'| = |A|$,
6. եթե A մատրիցի որևէ երկու տողի (սյան) տեղերը փոխենք, ապա ստացված մատրիցի որոշիչը հավասար կլինի $|A|$,
7. եթե մատրիցի որևէ տողին (սյանը) գումարենք մյուս տողերի (սյուների) գծային կոմբինացիան, ապա ստացված մատրիցը կունենա սկզբնական մատրիցի որոշիչին հավասար որոշիչ,
8. A մատրիցի որոշիչը հավասար է զրոյի այն և միայն այն դեպքում, երբ մատրիցի տողերը (սյուները) գծորեն կախյալ են:[1]

[1]. $a_1 = (a_{11}, \ldots a_{1n})$, $a_2 = (a_{21}, \ldots a_{2n})$,…. , $a_n = (a_{n1}, \ldots a_{nn})$ վեկտորները կոչվում են գծորեն կախյալ, եթե գոյություն ունի թվերի $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ համախմբություն, որտեղ այդ թվերից գոնե մեկը հավասար չէ զրոյի, այնպիսին, որ տեղի ունենա հետևյալ հավասարությունը $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n = 0$: Հակառակ դեպքում գծորեն անկախ է:

1.3. Մատրիցի ռանգ

Ենթադրենք՝ A մատրիցը n x m չափողականությամբ մատրից է: Սահմանենք A մատրիցի ռանգը երկու համարժեք սահմանումներով:

Սահմանում 1. A մատրիցի ռանգ կոչվում է դրա գծորեն անկախ տողերի (սյուների) մեծագույն թիվը:

Սահմանում 2. A մատրիցի ռանգ կոչվում է մեծագույն կարգ ունեցող ոչ զրոյական մինորի կարգը:

A մատրիցի ռանգը սովորաբար նշանակվում է հետևյալ ձևով՝ rank (A) կամ rang (A):

Մատրիցի ռանգը բավարարում է հետևյալ հատկությունները.

1. rank (A) ≤ min (n, m),
2. rank (AB) ≤ min (rank, rank B),
3. եթե B մատրիցը m x m կարգի է և rank (B) = m, ապա rank (AB) = rank (A),
4. եթե B մատրիցը n x n կարգի է և rank (B) = n, ապա rank (BA) = rank (A),
5. rank (A) = rank (AA′) = rank (A′A):

1.4. Հակադարձ մատրից

Ենթադրենք՝ A մատրիցը քառակուսային մատրից է՝ n x n չափողականությամբ:

Սահմանում. A մատրիցն անվանում են չվերասերված, եթե ունի հնարավոր մեծագույն ռանգ, այսինքն՝ rank (A) = n:

Սահմանում. A մատրիցի հակադարձ մատրից` $A^{-1}$, անվանում են այն մատրիցը, որի համար տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը` $AA^{-1} = A^{-1}A = I$:

Թեորեմ. Կամայական A չվերասերված քառակուսային մատրիցի համար գոյություն ունի A^{-1} հակադարձ մատրից, այն էլ միակը: Եթե հակադարձ մատրիցի տարրերը նշանակենք a^{ij}- ով, ապա`

$$a^{ij} = \frac{(-1)^{i+j}\left|A_{ji}\right|}{|A|}, \quad i=\overline{1,n}, \quad j=\overline{1,n}$$

որտեղ` $|A_{ij}|$- ն A մատրիցի մինորն է:

Օրինակ.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix},$$

եթե $a_{ii} \neq 0$, $i=\overline{1,n}$, ապա

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \cdots\cdots 0 \\ 0 & a_{22} \cdots\cdots 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 0 & 0 \cdots\cdots a_{nn} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11}^{-1} & 0 \cdots\cdots 0 \\ 0 & a_{22}^{-1} \cdots\cdots 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 0 & 0 \cdots\cdots a_{nn}^{-1} \end{pmatrix}:$$

Հակադարձ մատրիցի հատկություններն են`

1. $|A^{-1}| = |A|^{-1}$,
2. $(A^{-1})^{-1}=A$,
3. $(A^{-1})' = (A')^{-1}$,
4. Եթե գոյություն ունեն A^{-1} և B^{-1}, ապա $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$:

1.5. Մատրիցի սեփական արժեքներ և սեփական վեկտորներ

Ենթադրենք` A մատրիցը n x n կարգի քառակուսային մատրից է:

Սահմանում. Ոչ զրոյական n – չափանի a վեկտորն անվանում են A մատրիցի սեփական վեկտոր, իսկ λ-թիվը` a սեփական վեկտորին համապատասխանող մատրիցի սեփական արժեք, եթե տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը`

$$Aa = \lambda a: \qquad (I.1)$$

Սահմանումից հետևում է, որ սեփական վեկտորները որոշվում են հաստատուն արտադրիչի ճշտությամբ:

(I.1) հավասարությունը արտագրենք հետևյալ տեսքով`

$(A-\lambda I)\, a = 0$, որը a վեկտորի բաղադրիչների նկատմամբ համասեռ գծային հավասարումների համակարգ է: Հայտնի է, որ այդ համակարգն ունի ոչ զրոյական լուծում, եթե $|A-\lambda I| = 0$: $|A-\lambda I|$ որոշիչը λ-ի նկատմամբ n-րդ աստիճանի բազմանդամ է:

Սահմանում. $|A-\lambda I| = 0$ հավասարումն անվանում են բնութագրիչ հավասարում, որի արմատները A մատրիցի սեփական արժեքներն են:

Օրինակ. Ենթադրենք` $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$:

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(3-\lambda) - 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$$

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$:

Թեորեմ. A մատրիցի տարբեր սեփական արժեքներին համապատասխանում են գծորեն անկախ սեփական վեկտորներ:

Թեորեմ. Եթե A մատրիցի բնութագրիչ հավասարումն ունի n տարբեր իրական արմատներ, ապա A մատրիցը կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$A=C^{-1}\Delta C$,

որտեղ՝ Δ -ն անկյունագծային մատրից է, իսկ C-ն՝ չվերասերված մատրից:

1.6. Սիմետրիկ մատրիցներ

Սահմանում. A մատրիցը կոչվում է սիմետրիկ, եթե $A' = A$:

Օրինակ.

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 4 \\ -3 & 1 & 5 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}:$$

Թեորեմ. Եթե A-ն կամայական մատրից է, ապա $A'A$-ն սիմետրիկ մատրից է:

Թեորեմ. Սիմետրիկ մատրիցի սեփական վեկտորները՝ $\{a_i\}$, $i = \overline{1,n}$, կարելի է ընտրել այնպես, որպեսզի կազմեն օրթոնորմավորված համակարգ՝

$a'_i a_j = 0$, $a'_i a_i = 1$, $i \neq j$:

Ենթադրենք՝ B-ն n x n - չափանի մատրից է, որի սյուները A մատրիցի սեփական վեկտորներն են: B մատրիցի միջոցով կարելի է A մատրիցը բերել անկյունագծային տեսքի՝

$$\Delta = B^{-1}AB: \qquad (I.2)$$

Այստեղ Δ - անկյունագծային մատրիցի անկյունագիծը կազմում են A մատրիցի սեփական արժեքները:

Սահմանում. Մատրիցը կոչվում է օրթոգոնալ մատրից, եթե դրա սյուները (տողերը) կազմում են օրթոնորմավորված համակարգ:

Թեորեմ. Եթե B-ն օրթոգոնալ մատրից է, ապա

$B' = B^{-1}$:

Թեորեմ. Օրթոգոնալ մատրիցի որոշիչը հավասար է 1-ի կամ –1-ի:

Թեորեմ. A սիմետրիկ մատրիցը կարելի է բերել անկյունագծային տեսքի (I.2) հավասարության միջոցով.

$B'AB = \Delta$:

Վերջին թեորեմից հետևում է, որ A մատրիցը կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$$A = B\Delta B' = \sum_{S=1}^{n} \lambda_S a_S a'_S : \qquad (I.3)$$

Սահմանում. Սիմետրիկ n x n - չափանի A մատրիցը կոչվում է դրական (ոչ բացասական) որոշված, եթե կամայական n -չափանի ոչ զրոյական a վեկտորի համար ճիշտ է հետևյալ անհավասարությունը՝

$a'Aa>0$ (կամ $a'Aa \geq 0$):

Օրինակ. Կամայական A մատրիցի համար $A'A$ մատրիցը ոչ բացասական որոշված մատրից է: Քանի որ կամայական ոչ զրոյական a վեկտորի համար տեղի ունի.

$a' (A' A) a = (Aa)' (Aa) = y'y \geq 0$:

Այստեղ $y = Aa$, իսկ $y'y$ -ը y վեկտորի երկարության քառակուսին է, ուստի այն ոչ բացասական է:

Սահմանում: Ասում ենք՝ $A \geq 0$, եթե A-ն ոչ բացասական որոշված է, $A > 0$, եթե A-ն դրական որոշված է և $A \geq B$ ($A > B$), եթե (A-B) մատրիցը ոչ բացասական (դրական) որոշված է:

Թեորեմ. Եթե $A \ge B$, ապա $a_{ii} \ge b_{ii}$, $i = \overline{1,n}$, որտեղ a_{ii}-ն և b_{ii}-ն - համապատասխանաբար A և B մատրիցների գլխավոր անկյունագծի տարրերն են:

Թեորեմ. Եթե $A > B$ և $C > 0$, ապա $A + C > B$:

Թեորեմ. Եթե $A > B$, և երկու մատրիցներն էլ հակադարձելի են, ապա $B^{-1} > A^{-1}$:

Թեորեմ. Դրական (ոչ բացասական) որոշված մատրիցի սեփական արժեքները դրական (ոչ բացասական) են:

Ենթադրենք՝ A-ն ոչ բացասական որոշված սիմետրիկ մատրից է: Օգտվելով (I.3) հավասարությունից՝ ունենք, որ $A = B\Delta B'$: Հայտնի է, որ Δ-ի անկյունագծային տարրերը A-ի սեփական արժեքներն են, հետևաբար դրանք կլինեն ոչ բացասական: Սահմանենք A մատրիցի 1/2 աստիճան՝ հետևյալ ձևով.

$$A^{\frac{1}{2}} = B\Delta^{\frac{1}{2}}B',$$

որտեղ՝
$$\Delta^{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{\frac{1}{2}} & 0 \ldots\ldots\ldots\ldots 0 \\ 0 & \lambda_2^{\frac{1}{2}} \ldots\ldots\ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ 0 \ldots\ldots 0 \ldots\ldots & \lambda_n^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}:$$

Կարելի է ցույց տալ, որ $\left(A^{\frac{1}{2}}\right)^2 = A$:

1.7. Իդեմպոտենտ մատրիցներ

Սահմանում. M մատրիցը կոչվում է իդեմպոտենտ, եթե $M = M^2$:

Քանի որ մեզ ավելի շատ անհրաժեշտ են սիմետրիկ մատրիցները, ուստի այսուհետև կենթադրվի, որ M մատրիցը նաև սիմետրիկ է:

Ակնհայտ է, որ n x n չափողականությամբ զրոյական և միավոր մատրիցները իդեմպոտենտ մատրիցներ են: Դիտարկենք իդեմպոտենտ մատրիցի օրինակ, որը տարբեր է զրոյականից և միավորից:

Օրինակ. Նշանակենք S-ով n x 1 - չափանի վեկտոր-սյունը, որը կազմված է մեկերից $S = (1, 1, \ldots 1)$:

Դիտարկենք $M = I - \frac{1}{n}SS'$ մատրիցը: Ցույց տանք, որ այն իդեմպոտենտ մատրից է.

$$M^2 = \left(I - \frac{1}{n}SS'\right)\left(I - \frac{1}{n}SS'\right) = I - \frac{2}{n}SS' + \frac{1}{n^2}SS'SS' = I - \frac{1}{n}SS' = M$$

Կարելի է ցույց տալ, որ այն նաև սիմետրիկ մատրից է՝ $M' = M$:

Թեորեմ. Իդեմպոտենտ մատրիցի սեփական արժեքները 0 կամ 1 են:

Թեորեմ. Իդեմպոտենտ մատրիցի ռանգը հավասար է դրա հետքին:

ՀԱՎԵԼՎԱԾ II

Ա. Բազմակոլինեարություն

Բ. Հետերոսկեդաստիկություն

Գ. Ավտոկոռելյացիա

Ա. Բազմակոլինեարություն

Համաձայն Գաուս-Մարկովի թեորեմի՝ փոքրագույն քառակուսիների մեթոդով գնահատված գործակիցները բոլոր անշեղ գծային գործակիցների միջև ունեն նվազագույն դիսպերսիա, այսինքն՝ լավագույն գծային անշեղելի գործակիցներ են: Նշենք, որ բազմակոլինեարության առկայության դեպքում թեորեմի պայմանները խախտվում են:

Բազմակոլինեարությունը վկայում է անկախ փոփոխականների միջև լրիվ կոլինեարության առկայության մասին: Իրականում, բացատրող փոփոխականների միջև հազվադեպ է լրիվ կոլինեարություն հանդիպում, ավելի հաճախ փոփոխականների միջև ի հայտ է գալիս խիստ գծային կախվածություն:

Եթե մոդելում առկա է բազմակոլինեարություն, այսինքն՝ երկու անկախ փոփոխականները ունեն հստակ գծային կախվածություն, ապա դրանց դիսպերսիան, հետևաբար ստանդարտ սխալները, չափազանց մեծանում են: Արդյունքում՝ մոդելի գործակիցների գնահատված t-ի արժեքները նշանակալից չեն, և առաջարկված զրոյական վարկածը, ըստ որի՝ իրական գործակիցը հավասար է զրոյի, հաճախակի ընդունվում է:

Բազմակոլեհինեարության հետևանքով մոդելի դետերմինացիայի գործակիցը կարող է բավականաչափ մեծ լինել այն դեպքում, երբ գործակիցների t-ի վիճակագիրը լինի ոչ նշանակալից: Այստեղից կարող ենք եզրակացնել, որ բազմակոլինեարության առկայության մասին են վկայում դետերմինացիայի բարձր մակարդակը՝ համապատասխանաբար գնահատված t-ի փոքր արժեքներով: Նշենք նաև, որ բազմակոլինեարության առկայության ժամանակ մոդելի գործակիցները կարող են սխալ նշաններ ունենալ:

Բազմակոլինեարության առկայությունը ստուգելու նպատակով կարելի է յուրաքանչյուր X_t փոփոխականի համար կատարել ռեգրեսիա՝ ըստ մնացած X անկախ փոփոխականների, և գնահատել դետերմինացիայի գործակիցը՝ R^2-ը, կամ համապատասխան X_t-ի համար՝ R_t^2-ն: Նշենք, որ այս ռեգրեսիաներից յուրաքանչյուրը կոչվում է օժանդակ ռեգրեսիա: Համաձայն F բաշխման և R^2-ի փոխհարաբերությունների (տե՛ս գլուխ 6.2)՝

$$R_t = \frac{R_{x_1 \cdot x_2 \cdots x_k} / (k-2)}{\left(1 - R^2_{x_1 \cdot x_2 \cdots x_k}\right) / (n-k+1)}, \qquad (II.1)$$

որտեղ՝ n-ը ընտրանքի ծավալն է

k-ն՝ անկախ փոփոխականների քանակը:

Գնահատված R_t-ն ենթարկվում է k-2 և n-k+1 ազատության աստիճաններով F բաշխման: Եթե գնահատված F-ի արժեքը գերազանցում է F_t-ի կրիտիկական արժեքը, ապա X-երի միջև գոյություն ունի հստակ գծային կախվածություն, հակառակ դեպքում՝ X փոփոխականների միջև գծային կախվածություն գոյություն չունի:

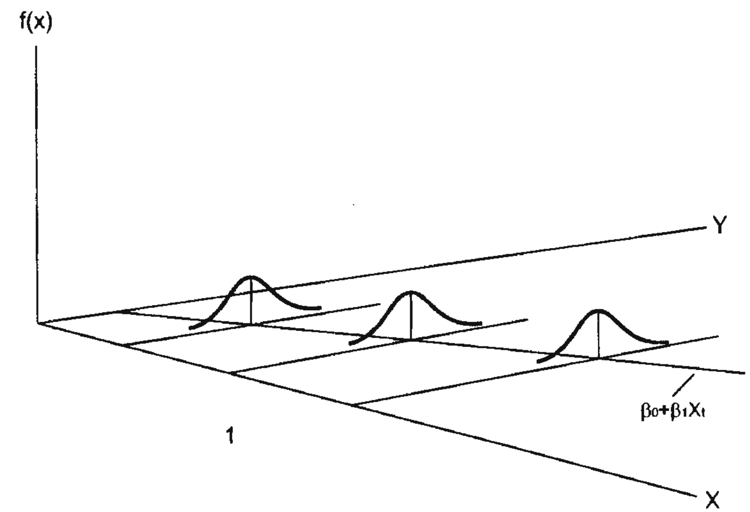
Նշենք նաև, որ բազմակոլինեարությունը կարելի է ստուգել «Կլեյնի նշանակալիության կարգի» օգնությամբ, ըստ որի, եթե յուրաքանչյուր օժանդակ ռեգրեսիայի դետերմինացիայի գործակիցը չի գերազանցում ընդհանուր կամ նախնական ռեգրեսիայի դետերմինացիայի գործակիցը, ապա ռեգրեսիայի մոդելը բազմակոլինեարության հիմնախնդիր չի պարունակում:

Բ.Հետերոսկեդաստիկություն

Ռեգրեսիայի գործակիցների հաշվարկման փոքրագույն քառակուսիների OLS մեթոդի հիմնական ենթադրություններից է մնացորդների՝ հավասար դիսպերսիայով տեղաբաշխումը: Այն է.

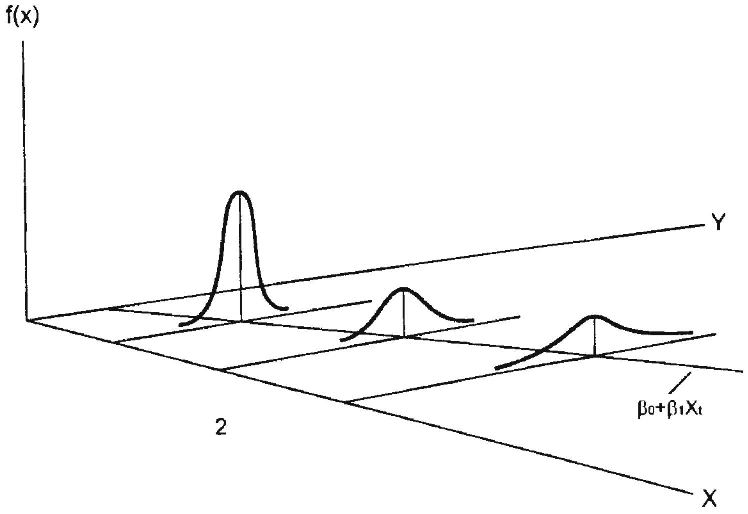
$$E(\varepsilon_t^2) = \sigma^2 \qquad t = 1,2,3,\ldots n$$

Երկու փոփոխականներով մոդելում, որտեղ այս ենթադրությունը պահպանվում է, մնացորդների կայուն դիսպերսիայով մոդելը գրաֆիկորեն կարելի է ներկայացնել հետևյալ կերպ.



Գրաֆիկ 1. *Մնացորդների հոմոսկեդաստիկ դիսպերսիա*

Այն երևույթը, երբ մնացորդների հավասար դիսպերսիայի ենթադրությունը չի պահպանվում, կոչվում է հետերոսկեդաստիկություն, որը կունենա գրաֆիկական հետևյալ պատկերը.



Գրաֆիկ 2. *Մնացորդների հետերոսկեդաստիկ դիսպերսիա*

Տնտեսագիտության տեսության մեջ հետերոսկեդաստիկ երևույթների համար կան բազմաթիվ նախապայմաններ, որոնք հիմնականում պայմանավորված են տվյալ մոդելի համար հիմք հանդիսացող տեսությամբ: Բացի այդ, անհավասար դիսպերսիայի համար հիմք կարող է հանդիսանալ, այսպես կոչված՝ փոփոխականի տվյալների բազմությունից առանձնացված տվյալների առկայությունը: Գործնականում երբեմն հանդիպում են դեպքեր, երբ փոփոխականի տվյալների բազմությունից որոշ տվյալներ ունենում են խիստ առանձնացված արժեք: Այս դեպքում տվյալ ցուցանիշը պարզապես կարելի է հեռացնել բազմությունից, եթե, իհարկե, տվյալների բազմության անդամների թիվը խիստ փոքր չէ:

Յուրաքանչյուր ռեգրեսիայի մոդելում հետերոսկեդաստիկության առկայության հետևանքները պատկերացնելու համար ենթադրենք՝ ունենք պարզ ռեգրեսիայի մոդել.

$$Y_i = b_0 + b_1X_{1i} + e_i \qquad (II.2)$$

Փոքրագույն քառակուսիների մեթոդով հաշվարկենք ռեգրեսիայի b_1 գործակիցը և դրա դիսպերսիան հետերոսկեդաստիկության պայմաններում՝ վեցերորդ գլխում ներկայացված մեթոդով:

$$b_1 = \frac{\sum x_t y_t}{\sum x_t^2} \qquad (II.3)$$

$$\mathrm{var}(b_1) = \frac{\sum x_t^2 \sigma_t^2}{(\sum x_t^2)^2} \qquad (II.4)$$

(II.4)-ը, անշուշտ, կայուն մնացորդների դեպքում, տարբերվում է b_1 դիսպերսիայից.

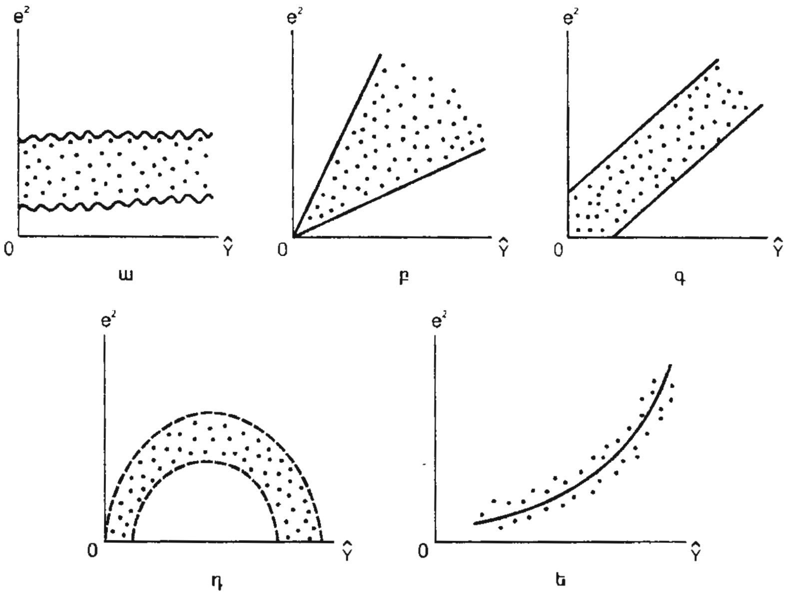
Իհարկե, եթե ենթադրենք՝ $\sigma_t^2 = S_e^2$, ապա այս բանաձևերը կլինեին նույնը: Ամեն դեպքում պետք է հիշել, որ անգամ հետերոսկեդաստիկության պայմաններում b_1-ը անշեղելի է:

Հետերոսկեդաստիկության առկայության դեպքում ռեգրեսիայի մոդելի գործակիցների, ինչպես նաև ամբողջությամբ մոդելի t և F տեստերը ճիշտ արդյունքի չեն հանգեցնի:

Այսինքն՝ ռեգրեսիայի գործակիցների հաշվարկման միակ միջոցը WLS և GLS մեթոդներն են, որոնք այս գրքի շրջանակներում չեն ներկայացվում:

Հետերոսկեդաստիկության հայտնաբերումը

Հետերոսկեդաստիկության հայտնաբերման ամենահեշտ և պարզ մեթոդը, իհարկե, գրաֆիկական մոտեցումն է: Դիտարկենք հետևյալ գրաֆիկները:



Գրաֆիկ 3. *Մոդելի մնացորդի կախվածությունը կախյալ փոփոխականի հաշվարկված արժեքից*

Այս գրաֆիկները կառուցված են տեսականորեն. ռեգրեսիայի մնացորդների քառակուսիների (e_t^2) և կախյալ փոփոխականի հաշվարկված ($\hat{Y}_t$) արժեքներով:

Գրաֆիկ 3 ա) -ն ցույց է տալիս, որ փոփոխականների բազմությունը չունի բաշխման որևէ հետագիծ, երբ բ) - ե) գրաֆիկներից յուրաքանչյուրից հետևում է որևէ հետագիծ: Պարզ է, որ որևէ

հետագծի կարող են հետևել միայն անհավասար դիսպերսիա ունեցող տվյալները: Հետևաբար, եթե ռեգրեսիայի քառակուսիները, կախված կախյալ փոփոխականի հաշվարկված արժեքներից, ունեն հետագիծ՝ ինչպես ցույց է տրված բ) - ե) գրաֆիկներում, ապա պետք է եզրակացնել, որ մոդելն ունի հետերոսկեդաստիկության խնդիր:

Անշուշտ, կան հետերոսկեդաստիկության հայտնաբերման մի շարք մեթոդներ, որոնցից է Պարկի տեստը: Այս տեստով ամրապնդվում են գրաֆիկական մեթոդներով կատարված եզրակացությունները, հատկապես այն դեպքում, երբ գրաֆիկից դժվար է հետերոսկեդաստիկության առկայության մասին եզրակացություն կատարել: Տեստը ենթադրում է ֆունկցիոնալ կախվածություն σ_t^2-ի և X_t-ի միջև: Պարկը առաջարկում է.

$$\sigma_t^2 = \sigma^2 X_{ti}^{\beta} e^{vt} \qquad (II.5)$$

կամ

$$\ln\sigma_t^2 = \ln\sigma^2 + \beta\ln X_t + v_t \qquad (II.6)$$

որտեղ v_t-ն ստոխաստիկ դիսպերսիան է: Քանի որ σ^2-ն սովորաբար հայտնի չի լինում, Պարկը առաջարկում է օգտագործել ռեգրեսիայի մոդելի մնացորդների քառակուսիները՝ որպես մոտավոր արժեք.

$$\ln e_{ti}^2 = \ln\sigma^2 + \beta\ln X_t + v_t = \alpha + \beta\ln X_t + v_t \qquad (II.7)$$

Եթե գնահատված β-ն վիճակագրորեն նշանակալից է, ապա մոդելը պարունակում է հետերոսկեդաստիկություն: Այսպիսով Պարկի տեստը ընթանում է երկու փուլով. նախ հաշվի չառնելով հետերոսկեդաստիկության առկայությունը, հաշվարկվում են մնացորդների քառակուսիները, ապա, (II.7) մոդելի միջոցով, հաշվարկվում են ռեգրեսիայի գործակիցները:

Գ. Ավտոկոռելյացիա

Համաձայն գծային ռեգրեսիայի դասական մոդելի ենթադրությունների՝ համախմբության ռեգրեսիայի ֆունկցիայի սխալների միջև գոյություն չունի հերթական կոռելյացիա կամ ավտոկոռելյացիա, այսինքն՝ տվյալ դիտարկումների սխալների միջև չկա դրական կամ բացասական կոռելյացիա: Հետևաբար, տվյալ դիտարկումների սխալի վրա այլ դիտարկումների սխալները ոչ մի ազդեցություն չունեն:

Ավտոկոռելյացիան դիտարկումների միջև եղած կոռելյացիայի կապն է ժամանակի ընթացքում կամ տարածության մեջ: Այն բնորոշ է ինչպես ժամանակային շարքերին, այնպես էլ՝ տարածքային թվերին:

Ենթադրենք՝ ռեգրեսիայի սխալների միջև գոյություն ունի կախվածություն և այդ կախվածությունը կարելի է ներկայացնել որպես՝

$$\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + \text{э}_t, \qquad -1 < \rho < 1 \qquad (II.8)$$

Տվյալ դեպքում ρ-ն ավտոկովարիացիայի գործակիցն է,

э_t-ն՝ ստոխաստիկ սխալն է:

(II.8)-ն հայտնի է որպես առաջին կարգի ավտոռեգրեսիայի համակարգ՝ AR(1):

Պետք է նշել, որ AR(1)-ի դեպքում փոքրագույն քառակուսիների մեթոդով գնահատված գործակիցները կորցնում են լավագույն գծային անշեղելի գործակից լինելու հատկությունը:

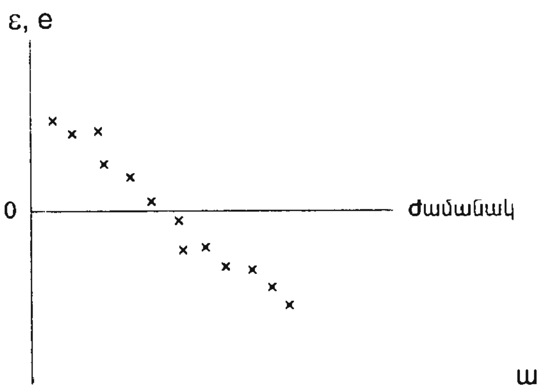
Հետևաբար, կարող ենք եզրակացնել, որ ավտոկոռելյացիան հիմնախնդիր է էկոնոմետրիկայի տեսանկյունից, քանի որ, երբ սխալների միջև կոռելյացիայի կապ է դիտարկվում, ռեգրեսիայի մոդելի գործակիցները կորցնում են լավագույն գծային անշեղելի գործակից լինելու հատկությունը: Դրանք դարձյալ անշեղելի են, բայց արդեն չունեն նվազագույն դիսպերսիա, այսինքն՝ արդյունավետ չեն, որի հետևանքով փոքրագույն քառակուսիների մեթոդով գնահատված գործակիցների դիսպերսիան և համապատասխան ստանդարտ սխալը նշանակալիորեն կգիջեն գործակիցների իրական արդյունքները, և t վիճակագիրը բավականաչափ մեծ կլինի իրական արժեքից: Այսինքն՝ գնահատված գործակիցները կարող են նշանակալիորեն տարբերվել իրական գործակիցներից: Ավտոկոռելյացիայի առկայության դեպքում չենք կարող կառուցել վստահելի(ընդունման) տիրույթ և ստուգել վարկածը՝ հիմնվելով t և F տեստերի վրա: Հետևաբար, մոդելի հուսալիության համար անհրաժեշտ է, ռեգրեսիայի արդյունքները գնահատելուց հետո, անպայման ստուգել ավտոկոռելյացիայի առկայությունը:

Գոյություն ունեն ավտոկոռելյացիայի հայտնաբերման մի շարք տեստեր: Ներկայացնենք դրանցից պարզագույնները:

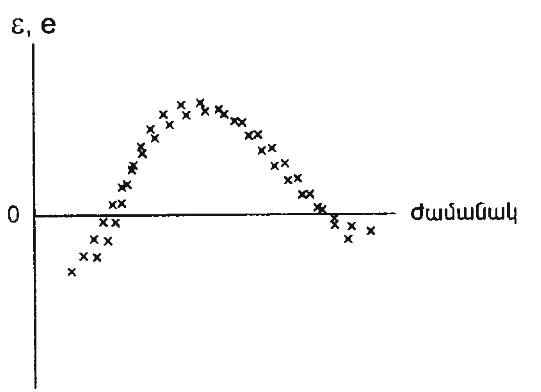
1. Գրաֆիկական մեթոդ

Ավտոկոռելյացիան հնարավոր է հեշտությամբ հայտնաբերել գրաֆիկի օգնությամբ՝ տեղադրելով գնահատված մնացորդները ըստ ժամանակի: Այդ դեպքում կնկատվի ավտոկոռելյացիայի առկայությունը և բնույթը:

Եթե մնացորդները ենթարկվում են որոշակի համակարգված բաշխման (տես գրաֆիկ 4), ապա մոդելը կարող է ավտոկոռելյացիայի խնդիր պարունակել: Այսպես օրինակ, առաջին դեպքում մնացորդների միջև նկատվում է բացասական կախվածություն (տես գրաֆիկ 4 ա), իսկ երկրորդ դեպքում կախվածությունը սկզբում դրական է, հետո վերածվում է բացասականի (տե՛ս գրաֆիկ 4 բ): Եվ քանի որ մնացորդները պատահական բնույթ չունեն, ապա մոդելը կարող է ունենալ ավտոկոռելյացիայի խնդիր: Հակառակ դեպքում, երբ մնացորդների բաշխումը պատահական բնույթ ունի (տես գլուխ 4, գրաֆիկ 4.7բ), մոդելը չի պարունակում ավտոկոռելյացիա:



ա



բ

Գրաֆիկ 4. *Ավտոկոռելյացիայի օրինակներ:*

2. Հաջորդականության (Run) տեստ

Գրաֆիկական մեթոդից բացի, ավտոկոռելյացիայի առկայությունը կարելի է ստուգել *Run* տեստի օգնությամբ: Հաջորդականության տեստի միջոցով ստուգենք ավտոկոռելյացիայի առկայությունը գլխում 5-ում ներկայացված օրինակի համար: Աղյուսակ II.1 - ում ներկայացված են ռեգրեսիայի գնահատված մնացորդները, որի վերջին սյունակում տրված են այդ մնացորդների նշանները: Այժմ ներկայացնենք ռեգրեսիայի մնացորդների նշանները հետևյալ ձևով՝

(+) (-) (+) (- - - -) (+) (-) (+ + +) (-)(+) (-) (+) (- - - - - - -) (+)

Եթե հաշվենք նշանների հաջորդական փոփոխությունները, կտեսնենք, որ մեր օրինակում կա 12 հաջորդականություն: Նշանակենք՝ N- ռեգրեսիայի ծավալը,

N_1-դրական մնացորդները,

N_2 -բացասական մնացորդները,

k- հաջորդականության քանակը:

Աղյուսակ II.1. *Գլուխ 4-ում ներկայացված օրինակի՝ ռեգրեսիայի գնահատված մնացորդները*

e_t	e_{t-1}	$D=e_t-e_{t-1}$	D^2	e_t^2	e_t-նշ.
4867.69	-			23694405.94	+
-1573.69	4867.69	-6441.38	41491376.3	2476500.216	-
102.78	-1573.69	1676.47	2810551.661	10563.7284	+
-681.01	102.78	-783.79	614326.7641	463774.6201	-
-1187.52	-681.01	-506.51	256552.3801	1410203.75	-
-527.155	-1187.52	660.37	436088.5369	277887.1225	-
-292.235	-527.155	234.92	55187.4064	85398.3729	-
1589.91	-292.235	1882.14	3542450.98	2527813.808	+
-546.14	1589.91	-2136.05	4562709.603	298268.8996	-

e_t	e_{t-1}	$D=e_t-e_{t-1}$	D^2	e_t^2	e_t-նշ.
1023.30	-546.14	1569.44	2463141.914	1047142.89	+
315.38	1023.30	-707.92	501150.7264	99464.5444	+
4801.96	315.38	4486.58	20129400.1	2305889.84	+
-1562.97	4801.96	-6364.93	40512333.9	2442875.221	-
7141.10	-1562.97	8704.07	75760834.56	50995309.21	+
-1826.53	7141.10	-8967.63	80418387.82	3336211.841	-
1100.45	-1826.53	2926.98	8567211.92	1210990.203	+
-1620.41	1100.45	-2720.86	7403079.14	2625728.568	-
-1071.88	-1620.41	548.53	300885.1609	1148926.734	-
-4680.11	-1071.88	-3608.23	13019323.73	21903429.61	-
-1065.66	-4680.11	3614.45	13064248.8	1135631.236	-
-1381.20	-1065.66	-315.54	99565.4916	1907713.44	-
-375.39	-1381.20	1005.82	1011673.872	140910.1444	-
-6783.56	-375.39	-6408.17	41064642.75	46016550.6	-
4232.87	-6783.56	11016.41	121361289.3	17917103.78	+
0			479446412.8	206231624.3	

Այժմ *Run* տեստի աղյուսակից (տե՛ս հավելված III) գտնենք դրա կրիտիկական արժեքը և ստուգենք զրոյական վարկածը, համաձայն որի՝ ռեգրեսիայի սխալներն անկախ են: Վերը նշված օրինակի համար՝ $N=24$, $N_1=9$, $N_2=15$, $k=12$: *Run* տեստի աղյուսակից կգտնենք, որ դրա կրիտիկական արժեքները հավասար են 7-ի և 18-ի: Եթե իրական հաջորդականության քանակը գտնվում է այդ միջակայքում՝ [7,18] , ապա զրոյական վարկածը ընդունվում է: Հակառակ դեպքում, երբ k-ն փոքր (մեծ) է կամ հավասար կրիտիկական արժեքին, վարկածը մերժվում է, այսինքն՝ ռեգրեսիայի մոդելը ավտոկոռելյացիայի խնդիր է պարունակում: Քանի որ վերը նշված օրինակում՝ $k=12$ և գտնվում է [7,18] միջակայքում, ապա ռեգրեսիայի մոդելը ավտոկոռելյացիայի խնդիր չի պարունակում:

3. Դարբին-Վաթսոնի (DW) տեստ

Դարբին-Վաթսոնի *d* տեստը ավտոկոռելյացիայի որոշման ամենատարածված տեստն է, որը բնութագրվում է՝

$$d=\frac{\sum_{t=2}^{t=n}(e_t-e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{t=n}e_t^2}: \tag{II.2}$$

Տվյալ տեստի համար ռեգրեսիայի մոդելը պետք է կայուն մեծություն ունենա: Տեստի առավելությունն այն է, որ հիմնված է գնահատված մնացորդների կիրառման վրա: Տվյալ առավելության շնորհիվ հնարավոր է ռեգրեսիայի վերլուծության ժամանակ, մյուս գործակիցների հետ մեկտեղ, ներկայացնել DW-ի *d* արժեքը:

DW–ի միջոցով ավտոկոռելյացիայի առկայությունը ստուգելու համար նախ բացենք (II.2) բանաձևի չակերտները.

$$d=\frac{\sum_{t=2}^{t=n}e_t^2+\sum_{t=2}^{t=n}e_{t-1}^2-2\sum_{t=2}^{t=n}e_te_{t-1}}{\sum_{t=1}^{t=n}e_t^2}=$$

$$=\frac{\sum_{t=2}^{t=n}e_t^2}{\sum_{t=1}^{t=n}e_t^2}+\frac{\sum_{t=2}^{t=n}e_{t-1}^2}{\sum_{t=1}^{t=n}e_t^2}-2\frac{\sum_{t=2}^{t=n}e_te_{t-1}}{\sum_{t=1}^{t=n}e_t^2}\approx 1+1-2\rho \tag{II.3}$$

Առաջին երկու գործակիցները կարող ենք մոտավորեցնել մեկի, քանի որ դրանք տարբերվում են դիտարկման մեկ սխալի առկայությամբ, հետևաբար.

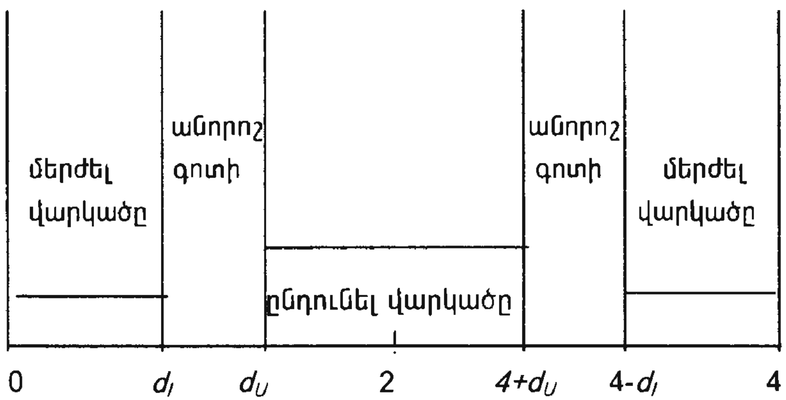
$d = 2(1-\rho)$:

Եթե գնահատված ρ-ի արժեքը հավասար է զրոյի և d-ն համապատասխանաբար հավասար է երկուսի, ապա մոդելը չունի ավտոկոռելյացիա: Եթե գնահատված ρ-ի արժեքը հավասար է մեկի, և $d \approx 0$, մոդելի սխալների միջև կա դրական կոռելյացիա: Եթե ρ = -1, $d \approx 4$, մոդելի սխալների միջև կա բացասական կոռելյացիա:

Նշենք, որ ի տարբերություն t, F կամ χ^2 տեստի, d տեստը չի առաջարկում կոնկրետ կրիտիկական արժեք, որի հիման վրա կարելի է մերժել կամ ընդունել վարկածը՝

H_0: չկա դրական կամ բացասական ավտոկոռելյացիա:

Դարբինը և Վաթսոնը առաջարկել են ստորին d_L և վերին d_U սահմաններ (սահմանները աղյուսակի ձևով ամփոփել են Դարբինը և Վաթսոնը, դրանք ներկայացված են հավելված III-ում) կամ կրիտիկական արժեքներ այնպես, որ եթե գնահատված d-ի արժեքը ընկնում է այդ կրիտիկական արժեքներից դուրս, ապա մոդելը կարող է պարունակել դրական կամ բացասական կոռելյացիա (տե՛ս պատկեր II.1):



Պատկեր II.1

Աղյուսակ II.1-ի տվյալներով՝ (II.1)-ի միջոցով հաշվարկված DW վիճակագիրը հավասար է 2.32.

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{n}(e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2} = \frac{479446412.8}{206231624.3} = 2.32$$

Տվյալ դեպքում DW աղյուսակից կգտնենք, որ մեկ փոփոխականով 24 դիտարկումների համար՝ d_L =1.273, d_U =1.446: Քանի որ 2.32-ը ընդունելի տիրույթում է, ապա զրոյական վարկածը, համաձայն որի մոդելում չկա դրական, բացասական ավտոկոռելյացիա, ընդունվում է, որը նշանակում է, որ մոդելը ավտոկոռելյացիայի խնդիր չի պարունակում:

ՀԱՎԵԼՎԱԾ III

ՎԻՃԱԿԱԳՐԱԿԱՆ ԱՂՅՈՒՍԱԿՆԵՐ

1. $\varphi(x)$ ֆունկցիայի արժեքները
2. $\Phi(x)$ ֆունկցիայի արժեքները
3. Ստյուդենտի t բաշխման կրիտիկական կետերը
4. χ^2 բաշխման կրիտիկական կետերը
5. Ֆիշերի F բաշխման կրիտիկական կետերը
6. Դարբին-Վաթսոնի (DW) *d* տեստի արժեքները
7. *Run* տեստի կրիտիկական արժեքները

Աղյուսակ 1. $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ ֆունկցիայի արժեքները

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.3989	0.3989	0.3989	0.3988	0.3986	0.3984	0.3982	0.3980	0.3977	0.3973
0.1	0.3970	0.3965	0.3961	0.3956	0.3951	0.3945	0.3939	0.3932	0.3925	0.3918
0.2	0.3910	0.3902	0.3894	0.3885	0.3876	0.3867	0.3857	0.3847	0.3836	0.3825
0.3	0.3814	0.3802	0.3790	0.3778	0.3765	0.3752	0.3739	0.3726	0.3712	0.3697
0.5	0.3521	0.3503	0.3485	0.3467	0.3448	0.3429	0.3410	0.3391	0.3372	0.3352
0.6	0.3332	0.3312	0.3292	0.3271	0.3251	0.3230	0.3209	0.3187	0.3166	0.3144
0.7	0.3123	0.3101	0.3079	0.3056	0.3034	0.3011	0.2989	0.2966	0.2943	0.2920
0.8	0.2897	0.2874	0.2850	0.2827	0.2803	0.2780	0.2756	0.2732	0.2709	0.2685
0.9	0.2661	0.2637	0.2613	0.2589	0.2565	0.2541	0.2516	0.2492	0.2468	0.2444
1.0	0.2420	0.2396	0.2371	0.2347	0.2323	0.2299	0.2275	0.2251	0.2227	0.2203
1.1	0.2179	0.2155	0.2131	0.2107	0.2083	0.2059	0.2036	0.2012	0.1989	0.1965
1.2	0.1942	0.1919	0.1895	0.1872	0.1849	0.1826	0.1804	0.1781	0.1758	0.1736
1.3	0.1714	0.1691	0.1669	0.1647	0.1626	0.1604	0.1582	0.1560	0.1539	0.1538
1.4	0.1497	0.1476	0.1456	0.1435	0.1415	0.1394	0.1374	0.1354	0.1334	0.1315
1.5	0.1295	0.1276	0.1257	0.1238	0.1219	0.1200	0.1182	0.1163	0.0114	0.1127
1.6	0.1109	0.1092	0.1074	0.1057	0.1040	0.1023	0.1006	0.0989	0.0973	0.0957
1.7	0.0940	0.0925	0.0909	0.0893	0.0878	0.0863	0.0848	0.0833	0.0818	0.0804
1.8	0.0790	0.0775	0.0761	0.0748	0.0734	0.0721	0.0707	0.0694	0.0681	0.0669
1.9	0.0656	0.0644	0.0632	0.0620	0.0608	0.0596	0.0584	0.0573	0.0562	0.0551
2.0	0.0540	0.0529	0.0519	0.0508	0.0498	0.0488	0.0478	0.0468	0.0459	0.0449
2.1	0.0440	0.0431	0.0422	0.0413	0.0404	0.0396	0.0387	0.0379	0.0371	0.0363
2.2	0.0355	0.0347	0.0347	0.0332	0.0325	0.0317	0.0310	0.0303	0.0297	0.0290
2.3	0.0283	0.0277	0.0277	0.0264	0.0258	0.0252	0.0246	0.0241	0.0235	0.0229
2.4	0.0224	0.219	0.0213	0.0208	0.0203	0.0198	0.0194	0.0189	0.0184	0.0180
2.5	0.0175	0.0171	0.0171	0.0163	0.0158	0.0154	0.0181	0.0147	0.0143	0.0139
2.6	0.0136	0.0132	0.0129	0.0126	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110	0.0107
2.7	0.0104	0.0101	0.0099	0.0096	0.0093	0.0091	0.0088	0.0086	0.0084	0.0081
2.8	0.0079	0.0077	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0067	0.0065	0.0063	0.0061
2.9	0.0060	0.0058	0.0056	0.0055	0.0053	0.0051	0.0050	0.0048	0.0047	0.0046
3.0	0.0044	0.0043	0.0042	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036	0.0035	0.0034
3.5	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007	0.0007	0.0007	0.0006
3.9	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001

Աղյուսակ 2. $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}}$ ֆունկցիայի արժեքները

x	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	05398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9980	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

Աղյուսակ 3. Ստյուդենտի t բաշխման կրիտիկական կետերը*

n \ α	0.75 0.50	0.80 0.60	0.90 0.80	0.95 0.90	0.975 0.95	0.99 0.98	0.995 0.99
1	1.000	1.376	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	0.816	1.061	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	0.765	0.978	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	0.741	0.941	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	0.727	0.920	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	0.718	0.906	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	0.711	0.896	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	0.706	0.889	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	0.703	0.883	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	0.700	0.879	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	0.697	0.876	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	0.695	0.873	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	0.964	0.870	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	0.692	0.868	1.345	1.761	2.145	2.624	2.997
15	0.691	0.866	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	0.690	0.865	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	0.689	0.863	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	0.688	0.862	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	0.688	0.861	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	0.687	0.860	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	0.686	0.859	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	0.686	0.858	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	0.685	0.858	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	0.685	0.857	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	0. 684	0.856	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	0. 684	0.856	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	0. 684	0.855	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	0. 683	0.855	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	0. 683	0.854	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	0. 683	0.854	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
40	0.681	0.851	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
60	0.679	0.848	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
100	0.677	0.845	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626
200	0.676	0.843	1.286	1.652	1.972	2.345	2.601
∞	0.675	0.842	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

* α (նշանակալիության մակարդակի) առաջին արժեքները վերաբերվում են միակողմանի, իսկ երկրորդը՝ երկկողմանի տեստին, n-ը ազատության աստիճանն է:

Աղյուսակ 4. χ^2 բաշխման կրիտիկական կետերը

n \ α	0.005	0.010	0.025	0.050	0.100	0.250
1	0.000039	0.00016	0.00098	0.0039	0.0158	0.1015
2	0.010025	0.02010	0.50636	0.1026	0.2107	0.5754
3	0.071721	0.11483	0.21580	0.3518	0.5844	1.2125
4	0.206990	0.29711	0.48442	0.7107	1.0636	1.9226
5	0.411740	0.55430	0.83121	1.1455	1.6103	2.6746
6	0.675727	0.87209	1.23735	1.6354	2.2041	3.4546
7	0.989265	1.23904	1.68987	2.1674	2.8331	4.2549
8	1.344419	1.64648	2.17973	2.7326	3.4895	5.0706
9	1.734926	2.08791	2.71139	3.3251	4.1682	5.8988
10	2.15585	2.55821	3.24697	3.9403	4.8652	6.7372
11	2.60321	3.05347	3.81575	4.5748	5.5778	7.5841
12	3.07382	3.57056	4.40379	5.2260	6.3038	8.4384
13	3.56503	4.10691	5.00874	5.8919	7.0415	9.2991
14	4.07468	4.66043	5.62872	6.5706	7.7895	10.165
15	4.60094	5.22935	6.26214	7.2609	8.5468	11.037
16	5.14224	5.81221	6.90766	7.9616	9.3122	11.912
17	5.69724	6.40776	7.56418	8.6718	10.085	12.792
18	6.26481	7.01491	8.23075	9.3905	10.865	13.675
19	6.84398	7.63173	8.90655	10.117	11.651	14.562
20	7.43386	8.26040	9.59083	10.851	12.443	15.452
21	8.03366	8.89720	10.2829	11.591	13.240	16.344
22	8.64272	9.54249	10.9823	12.338	14.042	17.240
23	9.26042	10.1957	11.6885	13.091	14.848	18.137
24	9.88623	10.8564	12.4011	13.848	15.659	19.037
25	10.5197	11.5240	13.1197	14.611	16.473	19.939
30	13.7867	14.9535	16.7908	18.493	20.599	24.4776
40	20.7065	22.1643	24.4331	26.509	29.051	33.660
50	27.9907	29.7067	32.3574	34.764	37.689	42.9421
60	35.5346	37.4848	40.4817	43.188	46.459	52.294
80	51.1720	53.5400	57.1532	60.392	64.278	71.145
100	67.3276	70.0648	74.2219	77.9295	82.3581	90.1333

Աղյուսակ 4. χ^2 բաշխման կրիտիկական կետերը (շարունակություն)

n \ α	0.500	0.750	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995
1	0.4549	1.3233	2.7055	3.8415	5.0239	6.6349	7.8794
2	1.3863	2.7726	4.6052	5.9915	7.3778	9.210	10.597
3	2.3660	4.1084	6.2514	7.8147	9.348	11.345	12.838
4	3.3567	5.3853	7.7794	9.4877	11.143	13.277	14.860
5	4.3515	6.6257	9.2364	11.071	12.833	15.086	16.750
6	5.3481	7.8408	10.645	12.592	14.450	16.812	18.548
7	6.3458	9.0372	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278
8	7.3441	10.219	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955
9	8.3428	11.389	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589
10	9.3418	12.549	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188
11	10.341	13.701	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757
12	11.340	14.845	18.549	21.026	23.337	26.217	28.300
13	12.340	15.984	19.812	22.362	24.736	27.688	29.820
14	13.339	17.117	21.064	23.685	26.120	29.141	31.320
15	14.339	18.245	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801
16	15.338	19.369	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267
17	16.338	20.489	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718
18	17.338	21.605	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156
19	18.338	22.718	27.204	30.144	32.852	36.191	38.582
20	19.337	23.828	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997
21	20.337	24.935	29.615	32.671	35.479	38.932	41.401
22	21.337	26.039	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796
23	22.337	27.141	32.007	35.173	38.076	41.638	44.181
24	23.337	28.241	33.196	36.415	39.364	42.980	45.559
25	24.337	29.339	34.382	37.653	40.647	44.314	46.928
30	29.336	34.800	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672
40	39.335	45.616	51.805	55.758	59.342	63.691	66.766
50	49.335	56.334	63.167	67.505	71.420	76.154	79.490
60	59.335	66.981	74.397	79.082	83.298	88.380	91.952
80	79.334	88.130	96.578	101.88	106.63	112.33	116.32
100	99.334	109.14	118.50	124.34	129.56	135.81	140.17

Աղյուսակ 5. Ֆիշերի F բաշխման կրիտիկական կետերը (α=0.05)*

k_2 \ k_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242
2	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79
4	7.71	6.94	6.59	6.36	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	2.23	3.18	3.14
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83

k_1-ը համարիչի ազատության աստիճանն է,
k_2-ը հայտարարի ազատության աստիճանն է,

Աղյուսակ 5. Ֆիշերի F բաշխման կրիտիկական կետերը (α=0.05)
(շարունակություն)

k_2 \ k_1	12	15	20	24	30	40	60	100	120	∞
1	244	246	248	249	250	251	252	253	253	254
2	19.4	19.4	19.4	19.4	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5
3	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.55	8.53
4	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.66	5.63
5	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.41	4.40	4.37
6	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.71	3.70	3.67
7	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.27	3.23
8	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.97	2.93
9	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.76	2.75	2.71
10	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.59	2.58	2.54
11	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.46	2.45	2.40
12	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.35	2.34	2.30
13	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.26	2.25	2.21
14	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.19	2.18	2.13
15	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.12	2.11	2.07
16	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.07	2.06	2.01
17	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.02	2.01	1.96
18	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.98	1.97	1.92
19	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.94	1.93	1.88
20	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.91	1.90	1.84
21	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.87	1.81
22	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.85	1.84	1.78
23	2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.83	1.81	1.76
24	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.80	1.79	1.73
25	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.75	1.77	1.71
30	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.70	1.68	1.62
40	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.59	1.58	1.51
60	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.48	1.47	1.39
120	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.43	1.37	1.35	1.25
∞	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.24	1.22	1.00

Աղյուսակ 6. Դարբին-Վաթսոնի (DW) d տեստի արժեքները

n	k=2		k=3		k=4		k=5		k=10	
	d_L	d_u	d_L	d_u	d_L	d_u	d_L	d_u	d_L	d_u
15	0.95	1.54	0.82	1.75	0.69	1.97	0.56	2.21		
16	0.98	1.54	0.86	1.73	0.74	1.93	0.62	2.15	0.16	3.30
17	1.02	1.54	0.90	1.71	0.78	1.90	0.67	2.10	0.20	3.18
18	1.05	1.53	0.93	1.69	0.82	1.87	0.71	2.06	0.24	3.07
19	1.08	1.53	0.97	1.68	0.86	1.85	0.75	2.02	0.29	2.97
20	1.10	1.54	1.00	1.68	0.90	1.83	0.79	1.99	0.34	2.89
21	1.13	1.54	1.03	1.67	0.93	1.81	0.83	1.96	0.38	2.81
22	1.15	1.54	1.05	1.66	0.96	1.80	0.86	1.94	0.42	2.73
23	1.17	1.54	1.08	1.66	0.99	1.79	0.90	1.92	0.47	2.67
24	1.19	1.55	1.10	1.66	1.01	1.78	0.93	1.90	0.51	2.61
25	1.21	1.55	1.12	1.66	1.04	1.77	0.95	1.89	0.54	2.56
26	1.22	1.55	1.14	1.65	1.06	1.76	0.98	1.88	0.58	2.51
27	1.24	1.56	1.16	1.65	1.08	1.76	1.01	1.86	0.62	2.47
28	1.26	1.56	1.18	1.65	1.10	1.75	1.03	1.85	0.65	2.43
29	1.27	1.56	1.20	1.65	1.12	1.74	1.05	1.84	0.68	2.40
30	1.28	1.57	1.21	1.65	1.14	1.74	1.07	1.83	0.71	2.36
31	1.30	1.57	1.23	1.65	1.16	1.74	1.09	1.83	0.74	2.33
32	1.31	1.57	1.24	1.65	1.18	1.73	1.11	1.82	0.77	2.31
33	1.32	1.58	1.26	1.65	1.19	1.73	1.13	1.81	0.80	2.28
34	1.33	1.58	1.27	1.65	1.21	1.73	1.15	1.81	0.82	2.26
35	1.34	1.53	1.28	1.65	1.22	1.73	1.16	1.80	0.85	2.24
36	1.35	1.59	1.29	1.65	1.24	1.73	1.18	1.80	0.87	2.22
37	1.36	1.59	1.31	1.66	1.25	1.72	1.19	1.80	0.89	2.20
38	1.37	1.59	1.32	1.66	1.26	1.72	1.21	1.79	0.91	2.18
39	1.38	1.60	1.33	1.66	1.27	1.72	1.22	1.79	0.93	2.16
40	1.39	1.60	1.34	1.66	1.29	1.72	1.23	1.79	0.95	2.15
45	1.43	1.62	1.38	1.67	1.34	1.72	1.29	1.78	1.04	2.09
50	1.46	1.63	1.42	1.67	1.38	1.72	1.34	1.77	1.11	2.04
55	1.49	1.64	1.45	1.68	1.41	1.72	1.38	1.77	1.17	2.01
60	1.51	1.65	1.48	1.69	1.44	1.73	1.41	1.77	1.22	1.98
65	1.54	1.66	1.50	1.70	1.47	1.73	1.44	1.77	1.27	1.96
70	1.55	1.67	1.52	1.70	1.49	1.74	1.46	1.77	1.30	1.95
75	1.57	1.68	1.54	1.71	1.51	1.74	1.49	1.77	1.34	1.94
80	1.59	1.69	1.56	1.72	1.53	1.74	1.51	1.77	1.37	1.93
85	1.60	1.70	1.57	1.72	1.55	1.75	1.52	1.77	1.40	1.92
90	1.61	1.70	1.59	1.73	1.57	1.75	1.54	1.78	1.42	1.91
95	1.62	1.71	1.60	1.73	1.58	1.75	1.56	1.78	1.44	1.90
100	1.63	1.72	1.61	1.74	1.59	1.76	1.57	1.78	1.46	1.90

Աղյուսակ 7. *Run* տեստի կրիտիկական արժեքները

N_1	N_2																		
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2											2	2	2	2	2	2	2	2	2
3					2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3
4				2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4
5			2	2	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	5	5	5
6		2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	6	6
7		2	2	3	3	3	4	4	5	5	5	5	5	6	6	6	6	6	6
8		2	3	3	3	4	4	5	5	5	6	6	6	6	6	7	7	7	7
9		2	3	3	4	4	5	5	5	6	6	6	7	7	7	7	8	8	8
10		2	3	3	4	5	5	5	6	6	7	7	7	7	8	8	8	8	9
11		2	3	4	4	5	5	6	6	7	7	7	8	8	8	9	9	9	9
12	2	2	3	4	4	5	6	6	7	7	7	8	8	8	9	9	9	10	10
13	2	2	3	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9	9	10	10	10	10
14	2	2	3	4	5	5	6	7	7	8	8	9	9	9	10	10	10	11	11
15	2	3	3	4	5	6	6	7	7	8	8	9	9	10	10	11	11	11	12
16	2	3	4	4	5	6	6	7	8	8	9	9	10	10	11	11	11	12	12
17	2	3	4	4	5	6	7	7	8	9	9	10	10	11	11	11	12	12	13
18	2	3	4	5	5	6	7	8	8	9	9	10	10	11	11	12	12	13	13
19	2	3	4	5	6	6	7	8	8	9	10	10	11	11	12	12	13	13	13
20	2	3	4	5	6	6	7	8	9	9	10	10	11	12	12	13	13	13	14

Աղյուսակ 7. *Run* տեստի կրիտիկական արժեքները (շարունակություն)

N_1	N_2																
	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2																	
3																	
4		9	9														
5	9	10	10	11	11												
6	9	10	11	12	12	13	13	13	13								
7		11	12	13	13	14	14	14	14	15	15						
8		11	12	13	14	14	15	15	16	16	16	17	17	17	17	17	17
9			13	14	14	15	16	16	16	17	17	18	18	18	18	18	18
10			13	14	15	16	16	17	17	18	18	19	19	19	19	20	20
11			13	14	15	16	17	17	18	19	19	20	20	20	20	21	21
12			13	14	16	16	17	18	19	19	20	21	21	21	21	22	22
13				15	16	17	18	19	19	20	20	21	21	22	22	23	23
14				15	16	17	18	19	20	20	21	22	22	23	23	23	24
15				15	16	18	18	19	20	21	22	23	23	23	24	24	25
16					17	18	19	20	21	21	22	23	23	24	25	25	25
17					17	18	19	20	21	22	23	24	24	25	25	26	26
18					17	18	19	20	21	22	23	25	25	25	26	26	27
19					17	18	20	21	22	23	23	25	25	26	26	27	27
20					17	18	20	21	22	23	24	25	25	26	27	27	28

ՕԳՏԱԳՈՐԾՎԱԾ ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՑԱՆԿ

1. Айвазян С. А., Мхитарян В. С. Прикладная статистика и основы эконометрики. М., ЮНИТИ, 1998
2. Боровков А. А. Теория вероятностей. М., Наука,1986
3. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. 3-е изд. М., Наука, 1964
4. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. 2-е изд. М., Наука, 1988
5. Севастьянов Б. А. Курс теории вероятностей и математической статистики. М., Наука,1982
6. Гельфанд И. М. Лекции по линейной алгебре. 4-е изд. М., Наука, 1971
7. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра. 3-е изд. М., Наука, 1984
8. Беллман Р. Введение в теорию матриц.М.,Наука,1969
9. Кранкр Г. Математические методы статистики. М.,, Мир,1975
10. Магнус Я. Р., Катышев П. К., Пересецкий А. А. Эконометрика, М., Дело, 2000

11. Доугерти К. Введение в эконометрику. М., ИНФРА-М., 1997.
12. Джонстон Дж. Эконометрические методы. М., Статистика, 1980
13. Համբարձումյան Գ. Հ. Հավանականությունների տեսություն, Երևան, «Լույս» հրատարակչություն, 1977
14. Ա.Պողոսյան, Վ.Դավթյան. Հավանականությունների տեսության և մաթեմատիկական վիճակագրության խնդիրների լուծման ձեռնարկ, Երևան., Տնտեսագետ, 1997
15. Gujarati, Damodar N.: *Essentials of Econometrics*, 2d ed., Irvin/McGraw-Hill, 1999.
16. Gujarati, Damodar N.: *Basic Econometrics*, 3d ed., McGraw-Hill, 1995.
17. Griffiths, William E., R. Carter Hill and George G. Judge: *Learning and Practicing Econometrics*, John Willey & Sons, New York, 1993.
18. Հայաստան. Տնտեսական միտումներ. Եռամսյակային թողարկում, հունվար-մարտ, 2001
19. Հայաստանի Հանրապետության սոցիալ-տնտեսական վիճակը, 2000 թ. հունվար-դեկտեմբերին
20. Greene, H. William.: *Econometric Analysis*, 4 ed.,New York University, 2000.
21. Chiang, C. Alpha.: *Fundamental Methods of Mathematical Economics*, 3d ed., McGraw-Hill, 1984.
22. Enders, Walter. *Applied Econometric Time Series*, John Wiley & Sons, New York, 1995.
23. Johnston, John. *Econometric Methods*. McGraw-Hill Book Company, New York, 1984.
24. Klein, Lawrence R.: *An Introduction to Econometrics*,

Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1962.
25. Klein, Lawrence R.: *A Textbook of Econometrics*, 2d ed.,, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1974.
26. Goldberger, A. S.: *Topics in Regression Analysis*, Macmillan, New York, 1968.
27. Goldberger, A. S.: *A Course in Econometrics*, Harvard Univrsity press, Cambridge, Mass., 1991.

Դուշչյան Լուսինե Համազի
Թերզյան Տիգրան Հարությունի
Դավթյան Լուսինե Ալեքսանդրի

Տարրական էկոնոմետրիկա

Մասն. խմբագիր՝ Հ. Բ. Դուշչյան
Տեխ. խմբագիր՝ Ա. Մանուչարյան
Շարվածքը՝ Ա. Աբրահամյան,
Գ. Աղամալյան
Սրբագրիչ՝ Ռ. Վարդանյան
Ձևավորումը՝ Ա. Մանուչարյան,
Ա. Գասպարյան

Թուղթ՝ օֆսեթ 60x84 1/16:
Տպագրություն՝ օֆսեթ: 17,5 տպ. մամ.:
Պատվեր՝ 56 : Տպաքանակ՝ 1000:

«ՁԵՄԹ» հրատ., 2002

Տպագրված է «Ամարաս» տպարանում
Երևան, Տերյան 44