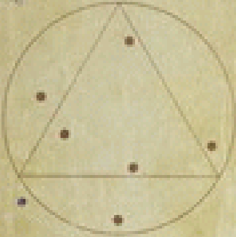


Վ. Ե. ԳՄՈՒՐՄԱՆ

ՀԱՎԱՆԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ՎԻՃԱԿԱԳՐՈՒԹՅԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՁԵՌՆԱՐԿ

Վ. Ե. ԳՄՈՒՐՄԱՆ

ՀԱՎԱՆԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ՎԻՃԱԿԱԳՐՈՒԹՅԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՁԵՌՆԱՐԿ

Թույլատրված է ՍՍՀՄ բարձրագույն և միջնակարգ մասնագիտական կրթության մինիստրության կողմից որպես ուսումնական ձեռնարկ բարձրագույն տեխնիկական ուսումնական հաստատությունների ուսանողության համար

«ԼՈՒՅՍ» ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ
ԵՐԵՎԱՆ 1979

517.8 *ինդեքս* ԳՄԴ 22.17 я 73

Գմուրման Վ. Ե.

Գ—64 *Հավանականությունների տեսության և մաթեմատիկական վիճակագրության խնդիրների լուծման ձեռնարկ։ Ուս. ձեռնարկ բուհերի համար.—Եր.։ Լույս, 1979.…։ էջ։*

Սույն ձեռնարկում բերված են անհրաժեշտ տեսական տեղեկություններ և բանաձևեր, տրված են տիպային խնդիրների լուծումներ, բերված են խնդիրներ ինքնուրույն լուծելու համար, որոնք ուղեկցված են պատասխաններով և ցուցումներով։ Մեծ ուշադրություն է դարձված փորձերի տվյալների մշակման վիճակագրական մեթոդներին։ Առաջին հրատարակությունը լույս է տեսել 1970 թ.։

Նախատեսված է բուհերի ուսանողության համար. կարող է օգտակար լինել ինժեներա-տեխնիկական աշխատողների համար, ովքեր կիրառում են հավանական և վիճակագրական մեթոդները գործնական խնդիրներ լուծելիս։

Գ $\dfrac{60406 \cdot 151}{702(01)1979}$

517.8
ԳՄԴ 22.17 я 73

Гмурман В. Е.

Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике

(на армянском языке)

Издательство „Луйс“

Ереван — 1979

© „Высшая школа“, 1975

© *«Լույս» հրատարակչություն, թարգմանված է հայերեն, 1979 թ.*

ՆԱԽԱԲԱՆ

Երկրորդ հրատարակության մեջ մտցված են հետևյալ լրացումները. պատահույթների պարզագույն հոսքը, ցուցչային բաշխումը, հուսալիության ֆունկցիան, երկու պատահական մեծությունների համակարգը, վիճակագրական հիպոթեզների ստուգումը, միագործոն դիսպերսիոն անալիզը։

Պիրսոնի հայտանիշը X գլխից տեղափոխված է XIII գլուխը, ավելացված են խնդիրներ գլխավոր համախմբության ցուցչային, պուասոնային, բինոմական և հավասարաչափ օրենքներով բաշխման մասին հիպոթեզներ ստուգելիս այդ հայտանիշի կիրառման վերաբերյալ։ Բերված են խնդիրներ նորմալ բաշխման մասին հիպոթեզի գրաֆիկի ստուգման վերաբերյալ (XIII գլուխ, § 13)։

Նոր բաժիններ մտցնելու կապակցությամբ ավելացված է 180 խնդիր, և մասամբ փոփոխված է խնդիրների համարակալումը։

Ներկա հրատարակությունը համապատասխանում է հեղինակի «Հավանականությունների տեսություն և մաթեմատիկական վիճակագրություն» գրքին:

Շնորհակալություն եմ հայտնում Ռ. Ս. Գուտերին՝ ցույց տված օգնության և օգտակար խորհուրդների համար:

Հեղինակ

Առաջին մաս

ՊԱՏԱՀՈՒՅԹՆԵՐ

ԱՌԱՋԻՆ ԳԼՈՒԽ

ՀԱՎԱՆԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՍԱՀՄԱՆՈՒՄԸ

§ 1. Հավանականության դասական և վիճակագրական սահմանումը

Պատահույթի հավանականության դասական սահմանումը որոշվում է

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

հավասարումով, որտեղ m-ը փորձի տարրական այն ելքերի թիվն է, որոնք նպաստում են A պատահույթի երևան գալուն, n-ը՝ փորձի հնարավոր ելքերի ընդհանուր թիվը։

Ենթադրվում է, որ տարրական ելքերը միակ հնարավորները և հավասարահնարավորներն են։

A պատահույթի հարաբերական հաճախությունը որոշվում է

$$W(A) = \frac{m}{n}$$

հավասարությամբ, որտեղ m-ը այն փորձերի թիվն է, որոնցում A-ն հանդես է եկել, n-ը՝ կատարված փորձերի ընդհանուր թիվը։

Որպես պատահույթի հավանականության վիճակագրորեն սահմանելիս ընդունում են նրա հարաբերական հաճախությունը։

1. Նետված է երկու խաղոսկր (զառ)։ Գտնել այն բանի հավանականությունը, որ նիստերի վրա հայտնված միա-

վորների գումարը զույգ է, եթե գոնե մեկ խաղոսկրի նիստին հայտնվել է վեց միավոր:

Լ ու ծ ու մ: «Առաջին» խաղոսկրի նիստի վրա կարող է երևալ մեկ երկու, ... վեց միավոր: Համանման վեց տարրական ելքեր հնարավոր են «երկրորդ» խաղոսկրը գցելիս: «Առաջին» խաղոսկրի նետելու յուրաքանչյուր ելք կարող է զուգորդվել «երկրորդ» խաղոսկրի նետելու ամեն մի ելքի հետ: Այսպիսով, փորձի հնարավոր տարրական ելքերի ընդհանուր թիվը կլինի $6 \times 6 = 36$: Այդ ելքերը միակ հնարավոր և, խաղոսկրերի համաչափության պատճառով, հավասարահնարավորներն են:

Մեզ հետաքրքրող պատահույթին (գոնե մեկ նիստին կհայտնվի վեց միավոր, հայտնված միավորների գումարը զույգ է) նպաստող են հետևյալ հինգ ելքերը (սկզբում գրված է «առաջին» խաղոսկրի վրա հայտնված միավորների թիվը, իսկ հետո՝ երկրորդ խաղոսկրի վրա հայտնվածը. այնուհետև գտնված է միավորների գումարը).

1) 6,2; $6+2=8$, 4) 2,6, $2+6=8$,

2) 6,4; $6+4=10$, 5) 4,6, $4+6=10$:

3) 6,6; $6+6=12$,

Որոնելի հավանականությունը հավասար է պատահույթին նպաստող ելքերի թվի հարաբերությանը բոլոր հնարավոր տարրական ելքերի թվին

$$P = \frac{5}{36}:$$

2. 21 միօրինակ և 10 ոչ միօրինակ դետալ պարունակող արկղը տեղափոխելիս կորել է մեկ դետալ, ըստ որում հայտնի չէ, թե ինչպիսին: Արկղից պատահականորեն հանված (տեղափոխելուց հետո) դետալը եղել է միօրինակ (ստանդարտ): Գտնել այն բանի հավանականությունը, որ կորած է եղել. ա) միօրինակ դետալը, բ) ոչ միօրինակ դետալը:

Լ ու ծ ու մ: ա) Հանված միօրինակ դետալը, ակնհայտորեն, կորածը չէ. կորած կարող է լինել մնացած երեսուն (21+

$+10-1=30$) դետալներից ցանկացածը, որոնց մեջ կա 20 միօրինակ դետալ ($21-1=20$)։

Այն բանի հավանականությունը, որ կորած է եղել միօրինակ դետալը, կլինի՝

$$P=\frac{20}{30}=\frac{2}{3},$$

բ) Երեսուն դետալներից, որոնցից յուրաքանչյուրը կարող է լինել կորածը, եղել է 10 ոչ միօրինակ։ Հավանականությունը, որ կորել է ոչ միօրինակ դետալը, կլինի

$$P=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}։$$

3. Մտապահված է երկնիշ թիվ, որի թվանշանները տարբեր են։ Գտնել հավանականությունը, որ մտապահված թիվը կլինի. ա) պատահական անվանված երկնիշ թիվը, բ) պատահական անվանված երկնիշ թիվը, որի թվանշանները տարբեր են։

Պատ.՝ ա) $P=\frac{1}{90}$, բ) $P=\frac{1}{81}$։

4. Նետված է երկու խաղոսկր։ Գտնել հավանականությունը, որ նրանց վրա հայտնված միավորների գումարը հավասար կլինի 7-ի։

Պատ.՝ $P=\frac{1}{6}$։

5. Նետված է երկու խաղոսկր։ Գտնել հետևյալ պատահույթների հավանականությունը. ա) հայտնված միավորների գումարը 8 է, իսկ տարբերությունը՝ 4, բ) հայտնված միավորների գումարը 8 է, եթե հայտնի է, որ նրանց տարբերությունը 4 է։

Պատ.՝ ա) $P=\frac{1}{18}$, բ) $P=\frac{1}{2}$։

6. Նետված է երկու խաղոսկր։ Գտնել հավանականու

թյունը, որ նրանց վրա հայտնված միավորների գումարը 5 է, իսկ արտադրյալը՝ 4։

Պատ.՝ $P = \frac{1}{18}$ ։

7. Մետաղադրամը նետված է երկու անգամ։ Գտնել հավանականությունը, որ գոնե մեկ անգամ կերևա «գերբը»։

Պատ.՝ $P = \frac{3}{4}$ ։

8. Տուփում կա 6 միատեսակ, համարակալված խորանարդիկ։ Պատահականորեն մեկ-մեկ հանվում են բոլոր խորանարդիկները։ Գտնել հավանականությունը, որ հանված խորանարդիկների համարները կերևան աճման կարգով։

Պատ.՝ $P = \frac{1}{720}$ ։

9. Գտնել հավանականությունը, որ 3 խաղոսկր նետելիս 6-ը կհայտնվի մեկ (կարևոր չէ որ) խաղոսկրի վրա, եթե մյուս երկու խաղոսկրի վրա հայտնված միավորները տարբեր են (հավասար չեն 6-ի)։

Լուծում։ Փորձի տարրական ելքերի ընդհանուր թիվը հավասար է 6 տարրից 3-ական զուգորդությունների թվին, այսինքն՝ C_6^3։

Մի նիստի վրա 6 և մյուս երկուսի վրա տարբեր (6-ին ոչ հավասար) միավորների երևալուն նպաստող ելքերի թիվը հավասար է հինգ տարրից 2-ական զուգորդությունների թվին, այսինքն՝ C_5^2։

Որոնելի հավանականությունը հավասար է մեզ հետաքրքրող պատահույթին նպաստող ելքերի թվի հարաբերությանը հնարավոր տարրական ելքերի ընդհանուր թվին.

$$P = \frac{C_5^2}{C_6^3} = \frac{5\cdot 4\cdot 1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 6\cdot 5\cdot 4} = \frac{1}{2},$$

10. Կապոցում կա 20 պերֆոքարտ, որոնք համարակալված են 101, 102, ..., 120 թվերով և դասավորված են

կամայականորեն: Ծակողը (перфораторщица) *պատահականորեն հանում է 2 քարտ: Գտնել հավանականությունը, որ հանված են 101 և 102 պերֆոքարտերը:*

Պատ.՝ $P = \frac{1}{C_{20}^{2}} = \frac{1}{190}$:

11. *Արկղում կա միատեսակ 10 դետալ, որոնք համարակալված են 1, 2, ..., 10 համարներով: Պատահականորեն հանվում է 6 դետալ: Գտնել հավանականությունը, որ հանված դետալների մեջ կլինեն. ա) № 1 դետալը, բ) № 1 և № 2 դետալները:*

Լուծում. ա) Փորձի հնարավոր տարրական ելքերի թիվը հավասար է 10 դետալներից 6-ը հանելու ձևերի թվին, այսինքն՝ C_{10}^{6}:

Հաշվենք մեզ հետաքրքրող պատահույթին նպաստող ելքերի թիվը. վերցրած 6 դետալների մեջ է № 1 դետալը և, հետևաբար, մնացած 5 դետալներն ունեն այլ համարներ: Այդպիսի ելքերի թիվը հավասար է, ակնհայտորեն, մնացած 9 դետալներից 5-ի վերցնելու ձևերի թվին, այսինքն՝ C_{9}^{5}:

Որոնելի հավանականությունը հավասար է դիտարկվող պատահույթին նպաստող ելքերի թվի հարաբերությանը հնարավոր տարրական ելքերի ընդհանուր թվին.

$$P = \frac{C_{9}^{5}}{C_{10}^{6}} = \frac{C_{9}^{4}}{C_{10}^{4}} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} = 0{,}6:$$

բ) Մեզ հետաքրքրող պատահույթին (վերցրած դետալների մեջ են № 1 և № 2 դետալները, հետևաբար, 4 դետալ ունեն այլ համարներ) նպաստող ելքերի թիվը հավասար է մնացած 8 դետալներից 4-ի վերցնելու ձևերի թվին, այսինքն՝ C_{8}^{4}:

Որոնելի հավանականությունն է.

$$P = \frac{C_{8}^{4}}{C_{10}^{6}} = \frac{C_{8}^{4}}{C_{10}^{4}} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{1}{3},$$

12. *Արկղում կա 15 դետալ, որոնցից 10-ը՝ ներկած է։ Հավաքողը պատահականորեն հանում է 3 դետալ։ Գտնել հավանականությունը, որ հանված դետալները ներկված կլինեն։*

Պատ.՝ $P = \frac{C_{10}^{3}}{C_{15}^{3}} = \frac{24}{91}$։

13. *Ծրարում եղած 100 լուսանկարների մեջ գտնվում է փնտրվող մի նկար։ Ծրարից պատահականորեն հանված է 10 նկար։ Գտնել հավանականությունը, որ նրանց մեջ կլինի փնտրվող նկարը։*

Պատ.՝ $P = \frac{C_{90}^{9}}{C_{100}^{10}} = 0{,}1$։

14. *Արկղում կա 100 դետալ, որոնցից 10 հատը խոտանված է։ Պատահականորեն հանված է 4 դետալ։ Գտնել հավանականությունը, որ հանված դետալների մեջ. ա) չկան խոտանվածներ, բ) չկան պիտանիներ։*

Պատ.՝ ա) $P = \frac{C_{90}^{4}}{C_{100}^{4}} \simeq 0{,}65$, $P = \frac{C_{10}^{4}}{C_{100}^{4}} \approx 0{,}00005$։

15. *Սարքը կազմված է 5 տարրից, որոնցից 2-ը՝ մաշված է։ Սարքը միացնելիս պատահականորեն միանում են երկուսը։ Գտնել հավանականությունը, որ կմիանան մաշված տարրերը։*

Պատ.՝ $P = \frac{C_{3}^{2}}{C_{5}^{3}} = 0{,}3$։

16. *Հեռախոսի համարը հավաքելիս բաժանորդը մոռացել է վերջին երեք թվանշանները և հիշելով միայն, որ այդ թվանշանները տարբեր են, հավաքեց դրանք պատահականորեն։ Գտնել հավանականությունը, որ հավաքված են անհրաժեշտ թվանշանները։*

Պատ.՝ $P = \frac{1}{A_{10}^{3}} = \frac{1}{720}$։

17. N *դետալների խմբաքանակում* n *հատը միօրինակ է։ Պատահականորեն ընտրված է* m *հատ դետալ։ Գտնել հավանականությունը, որ ընտրված դետալների մեջ ճիշտ* K-*ն է միօրինակ։*

Լուծում։ Փորձի հնարավոր ելքերի ընդհանուր թիվը հավասար է N *դետալներից* m *հանելու ձևերի թվին, այսինքն՝* C_N^m—N *տարրից* m-*ական զուգորդությունների թվին։*

Հաշվենք մեզ հետաքրքրող պատահույթին նպաստող ելքերի թիվը (m *դետալներից ճիշտ* k-*ն է միօրինակ)*. k *միօրինակ դետալ կարելի է վերցնել* n *միօրինակ դետալներից* C_n^k *ձևերով. այդ դեպքում մնացած* m-k *դետալները պետք է լինեն ոչ միօրինակ, իսկ* N—n *ոչ միօրինակ դետալներից* m—k *հատ կարելի է վերցնել* C_{N-n}^{m-k} *ձևերով։ Հետևաբար, նպաստող ելքերի թիվը հավասար է* $C_n^k \cdot C_{N-n}^{m-k}$*։*

Որոնելի հավանականությունը հավասար է պատահույթին նպաստող ելքերի թվի հարաբերությանը բոլոր տարրական ելքերի թվին.

$$P = \frac{C_n^k \cdot C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m}.$$

18. *Արտադրամասում աշխատում են 6 տղամարդ և 4 կին։ Ցուցակի համարներով պատահականորեն ընտրվել է 7 մարդ։ Գտնել այն բանի հավանականությունը, որ ընտրվածների մեջ կլինեն 3 կին։*

Պատ.՝ $P = \frac{C_4^3 \cdot C_6^4}{C_{10}^7} = 0{,}5$։

19. *Պահեստում կա 15 կինեսկոպ, որոնցից 10-ը պատրաստվել է Լվովի գործարանում։ Գտնել հավանականությունը, որ պատահականորեն վերցված 5 կինեսկոպների թվում 3-ը կլինեն Լվովի գործարանից։*

Պատ.՝ $P = \frac{C_{10}^3 \cdot C_5^2}{C_{15}^5} \approx 0{,}4$։

20. *Խմբում կա 12 ուսանող, որոնցից 8-ը գերազանցիկ են: Ցուցակով պատահականորեն ընտրված է 9 ուսանող: Գտնել հավանականությունը, որ նրանց մեջ կա 5 գերազանցիկ:*

Պատ.՝ $P = \frac{C_8^5 \cdot C_4^4}{C_{12}^9} = \frac{14}{55}$:

21. *Տուփում կա 5 միատեսակ արտադրանք, ըստ որում նրանցից 3-ը ներկված են: Պատահականորեն հանված է 2 արտադրանք: Գտնել հավանականությունը, որ նրանց մեջ կլինեն. ա) մեկ ներկված արտադրանք, բ) 2 ներկված արտադրանք, գ) գոնե մեկ ներկված արտադրանք:*

Պատ.՝ ա) $P = \frac{C_3^1 \cdot C_2^1}{C_5^2} = 0,6$, բ) $P = \frac{C_3^2}{C_5^2} = 0,3$, գ) $P = 0,9$:

22. *«Գաղտնափականքում» ընդհանուր առանցքի վրա կա 4 սկավառակ, որոնցից յուրաքանչյուրը բաժանված է 5 սեկտորի, որոնցում գրված են տարբեր թվանշաններ: Փականքը բացվում է միայն այն դեպքում, երբ սկավառակները դրված են այնպես, որ նրանց վրայի թվանշանները կազմում են որոշակի քառանիշ թիվ: Գտնել հավանականությունը, որ սկավառակները պատահական դասավորելիս փականքը կբացվի:*

Պատ.՝ $P = \frac{1}{5^4}$:

23. *Տեխնիկական հսկողության բաժինը պատահականորեն ընտրված 100 գրքերի խմբում գտավ 5 խոտանված գիրք: Գտնել խոտանված գրքերի հանդես գալու հարաբերական հաճախությունը:*

Լուծում: A *պատահույթի հարաբերական հաճախությունը (խոտանված գրքերի հանդես գալը) հավասար է այն փորձերի թվի հարաբերությանը, որոնցում հանդես է եկել* A-*ն, կատարված փորձերի ընդհանուր թվին.*

$$W(A) = \frac{5}{100} = 0,05:$$

24. *Նպատակակետին կրակել են 20 անգամ, որից 18-ը խոցել են։ Գտնել նպատակակետը խոցելու հարաբերական հաճախությունը։*

Պատ. W = 0,9։

25. *Սարքերի խմբաքանակը փորձարկելիս պիտանի սարքերի հարաբերական հաճախությունը հավասար է եղել 0,9-ի։ Գտնել պիտանի սարքերի թիվը, եթե ստուգված է եղել ընդամենը 200 սարք։*

Պատ.՝ 180 *սարք։*

§ 2. Երկրաչափական հավանականություններ

Դիցուք l հատվածը կազմում է L հատվածի մասը։ L հատվածի վրա պատահականորեն դրված է կետ։ Եթե ենթադրենք, որ կետի համընկնելը l հատվածի վրա համեմատական է նրա երկարությանը և կախված չէ L երկարության հատվածի վրա նրա դիրքից, ապա կետը l հատվածի վրա ընկնելու հավանականությունը որոշվում է

$$P = \frac{l \text{ երկարություն}}{L \text{ երկարություն}}$$

հավասարությամբ։

Դիցուք g հարթ պատկերը կազմում է G հարթ պատկերի մասը։ G պատկերի վրա պատահականորեն նետված է կետ։ Եթե ենթադրենք, որ կետը պատկերի վրա ընկնելու հավանականությունը համեմատական է պատկերի մակերեսին և անկախ է g-ի ձևից ու G-ի նկատմամբ նրա դիրքից, ապա կետի g-ի վրա ընկնելու հավանականությունը կորոշվի

$$P = \frac{g \text{ մակերես}}{G \text{ մակերես}}$$

հավասարությամբ։

Համանմանորեն որոշվում է կետը ընկնելու հավանականությունը տարածական V մարմնի մասը կազմող v պատկերի մեջ.

$$P = \frac{v \text{ ծավալ}}{V \text{ ծավալ}},$$

26. *20* սմ *երկարության* L *հատվածի վրա տեղադրված է 10* սմ *երկարության անհայտ l հատվածը։ Գտնել հավանակա-*

նությունը, որ մեծ հատվածի վրա պատահական դրված կետը կընկնի փոքր հատվածի վրա։ Ենթադրվում է, որ կետը հատվածի վրա ընկնելու հավանականությունը համեմատական է հատվածի երկարությանը և կախված չէ նրա դիրքից։

Պատ.՝ $P=\frac{1}{2}$ ։

27. OX թվային առանցքի և L երկարության OA հատվածի վրա պատահականորեն դրված է B(x) կետը։ Գտնել հավանականությունը, որ OB և BA հատվածներից փոքրը կունենա $\frac{1}{3}$-ից ավելի երկարություն։ Ենթադրվում է, որ կետը հատվածին ընկնելու հավանականությունը համեմատական է հատվածի երկարությանը և կախված չէ թվային առանցքի վրա նրա դիրքից։

Պատ.՝ $P=\frac{L/3}{L}=\frac{1}{3}$ ։

28. R շառավղով շրջանում դրված է r շառավղով շրջանը։ Գտնել հավանականությունը, որ մեծ շրջանի մեջ պատահականորեն նետված կետը կընկնի փոքր շրջանի մեջ։ Ենթադրվում է, որ կետը շրջանի մեջ ընկնելու հավանականությունը համեմատական է շրջանի մակերեսին և կախված չէ նրա դիրքից։

Պատ.՝ $P=\frac{r^2}{R^2}$ ։

29. Հարթությունը բաժանված է իրարից 2a հեռավորություն ունեցող զուգահեռ ուղիղներով։ Հարթության վրա պատահականորեն նետված է $r<a$ շառավղով դրամը։ Գտնել հավանականությունը, որ դրամը չի հատի ոչ մի ուղիղ։

Պատ.՝ $P=\frac{2a-2r}{2a}=\frac{a-r}{a}$ ։

30. a կողմով քառակուսիների ցանցով պատված հարթության վրա պատահականորեն նետված է $r<\frac{a}{2}$ շառավղով դրամը։ Գտնել հավանականությունը, որ դրամը չի հատի քառակուսու ոչ մի կողմը։ Ենթադրվում է, որ կետը հարթ պատկերի մեջ ընկնելու հավանականությունը համեմատական է նրա մակերեսին և կախված չէ պատկերի դիրքից։

Պատ.՝ $P = \frac{(a-2r)^2}{a^2}$,

31. Իրարից 6 սմ հեռավորության վրա գտնվող զուգահեռ ուղիղներով բաժանված հարթության վրա պատահականորեն նետված է 1 սմ շառավիղ ունեցող շրջանը։ Գտնել հավանականությունը, որ շրջանը չի հատի ոչ մի ուղիղ։ Ենթադրվում է, որ կետը հատվածի վրա ընկնելու հավանականությունը համեմատական է հատվածի երկարությանը և կախված չէ նրա դիրքից։

Պատ.՝ $P = \frac{6-2}{6} = \frac{2}{3}$,

32. Հարթության վրա գծված են 2 համակենտրոն շրջանագծեր, որոնց շառավիղները համապատասխանաբար 5 սմ և 10 սմ են։ Գտնել հավանականությունը, որ մեծ շրջանի մեջ պատահականորեն նետված կետը կընկնի շրջանագծերով կազմված օղակի մեջ։ Ենթադրվում է, որ կետի հարթ պատկերի մեջ ընկնելու հավանականությունը համեմատական է այդ պատկերի մակերեսին և կախված չէ նրա դիրքից։

Պատ.՝ $P = \frac{10^2-5^2}{10^2} = 0{,}75$,

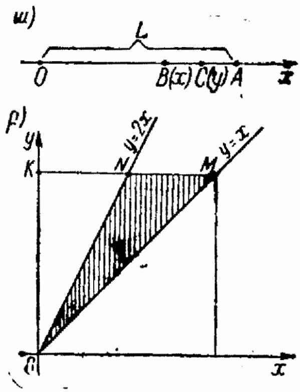
33. R շառավիղ ունեցող շրջանի մեջ պատահականորեն գցված է կետը։ Գտնել հավանականությունը, որ կետը կգտնվի շրջանին ներգծած՝ ա) քառակուսու, բ) կանոնավոր եռանկյան մեջ։ Ենթադրվում է, որ շրջանի մասի մեջ կետը ընկնելու հավանականությունը համեմատական է այդ մասի մակերեսին և կախված չէ շրջանի նկատմամբ նրա դիրքից։

Պատ.՝ ա) $P = \frac{2}{\pi}$, բ) $P = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$,

34. Արագ պտտվող սկավառակը բաժանված է զույգ թվով սեկտորների, որոնք փոփոխակիորեն ներկված են սպիտակ և սև գույներով։ Սկավառակի վրա կրակում են։ Գտնել հավանականությունը, որ գնդակը կընկնի սպիտակ սեկտորներից մեկի վրա։ Ենթադրվում է, որ գնդակի ընկնելը հարթ պատկերի մեջ համեմատական է նրա մակերեսին։

Պատ.՝ $P=\frac{0{,}5\pi R^2}{\pi R^2}=0{,}5$։

35. OX թվային առանցքի L երկարության OA հատվածի վրա պատահականորեն դրված են B(x) և C(y) կետերը, ընդ որում $y \geqslant x$։ (C կետի կոորդինատը հետագա շարադրանքի հարմարության համար նշանակված է y-ով)։ Գտնել հավանականությունը, որ BC հատվածի երկարությունը կլինի փոքր OB հատվածի երկարությունից (նկ. 1, ա)։ Ենթադրվում է, որ հատվածի վրա կետի ընկնելու հավանականությունը համեմատական է հատվածի երկարությանը և կախված չէ թվային առանցքի վրա նրա դիրքից։



Նկ. 1

Լուծում։ B և C կետերի կոորդինատները պետք է բավարարեն

$$0 \leqslant x \leqslant L,\quad 0 \leqslant y \leqslant L,\quad y \geqslant x$$

անհավասարություններին։

Դիտարկենք xOy ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգը։ Այդ համակարգում նշված անհավասարություններին բավարարում են OKM ուղղանկյուն եռանկյանը պատկանող ցանկացած կետի կոորդինատները (նկ. 1, բ)։ Այսպիսով, այդ եռանկյանը կարելի է նայել որպես հարթ պատկեր, որի կետերի կոորդինատները ներկայացնում են համապատասխանաբար B և C կետերի կոորդինատների բոլոր հնարավոր արժեքները։

BC հատվածի երկարությունը պետք է փոքր լինի OB հատվածի երկարությունից, այսինքն պետք է տեղի ունենա

$$y - x < x$$

անհավասարությունը, կամ, որ նույնն է։

$$y < 2x\text{։}$$

Վերջին անհավասարությունը տեղի է ունենում G պատկերի (OKM ուղղանկյուն եռանկյան) այն կետերի կոորդինատների համար, որոնք ընկած են $y = 2x$ ուղղից (ON ուղիղը) ներքև։ Ինչպես երևում է նկ. 1, բ-ից բոլոր այդ կետերը պատկանում են ONM ստվերագծված եռանկյանը։

Այսպիսով, այդ եռանկյունը կարելի է դիտարկել որպես g պատկեր, որի կետերի կոորդինատները մեզ հետաքրքրող պայմանին (BC հատվածի երկարությունը փոքր է OB հատվածի երկարությունից) բավարարում են։

Որոնելի հավանականությունն է՝

$$P = \frac{\text{մակ.}\, g}{\text{մակ.}\, G} = \frac{\text{մակ.}\, ONM}{\text{մակ.}\, OKM} = \frac{1}{2}\text{։}$$

36. OX թվային առանցքի L երկարության OA հատվածի վրա պատահականորեն գրված են երկու կետ՝ B(x) և C(y)։ Գտնել հավանականությունը, որ BC հատվածի երկարությունը կլինի փոքր, քան O կետի հեռավորությունը իրեն ամենամոտ կետից։ Ենթադրվում է, որ կետը հատվածի վրա ընկնելու հավանականությունը համեմատական է նրա երկարությանը և կախված չէ թվային առանցքի վրա նրա դիրքից։

Պատ.՝ Կոորդինատների հնարավոր արժեքներն են՝ $0 \le x \le L$, $0 \le y \le L$; նպաստող արժեքներն են՝ $y - x < x$, $y > x$, $x - y < y$, $y < x$; $P = \frac{1}{2}$։

37. OX թվային առանցքի L երկարության OA հատվածի վրա պատահականորեն գրված են B(x) և C(y) կետերը, ընդ որում $y \geq x$։ Գտնել հավանականությունը, որ BC հատվածի երկարությունը կլինի փոքր $\frac{L}{2}$-ից։ Ենթադրվում է, որ *կետը հատվածի վրա ընկնելու հավանականությունը համեմատական է երկարությանը և կախված չէ թվային առանցքի վրա նրա դիրքից:*

Պատ.՝ *կոորդինատների հնարավոր արժեքներն են.* $0 \leqslant x \leqslant L$, $0 \leqslant y \leqslant L$, $y > x$; *կոորդինատների նպաստավոր արժեքներն են.* $y - x < \frac{L}{2}$. $P = 0,75$։

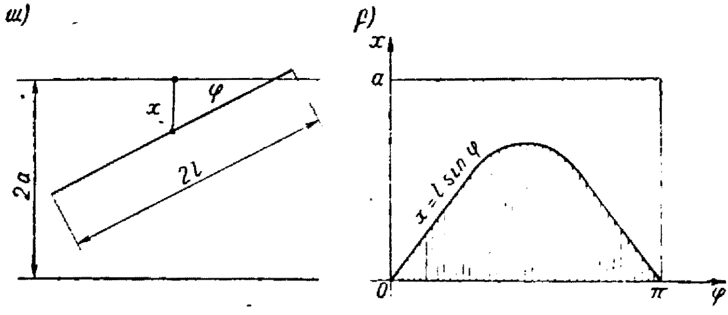
38. OX *թվային առանցքի* L *երկարության* OA *հատվածի վրա պատահականորեն դրված են երկու կետ՝* B(x) *և* C(y)*: Գտնել հավանականությունը, որ* BC *հատվածի երկարությունը, փոքր կլինի* $\frac{L}{2}$*-ից: Ենթադրվում է, որ կետի հատվածի վրա ընկնելու հավանականությունը համեմատական է հատվածի երկարությանը և կախված չէ թվային առանցքի վրա նրա դիրքից:*

Պատ.՝ *կոորդինատների հնարավոր արժեքներն են՝* $0 \leqslant x \leqslant L$, $0 \leqslant y \leqslant L$, *կոորդինատների բարենպաստ արժեքներն են՝* $y - x < \frac{L}{2}$, $y > x$; $x - y < \frac{L}{2}$, $y < x$; $P = 0,75$։

39. **Բյուֆֆոնի խնդիրը** *(Ֆրանսիական բնախույզ, XVIII դ.) Հարթությունը տրոհված է միմյանցից* 2a *հեռավորության վրա գտնվող զուգահեռ ուղիղներով: Հարթության վրա պատահականորեն գցում են* $2l$ ($l < a$) *երկարության ասեղը: Գտնել հավանականությունը, որ ասեղը չի հատի որևէ ուղիղ:*

Լուծում: *Մտցնենք նշանակումներ.* x*-ը ասեղի միջնակետի հեռավորությունն է մոտակա զուգահեռից.* φ*-ն՝ այդ զուգահեռի և ասեղի կազմած անկյունը (նկ. 2, ա):*

Ասեղի դիրքը լրիվին որոշվում է x*-ին և* φ*-ին որոշակի արժեքներ տալով, ընդ որում* x*-ը ընդունում է* 0*-ից մինչև* a *ընկած արժեքները,* φ*-ի հնարավոր արժեքները փոփոխվում են* 0*-ից մինչև* π*: Այլ կերպ ասած, ասեղի միջնակետը կարող է ընկնել* a *և* π *կողմերով ուղղանկյան ցանկացած կետ (նկ. 2, բ): Այսպիսով, այդ ուղղանկյունը կարելի է դիտարկել որպես մի* G *պատկեր, որի կետերը իրենցից* ներկայացնում են ասեղի միջնակետի բոլոր հնարավոր դիր-քերը։ Ակնհայտ է, որ G պատկերի մակերեսը $\pi \cdot a$ է։



Նկ. 2

Գտնենք այժմ այն g պատկերը, որի յուրաքանչյուր կետ նպաստավոր է մեզ հետաքրքրող պատահույթին, այսինքն այդ պատկերի յուրաքանչյուր կետ կարող է ծառայել որպես ասեղի կենտրոն, որ հատում է մոտակա զուգահեռը։ Ինչպես երևում է 2,ա նկարից, ասեղը կհատի մոտակա զուգահեռը $x \leq l \cdot \sin\varphi$ պայմանի դեպքում, այսինքն՝ եթե ասեղի միջնակետը ընկնի նկ. 2, բ-ի վրա ստվերագծված պատկերի յուրաքանչյուր կետը։

Այսպիսով, ստվերագծված պատկերը կարելի է դիտել որպես g պատկեր։

Գտնենք g պատկերի մակերեսը։

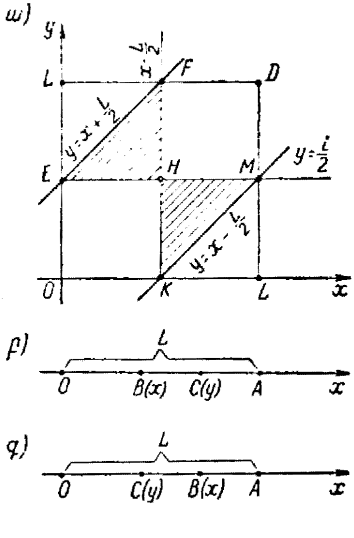
$$\text{մակ. } g = \int_0^{\pi} l \sin\varphi \, d\varphi = -l\cos\varphi \Big|_0^{\pi} = 2l։$$

Որոնելի հավանականությունը, որ ասեղը կհատի ուղիղը, կլինի՝

$$P = \frac{\text{մակ. } g}{\text{մակ. } G} = \frac{2l}{\pi a},$$

40. OX թվային առանցքի L երկարության OA հատվածի վրա պատահականորեն դրված են 2 կետ՝ B(x) և C(y)։

Գտնել հավանականությունը, որ ստացված երեք հատվածներից կարելի է կազմել եռանկյուն:



Նկ. 3

Լուծում: Որպեսզի երեք հատվածներով հնարավոր լինի կառուցել եռանկյուն, անհրաժեշտ է, որ նրանցից յուրաքանչյուրը փոքր լինի մյուս երկուսի գումարից: Քանի որ բոլոր հատվածների գումարը L է, ապա հատվածներից յուրաքանչյուրը պետք է փոքր լինի $\frac{L}{2}$-ից:

Դիտարկենք xOy ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգը: Ցանկացած երկու B և C կետերի կոորդինատները պետք է բավարարեն կրկնակի անհավասարություններին.

$$0 \leqslant x \leqslant L, \quad 0 \leqslant y \leqslant L:$$

Այս անհավասարություններին բավարարում են OLDL (նկ. 3, ա) քառակուսում գտնվող M(x,y) կետի կոորդինատները: Այսպիսով, այս քառակուսին կարելի է դիտել որպես G պատկեր, որի կետերի կոորդինատները իրենցից ներկայացնում են B և C կետերի կոորդինատների բոլոր հնարավոր արժեքները:

1. Դիցուք C կետը ընկած է B-ից աջ (նկ 3, բ): Ինչպես վերը ցույց է տրված, OB, BC, CA հատվածների երկարությունները պետք է փոքր լինեն $\frac{L}{2}$-ից, այսինքն՝ պետք է տեղի ունենան

$$x < \frac{L}{2}, \qquad y - x < \frac{L}{2}, \qquad L - y < \frac{L}{2} \qquad (*)$$

անհավասարությունները, կամ, որ նույնն է,

$$x < \frac{L}{2}, \quad y < \frac{L}{2} + x, \quad y > \frac{L}{2},$$

2. Դիցուք C կետը ընկած է B-ից ձախ (նկ. 3, գ)։ Այս դեպքում պետք է տեղի ունենան

$$y < \frac{L}{2}, \quad x - y < \frac{L}{2}, \quad L - x < \frac{L}{2}$$

անհավասարությունները կամ, որ նույնն է,

$$y < \frac{L}{2}, \quad y > x - \frac{L}{2}, \quad x > \frac{L}{2}; \qquad (**)$$

Ինչպես երևում է նկ. 3, ա-ից, (*) անհավասարությունները տեղի են ունենում EFH եռանկյան կետերի կոորդինատների համար, իսկ (**) անհավասարությունները՝ KHM եռանկյան կետերի։ Այսպիսով, տեղերագծված եռանկյունները կարելի է դիտել որպես g տիրույթ, որի կետերի կոորդինատները նպաստավոր են մեզ հետաքրքրող պատահույթին (երեք հատվածներից կարելի է կազմել եռանկյուն)։

Որոնելի հավանականությունը կլինի՝

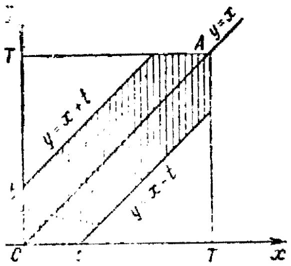
$$P = \frac{\text{մակ. } g}{\text{մակ. } G} = \frac{\text{մակ. } \Delta EFH + \text{մակ. } \Delta KHM}{\text{մակ. } OLDL} = \frac{1}{4}.$$

41. Ազդանշանիչն ընդունում է ազդանշաններ երկու սարքերից, ընդ որում յուրաքանչյուր ազդանշանի մուտքը հավասարահնարավոր է T երկարության ժամանակամիջոցի յուրաքանչյուր ակնթարթին։ Ազդանշանիչը կաշխատի, եթե ազդանշանների մուտքի ակնթարթների տարբերությունը փոքր է t-ից ($t < T$)։ Գտնել հավանականությունը, որ ազդանշանիչը T ժամանակամիջոցում կաշխատի, եթե յուրաքանչյուր սարք ուղարկում է մեկ ազդանշան։

Լուծում։ I և II ազդանշանների մուտքի ակնթարթները նշանակենք համապատասխանաբար x-ով և y-ով։ Ըստ խնդրի պայմանի պետք է տեղի ունենան հետևյալ կրկնակի անհավասարությունները՝

$$0 \leqslant x \leqslant T, \quad 0 \leqslant y \leqslant T։$$

Դիտարկենք xOy ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգը։ Այս համակարգում անհավասարություններին բավարարում են OTAT քառակուսու ցանկացած կետի կոորդինատները (նկ. 4)։ Այսպիսով, այս քառակուսին կարելի է դիտել որպես G պատկեր, որի կետերի կոորդինատները իրենցից ներկայացնում են ազդանշանները մտնելու ակնթարթների բոլոր հնարավոր արժեքները։



Նկ. 4.

Ազդանշանիչը կաշխատի, եթե ազդանշանները մտնելու ակնթարթների տարբերությունը փոքր է t-ից, այսինքն՝

$$y - x < t, \quad \text{եթե} \quad y > x$$

և

$$x - y < t, \quad \text{եթե} \quad x > y,$$

կամ, որ նույնն է,

$$y < x + t, \quad \text{եթե} \quad y > x \qquad (*)$$

$$y > x - t, \quad \text{եթե} \quad y < x \qquad (**)$$

(*) անհավասարությունը տեղի ունի G պատկերի այն կետերի կոորդինատների համար, որոնք ընկած են $y = x$ ուղղից վերև և $y = x + t$ ուղղից ներքև. (**) անհավասարությունը տեղի ունի $y = x$ ուղղից ներքև և $y = x - t$ ուղղից վերև ընկած կետերի համար։

Ինչպես երևում է նկ. 4-ից, բոլոր կետերը, որոնց կոորդինատները բավարարում են (*) և (**) անհավասարություններին, պատկանում են ստվերագծված վեցանկյանը։ Այսպիսով, այս վեցանկյանը կարելի է դիտել որպես g պատկեր, որի կետերի կոորդինատները նպաստում են ազդանշանիչի աշխատելուն ժամանակի x և y ակնթարթներին:

Որոնելի հավանականությունը՝

$$P = \frac{մակ.\ g}{մակ.\ G} = \frac{T^2 - 2 \cdot \frac{(T-t)^2}{2}}{T^2} = \frac{t(2T-t)}{T^2}:$$

42. Խնդիր հանդիպման վերաբերյալ: *Երկու ուսանող պայմանավորվել են հանդիպել որոշակի վայրում օրվա 12 և 13 ժամերի միջև: Առաջին եկողը սպասում է երկրորդին $\frac{1}{4}$ ժամ, որից հետո հեռանում է: Գտնել հավանականությունը, որ հանդիպումը կկայանա, եթե յուրաքանչյուր ուսանող պատահական է ընտրում իր գալու ակնթարթը (12-ից մինչև 13-ը ժամերի միջակայքում):*

Պատ. $P = \frac{7}{16}$:

43.* *Գտնել հավանականությունը, որ 1-ից ոչ շատ երկարություն ունեցող երեք պատահական վերցրած հատվածներից կարելի է կառուցել եռանկյուն: Ենթադրվում է, որ կետի տարածական մարմնի մեջ ընկնելու հավանականությունը համեմատական է մարմնի ծավալին և անկախ է նրա դիրքից:*

Ցուցում: Դիտարկել տարածական կոորդինատային համակարգ:

Պատ. կոորդինատների հնարավոր արժեքներն են՝ $0 < x < 1$, $0 < y < 1$, $0 < z < 1$: կոորդինատների նպաստավոր արժեքներն են՝ $x < y + z$, $y < z + x$, $z < x + y$. $P = \frac{1}{2}$:

44. *Պատահականորեն վերցված են 2 դրական թվեր՝ x և y, որոնցից յուրաքանչյուրը չի գերազանցում 2-ին: Գտնել հավանականությունը, որ xy արտադրյալը մեծ չէ 1-ից, իսկ $\frac{y}{x}$ քանորդը մեծ չէ 2-ից:*

Պատ.՝ կոորդինատների հնարավոր արժեքներն են՝ $0 < x < 2$,

$0 < y \leqslant 2$, *կոորդինատների նպաստավոր արժեքներն են՝* $0 < x \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$0 < y \geqslant \sqrt{2}$, *և* $\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant x \leqslant 2$, $\frac{1}{2} \leqslant y \leqslant 2$; $P = \frac{1 + 3\ln 2}{8} \approx 0{,}38$։

45. *Պատահականորեն վերցված են 2 դրական թվեր՝* x *և* y, *որոնցից յուրաքանչյուրը չի գերազանցում 1-ին։ Գտնել հավանականությունը, որ* $x + y$ *գումարը չի գերազանցում 1-ին, իսկ* xy *արտադրյալը փոքր չէ 0,09-ից։*

Պատ.՝ *կոորդինատների հնարավոր արժեքներն են՝* $0 < x \leqslant 1$, $0 < y \leqslant 1$; *կոորդինատների նպաստավոր արժեքներն են՝* $0{,}1 \leqslant x \leqslant 0{,}9$, $0{,}1 \leqslant y \leqslant 0{,}9$. $P \approx 0{,}2$։

ԵՐԿՐՈՐԴ ԳԼՈՒԽ
ՀԻՄՆԱԿԱՆ ԹԵՈՐԵՄՆԵՐ

§ 1. Հավանականությունների գումարման և բազմապատկման թեորեմները

Հավանականությունների գումարման թեորեմը անհամատեղելի պատահույթների համար։ Երկու անհամատեղելի պատահույթներից մեկի, միևնույնն է թե որի, հանդես գալու հավանականությունը հավասար է այդ հավանականությունների գումարին.

$$P(A + B) = P(A) + P(B)։$$

Հետևանք։ Մի քանի զույգ առ զույգ անհամատեղելի պատահույթներից մեկի, միևնույնն է թե որի, հանդես գալու հավանականությունը հավասար է այդ պատահույթների հավանականությունների գումարին.

$$P(A_1 + A_2 + \dots A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)։$$

Հավանականությունների գումարման թեորեմը համատեղելի պատահույթների համար։ Երկու համատեղելի պատահույթներից գոնե մեկի հանդես գալու հավանականությունը հավասար է այդ պատահույթների հավանականությունների գումարին առանց նրանց համատեղ հանդես գալու հավանականության.

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)։$$

Թեորեմը կարելի է ընդհանրացնել ցանկացած վերջավոր թվով համատեղելի պատահույթների համար։ Օրինակ, 3 համատեղելի պատահույթների համար ունենք.

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-$$
$$-P(BC)+P(ABC)$$

Հավանականությունների բազմապատկման թեորեմը անկախ պատահույթների համար: Երկու անկախ պատահույթների համատեղ հանդես գալու հավանականությունը հավասար է այդ պատահույթների հավանականությունների արտադրյալին.

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B).$$

Հետևանք։ Համախմբության մեջ անկախ մի քանի պատահույթների հանդես գալու հավանականությունը հավասար է այդ պատահույթների հավանականությունների արտադրյալին.

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdots P(A_n).$$

Հավանականությունների բազմապատկման թեորեմը կախյալ պատահույթների համար: Երկու կախյալ պատահույթների համատեղ հանդես գալու հավանականությունը հավասար է նրանցից մեկի հավանականությունը բազմապատկած մյուսի պայմանական հավանականությամբ.

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P_A(B),$$

$$P(A\cdot B)=P(B)\cdot P_B(A).$$

Հետևանք։ Մի քանի կախյալ պատահույթների համատեղ հանդես գալու հավանականությունը հավասար է նրանցից մեկի հավանականությունը բազմապատկած մնացած բոլորի պայմանական հավանականություններով, ընդ որում յուրաքանչյուր հաջորդի հավանականությունը հաշվվում է այն պայմանով, որ բոլոր նախորդները տեղի են ունեցել.

$$P(A_1A_2A_3\cdots A_n)=P(A_1)\cdot P_{A_1}(A_2)\cdot P_{A_1A_2}(A_3)\cdots P_{A_1A_2\cdots A_{n-1}}(A_n),$$

որտեղ $P_{A_1A_2\cdots A_{n-1}}(A_n)$-ը A_n պատահույթի հավանականությունն է, երբ հայտնի է, որ $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ պատահույթները տեղի են ունեցել։

46. *Գրադարանի դարակի վրա պատահականորեն դրված են 15 դասագրքեր, որոնցից 5-ը՝ կազմով։ Գրադարանավարը պատահականորեն վերցնում է 3 դասագիրք։*

Գտնել հավանականությունը, որ վերցրած դասագրքերից գոնե մեկը կազմով է (A պատահույթ)։

Լուծում։ Առաջին եղանակ։ Պահանջը՝ վերցրած 3 դասագրքերից գոնե մեկը կազմով է — կկատարվի, եթե հանդես գա հետևյալ 3 անհամատեղելի պատահույթներից ցանկացածը. B-ն՝ մեկ դասագիրքը կազմով է, իսկ մնացած 2-ը՝ անկազմ, C-ն՝ 2 դասագիրք կազմով են, 1-ը՝ անկազմ, D-ն՝ 3 դասագրքերն էլ կազմով են։

Մեզ հետաքրքրող A պատահույթը (վերցրած 3 դասագրքերից գոնե մեկը կազմով է) կարելի է ներկայացնել որպես այդ 3 պատահույթների գումար.

$$A = B + C + D։$$

Ըստ գումարման թեորեմի՝

$$P(A) = P(B) + P(C) + P(D)։ \qquad (*)$$

Գտնենք B, C, D պատահույթների հավանականությունը (տես գլ. 1, § 1-ի 17-րդ խնդրի լուծումը).

$$P(B) = \frac{C_5^1 \cdot C_{10}^2}{C_{15}^3} = \frac{45}{91}, \quad P(C) = \frac{C_5^3 \cdot C_{10}^1}{C_{15}^3} = \frac{20}{91}, \quad P(D) = \frac{C_5^3}{C_{15}^3} = \frac{2}{91}։$$

Տեղադրելով այս հավանականությունները (*) հավասարության մեջ, վերջնականապես կունենանք.

$$P(A) = \frac{45}{91} + \frac{20}{91} + \frac{2}{91} = \frac{67}{91}։$$

Երկրորդ եղանակ։ A պատահույթը (վերցրած 3 դասագրքերից գոնե 1-ը կազմով է) և $\bar{A}$ (վերցրած դասագրքերից ոչ մեկը կազմով չէ) պատահույթը իրար հակադիր են, հետևապես

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

(Երկու հակադիր պատահույթների հավանականությունների գումարը հավասար է 1-ի)։

Որտեղից

$$P(A)=1-P(\bar{A})։$$

$\bar{A}$ պատահույթի հանդես գալու հավանականությունը (վերցրած դասագրքերից ոչ մեկը կազմով չէ)

$$P(\bar{A})=\frac{C_{10}^3}{C_{15}^3}=\frac{24}{91}։$$

Որոնելի հավանականությունը

$$P(A)=1-P(\bar{A})=1-\frac{24}{91}=\frac{67}{91}։$$

47. Արկղում կա 10 դետալ, որոնցից 4-ը ներկված է։ Հավաքողը պատահականորեն վերցնում է 3 դետալ։ Գտնել հավանականությունը, որ վերցրած դետալներից գոնե մեկը ներկված է։

Պատ.՝ $P=1-\frac{C_6^3}{C_{10}^3}=\frac{5}{6}$։

48. Ապացուցել, որ եթե A պատահույթից հետևում է B պատահույթը, ապա $P(B)\geqslant P(A)$։

Լուծում։ B պատահույթը կարելի է ներկայացնել A և $\bar{A}B$ անհամատեղելի պատահույթների գումարի տեսքով.

$$B=A+\bar{A}B։$$

Անհամատեղելի պատահույթների համար հավանականությունների գումարման թեորեմից

$$P(B)=P(A+\bar{A}B)=P(A)+P(\bar{A}B)։$$

Քանի որ $P(\bar{A}B)\geqslant 0$, ապա $P(B)\geqslant P(A)$։

49. A_1 և A_2 անկախ պատահույթների հանդես գալու հավանականությունները համապատասխանաբար հավասար են P_1-ի և P_2-ի։ Գտնել նրանցից միայն մեկի հանդես գալու հավանականությունը։

Լուծում։ Մտցնենք պատահույթների հետևյալ նշանակումները.

B_1՝ տեղի է ունեցել միայն A_1 պատահույթը, B_2՝ տեղի է ունեցել միայն A_2 պատահույթը։

B_1 պատահույթի հանդես գալը համարժեք է $A_1\bar{A}_2$ պատահույթի հանդես գալուն (առաջին պատահույթը հանդես է եկել և երկրորդը՝ ոչ), այսինքն՝ $B_1 = A_1 \cdot \bar{A}_2$։

B_2 պատահույթի հանդես գալը համարժեք է $\bar{A}_1A_2$ պատահույթի հանդես գալուն (երկրորդ պատահույթը հանդես է եկել և առաջինը՝ ոչ), այսինքն՝ $B_2 = \bar{A}_1 \cdot A_2$։

Այսպիսով, որպեսզի գտնենք A_1 և A_2 պատահույթներից միայն մեկի հանդես գալու հավանականությունը, բավական է գտնել B_1 և B_2 պատահույթներից մեկի, կարևոր չէ որի, հանդես գալու հավանականությունը։ B_1 և B_2 պատահույթները անհամատեղելի են, ուստի կիրառելի է գումարման թեորեմը.

$$P(B_1 + B_2) = P(B_1) + P(B_2)\text{։} \qquad (*)$$

Մնում է գտնել B_1 և B_2 պատահույթներից յուրաքանչյուրի հավանականությունը։ A_1 և A_2 պատահույթները անկախ են, հետևաբար, անկախ են A_1 և $\bar{A}_2$, ինչպես նաև $\bar{A}_1$ և A_2 պատահույթները, ուստի կիրառելի է բազմապատկման թեորեմը.

$$P(B_1) = P(A_1 \cdot \bar{A}_2) = P(A_1) \cdot P(\bar{A}_2) = p_1 \cdot q_2,$$

$$P(B_2) = P(\bar{A}_1 \cdot A_2) = P(\bar{A}_1) \cdot P(A_2) = q_1 \cdot p_2\text{։}$$

Տեղադրելով այս հավանականությունները (*) առնչության մեջ, կգտնենք A_1 և A_2 պատահույթներից միայն մեկի հանդես գալու որոնելի հավանականությունը.

$$P(B_1 + B_2) = p_1 q_2 + p_2 \cdot q_1\text{։}$$

50. Վթարի ազդանշանման համար դրված են երկու անկախ գործող ազդանշանիչներ։ Հավանականությունը, որ վթարի դեպքում ազդանշանիչը կաշխատի՝ I ազդանշանիչի համար հավասար է 0.95-ի, իսկ II-ի համար՝ 0,9-ի: Գըտնել հավանականությունը, որ վթարի դեպքում կգործի միայն մեկ ազդանշանիչը:

Պատ.՝ $P = 0,14$:

51. *Երկու հրաձիգ կրակում են թիրախին: Մեկ կրակոցով թիրախին դիպչելու հավանականությունը I հրաձիգի համար հավասար է 0,7-ի, իսկ II-ի համար՝ 0,8-ի: Գտնել հավանականությունը, որ մեկ համազարկի դեպքում թիրախին կդիպչի միայն հրաձիգներից մեկը:*

Պատ.՝ $P = 0,38$:

52. *Երկու հրանոթից մեկ համազարկի դեպքում նշանակետին մեկ անգամ դիպչելու հավանականությունը հավասար է 0,38-ի: Գտնել առաջին հրանոթով մեկ անգամ կրակելիս նշանակետին խոցելու հավանականությունը, եթե հայտնի է, որ երկրորդ հրանոթի համար այդ հավանականությունը հավասար է 0,8-ի:*

Պատ.՝ $P = 0,7$:

53. *Տեխնիկական հսկողության բաժինը ստուգում է սարքերի միօրինակությունը: Հավանականությունը, որ սարքը միօրինակ է, հավասար է 0,9-ի: Գտնել հավանականությունը, որ ստուգված երկու սարքերից միայն մեկն է միօրինակ:*

Պատ.՝ $P = 0,18$:

54. *Հավանականությունը, որ որևէ ֆիզիկական մեծության մեկ անգամ չափելիս թույլ կտրվի սխալ, որը կգերազանցի տրված ճշտությունը, հավասար է 0,4-ի: Կատարված են երեք անկախ չափումներ: Գտնել հավանականությունը, որ նրանցից միայն մեկի դեպքում թույլ տրված սխալը կգերազանցի տրված ճշտությունը:*

Պատ.՝ $P = 0,432$:

55. *Արտադրանքի նմուշից ապրանքագետը ընտրում է բարձր տեսակի արտադրանք: Հավանականությունը, որ ընտ-*

տահական վերցրած արտադրանքը կլինի բարձր տեսակի, հավասար է 0,8-ի: Գտնել հավանականությունը, որ ստուգված 3 արտադրանքից միայն 2-ն են բարձր տեսակի:

Պատ.՝ $P = 0{,}384$:

56. *Ուսանողը 3 տեղեկագրքերում փնտրում է իրեն պետք եկած բանաձևը: Հավանականությունը, որ բանաձևը պարունակվում է I, II և III տեղեկագրքերում, համապատասխանաբար հավասար է 0,6-ի, 0,7-ի, 0,8-ի: Գտնել հավանականությունը, որ բանաձևը պարունակվում է. ա) միայն մեկ տեղեկագրքում, բ) միայն 2 տեղեկագրքերում, գ) բոլոր 3 տեղեկագրքերում:*

Պատ.՝ ա) $P = 0{,}188$, բ) $P = 0{,}452$, գ) $P = 0{,}336$:

57. *Հավանականությունները, որ հավաքողին անհրաժեշտ դետալը գտնվում է I, II, III և IV արկղերում, համապատասխանաբար հավասար են 0,6-ի, 0,7-ի, 0,8-ի, 0,9-ի: Գտնել հավանականությունը, որ դետալը գտնվում է. ա) 3-ից ոչ ավելի արկղերում, բ) 2-ից ոչ պակաս արկղերում:*

Պատ.՝ ա) $P = 0{,}6976$, բ) $P = 0{,}9572$:

58. *Գցված են 3 խաղոսկր: Գտնել հետևյալ պատահույթների հավանականությունները. ա) յուրաքանչյուրի վրա կբացվի 5 միավոր, բ) բոլորի վրա կբացվեն հավասար թվով միավորներ:*

Պատ.՝ ա) $P = \frac{1}{6^3}$ բ) $P = 6 \cdot \frac{1}{6^3} = \frac{1}{36}$:

59. *Գցված են 3 խաղոսկր: Գտնել հետևյալ պատահույթների հավանականությունները. ա) երկուսի վրա կհայտնվի 1 միավոր, իսկ երրորդի վրա՝ այլ թվով միավորներ, բ) երկուսի վրա կհայտնվեն հավասար միավորներ, իսկ երրորդի վրա այլ թվով միավորներ, գ) բոլորի վրա կհայտնվեն տարբեր միավորներ:*

Պատ.՝ ա) $P = C_3^2 \cdot \frac{1}{6^2} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{72}$, բ) $P = \frac{5}{12}$, գ) $P = \frac{5}{9}$:

60. *Քանի՞ խաղոսկր պետք է գցել, որ 0,3-ից քիչ հավանականությամբ սպասելի լինի, որ ոչ մեկի վրա 6 միավոր չի երևա։*

Լուծում։ Մտցնենք հետևյալ պատահույթների նշանակումները։

A՝ ոչ մի խաղոսկրի վրա 6 միավոր չի հայտնվի. Ai՝ i-րդի վրա ($i = 1, 2, \ldots, n$) 6 միավոր չի հայտնվի։

Մեզ հետաքրքրող A պատահույթը կայանում է A_1, $A_2 \ldots, A_n$ պատահույթների համատեղվելում, այսինքն՝ $A = A_1 A_2 \ldots A_n$

Հավանականությունը, որ ցանկացած խաղոսկրի վրա հայտնված միավորների թիվը հավասար չէ 6-ի, հավասար է

$$P(A_i) = \frac{5}{6}\text{:}$$

A_i պատահույթները համախմբության մեջ անհամատեղելի են, ուստի կիրառելի է բազմապատկման թեորեմը։

$$P(A) = P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \ldots P(A_n) = \left(\frac{5}{6}\right)^n\text{:}$$

Ըստ պայմանի $\left(\frac{5}{6}\right)^n < 0,3$։ Հետևաբար՝ $n \cdot \log\frac{5}{6} < \log 0,3$։ Այստեղից, հաշվի առնելով, որ $\log\frac{5}{6} < 0$, կստանանք $n > 6,6$։ Այսպիսով, խաղոսկրերի որոնելի թիվը՝ $n \geq 7$։

61. *Մեկ կրակոցով հրաձգի թիրախին դիպչելու հավանականությունը 0,8 է։ Քանի՞ կրակոց պետք է նա կատարի, որպեսզի 0,4-ից փոքր հավանականությամբ կարելի լինի սպասել, որ ոչ մի դիպում չի լինի։*

Պատ.՝ $n \geq 5$։

62. R *շառավղով շրջանին ներգծված է կանոնավոր եռանկյուն։ Շրջանի ներսը պատահականորեն նետված են 4 կետեր։ Գտնել հետևյալ պատահույթների հավանականությունը, որ՝ ա) բոլոր 4 կետերը կընկնեն եռանկյան ներսը, բ) մեկ կետ կընկնի եռանկյան ներսը և մեկական՝ «փոքր» սեգմենտները։ Ենթադրվում է, որ կետի պատկերի մեջ ընկ-*

նելու հավանականությունը համեմատական է նրա մակերեսին և կախված չէ նրա դիրքից:

Պատ.՝ ա) $P=\left(\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}\right)^4$, բ) $P=3!\,\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}\cdot\left(\frac{4\pi-3\sqrt{3}}{12\pi}\right)^3$

63. *Հատվածը բաժանված է 3 հավասար մասերի: Հատվածի վրա պատահականորեն նետված են 3 կետեր: Գտնել հավանականությունը, որ հատվածի յուրաքանչյուր մասին կընկնի մեկական կետ: Ենթադրվում է, որ կետը հատվածի վրա ընկնելու հավանականությունը համեմատական է հատվածի երկարությանը և կախված չէ նրա դիրքից:*

Պատ.՝ $P=3!\left(\frac{1}{3}\right)^3$,

64. *Ընթերցասրահում կա հավանականությունների տեսության 6 դասագիրք, որոնցից 3-ը կազմով է: Գրադարանավարը պատահականորեն վերցնում է 2 դասագիրք: Գտնել հավանականությունը, որ երկու դասագրքերն էլ կազմով են:*

Լուծում: Դիտարկենք հետևյալ պատահականությունների նշանակումները A՝ վերցրած առաջին դասագիրքն ունի կազմ, B՝ երկրորդ դասագիրքն ունի կազմ:

Հավանականությունը, որ I դասագիրքն ունի կազմ.

$$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}:$$

Հավանականությունը, որ երկրորդ դասագիրքն ունի կազմ, այն պայմանով, որ վերցրած առաջին գիրքը եղել է կազմով, այսինքն՝ B պատահույթի պայմանական հավանականությունը՝

$$P_A(B)=\frac{2}{5}:$$

Որոնելի հավանականությունը, որ երկու դասագրքերն էլ ունեն կազմ, ըստ հավանականությունների բազմապատկման թեորեմի կախյալ պատահույթների համար, հավասար է.

$$P(AB)=P(A)\cdot P_A(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}=0{,}2:$$

65. *Ինչ-որ վայրում հուլիս ամսին ամպամած օրերի միջին թիվը հավասար է 6-ի։ Գտնել հավանականությունը, որ հուլիսի մեկին և երկուսին կլինի պարզ եղանակ։*

Պատ.՝ $P = \frac{25}{31} \cdot \frac{24}{30} = \frac{20}{31}$,

66. *Արտադրամասում աշխատում են 7 տղամարդ և 3 կին։ Ըստ ցուցակի համարների պատահականորեն ընտրում են 3 մարդ։ Գտնել հավանականությունը, որ բոլոր ընտրվածները տղամարդիկ են։*

Լուծում։ Մտցնենք հետևյալ պատահույթների նշանակումները, A՝ I ընտրվածը տղամարդ է, B՝ II ընտրվածը տղամարդ է. C՝ III ընտրվածը տղամարդ է։

Հավանականությունը, որ սկզբում կընտրվի տղամարդ։

$$P(A) = \frac{7}{10},$$

Հավանականությունը, որ II ընտրվածը կլինի տղամարդ, այն պայմանով, որ I ընտրվածը եղել է տղամարդ, այսինքն՝ B պատահույթի պայմանական հավանականությունը՝

$$P_A(B) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3},$$

Հավանականությունը, որ III ընտրվածը կլինի տղամարդ, այն պայմանով, որ արդեն ընտրված են 2 տղամարդ, այսինքն՝ C պատահույթի պայմանական հավանականությունը.

$$P_{AB}(C) = \frac{5}{8},$$

Որոնելի հավանականությունը, որ բոլոր 3 ընտրվածները տղամարդիկ են.

$$P(ABC) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{AB}(C) = \frac{7}{10} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{8} = \frac{7}{24},$$

67. *Արկղում կա 10 դետալ, որոնցից 6-ը ներկված է։ Հավաքողը պատահականորեն հանում է 4 դետալ։ Գտնել* *հավանականությունը, որ բոլոր հանված դետալները կլինեն ներկված։*

Պատ. $P=\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}=\frac{1}{14}$։

68. *Սափորում կա 5 գնդակ՝ 1-ից մինչև 5 համարներով։ Պատահականորեն մեկական հանում են 3 գնդակ առանց վերադարձնելու։ Գտնել հետևյալ պատահույթների հավանականությունները. ա) հաջորդաբար հանդես կգան 1,4,5 համարներով գնդակները, բ) հանված գնդակներն ունեն 1,4,5 համարները անկախ նրանց հանդես գալու հերթականությունից։*

Պատ. *ա)* $P=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{60}$, *բ)* $P=0,1$։

69. *Ուսանողը գիտե ծրագրի 25 հարցերից 20-ը։ Գտնել հավանականությունը, որ ուսանողը գիտե քննողի կողմից նրան առաջադրված 3 հարցերը։*

Պատ.՝ $P=\frac{20}{25}\cdot\frac{19}{24}\cdot\frac{18}{23}=\frac{57}{115}$։

70. *Պարկը պարունակում է 10 միատեսակ խորանարդիկներ՝ 1-ից մինչև 10 համարներով։ Պատահականորեն մեկական հանում են 3 խորանարդիկ։ Գտնել հավանականությունը, որ հաջորդաբար հանդես կգան 1, 2, 3 համարներով խորանարդիկները, եթե նրանք հանվում են. ա) անվերադարձ, բ) վերադարձումով (հանված խորանարդիկը վերադարձվում է պարկ)։*

Պատ.՝ *ա)* $P=\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{720}$, *բ)* $P=0,001$։

71. *Անգլիայի և Ուելսի մարդահամարի (1891 թ.) տվյալներով հաստատված է, որ մուգ գույնի աչքերով հայրերը և մուգ գույնի աչքերով որդիները կազմում են հետազոտվածների 5%-ը* (AB), *մուգ գույնի աչքերով հայրերը և բաց գույնի աչքերով որդիները՝ 7,9%* ($A\bar{B}$), *բաց գույնի աչքերով հայրերը և մուգ գույնի աչքերով որդիները՝ 8,9%*

($\bar{A}B$), *բաց գույնի աչքերով հայրերը և բաց գույնի աչքերով որդիները՝* 78,2% ($\bar{A}\,\bar{B}$)։ *Գտնել հոր և որդու աչքերի գույների կապը։*

Լուծում։ Ըստ պայմանի $P(AB)=0{,}05$, $P(A\bar{B})=$ $=0{,}079$, $P(\bar{A}B)=0{,}089$, $P(\bar{A}\,\bar{B})=0{,}782$։

Գտնենք պայմանական հավանականությունը, որ որդին մուգ գույնի աչքերով է, եթե հայրը մուգ գույնի աչքերով է.

$$P_A(B)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(AB)}{P(AB)+P(A\bar{B})}=\frac{0{,}05}{0{,}05+0{,}079}=0{,}39,$$

Գտնենք պայմանական հավանականությունը, որ որդին բաց գույնի աչքերով է, եթե հայրը մուգ գույնի աչքերով է.

$$P_A(\bar{B})=1-P_A(B)=1-0{,}39=0{,}61,$$

Գտնենք պայմանական հավանականությունը, որ որդին մուգ գույնի աչքերով է, եթե հայրը բաց գույնի աչքերով է.

$$P_{\bar{A}}(B)=\frac{P(\bar{A}\cdot B)}{P(\bar{A})}=\frac{P(\bar{A}B)}{P(\bar{A}B)+P(\bar{A}\,\bar{B})}=\frac{0{,}089}{0{,}089+0{,}782}=$$
$$=0{,}102,$$

Գտնենք պայմանական հավանականությունը, որ որդին բաց գույնի աչքերով է, եթե հայրը բաց գույնի աչքերով է.

$$P_{\bar{A}}(\bar{B})=1-P_{\bar{A}}(B)=1-0{,}102=0{,}898,$$

72. *Գտնել* $P(A)$ *հավանականությունը տրված* $P(AB)=$ $=0{,}72$, $P(A\bar{B})=0{,}18$ *հավանականությունների միջոցով։*

Լուծում։ A *պատահույթը կարելի է ներկայացնել հետևյալ անհամատեղելի պատահույթների գումարի տեսքով.*

$$A=AB+A\bar{B},$$

Ըստ գումարման թեորեմի անհամատեղելի պատահույթների համար, կունենանք.

$$P(A)=P(AB+A\bar{B})=P(AB)+P(A\bar{B})=0{,}72+$$
$$+0{,}18=0{,}9,$$

73. *Գտնել* $P(A\overline{B})$ *հավանականությունը տրված* $P(A)=a$, $P(B)=b$, $P(A+B)=c$ *հավանականություններով։*

Լուծում։ Օգտագործելով $P(A)=P(AB)+P(A\overline{B})$ *նույնությունը, կգտնենք*

$$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=a-P(AB)\text{։} \qquad (*)$$

$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$ *հավասարությունից արտահայտենք* $P(AB)$*-ն.*

$$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A+B)=a+b-c \qquad (**)$$

Տեղադրելով (**)-ը (*)-ի մեջ, կստանանք

$$P(A\overline{B})=a-(a+b-c)=c-b\text{։}$$

74. *Գտնել* $P(\overline{A}\,\overline{B})$ *հավանականությունը տրված*

$P(A)=a$, $P(B)=b$, $P(A+B)=c$ *հավանականություններով։*

Լուծում։ Օգտագործելով $P(\overline{B})=P(A\overline{B})+P(\overline{A}\,\overline{B})$ *նույնությունը գտնենք* $P(\overline{A}\,\overline{B})$*-ն.*

$$P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{B})-P(A\overline{B})=(1-b)-P(A\overline{B})\text{։}$$

Տեղադրելով վերջին հավասարության մեջ $P(A\overline{B})=c-b$, *(տես խնդիր 73), կստանանք*

$$P(\overline{A}\,\overline{B})=1-b-(c-b)=1-c\text{։}$$

75. AB *պատահույթի հանդես գալուց հետևում է* C *պատահույթի հանդես գալը։ Ապացուցել, որ* $P(A)+P(B)-P(c)\leqslant 1$։

Լուծում։ Ըստ պայմանի՝ AB *պատահույթի հանդես գալուց հետևում է* c *պատահույթի հանդես գալը, հետևաբար (տես խնդիր 48)։*

$$P(C)\geqslant P(AB)\text{։} \qquad (*)$$

Օգտագործելով $P(A)=P(AB)+P(A\overline{B})$, $P(B)=P(AB)+P(\overline{A}B)$, $P(AB)+P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)=1-P(\overline{A}\,\overline{B})$

նույնությունները և հաշվի առնելով (*) անհավասարությունը, կստանանք

$$P(A)+P(B)-P(c)\leqslant[P(AB)+P(A\overline{B})]+[P(AB)+$$
$$+P(\overline{A}B)]-P(AB)=P(AB)+P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)=$$
$$=1-P(\overline{A}\,\overline{B})\leqslant 1։$$

Դիտողություն։ Խորհուրդ է տրվում ընթերցողին ինքնուրույն համոզվել, որ մասնավոր դեպքում, երբ $C=A\cdot B$ *ճիշտ է*

$$P(A)+P(B)-P(AB)\leqslant 1$$ *անհավասարությունը։*

76. *Ապացուցել, որ*

$$P_A(B)\geqslant 1-\frac{P(B)}{P(A)},$$

Ենթադրվում է, որ $P(A)>0$։

Լուծում։ 75-րդ խնդրի դիտողության շնորհիվ ճիշտ է հետևյալ անհավասարությունը.

$$P(A)+P(B)-P(AB)\leqslant 1, \qquad (*)$$

Օգտվենք հետևյալ նույնություններից՝

$$P(AB)=P(A)\cdot P_A(B),\quad P(B)=1-P(\overline{B}), \qquad (**)$$

Տեղադրելով (**)-ը (*)-ի մեջ, կստանանք.

$$P(A)+1-P(\overline{B})-P(A)\cdot P_A(B)\leqslant 1$$

կամ

$$P(A)\cdot P_A(B)\geqslant P(A)-P(\overline{B}),$$

Բաժանելով այս անհավասարության երկու մասերը $P(A)>0$ *դրական թվի վրա, վերջնականապես կստանանք.*

$$P_A(B)\geqslant 1-\frac{P(\overline{B})}{P(A)},$$

77. ABC *պատահույթի հանդես գալուց հետևում է* D *պատահույթի հանդես գալը։ Ապացուցել, որ*

$$P(A)+P(B)+P(c)-P(D)\leqslant 2,$$

Լուծում։ *Ըստ պայմանի,* ABC *պատահույթի հանդես գալուց հետևում է* D *պատահույթի հանդես գալը, հետևաբար (տես խնդիր 48)։*

$$P(D) \geqslant P(ABC)\text{։}$$

Այսպիսով, եթե ապացուցենք, որ

$$P(A)+P(B)+P(C)-P(ABC) \leqslant 2, \qquad (*)$$

ապա ճշմարիտ կլինի և խնդրի պայմանում նշված անհավասարությունը։

Ապացուցենք (*) անհավասարությունը։ Օգտվենք հետևյալ նույնություններից.

$$\left.\begin{aligned} P(A)&=P(ABC)+P(AB\bar{C})+P(A\bar{B}C)+P(A\bar{B}\bar{C}),\\ P(B)&=P(ABC)+P(\bar{A}BC)+P(AB\bar{C})+P(\bar{A}B\bar{C}),\\ P(C)&=P(ABC)+P(\bar{A}BC)+P(A\bar{B}C)+P(\bar{A}\bar{B}C)\text{։}\end{aligned}\right| \qquad (**)$$

Լրիվ խումբը կազմող պատահույթների հավանականությունների գումարը հավասար է 1-ի, հետևաբար

$$P(ABC)+P(\bar{A}BC)+P(A\bar{B}C)+P(AB\bar{C})+P(\bar{A}\bar{B}C)+ P(\bar{A}B\bar{C})+P(A\bar{B}\bar{C})+P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})=1\text{։}$$

Այստեղից

$$P(ABC)+P(\bar{A}BC)+P(A\bar{B}C)+P(AB\bar{C})= =1-[P(\bar{A}\bar{B}C)+P(A\bar{B}\bar{C})+P(\bar{A}B\bar{C})+P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})]\text{։} \qquad (***)$$

Տեղադրելով (**)-ը (*)-ի մեջ և օգտագործելով (***)-ը, պարզեցումներից հետո կունենանք

$$P(A)+P(B)+P(B)-P(ABC)= =2-[2P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})+P(\bar{A}\bar{B}C)+P(A\bar{B}\bar{C})+P(\bar{A}B\bar{C})]\text{։}$$

Հաշվի առնելով, որ միջակ փակագծերում յուրաքանչյուր գումարելի բացասական չէ, վերջնականապես կունենանք.

$$P(A)+P(B)+P(C)-P(D) \leqslant 2\text{։}$$

78. *Դուրս բերել 3 համատեղելի պատահույթների համար հավանականությունների գումարման թեորեմը.*

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-$$
$$-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC),$$

Ենթադրվում է, որ երկու համատեղելի պատահույթների համար գումարման թեորեմը արդեն ապացուցված է.

$$P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2),$$

Լուծում։ Բերենք 3 պատահույթների գումարը երկու պատահույթների գումարի.

$$A+B+C=(A+B)+C,$$

Օգտվենք երկու պատահույթների համար հավանականությունների գումարման թեորեմից

$$P(A+B+C)=P[(A+B)+C]=P(A+B)+P(C)-$$
$$-P[(A+B)\cdot C]=P(A+B)+P(C)-P[(AC)+(BC)],$$

Կիրառենք գումարման թեորեմը երկու համատեղելի պատահույթների համար երկու անգամ (A և B պատահույթների, ինչպես նաև AC ու BC պատահույթների համար)։

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)-P(AB)+P(C)-$$
$$-\{P(AC)+P(BC)-P[(AC)\cdot(BC)]\},$$

Հաշվի առնելով, որ $P[(AC)\cdot(BC)]=P(ABC)$, *վերջնականապես կստանանք,*

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-$$
$$-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC),$$

79.* *Տրված են A, B, C 3 զույգ առ զույգ անկախ պատահույթներ, որոնք, սակայն, բոլոր 3-ով միասին հանդես գալ չեն կարող։ Ենթադրվում է, որ նրանք բոլորն ունեն միևնույն p հավանականությունը։ Գտնել p-ի ամենամեծ հնարավոր արժեքը։*

Լուծում։ Առաջին եղանակ։ Ըստ պայմանի

$$P(ABC)=0,\ \ P(\bar{A})=P(\bar{B})=P(\bar{C})=1-p,\ \ P(AB)=$$
$$=P(A)\cdot P(B)=p^2,\ P(AC)=p^2,\ P(BC)=p^2։$$

Գտնենք լրիվ խումբ կազմող հետևյալ պատահույթների հավանականությունները.

$$A\bar{B}\bar{C},\ B\bar{A}\bar{C},\ C\bar{A}\bar{B},\ AB\bar{C},\ AC\bar{B},\ BC\bar{A},\ ABC,\ \bar{A}\bar{B}\bar{C}։$$

Որպեսզի գտնենք $AB\bar{C}$ *պատահույթի հավանականությունը, ներկայացնենք* AB *պատահույթը երկու անհամատեղելի պատահույթների գումարի տեսքով.*

$$AB=ABC+AB\bar{C}։$$

Ըստ գումարման թեորեմի

$$P(AB)=P(ABC)+P(AB\bar{C})։$$

Որտեղից՝

$$P(AB\bar{C})=P(AB)-P(ABC)=p^2։$$

Համանման ձևով կգտնենք

$$P(AC\bar{B})=P(BC\bar{A})=p^2։$$

Որպեսզի գտնենք $A\bar{B}\bar{C}$ *պատահույթի հավանականությունը,* $A\bar{B}$ *պատահույթը ներկայացնենք երկու անհամատեղելի պատահույթների գումարի տեսքով.*

$$A\bar{B}=A\bar{B}C+A\bar{B}\bar{C}։$$

Ըստ գումարման թեորեմի.

$$P(A\bar{B})=P(A\bar{B}C)+P(A\bar{B}\bar{C})։$$

Այստեղից

$$P(A\bar{B}\bar{C})=P(A\bar{B})-P(A\bar{B}C)=p(1-p)-p^2=p-2p^2։$$

Համանման ձևով կունենանք

$$P(B\bar{A}\bar{C})=P(C\bar{A}\bar{B})=p-2p^2։$$

Գտնենք $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ *պատահույթի հավանականությունը։ Դրա* համար բավական է 1-ից հանել մնացած պատահույթների հավանականությունները, որոնք կազմում են լրիվ խումբ.

$$P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}) = 1 - [3(p-2p^2) + 3p^2] = 3p^2 - 3p + 1\text{։}$$

Հաշվի առնելով, որ ցանկացած հավանականություն ընկած է 0-ի և 1-ի միջև, պահանջենք, որ բոլոր գտնված հավանականությունները բավարարեն այդ պայմանին.

$$\begin{cases} 0 \leqslant p^2 \leqslant 1, \\ 0 \leqslant p - 2p^2 \leqslant 1, \\ 0 \leqslant 3p^2 - 3p + 1 \leqslant 1\text{։} \end{cases} \qquad (*)$$

Լուծելով համակարգի յուրաքանչյուր անհավասարություն, համապատասխանաբար կստանանք.

$$\begin{cases} 0 \leqslant p \leqslant 1, \\ 0 \leqslant p \leqslant \dfrac{1}{2}, \\ 0 \leqslant p \leqslant 1\text{։} \end{cases}$$

Այսպիսով, p-ի ամենամեծ արժեքը, որը բավարարում է անհավասարությունների (*) համակարգի բոլոր երեք անհավասարություններին, հավասար է $\frac{1}{2}$-ի։

Երկրորդ եղանակ. Նշանակենք հետևյալ նշանակումը. $P(A+B+C) = k$։ Օգտվելով 3 համատեղելի պատահույթների համար գումարման թեորեմից և հաշվի առնելով, որ $P(A) = P(B) = P(C) = p$, $P(AB) = P(AC) = P(BC) = p^2$, $P(ABC) = 0$, կստանանք

$$K = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC) = 3p - 3p^2\text{։}$$

Լուծելով այս հավասարումը p-ի նկատմամբ, կստանանք

$$p = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4k/3}}{2},$$

Եթե $p=\frac{1-\sqrt{1-4k/3}}{2}$, *ապա* p*-ն հասնում է իր առավելագույն արժեքին՝* $p=\frac{1}{2}$ $\left(\text{երբ } k=\frac{3}{4}\right)$։

Եթե $p=\frac{1+\sqrt{1-4k/3}}{2}$, *ապա, առաջին հայացքից,* $p\geqslant\frac{1}{2}$*։ Ցույց տանք, որ* $p>\frac{1}{2}$ *դեպքը հանգեցնում է հակասության։ Իրոք,* $p>\frac{1}{2}$ *ըստ պայմանի, եթե* $1-\frac{4k}{3}>0$ *կամ, քանի որ* $k=3p-3p^2$, *ըստ պայմանի, ապա*

$$p^2-p+\frac{1}{4}>0։$$

Այստեղից

$$p=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}։$$

Այսպիսով, ամենամեծ հնարավոր արժեքն է՝ $p=\frac{1}{2}$։

§ 2 Գոնե մեկ պատահույթի հանդես գալու հավանականությունը

Դիցուք $A_1, A_2, \dots, A_n$ *պատահույթները համախմբության մեջ անկախ են և* $P(A_1)=p_1$, $P(A_2)=p_2, \dots, P(A_n)=p_n$*։ Փորձի հետևանքով կարող են տեղի ունենալ այդ բոլոր պատահույթները կամ նրանց մի մասը, կամ ոչ մեկը։*

A պատահույթի տեղի ունենալու հավանականությունը համախմբության մեջ անկախ $A_1, A_2, \dots, A_n$ պատահույթներից գոնե մեկի հանդես գալուց, հավասար է 1-ի և $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n$ հակադիր պատահույթների հավանականությունների արտադրյալի տարբերությանը․

$$P(A)=1-q_1 q_2 \cdots q_n։$$

Մասնավոր դեպքում, եթե բոլոր n *պատահույթների հավանականությունները նույնն են և հավասար են* p*-ի, ապա այդ պատահույթներից գոնե մեկի հանդես գալու հավանականությունը*

$$P(A)=1-q^n,$$

80. *Էլեկտրական շղթայում հաջորդաբար միացված են* իրարից անկախ աշխատող 3 տարր։ I, II և III տարրերի աշխատելու հավանականություններն համապատասխանաբար հավասար են

$$p_1 = 0{,}1, \qquad p_2 = 0{,}15, \qquad p_3 = 0{,}2։$$

Գտնել հավանականությունը, որ շղթայում հոսանք չի լինի։

Լուծում։ Քանի որ տարրերը միացված են հաջորդաբար, ապա շղթայում հոսանք չի լինի (A պատահույթ), եթե չաշխատի գոնե մեկ տարր։

Որոնելի հավանականությունը

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 q_3 = 1 - (1 - 0{,}1)\cdot(1 - 0{,}15)\cdot(1 - 0{,}2) = 0{,}388։$$

81. Սարքը կազմված է երկու անկախ աշխատող տարրերից։ Տարրերի չաշխատելու հավանականությունները համապատասխանաբար հավասար են 0,05-ի և 0,08-ի։ Գտնել սարքի չաշխատելու հավանականությունը, եթե դրա համար բավական է տարրերից գոնե մեկի չաշխատելը։

Պատ.՝ $P = 0{,}126$։

82. Կամուրջը քանդվելու համար բավական է մեկ ավիացիոն ռումբ։ Գտնել հավանականությունը, որ կամուրջը կքանդվի, եթե նրա վրա գցենք 4 ռումբ, որոնց կամրջին դիպչելու հավանականությունները համապատասխանաբար հավասար են 0,3-ի, 0,4-ի, 0,6-ի և 0,7-ի։ 0,8464

Պատ.՝ $P \simeq 0{,}95$։

83. Իրարից անկախ, երեք հետազոտողներ, չափում են ինչ-որ ֆիզիկական մեծություն։ Հավանականությունը, որ առաջին հետազոտողը սարքի ցուցմունքը կարդալիս սխալ թույլ կտա, հավասար է 0,1-ի։ Երկրորդ և երրորդ հետազոտողների համար այդ հավանականությունը համապատասխանաբար հավասար է 0,15-ի և 0,2-ի։ Գտնել հավանականությունը, որ մի անգամ չափելիս գոնե մեկ հետազոտող սխալ թույլ կտա։

Պատ.՝ $P = 0{,}388$։

84. Վարժությունը հաջողությամբ կատարելու հավա-

նականությունը երկու մարզիկներից յուրաքանչյուրի համար հավասար է 0,5-ի։ Մարզիկները վարժությունը կատարում են հերթով, ընդ որում յուրաքանչյուրը կատարում է երկու փորձ։ Վարժությունը առաջին կատարողն ստանում է պարգև։ Գտնել մարզիկների պարգև ստանալու հավանականությունը։

Լուծում։ Պարգևի հանձնման համար բավական է, որ չորս փորձերից գոնե մեկը հաջող լինի։ Հաջող փորձի հավանականությունն է՝ $p = 0{,}5$, *իսկ անհաջողինը՝* $q = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$։

Որոնելի հավանականությունն է

$$P = 1 - q^4 = 1 - 0{,}5^4 = 0{,}9375$$։

85. *Երկու հրաձիգներից յուրաքանչյուրի թիրախին դիպցնելու հավանականությունը հավասար է 0,3-ի։ Հրաձիգները կրակում են, ընդ որում յուրաքանչյուրը կատարում է երկու կրակոց։ Թիրախին դիպցնողը առաջին անգամ ստանում է պարգև։ Գտնել հավանականությունը, որ հրաձիգները պարգև կստանան։*

Պատ.՝ $P \simeq 0{,}76$։

86. *Հրաձգի թիրախին գոնե մեկ անգամ դիպցնելու հավանականությունը երեք կրակոցի դեպքում հավասար է 0,875-ի։ Գտնել դիպցնելու հավանականությունը մեկ կրակոցի դեպքում։*

Լուծում։ Երեք կրակոցներից գոնե մեկի դեպքում թիրախին դիպցնելու հավանականությունը (A *պատահույթ) հավասար է*

$$P(A) = 1 - q^3,$$

որտեղ q*-ն վրիպելու հավանականությունն է։*

Ըստ պայմանի $P(A) = 0{,}875$։ *Հետևաբար*

$$0{,}875 = 1 - q^3$$

կամ

$$q^3 = 1 - 0{,}875 = 0{,}125$$։

Այստեղից

$$q = \sqrt[3]{0{,}125} = 0{,}5$$։

Որոնելի հավանականությունն է

$$p = 1 - q = 1 - 0{,}5 = 0{,}5:$$

87. *4 կրակոցների դեպքում նպատակին գոնե մեկ անգամ դիպչելու հավանականությունը հավասար է 0,9984-ի: Գտնել մեկ կրակոցի դեպքում նպատակին դիպչելու հավանականությունը:*

Պատ.՝ $P = 0{,}8$:

88. *Բազմակի չափում են ինչ-որ ֆիզիկական մեծություն: Հավանականությունը, որ գործիքի ցուցմունքը կարդալիս սխալ թույլ կտրվի, հավասար է* p*-ի: Գտնել չափումների ամենափոքր թիվը, որն անհրաժեշտ է, որպեսզի* $P > \alpha$ *հավանականությամբ հնարավոր լինի սպասել, որ չափման գոնե մեկ արդյունք կլինի ոչ ճիշտ:*

Պատ.՝ $E\left[\frac{\log(1-\alpha)}{\log(1-p)}\right]+1$, *որտեղ* $E[N]$*-ը* N *թվի ամբողջ մասն է:*

§ 3 Լրիվ հավանականության բանաձևը

A պատահույթի հավանականությունը, որ կարող է հանդես գալ լրիվ խումբ կազմող B_1 B_2 …, B_n անհամատեղելի պատահույթներից մեկի (հիպոթեզ) հետ, հավասար է հիպոթեզներից յուրաքանչյուրի հավանականության և A պատահույթի համապատասխան պայմանական հավանականությունների արտադրյալների գումարին.

$$P(A) = P(B_1)\cdot P_{B_1}(A) + P(B_2)\cdot P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n)\cdot P_{B_n}(A), \qquad (*)$$

որտեղ $P(B_1) + P(B_2) + \dots + P(B_n) = 1$,

(*) հավասարությունը կոչում են լրիվ հավանականության բանաձև:

89. *2 գնդակ պարունակող սափորի մեջ գցված է սպիտակ գնդակ, որից հետո այնտեղից պատահականորեն հանված է մեկ գնդակ: Գտնել հավանականությունը, որ հանված գնդակը կլինի սպիտակ, եթե գնդակների սկզբնական պարունակության մասին բոլոր հնարավոր ենթադրությունները հավասարահնարավոր են (ըստ գույների):*

Լուծում: A-ով նշանակենք այն պատահույթը, որ հանվածը սպիտակ գնդակ է: Հնարավոր են գնդակների սկզբնական *կազմության մասին հետևյալ ենթադրությունները (հիպոթեզները)․* B_1՝ *սպիտակ գնդակ չկա,* B_2՝ *մեկ սպիտակ գնդակ կա,* B_3՝ *երկու սպիտակ գնդակ կա։*

Քանի որ ունենք ընդամենը երեք հիպոթեզ և ըստ պայմանի դրանք հավասարահնարավոր են ու հիպոթեզների հավանականությունների գումարը հավասար է 1-ի (քանի որ նրանք կազմում են պատահույթների լրիվ խումբ), ապա յուրաքանչյուր հիպոթեզի հավանականությունը $\frac{1}{3}$ *է, այսինքն՝*

$$P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = \frac{1}{3}\text{։}$$

Պայմանական հավանականությունը, որ կհանվի սպիտակ գնդակ, այն պայմանով, որ սկզբում սափորում չի եղել ոչ մի սպիտակ գնդակ,

$$P_{B_1}(A) = \frac{1}{3}\text{։}$$

Պայմանական հավանականությունը, որ կհանվի սպիտակ գնդակ, այն պայմանով, որ սկզբում սափորում կար 1 սպիտակ գնդակ,

$$P_{B_2}(A) = \frac{2}{3}\text{։}$$

Պայմանական հավանականությունը, որ կհանվի սպիտակ գնդակ, այն պայմանով, որ սկզբում սափորում կար 2 սպիտակ գնդակ,

$$P_{B_3}(A) = \frac{3}{3} = 1\text{։}$$

Որոնելի հավանականությունը, որ կհանվի սպիտակ գնդակ, գտնում ենք ըստ լրիվ հավանականության բանաձևի․

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + P(B_3) \cdot P_{B_3}(A) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}\text{։}$$

90. n *գնդակ պարունակող սափորի մեջ գցվում է սպիտակ գնդակ, որից հետո պատահականորեն հանվում է մեկը։*

Գտնել հավանականությունը, որ հանված կլինի սպիտակ, եթե հավասարահնարավոր են բոլոր ենթադրությունները գնդակների սկզբնական կազմության մասին (ըստ գույնի)։

Պատ.՝ $P = \frac{n+2}{2(n+1)}$։

91. *Հաշվողական լաբորատորիայում կան 6 ստեղնավոր ավտոմատներ և 4 կիսաավտոմատներ։ Հավանականությունը, որ ինչ-որ հաշվարկի կատարման ժամանակ ավտոմատը շարքից դուրս չի գա, հավասար է 0,95-ի, իսկ կիսաավտոմատի համար այդ հավանականությունը հավասար է 0,8-ի։ Ուսանողը հաշվարկ է կատարում պատահական ընտրած մեքենայի վրա։ Գտնել հավանականությունը, որ մինչև հաշվարկի վերջը մեքենան շարքից դուրս չի գա։*

Պատ.՝ $P = 0,89$։

92. *Բուրգում կա 5 հրացան, որոնցից 3-ը օժտված են օպտիկական նշանառությամբ։ Հավանականությունը, որ հրաձիգը կխոցի թիրախը նշանառությամբ օժտված հրացանից կրակելիս, հավասար է 0,95-ի, առանց օպտիկական նշանառության հրացանի համար այդ հավանականությունը հավասար է 0,7-ի։ Գտնել հավանականությունը, որ թիրախը կխոցվի, եթե հրաձիգը պատահական վերցրած հրացանից կատարի մեկ կրակոց։*

Պատ.՝ $P = 0,85$։

93. *Արկղում կա № 1 գործարանի պատրաստած 12 դետալ, № 2 գործարանի՝ 20 դետալ և № 3 գործարանի՝ 18 դետալ։ Հավանականությունը, որ № 1 գործարանում պատրաստված դետալը գերազանց որակի է, հավասար է 0,9-ի, № 2 և № 3 գործարաններում պատրաստված դետալների համար այդ հավանականությունը համապատասխանաբար հավասար է 0,6-ի և 0,9-ի։ Գտնել հավանականությունը, որ պատահականորեն հանված դետալը կլինի գերազանց որակի։*

Պատ.՝ $P = 0,78$։

94. *Առաջին սափորում կա 10 գնդակ, որոնցից 8-ը* *սպիտակ է, երկրորդ սափորում՝ 20 գնդակ, որոնցից 4-ը՝ սպիտակ։ Յուրաքանչյուր սափորից պատահականորեն հանել են մեկական գնդակ, իսկ հետո այդ երկու գնդակներից պատահականորեն վերցրել են մեկը։ Գտնել հավանականությունը որ վերցրած գնդակը սպիտակ է։*

Պատ.՝ $P=0{,}5$։

95. *Երեք սափորներից յուրաքանչյուրում կա 6 սև և 4 սպիտակ գնդակ։ Առաջին սափորից պատահականորեն հանված է 1 գնդակ և դրված է երկրորդ սափորի մեջ, որից հետո երկրորդ սափորից պատահականորեն հանված է 1 գնդակ և դրված երրորդի մեջ։ Գտնել հավանականությունը, որ երրորդ սափորից պատահականորեն հանված գնդակը կլինի սպիտակ։*

Պատ.՝ $P=0{,}4$։

96. *Հավանականությունները, որ էլեկտրոնային թվային մեքենան աշխատանքի ժամանակ կվնասվի թվաբանական սարքում, գործող հիշողությունում կամ այլ սարքերում, հարաբերում են ինչպես 3:2:5։ Վնասվածքի հայտնաբերման հավանականությունները թվաբանական սարքում, գործող հիշողությունում և այլ սարքերում համապատասխանաբար հավասար են 0,8-ի, 0,9-ի, 0,9-ի։ Գտնել հավանականությունը, որ մեքենայում առաջացած անսարքությունը կհայտնաբերվի։*

Պատ.՝ $P=0{,}87$։

§ 4 Բայեսի բանաձևը

Դիցուք A *պատահույթը կարող է հանդես գալ լրիվ խումբ կազմող* $B_1, B_2, \dots, B_n$ *անհամատեղելի պատահույթներից (հիպոթեզներից) մեկի հանդես գալու պայմանում միայն։ Եթե* A *պատահույթը արդեն կայացել է, ապա հիպոթեզների հավանականությունները կարելի է վերագնահատել* Բայեսի բանաձևերով.

$$P_A(B_i)=\frac{P(B_i)\cdot P_{B_i}(A)}{P(A)} \qquad (i=1, 2, \dots, n),$$

որտեղ

$$P(A)=P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)+\dots+P(B_n)\cdot P_{B_n}(A)։$$

97. *Երկու ավտոմատ մեքենաներ արտադրում են միատեսակ դետալներ, որոնք հետո տրվում են ընդհանուր հարահոսին: Առաջին ավտոմատի արտադրողականությունը 2 անգամ մեծ է երկրորդի արտադրողականությունից: Առաջին ավտոմատը արտադրում է միջին հաշվով 60%-ի գերազանց դետալներ, երկրորդը՝ 84%-ի: Հարահոսից պատահական վերցրած դետալը գերազանց որակի է: Գտնել հավանականությունը, որ այդ դետալն արտադրված է առաջին ավտոմատ մեքենայի կողմից:*

Լուծում: Նշանակենք A-ով հետևյալ պատահույթը. դետալը գերազանց որակի է: Կարելի է կատարել ենթադրություն (հիպոթեզ).

B_1 դետալն արտադրված է առաջին ավտոմատի կողմից, ընդ որում (քանի որ առաջին ավտոմատն արտադրում է 2 անգամ ավելի շատ, քան երկրորդը)

$$P(B_1) = \frac{2}{3},$$

B_2 դետալն արտադրված է երկրորդ ավտոմատով, ընդ որում

$$P(B_2) = \frac{1}{3}:$$

Պայմանական հավանականությունը, որ դետալը գերազանց որակի է, եթե այն արտադրվել է առաջին ավտոմատով.

$$P_{B_1}(A) = 0{,}6:$$

Պայմանական հավանականությունը, որ դետալը գերազանց որակի է, եթե այն արտադրվել է երկրորդ ավտոմատով.

$$P_{B_2}(A) = 0{,}84:$$

Հավանականությունը, որ պատահական վերցրած դետալը գերազանց որակի է, ըստ լրիվ հավանականության բանաձևի կլինի.

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) =$$
$$= \frac{2}{3} \cdot 0{,}6 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}84 = 0{,}68:$$

Որոնելի հավանականությունը, որ վերցրած գերազանց դետալը արտադրված է առաջին ավտոմատով, ըստ Բայեսի բանաձևի կլինի.

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A)}{P(A)} = \frac{2/3 \cdot 0,6}{0,68} = \frac{10}{17}.$$

98. Բուրգում կա 10 հրացան, որոնցից 4-ը՝ օպտիկական նշանառությամբ։ Հավանականությունը, որ հրաձիգը կխոցի թիրախը օպտիկական նշանառությամբ հրացանով կրակելիս, հավասար է 0,95-ի, առանց օպտիկական նշանառության հրացանի համար այդ հավանականությունը հավասար է 0,8-ի։ Հրաձիգը պատահական վերցրած հրացանով կրակելիս խոցեց թիրախը։ Ո՞րն է հավանական՝ հրաձիգը կրակել է օպտիկական նշանառության հրացանի՞ց, թե՞ առանց դրա։

Պատ.՝ Ավելի հավանական է, որ հրացանը առանց օպտիկական նշանառության էր (հավանականությունը, որ հրացանը եղել է առանց օպտիկական նշանառության, հավասար է $^{24}/_{43}$-ի, իսկ օպտիկական նշանառության դեպքում՝ 19/43-ի։

99. Խճուղով, որի վրա է բենզակայանը, ընթացող բեռնատար ավտոմեքենաների թիվը հարաբերում է մարդատար ավտոմեքենաների թվին, ինչպես 3 : 2։ Հավանականությունը, որ կլիցքավորվի բեռնատար մեքենան, հավասար է 0,1-ի, իսկ մարդատար մեքենայի համար այդ հավանականությունն հավասար է 0,2-ի։ Լիցքավորման համար բենզոկայանին մոտեցավ մեքենան։ Գտնել հավանականությունը, որ այն բեռնատար է։

Պատ.՝ $P = \frac{3}{7}$։

100. Երկու բանվոր տարբեր ծակիչների վրա ծակել են պերֆոքարտերի միատեսակ կոմպլեկտ։ Հավանականությունը, որ առաջին ծակողը սխալ թույլ կտա, հավասար է 0,05-ի. երկրորդ ծակողի համար այդ հավանականությունը հավասար է 0,1-ի։ Պերֆոքարտերը համեմատելիս սխալ է հայտնաբերված։ Գտնել հավանականությունը, որ սխալվել է

առաջին ծակողը (ենթադրվում է, որ երկու ծակիչներն էլ սարքին են)։

Պատ.՝ $P = \frac{1}{3}$,

101. *Հատուկ հիվանդանոց են ընդունվում միջին հաշվով 50%* K *հիվանդությունով, 30%՝* L *հիվանդությունով, 20%՝* M *հիվանդությունով հիվանդներ։* K *հիվանդությունը լրիվ բուժելու հավանականությունը հավասար է 0,7-ի,* L *և* M *հիվանդությունների համար այդ հավանականությունները համապատասխանաբար հավասար են 0,8-ի և 0,9-ի։ Հիվանդանոց ընդունված հիվանդը առողջ դուրս գրվեց։ Գտնել հավանականությունը, որ նա հիվանդ էր* K *հիվանդությամբ։*

Պատ.՝ $P = \frac{5}{11}$,

102. *Արտադրանքը երկու ապրանքագետների կողմից ստուգվում է ըստ միօրինակության։ Հավանականությունը, որ արտադրանքը կընկնի առաջին ապրանքագետի մոտ, հավասար է 0,55-ի, իսկ երկրորդի մոտ՝ 0,45-ի։ Հավանականությունը, որ միօրինակ արտադրանքը միօրինակ կճանաչվի առաջին ապրանքագետի կողմից, հավասար է 0,9-ի, իսկ երկրորդի կողմից՝ 0,98-ի։ Միօրինակ արտադրանքն ստուգելիս միօրինակ ճանաչվեց։ Գտնել հավանականությունը, որ այն ստուգել է երկրորդ ապրանքագետը։*

Պատ.՝ $P = 0,47$,

103. A *պատահույթը կարող է հանդես գալ լրիվ խումբ կազմող* $B_1, B_2, \ldots, B_n$ *անհամատեղելի պատահույթներից միայն մեկի հետ։* A *պատահույթի տեղի ունենալուց հետո վերագնահատվել են հիպոթեզների հավանականությունները, այսինքն՝ գտնվել են* $P_A(B_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *պայմանական հավանականությունները։ Ապացուցել, որ*

$$\sum_{i=1}^{n} P_A(B_i) = 1,$$

104. A *պատահույթը կարող է հանդես գալ* B_1, B_2, B_3 *լրիվ խումբ կազմող անհամատեղելի պատահույթներից (հիպոթեզներ) մեկի հետ։* A *պատահույթի հանդես գալուց հետո վերագնահատվել են հիպոթեզների հավանականությունները, այսինքն՝ գտնվել են այդ հիպոթեզների պայմանական հավանականությունները, ընդ որում պարզվել է, որ*

$$P_A(B_1)=0{,}6 \text{ և } P_A(B_2)=0{,}3\text{։}$$

Ինչի՞ է հավասար B_3 *հիպոթեզի պայմանական* $P_A(B_3)$ *հավանականությունը։*

Պատ.՝ $P_A(B_3)=1-(0{,}6+0{,}3)=0{,}1$։

105. *Կա դետալների 3 խմբաքանակ, յուրաքանչյուրում 20 դետալ։ Առաջին, երկրորդ և երրորդ խմբաքանակներում միօրինակ դետալների թիվը համապատասխանաբար հավասար է 20-ի, 15-ի, 10-ի։ Պատահական ընտրած խմբաքանակից պատահականորեն հանվում է դետալ, պարզվում է, որ այն միօրինակ է։ Դետալը վերադարձնում են խմբաքանակի մեջ և երկրորդ անգամ են դետալ հանում, որը նույնպես միօրինակ է լինում։ Գտնել հավանականությունը, որ դետալները հանված էին երրորդ խմբաքանակից։*

Լուծում։ Նշանակենք A*-ով հետևյալ պատահույթը. երկու փորձերից (վերադարձումով) յուրաքանչյուրում հանված է եղել միօրինակ դետալ։*

Կարելի է կատարել 3 ենթադրություններ (հիպոթեզներ). B_1 *դետալները հանվել են առաջին խմբաքանակից,* B_2 *դետալները հանվել են երկրորդ խմբաքանակից,* B_3 *դետալները հանվել են երրորդ խմբաքանակից։*

Քանի որ դետալները հանվել են պատահական վերցված խմբաքանակից, ապա հիպոթեզների հավանականությունները նույնն են.

$$P(B_1)=P(B_2)=P(B_3)=\frac{1}{3}\text{։}$$

Գտնենք $P_{B_1}(A)$ *պայմանական հավանականությունը, այսինքն՝ հավանականությունը, որ առաջին խմբաքանակից* հաջորդաբար կհանվեն երկու միօրինակ դետալ: Այդ պատահույթը ստույգ է, քանի որ առաջին խմբաքանակում բոլոր դետալները միօրինակ են, հետևաբար

$$P_{B_1}(A)=1:$$

Գտնենք $P_{B_2}(A)$ պայմանական հավանականությունը, այսինքն այն հավանականությունը, որ երկրորդ խմբաքանակից հաջորդաբար կհանվեն (վերադարձումով) երկու միօրինակ դետալներ:

$$P_{B_3}(A)=\frac{15}{20}\cdot\frac{15}{20}=\frac{9}{16},$$

Գտնենք $P_{B_3}(A)$ պայմանական հավանականությունը, այսինքն՝ այն հավանականությունը, որ երրորդ խմբաքանակից հաջորդաբար կհանվեն (վերադարձումով) 2 միօրինակ դետալներ:

$$P_{B_3}(A)=\frac{10}{20}\cdot\frac{10}{20}=\frac{1}{4},$$

Որոնելի հավանականությունը, որ հանված երկու միօրինակ դետալները վերցված են երրորդ խմբաքանակից, ըստ Բայեսի բանաձևի.

$$P_A(B_3)=\frac{P(B_3)\cdot P_{B_3}(A)}{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)+P(B_3)\cdot P_{B_3}(A)}=$$

$$=\frac{1/3\cdot 1/4}{1/3\cdot 1+1/3\cdot 9/16+1/3\cdot 1/4}=\frac{4}{29},$$

106. *3 հրանոթից կազմված մարտկոցը համազարկ տվեց և երկու արկ ընկան նպատակակետին: Գտնել հավանականությունը, որ առաջին հրանոթը դիպել է, եթե նպատակակետին դիպչելու հավանականությունները առաջին, երկրորդ, երրորդ հրանոթներով համապատասխանաբար հավասար են՝* $p_1=0,4$, $p_2=0,3$, $p_3=0,5$:

Լուծում: Նշանակենք A-ով պատահույթը, որ հրանոթները դիպել են նպատակակետին:

Կատարենք երկու ենթադրություն (հիպոթեզ): B_1 — առաչին հրանոթը դիպել է նպատակակետին, B_2 առաջին հրանոթը չի դիպել նպատակակետին։

Ըստ պայմանի $P(B_1)=0{,}4$, հետևաբար (B_2 պատահույթը հակադիր է B_1-ին)

$$P(B_2)=1-0{,}4=0{,}6։$$

Գտնենք $P_{B_1}(A)$ պայմանական հավանականությունը, այսինքն՝ այն հավանականությունը, որ նպատակակետին դիպել են երկու արկ, որոնցից մեկը առաջին հրանոթից, հետևաբար, մյուսը երրորդ կամ երկրորդ հրանոթից (ընդ որում երրորդ հրանոթը վրիպել է)։ Այս երկու պատահույթները անհամատեղելի են, ուստի կիրառելի է գումարման թեորեմը․

$$P_{B_1}(A)=p_2\,q_3+p_3\cdot q_2=0{,}3\cdot0{,}5+0{,}5\cdot0{,}7=0{,}5։$$

Գտնենք $P_{B_2}(A)$ պայմանական հավանականությունը, այսինքն՝ այն հավանականությունը, որ նպատակակետին դիպել են երկու արկ և առաջին հրանոթը վրիպել է։ Ուրիշ խոսքով, գտնենք հավանականությունը, որ երկրորդ և երրորդ հրանոթները դիպել են նպատակակետին։ Այս երկու պատահույթները անկախ են, ուստի կիրառելի է բազմապատկման թեորեմը։

$$P_{B_2}(A)=p_2\cdot p_3=0{,}3\cdot0{,}5=0{,}15:$$

Որոնելի հավանականությունը, որ առաջին հրանոթը դիպել է նպատակակետին, ըստ Բայեսի բանաձևի հավասար է

$$P_A(B_1)=\frac{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)}{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)}=$$

$$=\frac{0{,}4\cdot0{,}5}{0{,}4\cdot0{,}5+0{,}6\cdot0{,}15}=\frac{20}{29}։$$

107. Երեք հրաձիգ կրակեցին և երկու գնդակ խոցեց թիրախը։ Գտնել հավանականությունը, որ երրորդ հրաձիգն է թիրախը խոցել, եթե թիրախին դիպչելու հավանականությունը առաջին, երկրորդ, երրորդ հրաձիգների համար համապատասխանաբար հավասար է 0,6-ի, 0,5-ի, 0,4-ի։

Պատ.՝ $P = {}^{10}/_{19}$։

108. *Հաշվողական սարքի երեք անկախ աշխատող տարրերից երկուսը խափանվեցին։ Գտնել հավանականությունը, որ խափանվել են առաջին և երկրորդ տարրերը, եթե առաջին, երկրորդ և երրորդ տարրերի խափանվելու հավանականությունները համապատասխանաբար հավասար են 0,2-ի, 0,4-ի, 0,3-ի։*

Լուծում։ A-ով նշանակենք այն պատահույթը, որ խափանվել են 2 տարր։

Կարելի է անել հետևյալ ենթադրությունները (հիպոթեզները)։

B_1—խափանվել են առաջին և երկրորդ տարրերը, իսկ երրորդը սարքին է, ընդ որում (քանի որ տարրերը անկախ են աշխատում, կիրառելի է բազմապատկման թեորեմը)

$$P(B_1) = p_1 p_2 q_3 = 0{,}2 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}7 = 0{,}056։$$

B_2—խափանվել են առաջին և երրորդ տարրերը, իսկ երկրորդը սարքին է, և

$$P(B_2) = p_1 p_3 p_2 = 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}6 = 0{,}036։$$

B_3—խափանվել են երկրորդ և երրորդ տարրերը, իսկ առաջինը սարքին է, և

$$P(B_3) = p_2 p_3 q_1 = 0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}8 = 0{,}096։$$

B_4—խափանվել է միայն մեկ տարր. B_5—խափանվել են բոլոր երեք տարրերը, B_6—ոչ մի տարր չի խափանվել։

Վերջին երեք հիպոթեզների հավանականությունները հաշված չեն, քանի որ այդ հիպոթեզների դեպքում A պատահույթը (խափանվել են երկու տարր) անհնար է և նշանակում է $P_{B_4}(A)$, $P_{B_5}(A)$, $P_{B_6}(A)$ պայմանական հավանականությունները հավասար են զրոյի, հետևաբար հավասար են զրոյի և $P(B_4) \cdot P_{B_4}(A)$, $P(B_5) \cdot P_{B_5}(A)$, $P(B_6) \cdot P_{B_6}(A)$ արտադրյալները (տես ներքևում (*) առնչությունը) ցանկացած հավանականությունների դեպքում B_4, B_5, B_6 պատահույթների համար:

Քանի որ B_1, B_2, B_3 հիպոթեզների դեպքում A պատահույթը հավաստի է, ապա համապատասխան պայմանական հավանականությունները հավասար են 1-ի,

$$P_{B_1}(A)=P_{B_2}(A)=P_{B_3}(A)=1.$$

Ըստ լրիվ հավանականության բանաձևի, հավանականությունը, որ խափանվել են երկու տարր,

$$P(A)=P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)+P(B_3)\cdot P_{B_3}(A)+$$
$$+P(B_4)\cdot P_{B_4}(A)+P(B_5)\cdot P_{B_5}(A)+P(B_6)\cdot P_{B_6}(A)=$$
$$=0{,}056\cdot 1+0{,}036\cdot 1+0{,}096\cdot 1=0{,}188: \qquad (*)$$

Ըստ Բայեսի բանաձևի, որոնելի հավանականությունը, որ խափանվել են առաջին և երկրորդ տարրերը,

$$P_A(B_1)=\frac{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)}{P(A)}=\frac{0{,}056}{0{,}188}\simeq 0{,}3:$$

109. *Գործիքի անկախ աշխատող 4 լապտերներից երկուսը խափանվեցին: Գտնել հավանականությունը, որ խափանվել են առաջին և երկրորդ լապտերները, եթե առաջին, երկրորդ, երրորդ և չորրորդ լապտերների համար խափանվելու հավանականությունները համապատասխանաբար հավասար են* $p_1=0{,}1$, $p_2=0{,}2$, $p_3=0{,}3$ *և* $P_4=0{,}4$:

Պատ.՝ $P\simeq 0{,}039$:

ԳԼՈՒԽ ԵՐՐՈՐԴ

ՓՈՐՁԵՐԻ ԿՐԿՆՈՒԹՅՈՒՆԸ

§ 1. Բեռնուլլիի բանաձևը

Եթե կատարվում են փորձեր, որոնցում A պատահույթի հանդես գալու հավանականությունը յուրաքանչյուր փորձում կախված չէ մյուս փորձերի ելքից, ապա այդպիսի փորձերը կոչվում են A պատահույթի նկատմամբ անկախ: *Այս գլխի § 1—4-ում դիտարկվում են անկախ փորձերը, որոնցից յուրաքանչյուրում պատահույթի հանդես գալու հավանականությունը նույնն է:*

Բեռնուլլիի բանաձևը․ Հավանականությունը, որ անկախ փորձերում, որոնցից յուրաքանչյուրում պատահույթի հանդես գալու հավանականությունը հավասար է p-ի $(0<p<1)$, պատահույթը հանդես կգա ուղիղ k անգամ, միևնույն է, թե ինչ հաջորդականությամբ, հավասար է

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k},$$

կամ

$$P_n(k)=\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k},$$

որտեղ $q=1-p$։

Հավանականությունը, որ պատահույթը հանդես կգա ա) k-ից ավելի քիչ անգամ, բ) k-ից ավելի շատ անգամ, գ) k-ից ոչ ավելի քիչ անգամ, դ) k-ից ոչ ավելի շատ անգամ՝ գտնում են համապատասխանաբար հետևյալ բանաձևերով.

ա) $P_n(0)+P_n(1)+\dots+P_n(k-1)$,

բ) $P_n(k+1)+P_n(k+2)+\dots+P_n(n)$,

գ) $P_n(k)+P_n(k+1)+\dots+P_n(n)$,

դ) $P_n(0)+P_n(1)+\dots+P_n(k)$։

110. *Հավասարազոր երկու շախմատիստ շախմատ են խաղում։ Ո՞րն է ավելի հավանական. շահել 4 խաղից 2-ը, թե՞ 6-ից՝ 3-ը (ոչ ոքիները հաշվի չեն առնվում)։*

Լուծում. *Խաղում են հավասարազոր շախմատիստներ, հետևաբար տանելու հավանականությունը՝* $p=\frac{1}{2}$ *և տարվելու հավանականությունը՝* $q=\frac{1}{2}$։ *Քանի որ բոլոր խաղերում շահելու հավանականությունը հաստատուն է և կախված չէ խաղերը շահելու հերթականությունից, ապա կիրառելի է Բեռնուլլիի բանաձևը։*

Գտնենք հավանականությունը, որ 4-ից երկու խաղ կշահվեն.

$$P_4(2)=C_4^2 p^2 q^2=\frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{6}{16},$$

Գտնենք հավանականությունը, որ 6-ից 3 խաղ կշահվեն.

$$P_6(3)=C_6^3 p^3\cdot q^3=\frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5}{16},$$

Քանի որ $P_4(2) > P_6(3)$, *ապա ավելի հավանական է շահել 2 խաղ 4-ից, քան 3-ը՝ 6-ից։*

111. *Երկու հավասարաուժ հակառակորդներ շախմատ են խաղում։ Ո՞րն է ավելի հավանական. ա) շահել 1 խաղ 2-ից, թե՞ 2-ը՝ 4-ից. բ) շահել 2-ից ոչ քիչ խաղ 4-ից, թե՞ 3-ից ոչ քիչ խաղ 5-ից։ Ոչ ոքիները հաշվի չեն առնվում։*

Պատ.՝ *ա) ավելի հավանական է շահել 1 խաղ 2-ից.* $P_2(1) = {}^1/_2$, $P_4(2) = {}^3/_8$, *բ) ավելի հավանական է շահել 2-ից ոչ քիչ խաղ 4-ից.* $P_4(2) + P_4(3) + P_4(4) = 1 - P_4(0) - P_4(1) = \frac{11}{16}$, $P_5(3) + P_5(4) + P_5(5) = \frac{8}{16}$։

112. *Մետաղադրամը գցում են 5 անգամ։ Գտնել հավանականությունը որ «գերբը» կերևա. ա) 2-ից ավելի քիչ անգամ, բ) 3-ից ոչ քիչ անգամ։*

Պատ.՝ *ա)* $P = P_5(0) + P_5(1) = \frac{3}{16}$, *բ)* $Q = 1 - [P_5(0) + P_5(1)] = \frac{13}{16}$.

113. *Գտնել հավանականությունը, որ* A *պատահույթը կերևա 3-ից ոչ քիչ անգամ 4 անկախ փորձերում, եթե մեկ փորձում* A *պատահույթի հանդես գալու հավանականությունը հավասար է 0,4-ի։*

Պատ.՝ $P_4(3) + P_4(4) = 0{,}1792$։

114. B *պատահույթը հանդես կգա այն դեպքում, եթե* A *պատահույթը հանդես գա 4-ից ոչ քիչ անգամ։ Գտնել* B *պատահույթի հանդես գալու հավանականությունը, եթե կատարվում են 5 անկախ փորձեր, որոնցից յուրաքանչյուրում* A *պատահույթի հանդես գալու հավանականությունը հավասար է 0,8-ի։*

Պատ.՝ $P_5(4) + P_5(5) = 0{,}74$։

115. *Ընտանիքում կա 5 երեխա։ Գտնել հավանականությունը, որ նրանցից. ա) 2-ն են տղա, բ) 2-ից ոչ շատ են* *տղաներ, դ) 2-ից ոչ քիչ տղաներ են և 3-ից ոչ շատ։ Տղայի ծնվելու հավանականությունը ընդունել 0,51։*

Պատ.՝ *Որոնելի հավանականություններն են. ա) 0,31, բ) 0,48, գ) 0,52, դ) 0,62։*

116. *15* սմ *երկարություն ունեցող* AB *հատվածը* C *կետով բաժանված է 2:1 հարաբերությամբ։ Այդ հատվածին պատահականորեն նետված են 4 կետեր։ Գտնել այն հավանականությունը, որ նրանցից 2-ը կընկնեն* C-*ից ձախ և 2-ը՝ աջ։ Ենթադրվում է, որ կետը հատվածի վրա ընկնելու հավանականությունը համեմատական է հատվածի երկարությանը և կախված չէ նրա դիրքից։*

Պատ.՝ $P_4(2) = C_4^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{27}$,

117. a *երկարության* AB *հատվածի վրա պատահականորեն նետված են 5 կետեր։ Գտնել այն հավանականությունը, որ 2 կետ կգտնվեն* A *կետից* x-*ից ավելի քիչ հեռավորության վրա, իսկ 3-ը՝* x-*ից ավելի շատ հեռավորության վրա։ Ենթադրվում է, որ կետը հատվածի վրա ընկնելու հավանականությունը համեմատական է հատվածի երկարությանը և կախված չէ նրա դիրքից։*

Պատ.՝ $P_5(2) = C_5^2 \left(\frac{x}{a}\right)^2, \left(\frac{a-x}{a}\right)^3$,

118. *Հատվածը բաժանված է 4 հավասար մասերի։ Հատվածի վրա պատահականորեն նետված են 8 կետեր։ Գտնել այն հավանականությունը, որ 4 մասերից յուրաքանչյուրի վրա կընկնի 2-ական կետ։ Ենթադրվում է, որ կետը հատվածի վրա ընկնելու հավանականությունը համեմատական է նրա երկարությանը և կախված չէ նրա դիրքից։*

Պատ.՝ $P = C_8^2 \cdot C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2 \left(\frac{1}{4}\right)^8$.

§ 2. Լապլասի լոկալ և ինտեգրալ թեորեմները

Լապլասի լոկալ թեորեմը. Հավանականությունը, որ n անկախ փորձերում, որոնցից յուրաքանչյուրում պատահույթի հանդես գալու հավանականությունն է $p\ (0 < p < 1)$, պատահույթը հանդես կգա ուղիղ k անգամ (միևնույն է թե ինչ հաջորդականությամբ), մոտավորապես հավասար է

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x),$$

Այստեղ

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}},$$

$\varphi(x)$ ֆունկցիայի աղյուսակը x-ի դրական արժեքների համար բերված է № 1 հավելվածում. x-ի բացասական արժեքների համար ևս օգտվում են այդ աղյուսակից [$\varphi(x)$ ֆունկցիան զույգ է, հետևաբար $\varphi(-x) = \varphi(x)$]։

Լապլասի ինտեգրալ թեորեմը. Հավանականությունը, որ n անկախ փորձերում, որոնցից յուրաքանչյուրում պատահույթի հանդես գալու հավանականությունն է $p(0 < p < 1)$, պատահույթը հանդես կգա k_1-ից ոչ քիչ և k_2-ից ոչ շատ անգամ, մոտավորապես հավասար է

$$P_n(k_1;\ k_2) = \Phi(x'') - \Phi(x'),$$

Այստեղ

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx\text{-ը}$$

Լապլասի ֆունկցիան է

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \qquad x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}},$$

Լապլասի ֆունկցիայի աղյուսակը x-ի դրական արժեքների համար $(0 \leqslant x \leqslant 5)$ բերված է № 2 հավելվածում. x-ի 5-ից մեծ արժեքների համար վերցնում են $\Phi(x) = 0$. x-ի բացասական արժեքների համար օգտվում են այդ նույն աղյուսակից, հաշվի առնելով, որ Լապլասի ֆունկցիան կենտ է [$\Phi(-x) = -\Phi(x)$]։

119. *Գտնել հավանականությունը, որ պատահույթը հանդես կգա ուղիղ 70 անգամ 243 փորձում, եթե յուրաքանչյուր փորձում այդ պատահույթի հանդես գալու հավանականությունը հավասար է 0,25-ի։*

Լուծում։ *Ըստ պայմանի* $n = 243$, $k = 70$, $p = 0{,}25$, $q = 0{,}75$։ *Քանի որ* $n = 243$*-ը բավականին մեծ թիվ է, օգտվում ենք Լապլասի լոկալ թեորեմից.*

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x),$$

որտեղ $x = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}}$։

Գտնենք x*-ի արժեքը.*

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 243 \cdot 0{,}25}{\sqrt{243 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75}} = \frac{9{,}25}{6{,}75} = 1{,}37։$$

Աղյուսակից (Հավելված 1) գտնում ենք

$$\varphi(1{,}37) = 0{,}1561։$$

Որոնելի հավանականությունն է

$$P_{243}(70) = \frac{1}{6{,}75} \cdot 0{,}1561 = 0{,}0231։$$

120. *Գտնել հավանականությունը, որ* A *պատահույթը հանդես կգա 1400 անգամ 2400 փորձերում, եթե այդ պատահույթի յուրաքանչյուր փորձում հանդես գալու հավանականությունը հավասար է 0,6-ի։*

Լուծում։ *Քանի որ* n*-ը մեծ է, օգտվում ենք Լապլասի լոկալ թեորեմից.*

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x)։$$

Հաշվենք x*-ը՝*

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{1400 - 2400 \cdot 0{,}6}{\sqrt{2400 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4}} = -\frac{40}{24} = -1{,}67։$$

Քանի որ $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ *ֆունկցիան զույգ է, ապա* $\varphi(-1{,}67)=\varphi(1{,}67)$։

Աղյուսակից (Հավելված 1) գտնում ենք.

$$\varphi(1{,}67)=0{,}0989։$$

Որոնելի հավանականությունն է.

$$P_{2400}(1400)=\frac{1}{24}\cdot 0{,}0989=0{,}0041։$$

121. *Մեկ անգամ կրակելիս թիրախի խոցման հավանականությունը հավասար է 0,8-ի։ Գտնել հավանականությունը, որ 100 անգամ կրակելիս թիրախը կխոցվի ուղիղ 75 անգամ։*

Պատ. $P_{100}(75)=0{,}04565$։

122. *Տղա ծնվելու հավանականությունը հավասար է 0,51-ի։ Գտնել հավանականությունը, որ 100 նորածիններից 50-ը կլինեն տղա։*

Պատ.՝ $P_{100}(50)=0{,}0782$։

123. *Մետաղադրամը գցված է* 2N *անգամ* (N-*ը մեծ է)։ Գտնել հավանականությունը, որ «գերբը» կընկնի ուղիղ* N *անգամ։*

Պատ.՝ $P_{2N}(N)=0{,}5642/\sqrt{N}$.

124. *Մետաղադրամը նետված է* 2N *անգամ։ Գտնել հավանականությունը, որ «գերբը» կընկնի* 2m-*ով շատ անգամ, քան գիրը։*

Պատ.՝ $P_{2N}(N+m)=\sqrt{\frac{2}{N}}\cdot\varphi\left(\sqrt{\frac{2}{N}}\cdot m\right)$։

125. *Պատահույթի հանդես գալու հավանականությունը 100 անկախ փորձերից յուրաքանչյուրում հաստատուն է և հավասար է 0,8-ի։ Գտնել հավանականությունը, որ պատահույթը հանդես կգա. ա) 70-ից ոչ քիչ և 90-ից ոչ շատ անգամ. բ) 75-ից ոչ քիչ անգամ. գ) 74-ից ոչ շատ անգամ։*

Լուծում։ Օգտվենք Լապլասի ինտեգրալ թեորեմից.

$$P_n(k_1;\ k_2) = \Phi(x'') - \Phi(x'),$$

որտեղ $\Phi(x)$*-ը Լապլասի ֆունկցիան է։*

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}},$$

ա) Ըստ պայմանի $n = 100$, $p = 0{,}8$, $q = 0{,}2$, $k_1 = 75$, $k_2 = 90$*։ Հաշվենք* x' *և* x''*.*

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{75 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = -1{,}25,$$

$$x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{90 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = 2{,}5\text{։}$$

Հաշվի առնելով, որ Լապլասի ֆունկցիան կենտ է, այսինքն՝ $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ *կստանանք.*

$$P_{100}(75;90) = \Phi(2{,}5) - \Phi(-1{,}25) = \Phi(2{,}5) + \Phi(1{,}25)\text{։}$$

Աղյուսակից (Հավելված 2) կգտնենք.

$$\Phi(2{,}5) = 0{,}4938, \quad \Phi(1{,}25) = 03944\text{։}$$

Որոնելի հավանականությունը.

$$P_{100}(75;90) = 0{,}4938 + 0{,}3944 = 0{,}8882\text{։}$$

բ) Այն պահանջը, որ պատահույթը հանդես գա 75-ից ոչ քիչ անգամ, նշանակում է, որ պատահույթի հանդես գալու թիվը կարող է հավասար լինել 75 կամ 76, ..., կամ 100։ Այսպիսով, դիտարկվող դեպքում պետք է վերցնել $k_1 = 75$, $k_2 = 100$*։ Այդ դեպքում*

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{75 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = -1{,}25,$$

$$x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = 5\text{։}$$

Աղյուսակից (Հավելված 2) կգտնենք

$$\Phi(1{,}25)=0{,}3944,\ \ \Phi(5)=0{,}5։$$

Որոնելի հավանականությունը

$$P_{100}(75;\ 100)=\Phi(5)-\Phi(-1{,}25)=\Phi(5)+\Phi(1{,}25)=$$
$$=0{,}5+0{,}3944=0{,}8944։$$

գ) «A-ն հանդես է եկել 75-ից ոչ քիչ» և «A-ն հանդես է եկել 74-ից ոչ շատ» պատահույթները հակադիր են, ուստի նրանց հավանականությունների գումարը հավասար է 1-ի։ Հետևաբար, որոնելի հավանականությունը.

$$P_{100}(0;\ 74)=1-P_{100}(75;\ 100)=1-0,\ 8944=0{,}1056։$$

126. *Պատահույթի հանդես գալու հավանականությունը 2100 անկախ փորձերից յուրաքանչյուրում հավասար է 0,7-ի։ Գտնել հավանականությունը, որ պատահույթը հանդես կգա. ա) 1470-ից ոչ քիչ և 1500-ից ոչ շատ անգամ, բ) 1470-ից ոչ քիչ անգամ. գ) 1469-ից ոչ շատ անգամ։*

Պատ. *ա)* $P_{2100}(1470;\ 1500)=0{,}4236$, *բ)* $P_{2100}(1470;\ 2100)=0{,}5$, *գ)* $P_{2100}(0;1469)=0{,}5$։

127. *Պատահույթի հանդես գալու հավանականությունը 21 անկախ փորձերից յուրաքանչյուրում 0,7 է։ Գտնել հավանականությունը, որ պատահույթը հանդես կգա փորձերից մեծամասնությունում։*

Պատ.՝ $P_{21}(11;\ 21)=0{,}95945$։

128. *Մետաղադրամը գցված է 2N անգամ (N-ը մեծ է)։ Գտնել հավանականությունը, որ «գերբի» ընկնելու թիվը կգտնվի* $N-\sqrt{2N}/2$ *և* $N+\sqrt{2N}/2$ *թվերի միջև։*

Պատ.՝ $P=\Phi(1)-\Phi(-1)=2\Phi(1)=0{,}6826$։

129. *Պատահույթի հանդես գալու հավանականությունը անկախ փորձերից յուրաքանչյուրում հավասար է 0,8-ի։ Քանի՞ փորձ պետք է կատարել, որ 0,9 հավանականությամբ* *հնարավոր լինի սպասել, որ պատահույթը հանդես կգա 75-ից ոչ քիչ անգամ։*

Լուծում։ Ըստ պայմանի $p=0,8$, $q=0,2$, $k_1=75$, $k_2=n$, $P_n=P(75;\ n)=0,9$։

Օգտվենք Լապլասի ինտեգրալ թեորեմից.

$$P_n(k_1;\ n)=\Phi(x'')-\Phi(x')=\Phi\left(\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}\right)-$$

$$-\Phi\left(\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}\right)։$$

Տեղադրելով խնդրի տվյալները, կստանանք

$$0,9=\Phi\left(\frac{n-0,8n}{\sqrt{n\cdot0,8\cdot0,2}}\right)-\Phi\left(\frac{75-0,8\cdot n}{\sqrt{n\cdot0,8\cdot0,2}}\right)$$

կամ

$$0,9=\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right)-\Phi\left(\frac{75-0,8n}{0,4\sqrt{n}}\right)։$$

Ակնհայտ է, որ փորձերի թիվը՝ $n>75$, *ուստի* $\frac{\sqrt{n}}{2}>\frac{\sqrt{75}}{2}\approx4,33$։ *Քանի որ Լապլասի ֆունկցիան աճող է և* $\Phi(4)\approx0,5$, *ապա կարելի է տեղադրել* $\Phi\frac{\sqrt{n}}{(2)}=0,5$։ *Հետևաբար,*

$$0,9=0,5-\Phi\left(\frac{75-0,8n}{0,4\sqrt{n}}\right),$$

Այսպիսով,

$$\Phi\left(\frac{75-0,8n}{0,4\sqrt{n}}\right)=-0,4\text{։} \qquad (*)$$

Աղյուսակից (Հավելված 2) կգտնենք $\Phi(1,28)=0,4$։ *Այստեղից և (*) առնչությունից, հաշվի առնելով, որ Լապլասի ֆունկցիան կենտ է, կստանանք՝*

$$\frac{75-0,8n}{0,4\sqrt{n}}=-1,28\text{։}$$

Լուծելով այս հավասարումը, որպես $\sqrt{n}$-ի նկատմամբ քառակուսի հավասարում, կստանանք

$$\sqrt{n} = 10.$$

Հետևաբար, փորձերի որոնելի թիվը՝ $n = 100$։

130. *Դրական արդյունքի հավանականությունը* n *փորձերից յուրաքանչյուրում հավասար է 0,9-ի։ Քանի՞ փորձ պետք է կատարել, որպեսզի 0,98 հավանականությամբ հնարավոր լինի սպասել, որ 150-ից ոչ քիչ փորձեր կտան դրական արդյունք։*

Պատ.՝ $n = 177$։

§ 3. Հարաբերական հաճախության շեղումը հաստատուն հավանականությունից՝ անկախ փորձերում

Հարաբերական հաճախության հաստատուն հավանականությունից ունեցած շեղման գնահատականը։ Հավանականությունը, որ n անկախ փորձերում, որոնցից յուրաքանչյուրում պատահույթի հանդես գալու հավանականությունը հավասար է p-ի $(0 < p < 1)$, պատահույթի հանդես գալու հարաբերական հաճախության նրա հանդես գալու հավանականությունից ունեցած շեղման բացարձակ արժեքը չի գերազանցի դրական ε թիվը, մոտավորապես հավասար է $x = \varepsilon\sqrt{n/pq}$ արժեքի դեպքում Լապլասի ֆունկցիայի կրկնապատիկին.

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leqslant \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

131. *Պատահույթի հանդես գալու հավանականությունը 625 անկախ փորձերից յուրաքանչյուրում հավասար է 0,8-ի։ Գտնել հավանականությունը, որ պատահույթի հանդես գալու հարաբերական հաճախությունը կշեղվի նրա հավանականությունից բացարձակ արժեքով ոչ շատ, քան 0,04-ը։*

Լուծում։ Ըստ պայմանի՝ $n = 625$, $p = 0{,}8$, $q = 0{,}2$, $\varepsilon = 0{,}04$։ *Պահանջվում է գտնել* $P\left(\left|\frac{m}{625} - 0{,}8\right| \leqslant 0{,}04\right)$

հավանականությունը: Օգտվենք հետևյալ բանաձևից·

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\leq\varepsilon\right)=2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right):$$

Ունենք.

$$P\left(\left|\frac{m}{625}-0{,}8\right|\leq 0{,}04\right)=2\Phi\left(0{,}04\sqrt{\frac{625}{0{,}8\cdot 0{,}2}}\right)=2\Phi(2{,}5):$$

Աղյուսակից (հավելված 2) կգտնենք $\Phi(2{,}5)=0{,}4938$: Հետևաբար,

$$2\Phi(2{,}5)=2\cdot 0{,}4938=0{,}9876:$$

Այսպիսով, որոնելի հավանականությունը մոտավորապես հավասար է 0,9876-ի:

132. Պատահույթի հանդես գալու հավանականությունը 900 անկախ փորձերից յուրաքանչյուրում հավասար է 0,5-ի: Գտնել հավանականությունը, որ պատահույթի հանդես գալու հարաբերական հաճախությունը կշեղվի նրա հավանականությունից բացարձակ արժեքով ոչ շատ, քան 0,02-ը:

Պատ.՝ $P=2\Phi(1{,}2)=0{,}7698$:

133. Պատահույթի հանդես գալու հավանականությունը 10000 անկախ փորձերից յուրաքանչյուրում հավասար է 0,75-ի: Գտնել հավանականությունը, որ պատահույթի հարաբերական հաճախությունը կշեղվի նրա հավանականությունից բացարձակ արժեքով ոչ շատ, քան 0,01-ը:

Պատ.՝ $P=2\Phi(2{,}31)=0{,}979$:

134. Ֆրանսիական գիտնական Բյուֆֆոնը (XVIII դ.) մետաղադրամը գցել է 4040 անգամ, ընդ որում «գերբը» երևացել է 2048 անգամ: Գտնել հավանականությունը, որ Բյուֆֆոնի փորձերը կրկնելիս «գերբի» երևալու հարաբերական հաճախությունը կշեղվի նրա հավանականությունից բացարձակ արժեքով ոչ շատ, քան Բյուֆֆոնի փորձում:

Պատ.՝ $P=2\Phi(0{,}877)=0{,}6196$:

135. Պատահույթի հանդես գալու հավանականությունը անկախ փորձերից յուրաքանչյուրում հավասար է 0,5-ի:

Գտնել փորձերի n *թիվը, որի դեպքում 0,7698 հավանականությամբ հնարավոր լինի սպասել, որ պատահույթի հանդես գալու հարաբերական հաճախությունը կշեղվի նրա հավանականությունից ոչ շատ, քան 0,02-ը։*

Լուծում։ Ըստ պայմանի $p=0{,}5,\ q=0{,}5,\ \varepsilon=0{,}02,$

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-0{,}5\right|\leqslant 0{,}02\right)=0{,}7698։$$

Օգտվենք հետևյալ բանաձևից.

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\leqslant\varepsilon\right)=2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)։$$

Ըստ պայմանի՝

$$2\Phi\left(0{,}02\sqrt{\frac{n}{0{,}5\cdot 0{,}5}}\right)=0{,}7698$$

կամ

$$\Phi\left(0{,}04\cdot\sqrt{n}\right)=0{,}3849։$$

Աղյուսակից (հավելված 2) գտնենք $\Phi(1{,}2)=0{,}3849$։ *Հետևաբար,*

$$0{,}04\sqrt{n}=1{,}2$$

կամ

$$\sqrt{n}=30։$$

Այսպիսով, փորձերի որոնելի թիվը՝ $n=900$։

136. *Քանի՞ անգամ պետք է գցել խաղոսկրը, որպեսզի*

$$\left|\frac{m}{n}-\frac{1}{6}\right|\leqslant 0{,}01$$

անհավասարության հավանականությունը լինի ոչ քիչ, քան հակառակ անհավասարության հավանականությունը, որտեղ m*-ը 1 միավորի դուրս գալու թիվն է խաղոսկրը* n *անգամ գցելիս։*

Լուծում։ Օգտվենք հետևյալ բանաձևից.

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-P\right|\leqslant\varepsilon\right)=2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)։$$

Ըստ պայմանի $p=\frac{1}{6}$, $q=5/6$, $\varepsilon=0{,}01$։ *Տրվածին հակառակ անհավասարության իրականանալու հավանականությունը, այսինքն, որ* $\left|\frac{m}{n}-\frac{1}{6}\right|>0{,}01$, *հավասար է*

$$1-2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)։$$

Ըստ պայմանի պետք է տեղի ունենա

$$2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)\geqslant 1-2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$$

անհավասարությունը կամ

$$4\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)\geqslant 1։$$

Այստեղից

$$\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)\geqslant 0{,}25։ \qquad (*)$$

Աղյուսակից (հավելված 2) կգտնենք $\Phi(0{,}67)=0{,}2486$, $\Phi(0{,}68)=0{,}2517$։

Կատարելով գծային ինտերպոլյացիա, կստանանք

$$\Phi(0{,}6745)=0{,}25։$$

Հաշվի առնելով (*) առնչությունը և ի նկատի ունենալով, որ $\Phi(x)$ *ֆունկցիան աճող է, կունենանք*

$$\varepsilon\cdot\sqrt{\frac{n}{pq}}\geqslant 0{,}6745$$

կամ

$$0{,}01\cdot\sqrt{\frac{n}{1/6\cdot 5/6}}\geqslant 0{,}6745։$$

Այստեղից կգտնենք մետաղադրամը գցելու որոնելի թիվը՝ $n\geqslant 632$։

137. *Պատահույթի հանդես գալու հավանականությունը անկախ փորձերից յուրաքանչյուրում հավասար է 0,2-ի։*

Գտնել փորձերի n թիվը, որի դեպքում 0,9876 հավանականությամբ կարելի լինի սպասել, որ պատահույթի հանդես գալու հարաբերական հաճախությունը կշեղվի նրա հավանականությունից բացարձակ արժեքով ոչ շատ, քան 0,04-ը։

Պատ.՝ $n = 625$։

138. *Սափորում կան սպիտակ և սև գնդակներ՝ 4:1 հարաբերությամբ։ Գնդակը հանելուց հետո նշում են նրա գույնը և այն վերադարձնում սափոր։ Ինչի՞ է հավասար հանումների n թիվը, որի դեպքում 0,9722 հավանականությամբ կարելի լինի սպասել, որ սպիտակ գնդակի դուրս գալու հարաբերական հաճախության նրա հավանականությունից ունեցած շեղման բացարձակ արժեքը կլինի ոչ շատ, քան 0,01-ը։*

Պատ.՝ $n = 7744$։

139. *Պատահույթի հանդես գալու՝ հավանականությունը 400 անկախ փորձերից յուրաքանչյուրում հավասար է 0,8-ի։ Գտնել այնպիսի դրական ε թիվ, որ 0,9876 հավանականությամբ պատահույթի հանդես գալու հարաբերական հաճախության նրա հավանականությունից ունեցած շեղման բացարձակ արժեքը չգերազանցի ε-ը։*

Լուծում։ Ըստ պայմանի $n = 400$, $p = 0{,}8$, $q = 0{,}2$ կամ

$$2\,\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{400}{0{,}8\cdot 0{,}2}}\right) = 0{,}9876$$

կամ

$$\Phi(50\,\varepsilon) = 0{,}4938\text{։}$$

Աղյուսակից (հավելված 2) կգտնենք $\Phi(2{,}5) = 04938$։ Հետևաբար,

$$50\,\varepsilon = 2{,}5\text{։}$$

Այստեղից

$$\varepsilon = \frac{2{,}5}{50} = 0{,}05\text{։}$$

140. Պատահույթի հանդես գալու հավանականությունը 900 անկախ փորձերից յուրաքանչյուրում հավասար է 0,5-ի։ Գտնել այնպիսի դրական ε թիվ, որ 0,7698 հավանականությամբ պատահույթի հանդես գալու հարաբերական հաճախության նրա հավանականությունից ունեցած շեղման բացարձակ արժեքը չգերազանցի ε-ը։

Պատ.՝ $\varepsilon = 0,02$։

141. Պատահույթի հանդես գալու հավանականությունը 10000 անկախ փորձերից յուրաքանչյուրում հավասար է 0,75-ի։ Գտնել այնպիսի դրական ε թիվ, որ 0,979 հավանականությամբ պատահույթի հանդես գալու հարաբերական հաճախության նրա հավանականությունից ունեցած շեղման բացարձակ արժեքը չգերազանցի ε-ը։

Պատ.՝ $\varepsilon = 0,01$։

142. Տեխնիկական հսկողության բաժինը ստուգում է 900 դետալ ըստ միօրինակության։ Հավանականությունը, որ դետալը միօրինակ է, հավասար է 0,9-ի։ 0,9544 հավանականությամբ գտնել սահմանները, որոնցում կգտնվի ստուգվածների մեջ միօրինակ դետալների m թիվը։

Լուծում։ Ըստ պայմանի $n = 900$, $p = 0,9$, $q = 0,1$ կամ

$$2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{900}{0,9\cdot 0,1}}\right) = 0,9544,$$

$$\Phi(100\varepsilon) = 0,4772։$$

Աղյուսակից (հավելված 2) կգտնենք $\Phi(2) = 0,4772$։ Հետևաբար,

$$100\,\varepsilon = 2։$$

Այստեղից

$$\varepsilon = 0,02։$$

Այսպիսով, 0,9544 հավանականությամբ միօրինակ դետալների հարաբերական հաճախության շեղումը 0,9 հավանականությունից բավարարում է

$$\left|\frac{m}{900}-0,9\right|\leqslant 0,02$$

անհավասարությանը կամ

$$0,88\leqslant\frac{m}{900}\leqslant 0,92$$

անհավասարությանը։

Այստեղից, 900 ստուգված դետալների մեջ միօրինակների m թիվը 0,9544 հավանականությամբ ընկած է հետևյալ սահմաններում. $792\leqslant m\leqslant 828$։

143. Տեխնիկական հսկողության բաժինը ստուգում է 475 շինվածքի խոտանությունը։ Շինվածքի խոտան լինելու հավանականությունը 0,05 է։ 0,9426 հավանականությամբ գտնել սահմանները, որոնցում կգտնվի ստուգվածների մեջ խոտան շինվածքների m թիվը։

Պատ.՝ $14\leqslant m\leqslant 32$։

144. Խաղոսկրը գցում են 80 անգամ։ 0,9973 հավանականությամբ գտնել սահմանները, որոնցում կգտնվի 6-ի բացվելու m թիվը։

Պատ.՝ $3\leqslant m\leqslant 23$։

§ 4. Անկախ փորձերում պատահույթի հանդես գալու ամենահավանական թիվը

Պատահույթի հանդես գալու ամենահավանական թիվը։ Պատահույթի երևալու k_0 թիվը (անկախ փորձերում, որոնցից յուրաքանչյուրում պատահույթի հանդես գալու հավանականությունը p է) կոչում են ամենահավանական, եթե հավանականությունը, որ պատահույթը հանդես կգա այդ փորձերում k_0 անգամ, գերազանցում է (կամ առնվազն, փոքր չէ) փորձերի մնացած հնարավոր ելքերի հավանականությունից։

Ամենահավանական k_0 *թիվը որոշվում է*

$$np - q \leqslant k_0 < np + p$$

կրկնակի անհավասարությունից, ընդ որում․

ա) եթե $np-q$*-ն կոտորակ է, ապա գոյություն ունի մեկ ամենահավանական* k_0 *թիվ,*

բ) եթե $np-q$*-ն ամբողջ թիվ է, ապա գոյություն ունեն երկու ամենահավանական թվեր՝* k_0 *և* k_0+1*,*

գ) եթե np*-ն ամբողջ թիվ է, ապա ամենահավանականն է* $k_0 = np$ *թիվը։*

145. *Փորձարկվում է ինչ-որ սարքի 15 տարրերից յուրաքանչյուրը։ Հավանականությունը, որ տարրը կդիմանա փորձարկմանը հավասար է 0,9-ի։ Գտնել այն տարրերի ամենահավանական թիվը, որոնք կդիմանան փորձարկմանը։*

Լուծում․ Ըստ պայմանի $n = 15$, $p = 0{,}9$, $q = 0{,}1$։ *Գտնենք ամենահավանական* k_0 *թիվը հետևյալ կրկնակի անհավասարությունից՝*

$$np - q \leqslant k_0 < np + p\text{։}$$

Տեղադրելով խնդրի տվյալները, կստանանք

$$15 \cdot 0{,}9 - 0{,}1 \leqslant k_0 < 15 \cdot 0{,}9 + 0{,}9$$

կամ

$$13{,}4 \leqslant k_0 < 14{,}4\text{։}$$

Քանի որ k_0*-ն ամբողջ թիվ է և քանի որ 13,4 և 14,4 թվերի միջև ընկած է մեկ ամբողջ թիվ՝ 14-ը, ապա որոնելի ամենահավանական թիվը՝* $k_0 = 14$։

146. *Տեխնիկական հսկողության բաժինը ստուգում է 10 դետալների խմբաքանակը։ Հավանականությունը, որ դետալը միօրինակ է, հավասար է 0,75-ի։ Գտնել դետալների ամենահավանական թիվը, որոնք միօրինակ կճանաչվեն։*

Պատ.՝ $k_0 = 8$։

147. *Ապրանքագետը զննում է ապրանքի 24 նմուշ։ Հավանականությունը, որ յուրաքանչյուր նմուշ կճանաչվի որպես վաճառման համար պիտանի, հավասար է 0,6-ի։*

Գտնել ամենահավանական թիվը այն նմուշների, որոնք ապրանքագետը կճանաչի վաճառմանը պիտանի։

Լուծում։ Ըստ պայմանի $n=24$, $p=0,6$, $q=0,4$։ Գտնենք ապրանքի վաճառելու համար պիտանի նմուշների ամենահավանական թիվը հետևյալ կրկնակի անհավասարությունից՝

$$np-q \leqslant k_0 < np+p\text{։}$$

Տեղադրելով խնդրի տվյալները, կստանանք.

$$24\cdot0,6-0,4 \leqslant k_0 < 24\cdot0,6+0,6$$

կամ

$$14 \leqslant k_0 < 15\text{։}$$

Քանի որ $np-q=14$-ը ամբողջ թիվ է, ապա կան 2 ամենահավանական թվերը՝ $k_0=14$ և $k_0+1=15$։

148. Գտնել ծակոցի կողմից ճիշտ ծակված պերֆոքարտերի ամենահավանական թիվը 19 պերֆոքարտերի մեջ, եթե հավանականությունը, որ պերֆոքարտը սխալ է ծակված, հավասար է 0,1-ի։

Պատ.՝ $k_0=17$, $k_0+1=18$։

149. Երկու հավասարազոր հակառակորդներ շախմատ են խաղում։ Գտնել յուրաքանչյուր շախմատիստի շահումների ամենահավանական թիվը, եթե կխաղացվի 2 N արդյունարար (առանց ոչ-ոքիների) խաղ։

Լուծում։ Հայտնի է, որ եթե փորձերի n թվի և p հավանականության արտադրյալը ամբողջ թիվ է, ապա ամենահավանական թիվը՝ $k_0=np$։

Դիտարկվող խնդրում փորձերի n թիվը հավասար է խաղացված խաղերի թվին՝ 2 N. պատահույթի հանդես գալու հավանականությունը հավասար է 1 խաղում շահելու հավանականությանը, այսինքն՝ $p=\frac{1}{2}$ (ըստ պայմանի հակառակորդներն հավասարազոր են)։

Քանի որ $np=2\,N\cdot\frac{1}{2}=N$ արտադրյալը ամբողջ թիվ *է, ապա շահած խաղերի որոնելի ամենահավանական թիվը հավասար է N-ի։*

150. *Երկու հրաձիգ կրակում են թիրախին։ Վրիպելու հավանականությունը մեկ անգամ կրակելիս առաջին հրաձիգի համար հավասար է 0,2-ի, իսկ երկրորդի համար՝ 0,4-ի։ Գտնել համազարկերի ամենահավանական թիվը, որոնց դեպքում չի լինի թիրախին ոչ մի դիպում, եթե հրաձիգները տալիս են 25 համազարկ։*

Լուծում։ Հրաձիգների վրիպումները անկախ պատահույթներ են, հետևաբար կիրառելի է անկախ պատահույթների հավանականությունների բազմապատկման թեորեմը։ Հավանականությունը, որ երկու հրաձիգն էլ մեկ համազարկում կվրիպեն,

$$p = 0{,}2 \cdot 0{,}4 = 0{,}08։$$

Քանի որ $np = 25 \cdot 0{,}08 = 2$ *արտադրյալը ամբողջ թիվ է, ապա համազարկերի ամենահավանական թիվը, որոնց դեպքում չի լինի ոչ մի դիպում,*

$$k_0 = np = 2։$$

151. *Երկու հրաձիգ միաժամանակ կրակում են թիրախին։ Մեկ անգամ կրակելիս թիրախին դիպցնելու հավանականությունը առաջին հրաձիգի համար հավասար է 0,8-ի, իսկ երկրորդ հրաձիգի համար՝ 0,6-ի։ Գտնել համազարկերի ամենահավանական թիվը, որոնց դեպքում երկու հրաձիգներն էլ կդիպչեն թիրախին, եթե տրվում է 15 համազարկ։*

Պատ.՝ $k_0 = 7$։

152. *Քանի՞ անկախ փորձ պետք է կատարել, որոնցից յուրաքանչյուրում պատահույթի հանդես գալու հավանականությունն է 0,4, որպեսզի պատահույթի հանդես գալու ամենահավանական թիվը այդ փորձում լինի 25։*

Լուծում։ Ըստ պայմանի $k_0 = 25$, $p = 0{,}4$, $q = 0{,}6$։ *Օգտվենք կրկնակի անհավասարությունից՝*

$$np - q \leq k_0 < np + p։$$

Անհայտ թիվը գտնելու համար տեղադրենք խնդրի տըվյալները, կստանանք անհավասարությունների համակարգ․

$$0{,}4n - 0{,}6 \leqslant 25, \quad 0{,}4\, n + 0{,}4 > 25:$$

Համակարգի առաջին անհավասարությունից կգտնենք․

$$n \leqslant \frac{25{,}6}{0{,}4} = 64:$$

Համակարգի երկրորդ անհավասարությունից կունենանք

$$n > \frac{24{,}6}{0{,}4} = 61{,}5:$$

Այսպիսով, փորձերի որոնելի թիվը պետք է բավարարի հետևյալ կրկնակի անհավասարությանը․

$$62 \leqslant n \leqslant 64:$$

153. *Պատահույթի հանդես գալու հավանականությունը անկախ փորձերից յուրաքանչյուրում հավասար է 0,3-ի։ Գտնել փորձերի n թիվը, որի դեպքում պատահույթի հանդես գալու ամենահավանական թիվը կլինի 30։*

Պատ.՝ $100 \leqslant n \leqslant 102$։

154. *Պատահույթի հանդես գալու հավանականությունը անկախ փորձերից յուրաքանչյուրում հավասար է 0,7-ի։ Գտնել փորձերի n թիվը, որի դեպքում պատահույթի հանդես գալու ամենահավանական թիվը կլինի 20։*

Պատ.՝ $28 \leqslant n \leqslant 29$։

155. *Ինչի՞ է հավասար պատահույթի հանդես գալու p հավանականությունը 49 անկախ փորձերից յուրաքանչյուրում, եթե պատահույթի հանդես գալու ամենահավանական թիվը այդ փորձերում 30 է։*

Լուծում։ *Ըստ պայմանի* $n = 49$, $k_0 = 30$։ *Օգտվելով կրկնակի անհավասարությունից*

$$np - q \leqslant k_0 < np + p:$$

Անհայտ p *հավանականությունը գտնելու համար տեղադրենք խնդրի տվյալները, կստանանք անհավասարությունների համակարգ.*

$$49p + p > 30, \quad 49p - (1 - p) \leqslant 30:$$

Համակարգի առաջին անհավասարությունից կգտնենք $p > 0,6$: *Համակարգի երկրորդ անհավասարությունից կգտնենք* $p \leqslant 0,62$:

Այսպիսով, որոնելի հավանականությունը պետք է բավարարի հետևյալ կրկնակի անհավասարությանը՝

$$0,6 < p \leqslant 0,62:$$

156. *Ինչի՞ է հավասար պատահույթի հանդես գալու հավանականությունը 39 անկախ փորձերից յուրաքանչյուրում, եթե պատահույթի հանդես գալու ամենահավանական թիվը այդ փորձերում 25 է:*

Պատ.՝ $0,625 < p \leqslant 0,65$:

157. *Մարտկոցը կատարել է 6 կրակոց: Մեկ անգամ կրակելիս օբյեկտին դիպչելու հավանականությունը հավասար է 0,3-ի: Գտնել. ա) դիպումների ամենահավանական թիվը, բ) դիպումների ամենահավանական թվի հավանականությունը, գ) հավանականությունը, որ օբյեկտը կքանդվի, եթե դրա համար բավական է գոնե երկու դիպում:*

Լուծում: Ըստ պայմանի $n = 6$, $p = 0,3$, $q = 0,7$:

ա) Գտնենք դիպումների ամենահավանական թիվը հետևյալ բանաձևով.

$$np - q \leqslant k_0 < np + p:$$

Տեղադրելով խնդրի տվյալները, կստանանք.

$$6\cdot0,3 - 0,7 \leqslant k_0 < 6\cdot0,3 + 0,3$$

կամ

$$1,1 \leqslant k_0 < 2,1:$$

Այստեղից $k_0 = 2$:

բ) Դիպումների ամենահավանական թվի հավանականությունը գտնենք Բեռնուլլիի բանաձևով.

$$P_6(2) = C_6^2 \cdot p^2 \cdot q^4 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} \cdot 0{,}3^2 \cdot 0{,}7^4 = 0{,}324։$$

գ) Գտնենք հավանականությունը, որ օբյեկտը քանդված կլինի։ Ըստ պայմանի դրա համար բավական է, որ լինի 2 կամ 3, կամ 4, կամ 5, կամ 6 դիպում։ Այդ պատահույթները անհամատեղելի են, ուստի օբյեկտի քանդվելու հավանականությունը հավասար է այդ պատահույթների հավանականությունների գումարին.

$$P = P_6(2) + P_6(3) + P_6(4) + P_6(5) + P_6(6)։$$

Սակայն ավելի պարզ է սկզբում գտնել հակադիր պատահույթի (ոչ մի կամ մեկ դիպում) հավանականությունը.

$$Q = P_6(0) + P_6(1) = q^6 + C_6^1 pq^5 = 0{,}7^6 + 6 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7^5 = 0{,}42։$$

Որոնելի հավանականությունը, որ օբյեկտը կքանդվի,

$$P = 1 - Q = 1 - 0{,}42 = 0{,}58։$$

158. Գործիքը կազմված է անկախ աշխատող 5 տարրերից։ Միացնելիս տարրի խափանվելու հավանականությունը հավասար է 0,2-ի։ Գտնել. ա) խափանված տարրերի ամենահավանական թիվը՝ բ) խափանված տարրերի ամենահավանական թվի հավանականությունը, գ) գործիքը խափանվելու հավանականությունը, եթե դրա համար բավական է, որ խափանվեն գոնե 4 տարր։

Պատ. ա) $k_0 = 1$, բ) $P_5(1) = 0{,}41$, գ) $P = 0{,}0067$։

§ 5. Արտադրող ֆունկցիա

Այս գլխի նախորդ պարագրաֆներում դիտարկվեցին պատահույթի հանդես գալու միևնույն հավանականությամբ փորձեր։ Դիտարկենք այնպիսի փորձեր, որոնցում պատահույթի հանդես գալու հավանականությունները տարբեր են։

Դիցուք, կատարվում են n անկախ փորձեր, ընդ որում առաջին փորձում A պատահույթի հանդես գալու հավանականությունը հավասար է P_1-ի, երկրորդում՝ P_2, ..., n-րդում՝ Pn։ A պատահույթի հանդես չգալու հավանականությունները համապատասխանաբար հավասար են $q_1, q_2, \dots, q_n$։ $P_n(k)$-ն A պատահույթի ուղիղ k անգամ հանդես գալու հավանականությունն է n փորձերում։

$P_n(k)$ հավանականությունների արտադրող ֆունկցիա են անվանում հետևյալ հավասարությունով որոշվող ֆունկցիան.

$$\varphi_n(z) = (p_1 z + q_1)(p_2 z + q_2) \cdots (P_n z + q_n)։$$

$P_n(k)$ հավանականությունը, որ n անկախ փորձերում, որոնցից առաջինում պատահույթի հանդես գալու հավանականությունն է P_1, երկրորդում՝ P_2, և այլն, A պատահույթը հանդես կգա ուղիղ k անգամ, հավասար է արտադրող ֆունկցիան z-ի աստիճաններով վերլուծության մեջ z^k-ի գործակցին։ Օրինակ, եթե $n = 2$, ապա

$$\varphi_2(z) = (p_1 z + q_1)(p_2 z + q_2) = p_1 p_2 z^2 + (p_1 q_2 + p_2 q_1) z + q_1 q_2։$$

Այստեղ z^2-ու $p_1 p_2$ գործակիցը հավասար է $P_2(2)$ հավանականությանը, որ 2 փորձերում A պատահույթը հանդես կգա ուղիղ 2 անգամ, z-ի $p_1 q_2 + p_2 q_1$ գործակիցը հավասար է $P_2(1)$ հավանականությանը, որ A պատահույթը հանդես կգա ուղիղ 1 անգամ. z^0-ի գործակիցը, այսինքն $q_1 q_2$ ազատ անդամը հավասար է $P_2(0)$ հավանականությանը, որ A պատահույթը հանդես չի գա ոչ մի անգամ։

159. *Սարքը կազմված է 3 անկախ աշխատող տարրերից։ Տարրերի անխափան աշխատելու հավանականությունները (t ժամանակում) համապատասխանաբար հավասար են՝ $p_1 = 0{,}7$, $p_2 = 0{,}8$, $p_3 = 0{,}9$։ Գտնել հավանականությունը, որ t ժամանակում անխափան կաշխատեն. ա) բոլոր տարրերը, բ) 2 տարր, գ) մեկ տարր, դ) ոչ մի տարր։*

Լուծում։ Քանի որ տարրերի անխափան աշխատելու հավանականությունները համապատասխանաբար հավասար են՝ $p_1 = 0{,}7$, $p_2 = 0{,}8$, $p_3 = 0{,}9$, ապա հավանականությունները որ տարրերը կխափանվեն.

$$q_1 = 0{,}3, \quad q_2 = 0{,}2, \quad q_3 = 0{,}1։$$

Կազմենք արտադրող ֆունկցիան.

$$\begin{aligned} \varphi_3(z) &= (p_1 z + q_1)(p_2 z + q_2)(p_3 z + q_3) = \\ &= (0{,}7z + 0{,}3)(0{,}8z + 0{,}2)(0{,}9z + 0{,}1) = \\ &= 0{,}504z^3 + 0{,}398z^2 + 0{,}092z + 0{,}006։ \end{aligned}$$

ա) Հավանականությունը, որ 3 տարր անխափան կաշխատեն, հավասար է z^3-ի գործակցին։

$$P_3(3) = 0{,}504։$$

բ) Հավանականությունը, որ 2 տարր անխափան կաշխատեն, հավասար է z^2-ու գործակցին․

$$P_3(2) = 0{,}398։$$

գ) Հավանականությունը, որ 1 տարր անխափան կաշխատի, հավասար է z-ի գործակցին․

$$P_3(1) = 0{,}092։$$

դ) Հավանականությունը, որ ոչ մի տարր անխափան չի աշխատի, հավասար է ազատ անդամին․

$$P_3(0) = 0{,}006։$$

Ստուգում․ $0{,}504 + 0{,}398 + 0{,}092 + 0{,}006 = 1։$

160. Երկու հրանոթից ուղղված է համազարկ նպատակետին։ Նպատակակետին դիպչելու հավանականությունը առաջին հրանոթի համար 0,8 է, երկրորդի համար՝ 0,9։ Գտնել հետևյալ պատահույթների հավանականությունները․ ա) նպատակին 1 դիպում, բ) մեկից ոչ քիչ դեպքում։

Պատ․՝ ա) $P_2(2) = 0{,}72$, բ) $P_2(1) = 0{,}26$, գ) $P_2(0) = 0{,}02$, դ) $P_2(1) + P_2(2) = 0{,}98$։

161. Երեք հրանոթից ուղղված է համազարկ նպատակակետին։ Նպատակակետին դիպչելու հավանականությունը առաջին հրանոթի համար 0,8 է, երկրորդի համար՝ 0,85, իսկ երրորդի համար՝ 0,9։ Գտնել հետևյալ պատահույթների հավանականությունները․ ա) նպատակակետին 3 դիպում, բ) 2 դիպում, գ) 1 դիպում, դ) ոչ մի դիպում, ե) գոնե մեկ դիպում։

Պատ․՝ ա) $P_3(3) = 0{,}612$, բ) $P_3(2) = 0{,}329$, գ) $P_3(1) = 0{,}056$ դ) $P_3(0) = 0{,}003$, ե) $P = 1 - q_1q_2q_3 = 0{,}997$։

162. Հաշվողական սարքի չորս տարր աշխատում են՝ անկախ։ Առաջին տարրի խափանվելու հավանականությունը t ժամանակում հավասար է 0,2-ի, երկրորդի համար՝ 0,25-ի, երրորդի համար՝ 0,3-ի, չորրորդի համար՝ 0,4-ի։ Գտնել հավանականությունը, որ t ժամանակում կխափանվեն. ա) 4 տարր, բ) 3 տարր, գ) 2 տարր, դ) 1 տարր, ե) ոչ մի տարր, զ) 2-ից ոչ շատ տարրեր։

Պատ.՝ ա) $P_4(4)=0{,}006$, բ) $P_4(3)=0{,}065$, գ) $P_4(2)=0{,}254$, դ) $P_4(1)=0{,}423$, ե) $P_4(0)=0{,}252$, զ) $P_4(0)+P_4(1)+P_4(2)=$ $=0{,}929$։

163. Երկու մարտկոց, որոնցից յուրաքանչյուրը կազմված է 3-ական հրանոթից, համազարկ են ուղղում նպատակակետին։ Նպատակակետը կխոցվի, եթե յուրաքանչյուր մարտկոց տա 2-ից ոչ պակաս դիպում։ Նպատակակետին դիպչելու հավանականություններն առաջին մարտկոցի հրանոթների համար հավասար են 0,4-ի, 0,5-ի, 0,6-ի, երկրորդի համար՝ 0,5-ի, 0,6-ի, 0,7-ի։ Գտնել երկու մարտկոցից մեկ համազարկով նպատակակետին խոցելու հավանականությունը։

Պատ.՝ 0,325։

Երկրորդ մաս

ՊԱՏԱՀԱԿԱՆ ՄԵԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

ԳԼՈՒԽ ՉՈՐՐՈՐԴ

ԴԻՍԿՐԵՏ ՊԱՏԱՀԱԿԱՆ ՄԵԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

§ 1. Դիսկրետ պատահական մեծության հավանականությունների բաշխման օրենքը: Բինոմական և Պուասսոնի օրենքները

Դիսկրետ *կոչվում է այն պատահական մեծությունը, որի հնարավոր արժեքները առանձին մեկուսացված թվեր են (այսինքն՝ հնարավոր երկու հարևան արժեքների միջև չկան այլ հնարավոր արժեքներ), որ այդ մեծությունն ընդունում է որոշակի հավանականություններով։ Այլ խոսքերով, դիսկրետ պատահական մեծության հնարավոր արժեքները կարելի է համարակալել։ Դիսկրետ պատահական մեծության հնարավոր արժեքների թիվը կարող է լինել վերջավոր կամ անվերջ (վերջին դեպքում բոլոր հնարավոր արժեքների բազմությունը կոչում են հաշվելի)։*

Դիսկրետ պատահական մեծության Բաշխման օրենք *(բաշխման շարք) կոչվում է նրա հնարավոր արժեքների և համապատասխան հավանականությունների թվարկումը։ Դիսկրետ պատահական* X *մեծության բաշխման օրենքը կարելի է տալ աղյուսակի ձևով, որի առաջին տողը պարունակում է հնարավոր* x_i *արժեքները, իսկ երկրորդը՝* p_i *հավանականությունները.*

$$\begin{array}{lll} X & x_1 & x_2 \cdots x_n \\ P & p_1 & p_2 \cdots p_n, \end{array}$$

որտեղ $$\sum_{i=1}^{n} Pi = 1\text{։}$$

Դիսկրետ պատահական մեծության բաշխման օրենքը կարող է տրված լինել և անալիտիկորեն (բանաձևի տեսքով)

$$P(X = x_i) = \varphi(x_i)$$

կամ ինտեգրալ ֆունկցիայի միջոցով (տես գլ. VI, § 1)։

Դիսկրետ պատահական մեծության բաշխման օրենքը կարելի է պատկերել գրաֆիկորեն, որի համար ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգում կառուցում են $M_1(x_1, p_1)$, $M_2(x_2, p_2) \cdots M_n(x_n, p_n)$ (x_i-ն X-ի հնարավոր արժեքներն են, p_i-ն՝ համապատասխան հավանականությունները) կետերը և միացնում դրանք ուղղի հատվածներով։ Ստացված պատկերը կոչվում է բաշխման բազմանկյուն։

Բինոմական կոչվում է այն դիսկրետ պատահական X մեծության բաշխման օրենքը, որը n անկախ փորձերում, որոնցից յուրաքանչյուրում պատահույթի հանդես գալու հավանականությունը հավասար է P-ի, պատահույթի հանդես գալու թիվն է, հնարավոր X = k արժեքի (պատահարի k անգամ հանդես գալու) հավանականությունը հաշվում են Բեռնուլլիի բանաձևով.

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

Եթե փորձերի թիվը մեծ է, իսկ յուրաքանչյուր փորձում պատահույթի հանդես գալու p հավանականությունը՝ շատ փոքր, ապա օգտվում են մոտավոր

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

բանաձևից, որտեղ k-ն n անկախ փորձերում պատահույթի հանդես գալու թիվն է, λ=np (n փորձերում պատահույթի հանդես գալու միջին թիվը) և ասում են, որ պատահական մեծությունը բաշխված է Պուասոնի օրենքով։

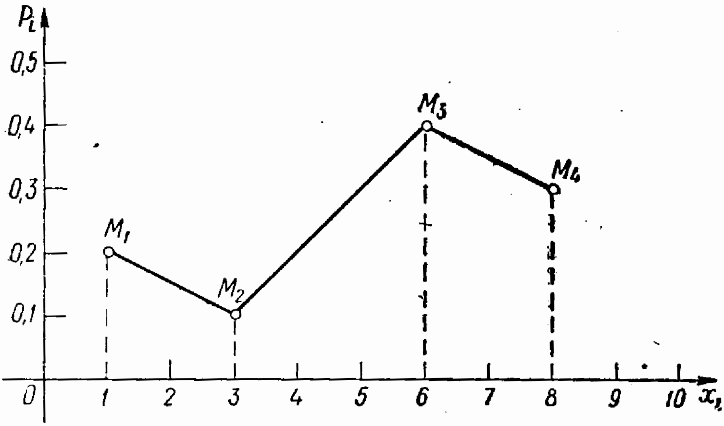
164. *Դիսկրետ պատահական X մեծությունը տրված է բաշխման օրենքով (շարքով).*

X	1	3	6	8
P	0,2	0,1	0,4	0,3

Կառուցել բաշխման բազմանկյունը։

Լուծում։ Կառուցենք ուղղանկյուն կոորդինատների համակարգը, ընդ որում աբսցիսների առանցքի վրա տեղադրենք հնարավոր x_i արժեքները, իսկ օրդինատների առանցքի վրա՝ համապատասխան p_i հավանականությունները։ Կառուցենք $M_1(1; 0,2,)$, $M_2(3; 0,1)$, $M_3(6; 0,4)$, $M_4(8; 0,3)$ *կետերը։ Միաց-*

նելով այդ կետերը ուղիղների հատվածներով, կստանանք որոնելի բաշխման բազմանկյունը (նկ. 5)։



Նկ. 5

165. *Դիսկրետ X պատահական մեծությունը տրված է բաշխման օրենքով.*

ա)

X	2	4	5	6
P	0,3	0,1	0,2	0,4;

բ)

X	10	15	20
P	0,1	0,7	0,2

Կառուցել բաշխման բազմանկյունը։

166. *Սարքը կազմված է երեք աշխատող տարրերից։ Յուրաքանչյուր տարրի խափանվելու հավանականությունը մեկ փորձում հավասար է 0,1-ի։ Կազմել մեկ փորձում խափանված տարրերի բաշխման օրենքը։*

Լուծում։ *Դիսկրետ X պատահական մեծությունն (մեկ փորձում խափանված տարրերի թիվը) ունի հետևյալ հնարավոր արժեքները.* $x_1=0$ *(սարքի և ոչ մի տարր չի խափանվել),* $x_2=1$ *(խափանվել է 1 տարր),* $x_3=2$ *(խափանվել են 2 տարր) և* $x_4=3$ *(խափանվել են 3 տարր)։*

Տարրերի խափանվելը իրարից անկախ են, նրանց խափանվելու հավանականությունները իրար հավասար են, ուստի կիրառելի է Բեռնուլլիի բանաձևը։ Հաշվի առնելով, որ *ըստ պայմանի* $n=3$, $p=0{,}1$, *հետևաբար,* $q=1-0{,}1=0{,}9$, *կստանանք* $P_3(0)=q^3=0{,}9^3=0{,}729$; $P_3(1)=C_3^1pq^2=$

$$=3\cdot 0{,}1\cdot 0{,}9^2=0{,}243;$$

$$P_3(2)=C_3^2p^2q=3\cdot 0{,}1^2\cdot 0{,}9=0{,}027;\quad P_3(3)=p^3=0{,}1^3=0{,}001.$$

Ստուգում: $0{,}729+0{,}243+0{,}027+0{,}001=1$։
Գրենք X-ի որոնելի բաշխման բինոմական օրենքը.

X	0	1	2	3
P	0,729	0,243	0,027	0,001

167. *Խմբաքանակում դետալների 10 %-ը միօրինակ չեն։ Պատահականորեն վերցված են 4 դետալ։ Գրել դիսկրետ պատահական X մեծության՝ 4 վերցվածների մեջ ոչ միօրինակ դետալների թվի բաշխման բինոմական օրենքը և կառուցել ստացված բաշխման բազմանկյունը։*

Պատ.՝

X	0	1	2	3	4
P	0,6561	0,2916	0,0486	0,0036	0,0001

168. *Գրել դիսկրետ X մեծության՝ մետաղյա դրամը երկու անգամ գցելիս «գերբի» երևալու թվի, բաշխման բինոմական օրենքը,*

Պատ.՝

X	0	1	2
P	1/4	1/2	1/4

169. *Երկու խաղոսկր միաժամանակ գցում են 2 անգամ։ Գրել դիսկրետ X մեծության՝ երկու խաղոսկրերի վրա զույգ թվով միավորների դուրս գալու, բաշխման բինոմական օրենքը։*

Պատ.՝

X	0	1	2
P	9/16	6/16	1/16

170. *10 դետալներից կազմված խմբաքանակում կան 8 միօրինակ դետալներ։ Պատահականորեն վերցված են 2 դետալ։ Կազմել, վերցվածների մեջ միօրինակ դետալների բաշխման օրենքը։*

Լուծում։ X *պատահական մեծությունը վերցվածների* մեջ միօրինակ գետալների թիվն ունի հետևյալ հնարավոր արժեքները. $x_1 = 0$, $x_2 = 1$,

2։ Ըստ հետևյալ բանաձևի (տես խնդիր 17, գլ. 1, § 1)

$$P(x=k) = \frac{C_n^k \cdot C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m}$$

(N-ը գետալների թիվն է, n-ը՝ խմբաքանակում միօրինակ գետալների թիվը, m-ը՝ վերցրած գետալների թիվը, k-ն՝ վերցրածների մեջ միօրինակ գետալների թիվը), կգտնենք

$$P(X=0) = \frac{C_8^0 \cdot C_2^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{\frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2}} = \frac{1}{45},$$

$$P(X=1) = \frac{C_8^1 \cdot C_2^1}{C_{10}^2} = \frac{8 \cdot 2}{45} = \frac{16}{45},$$

$$P(X=2) = \frac{C_8^2 \cdot C_2^0}{C_{10}^1} = \frac{\frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2}}{45} = \frac{28}{45}$$

Կազմենք որոնելի բաշխման օրենքը.

X	0	1	2
P	1/45	16/45	28/45

Ստուգում. $1/45 + 16/45 + 28/45 = 1$։

171. 6 գետալներից կազմված խմբաքանակում կան 4 միօրինակ գետալներ։ Պատահականորեն վերցված է 3 գետալ։ Գտնել դիսկրետ X պատահական մեծության՝ վերցրածների մեջ միօրինակ գետալների, բաշխման օրենքը.

Պատ.՝

X	0	1	2	3
P	0	1/5	3/5	1/5

172. Քննողը ուսանողին տալիս է լրացուցիչ հարցեր։ Հավանականությունը, որ ուսանողը կպատասխանի ամեն մի տրված հարցին, հավասար է 0,3-ի։ Դասախոսը ընդհատում է քննությունը, երբ ուսանողը չի պատասխանում տրված հարցին։ Պահանջվում է, ա) կազմել դիսկրետ X պատահական մեծության՝ լրացուցիչ հարցերի թվի, որ տալիս է դասախոսը ուսանողին, բաշխման օրենքը, բ) գտնել ուսանողին տրված լրացուցիչ հարցերի ամենահավանական k_0 թիվը։

Լուծում։ ա) Դիսկրետ X պատահական մեծությունը՝ լրացուցիչ տրված հարցերի թիվը, ունի հետևյալ հնարավոր արժեքները։ $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3, \ldots, x_k=k, \ldots$ Գտնենք այս հնարավոր արժեքների հավանականությունները։

X մեծությունը կընդունի $x_1=1$ հնարավոր արժեքը (քննողը տալիս է միայն 1 հարց), եթե ուսանողը չպատասխանի առաջին հարցին։ Այս հնարավոր արժեքի հավանականությունը հավասար է $1-0,9=0,1$։ Այսպիսով՝ $P(x=1)=0,1$։

X մեծությունը կընդունի հնարավոր $x_2=2$ արժեքը (քննողը կտա միայն 2 հարց)՝ եթե ուսանողը պատասխանի առաջին հարցին (այդ պատահույթի հավանականությունը հավասար է 0,9) և չպատասխանի երկրորդին (այդ պատահույթի հավանականությունը հավասար է 0,1-ի)։ Այսպիսով $P(x=2)=0,9\cdot 0,1=0,09$։

Համանմանորեն կգտնենք.

$$P(X=3)=0,9^2\cdot 0,1=0,081, \ldots, \quad P(X=k)=0,9^{k-1}0,1, \ldots$$

Գրենք որոնելի բաշխման օրենքը.

X	1	2	3 …	k …
P	0,1	0,09	0,081	$0,9^{k-1}\cdot 0,1, \ldots$

բ) Տրված հարցերի ամենահավանական թիվը՝ k_0-ն (X-ի ամենահավանական հնարավոր արժեքը), այսինքն՝ դասախոսի տրված հարցերի թիվը, որն ունի ամենամեծ հավանականությունը, ինչպես երևում է բաշխման օրենքից, հավասար է 1-ի։

173. Հավանականությունը, որ հրաձիգը կդիպցնի թիրախին մեկ անգամ կրակելիս, 0,8 է։ Հրաձիգին տրվում են *փամփուշտներ այնքան ժամանակ, քանի դեռ նա չի վրի-պել: Պահանջվում է. ա) կազմել դիսկրետ պատահական* X *մեծության՝ հրաձգին տրված փամփուշտների թվի բաշխման օրենքը, բ) գտնել հրաձգին տված փամփուշտների ամենա-հավանական թիվը:*

Պատ.՝ *ա)*

X	1	2	3 ...	k	...
P	0,2	0,16	0,128 ...	$0,8^{k-1}\cdot 0,2$ ...	

բ) $k_0 = 1$.

174. *Երկու հրանոթից հաջորդաբար կրակում են նպատակակետին, մինչև նրանցից մեկով առաջին անգամ դիպչելը: Նպատակակետին դիպցնելու հավանականությունը առաջին թնդանոթով 0,3 է, երկրորդով՝ 0,7: Կրակել սկսում է առաջին թնդանոթը: Կազմել դիսկրետ* X *և* Y *պատահական մեծությունների՝ համապատասխանաբար առաջին և երկրորդ թնդանոթների ծախսած արկերի թվերի բախշման օրենքները:*

Պատ.՝

X	1	2 ...	k ...
P	$0,3+0,7^2$	$0,3\cdot 0,7(0,3+0,7^2)$	$0,3^{k-1}0,7^{k-1}(0,3+0,7^2)$
Y	0	1 ...	k ...
P	0,3	$0,7(0,7+0,3^2)$ ...	$0,7^k\cdot 0,3^{k-1}(0,7+0,3^2)$ ..

175. *Երկու ռմբակոծիչներ ռումբեր են գցում նպատակակետին մինչև առաջին դիպումը: Նպատակակետին դիպցնելու հավանականությունը առաջին ռմբակոծիչի համար հավասար է 0,7-ի, երկրորդի համար՝ 0,8-ի: Սկզբում ռումբեր է գցում առաջին ռմբակոծիչը: Կազմել դիսկրետ* X *և* Y *պատահական մեծության՝ երկու ռմբակոծիչներով գցված ռումբերի թվի բաշխման օրենքի առաջին չորս անդամը (այսինքն՝ սահմանափակվել* X*-ի 1, 2,3 և 4 հնարավոր արժեքներով):*

Պատ.՝

X	1	2	3	4
P	0,7	0,24	0,042	0,0144

176. *Դասագիրքը հրատարակվել է 100000 օրինակ տպաքանակով: Հավանականությունը, որ դասագիրքը բրոշյուր-*

ված է սխալ, հավասար է 0,001-ի։ Գտնել հավանականությունը, որ տպաքանակի մեջ կլինի 5 խոտանված գիրք։

Լուծում։ Ըստ պայմանի $n=1000000$, $p=0{,}001$, $k=5$։ Պատահույթները, որ գրքերը բրոշյուրված են ոչ ճիշտ, անկախ են, n թիվը մեծ է, իսկ p հավանականությունը փոքր է, ուստի օգտվում ենք Պուասոնի բաշխումից.

$$P_n(k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

Գտնենք λ-ն.

$$\lambda=np=100000\cdot 0{,}001=10.$$

Որոնելի հավանականությունը.

$$P_{10000}(5)=\frac{10^5\cdot e^{-10}}{5!}=\frac{10^5\cdot 0{,}000045}{120}=0{,}0375$$

177. Սարքը կազմված է իրարից անկախ աշխատող 1000 տարրից։ T ժամանակում յուրաքանչյուր տարրի խափանվելու հավանականությունը հավասար է 0,002-ի։ Գտնել հավանականությունը, որ T ժամանակում կխափանվեն ճիշտ 3 տարր։

Ցուցում։ Ընդունել $e^{-2}=0{,}13534$

Պատ.՝ $P_{100}(3)=0{,}18$։

178. Ավտոմատ հաստոցը դրոշմում է դետալներ։ Հավանականությունը, որ պատրաստված դետալը կլինի խոտան, հավասար է 0,1-ի։ Գտնել հավանականությունը, որ 200 դետալների մեջ կլինի ճիշտ 4 խոտան։

Պատ.՝ $P_{200}(4)=0{,}09$։

179. Գործարանը բազա ուղարկեց 500 շինվածք։ Ճանապարհին շինվածքի վնասվելու հավանականությունը 0,002 է։ Գտնել հավանականությունը, որ ճանապարհին վնասված շինվածքների թիվը կլինի. ա) ճիշտ 3, բ) 2-ից քիչ, գ) 3-ից շատ, դ) գոնե մեկը։

Լուծում։ $n=500$ թիվը մեծ է, $p=0{,}002$ հավանականությունը փոքր է և դիտարկվող պատահույթները (շինվածքի վնասվելը) անկախ են, ուստի տեղի ունի Պուասոնի բանաձևը.

$$P_n(k)=\frac{\gamma^{k}e^{-5}}{k!},$$

ա) Գտնենք λ-ն.

$$\lambda=np=500\cdot 0{,}002=1։$$

Գտնենք հավանականությունը, որ վնասված է ուղիղ 3 ($k=3$) շինվածք.

$$P_{500}(3)=\frac{e^{-1}}{3!}=\frac{0{,}36788}{6}=0{,}0613։$$

բ) Գտնենք հավանականությունը, որ կվնասվի 3-ից ավելի քիչ շինվածք.

$$P_{500}(0)+P_{500}(1)+P_{500}(2)=e^{-1}+e^{-1}+\frac{e-1}{2}=$$

$$=\frac{5}{2}e^{-1}=\frac{5}{2}\cdot 0{,}36788=0{,}9197։$$

Գտնենք P հավանականությունը, որ վնասված կլինի 3-ից ավելի շատ շինվածք։ «Վնասված է 3-ից ավելի շատ շինվածք» և «վնասված է 3-ից ոչ շատ շինվածք» պատահույթները (այդ պատահույթի հավանականությունը նշանակենք Q-ով) հակադիր են, ուստի

$$P+Q=1։$$

Այստեղից,

$$P=1-Q=1-[P_{500}(0)+P_{500}(1)+P_{500}(2)+P_{500}(3)]։$$

Օգտագործելով վերն ստացված արդյունքները, կունենանք.

$$P=1-[0{,}9197+0{,}0613]=0{,}019։$$

գ) Գտնենք P_1 հավանականությունը, որ կվնասվի գոնե մեկ շինվածք։ «Վնասված է գոնե մեկ շինվածք» և «չի վնաս-

ված ոչ մի շինվածքի պատահույթները (այդ պատահույթի հավանականությունը նշանակենք Q_1-ով) հակադիր են, հետևաբար,

$$P_1 + Q_1 = 1:$$

Այստեղից, որոնելի հավանականությունը, որ վնասված կլինի գոնե մեկ շինվածք, հավասար է

$$P_1 = 1 - Q_1 = 1 - P_{500}(0) = 1 - e^{-1} = 1 - 0,36788 = 0,632։$$

180. *Խանութն ստացավ 1000 շիշ հանքային ջուր։ Հավանականությունը, որ փոխադրելիս շիշը կջարդվի, հավասար է 0,003-ի։ Գտնել հավանականությունը, որ խանութը կստանա ջարդված շշեր. ա) ճիշտ երկու, բ) 2-ից քիչ, գ) 2-ից շատ, դ) գոնե մեկ հատ։*

Ցուցում։ Ընդունել $e^{-1} = 0,04979$։

Պատ.՝ *ա)* $P_{100}(2) = 0,224$, *բ)* $P_{1000}(0) + P_{1000}(1) = 0,1992$, *գ)* $P_{1000}(k>2) = 0,5678$, *դ)* $P = 1 - P_{1000}(0) = 0,95$։

181: *Սարքը կազմված է մեծ թվով անկախ աշխատող տարրերից՝ յուրաքանչյուր տարր T ժամանակում խափանվելու միևնույն (շատ փոքր) հավանականությամբ։ Գտնել T ժամանակում խափանված տարրերի միջին թիվը, եթե հավանականությունը, որ այդ ժամանակում կխափանվի գոնե մեկ տարր հավասար է 0,98-ի։*

Լուծում։ Խնդրի պայմաններից հետևում է (քանի որ տարրերի թիվը մեծ է, տարրերն աշխատում են անկախ և յուրաքանչյուր տարրի խափանվելու հավանականությունը փոքր է), որ խափանվածների թիվը բաշխված է Պուասոնի օրենքով, ընդ որում պահանջվում է գտնել λ պարամետրը (խափանվածների միջին թիվը)։

Հավանականությունը, որ կխափանվի գոնե մեկ տարր, ըստ պայմանի հավասար է 0,98-ի, հետևաբար (տես խնդիր 179-ի դ) կետը),

$$1 - e^{\lambda} = 0,98:$$

Այստեղից

$$e^{-\lambda}=1-0{,}98=0{,}02:$$

e^{-x} *ֆունկցիայի աղյուսակից կգտնենք, $\lambda=3{,}9$։ Այսպիսով, սարքը T ժամանակում աշխատելիս կխափանվի մոտ 4 տարր։*

182. *Գտնել շինվածքների խմբաքանակում խոտան շինվածքների միջին λ թիվը, եթե հավանականությունը, որ այդ խմբաքանակում պարունակվում է գոնե մեկ խոտան շինվածք, հավասար է 0,95-ի. Ենթադրվում է, որ խոտան շինվածքների թիվը դիտարկվող խմբաքանակում բաշխված է Պուասսոնի օրենքով։*

Ցուցում։ Ընդունել $e^{-3}=0{,}05$։

Պատ.՝ $\lambda=3$։

183. *Ապացուցել, որ անկախ փորձերում պատահույթի երևալու թվերի Պուասսոնի օրենքով հաշված հավանականությունների գումարը հավասար է 1-ի։ Ենթադրվում է, որ փորձերը կատարվում են անվերջ թվով անգամ։*

Լուծում։ Ըստ Պուասսոնի օրենքի.

$$P_n(k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}\text{։}$$

Օգտվենք e^x *ֆունկցիայի Մակլորենի շարքի վերլուծությունից.*

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x_2}{2!}+\cdots$$

Հայտնի է, որ այս շարքը զուգամետ է x-*ի ցանկացած արժեքի դեպքում, ուստի, տեղադրելով* $x=\lambda$, *կստանանք.*

$$e^{\lambda}=1+\frac{\lambda}{1!}+\frac{\lambda^2}{2!}+\cdots=\sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{\lambda^k}{k!},$$

Գտնենք հավանականությունների որոնելի $\sum\limits_{k=0}^{\infty} P_n(k)$ գումարը, հաշվի առնելով, որ $e^{-\lambda}$-ն կախված չէ k-ից և, հետևաբար, կարող է դուրս գալ գումարանշանի տակից.

$$\sum_{k=1}^{\infty} P_n(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = e^0 = 1:$$

Դիտողություն: *Խնդրի լուծումը անմիջապես հետևում է այն բանից, որ լրիվ խումբ կազմող պատահույթների հավանականությունների գումարը հավասար է 1-ի: Բերված ապացույցը հետապնդում է ուսուցողական նպատակներ:*

§ 2. Պատահույթների պարզագույն հոսք

Պատահույթների հոսք *կոչվում է այն պատահույթների հաջորդականությունը, որ հանդես են գալիս ժամանակի պատահական ակընթարթում:*

Պարզագույն (պուասոնյան) *կոչվում է պատահույթների այն հոսքը, որն օժտված է հետևյալ 3 հատկություններով. ստացիոնարություն (անփոփոխելիություն), «հետազդեցության բացակայություն» և օրդինարություն (սովորականություն):*

Ստացիոնարության հատկությունն *այն է, որ ցանկացած ժամանակամիջոցում* k *հատ պատահույթի երևալու հավանականությունը կախված է միայն* k *թվից և* t *ժամանակամիջոցի տևողությունից և կախված չէ նրա հաշվման սկզբից: Այլ կերպ ասած,* t *տևողության ժամանակամիջոցում* k *հատ պատահույթների հանդես գալու հավանականությունը միայն* k*-ից և* t*-ից կախված ֆունկցիա է:*

«Հետազդեցության բացակայության» հատկությունն *այն է, որ ցանկացած ժամանակամիջոցում* k *հատ պատահույթների հանդես գալու հավանականությունը կախված չէ այն բանից, թե երևացել են կամ չեն երևացել պատահույթները դիտարկվող ժամանակամիջոցին նախորդող ակնթարթներին: Այլ կերպ ասած, հոսքի նախապատմությունը չի ազդում մոտ ապագայում պատահույթների հանդես գալու հավանականությունների վրա:*

Օրդինարության հատկությունն *այն է, որ փոքր ժամանակամիջոցում 2 կամ ավելի պատահույթների հանդես գալը գործնականում անհնար է: Այլ խոսքով, փոքր ժամանակամիջոցում մեկից ավելի* պատահույթների հանդես գալու հավանականությունը արհամարհելիորեն փոքր է համեմատած միայն մեկ պատահույթի հանդես գալու հավանականության հետ։

Հոսքի λ լարվածությունը (ինտենսիվությունը) կոչվում է միավոր ժամանակում հանդես եկող պատահույթների միջին թիվը։

Եթե հոսքի հաստատուն λ լարվածությունը հայտնի է, ապա t ժամանակում պարզագույն հոսքի k պատահույթների հանդես գալու հավանականությունն որոշվում է Պուասոնի բանաձևով.

$$P_t = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}\text{։}$$

Դիտողություն։ Ստացիոնարության հատկությամբ օժտված հոսքը կոչում են ստացիոնար, հակառակ դեպքում՝ ոչ ստացիոնար։

184. *Ցույց տալ, որ t տևողությամբ ժամանակամիջոցում պատահույթների երևալու հավանականությունը որոշող Պուասոնի բանաձևը՝*

$$P_t(k) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!},$$

կարելի է դիտել որպես պատահույթների պարզագույն հոսքի մաթեմատիկական մոդել, այլ խոսքով, ցույց տալ, որ Պուասոնի բանաձևը արտացոլում է պարզագույն հոսքի բոլոր հատկությունները։

Լուծում։ (*) բանաձևից երևում է, որ t տևողության ժամանակամիջոցում k պատահույթների հանդես գալու հավանականությունը, տված λ լարվածության դեպքում, հանդիսանում է միայն k-ից և t-ից ֆունկցիան, որն արտացոլում է պարզագույն հոսքի ստացիոնարության հատկությունը։

(*) բանաձևը չի օգտագործում դիտարկվող t տևողական ժամանակամիջոցից առաջ պատահույթների երևալու մասին տեղեկությունը, որը արտացոլում է հետազոտության բացակայության հատկությունը։

Ցույց տանք, որ դիտարկվող բանաձևն արտացոլում է օրդինարության հատկությունը։ Տեղադրելով $k=0$ և $k=1$, գտնենք պատահույթի չերևալու և մեկ անգամ երևալու հավանականությունները։

$$P_t(0)=e^{-\lambda t},\quad P_t(1)=\lambda te^{-\lambda t}:$$

Հետևաբար, մեկից ավելի պատահույթների հանդես գալու հավանականությունը·

$$P_t(k>1)=1-[P_t(0)+P_t(1)]=1-[e^{-\lambda t}+\lambda te^{-\lambda t}]:$$

Օգտագործելով $e^{-\lambda t}$ *ֆունկցիայի վերլուծությունը Մակլորենի շարքի, տարրական ձևափոխություններից հետո, կստանանք.*

$$P_t(k>1)=\frac{(\lambda t)^2}{2!}+\cdots$$

Համեմատելով $P_t(1)$*-ը և* $P_t(k>1)$*-ը, եզրակացնում ենք, որ* t*-ի փոքր արժեքների դեպքում մեկից ավելի պատահույթների հանդես գալու հավանականությունն արհամարհելիորեն փոքր է մեկ պատահույթի հանդես գալու հավանականության համեմատությամբ, որ արտացոլում է օրդինարության հատկությունը:*

Այսպիսով, Պուասոնի բանաձևն արտացոլում է պարզագույն հոսքի բոլոր 3 հատկությունները, ուստի այն կարելի է դիտել որպես այդ հոսքի մաթեմատիկական մոդել:

185. *Մեկ րոպեում տաքսիների դիսպետչերական կետ հասած պատվերների միջին թիվը հավասար է 3-ի: Գտնել հավանականությունը, որ 2 րոպեում կգա. ա) 4 կանչ, բ) 4-ից ավելի քիչ կանչ, գ) 4-ից ոչ պակաս կանչ:*

Լուծում: Ըստ պայմանի՝ $\lambda=3$, $t=2$, $k=2$: *Օգտվենք Պուասոնի բանաձևից,*

$$P_t(k)=\frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!},$$

ա) Որոնելի հավանականությունը, որ 2 րոպեում կգա 4 կանչ

$$P_2(4)=\frac{6^4e^{-6}}{4!}=\frac{1296\cdot 0{,}0025}{24}=0{,}135:$$

բ) «Եկել է 4-ից ավելի քիչ կանչ» պատահույթը տեղի կունենա, եթե տեղի ունենա հետևյալ անհամատեղելի պատահույթներից մեկը. 1) եկել է 3 կանչ, 2) եկել է 2 կանչ, 3) եկել է 1 կանչ, 4) ոչ մի կանչ չի եկել: Այս պատահույթներն անհամատեղելի են, ուստի կիրառելի է անհամատեղելի պատահույթների հավանականությունների գումարման թեորեմը.

$$P_2(k<4)=P_2(3)+P_2(2)+P_2(1)+P_2(0)=$$

$$=\frac{6^3\cdot e^{-6}}{3!}+\frac{6^2\cdot e^{-6}}{2!}+\frac{6\cdot e^{-6}}{1!}+e^{-6}=e^{-6}(36+18+6+1)=$$

$$=0,0025\cdot 61=0,1525:$$

գ) «Եկել է 4-ից պակաս կանչ» և «եկել է 4-ից ոչ պակաս կանչ» պատահույթները հակադիր են, ուստի որոնելի հավանականությունը, որ 2 րոպեում կգա 4-ից ոչ պակաս կանչ

$$P(k\geqslant 4)=1-P(k<4)=1-0,1525=0,8475:$$

186. Մեկ րոպեում ԱՀԿ (ավտոմատ հեռախոսակայան) եկած կանչերի միջին թիվը 2 է: Գտնել հավանականությունը, որ 4 րոպեում կգա.

ա) 3 կանչ, բ) 3-ից ավելի պակաս կանչ, գ) 3-ից ոչ պակաս կանչ: Կանչերի հոսքը ենթադրվում է պարզագույն:

Պատ.՝ ա) $P_4(2)=0,256$, բ) $P_4(k<3)=0,0123$, գ) $P_4(k\geqslant 3)=$ $=0,9887$:

187. Ապացուցել, որ պատահույթների պարզագույն ստացիոնար հոսքի համար

$$\lim_{t\to 0}\frac{P(k\geqslant 1)}{P(k=1)}=1:$$

Ցուցումներ: 1. Օգտվել հակադիր պատահույթների հավանականությունների գումարման թեորեմից.

$$P_t(k=0)+P_t(k\geqslant 1)=1:$$

2. Որոնելի սահմանը գտնելիս օգտվել Լոպիտալի կանոնից:

§ 3. Դիսկրետ պատահական մեծությունների թվային բնութագրիչները

Որպես պատահական մեծության միջին արժեքի բնութագրիչ ծառայում է մաթեմատիկական սպասումը։

Դիսկրետ պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասում կոչվում է նրա բոլոր հնարավոր արժեքների և նրանց հավանականությունների արտադրյալների գումարը.

$$MX = x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n.$$

Եթե պատահական մեծությունը ընդունում է հաշվելի բազմությամբ հնարավոր արժեքներ՝ ապա

$$M(X)=\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i,$$

ընդ որում, ենթադրվում է, որ հավասարության աջ կողմում գտնվող շարքը բացարձակ զուգամետ է, և բոլոր p_i հավանականությունների գումարը հավասար է 1-ի։

Մաթեմատիկական սպասումը օժտված է հետևյալ հատկություններով

Հատկություն 1. Հաստատուն մեծության մաթեմատիկական սպասումը հավասար է հենց իրեն՝ հաստատունին։

$$M(c)=c։$$

Հատկություն 2. Պատահական մեծությունների գումարի մաթեմատիկական սպասումը հավասար է գումարելիների մաթեմատիկական սպասումների գումարին։

$$M(X_1+X_2+\cdots+X_n)=M(X_1)+M(X_2)+\cdots+M(X_n)։$$

Հատկություն 3. Փոխադարձ անկախ պատահական մեծությունների արտադրյալի մաթեմատիկական սպասումը հավասար է արտադրիչների մաթեմատիկական սպասումների արտադրյալին։

$$M(X_1\cdot X_2\cdots X_n)=M(X_1)\cdot M(X_2)\cdots M(X_n).$$

Հատկություն 4. Բինոմական բաշխման մաթեմատիկական սպասումը հավասար է փորձերի թվի և մեկ փորձում պատահույթի երևալու հավանականության արտադրյալին.

$$M(X)=np։$$

Պատահական մեծության հնարավոր արժեքների մաթեմատիկական սպասման շուրջը ցրման բնութագրերն են հանդիսանում, մասնավորապես, դիսպերսիան և միջին քառակուսային շեղումը։

Պատահական X մեծության դիսպերսիա կոչվում է շեղման քառակուսու միջին արժեքը.

$$D(X)=M[X-M(X)]^2:$$

Դիսպերսիան հարմար է հաշվել հետևյալ բանաձևով.

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2:$$

Դիսպերսիան օժտված է հետևյալ հատկություններով.

Հատկություն 1. Հաստատունի դիսպերսիան հավասար է զրոյի.

$$D(c)=0:$$

Հատկություն 2. Հաստատուն արտադրիչը կարելի է դուրս բերել դիսպերսիայի նշանի տակից՝ նախապես այն բարձրացնելով քառակուսի.

$$D(CX)=C^2\cdot D(X):$$

Հատկություն 3. Անկախ պատահական մեծությունների գումարի դիսպերսիան հավասար է գումարելիների դիսպերսիաների գումարին:

$$D(X_1+X_2+\cdots+X_n)=D(X_1)+D(X_2)+\cdots+D(X_n):$$

Բինոմական բաշխման դիսպերսիան հավասար է փորձերի թվի և մեկ փորձում պատահույթի երևալու ու չերևալու հավանականությունների արտադրյալին.

$$D(X)=npq:$$

Պատահական մեծության միջին քառակուսային շեղում կոչվում է դիսպերսիայից քառակուսի արմատը.

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}:$$

188. *Գտնել տրված բաշխման օրենքով* X *պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը.*

ա)

X	−4	6	10
P	0,2	0,3	0,5

բ)

X	0,21	0,54	0,61
P	0,1	0,5	0,4

Լուծում: ա) Մաթեմատիկական սպասումը հավասար է X-ի բոլոր հնարավոր արժեքների և նրանց հավանականությունների արտադրյալների գումարին.

$$M(X)=-4\cdot 0{,}2+6\cdot 0{,}3+10\cdot 0{,}5=6:$$

Պատ.՝ *բ)* $M(X)=0{,}535$:

189. *Գտնել* Z *պատահական մեծության մաթեմատիկա-*

կան սպասումը, եթե հայտնի են X-ի և Y-ի մաթեմատի-կական սպասումները.

ա) $Z = X + 2Y,\ M(X) = 5,\ M(Y) = 3;$

բ) $Z = 3X + 4Y,\ M(X) = 2,\ M(Y) = 6:$

Լուծում։ ա) Օգտագործելով մաթեմատիկական սպասման հատկությունները (գումարի մաթեմատիկական սպասումը հավասար է գումարելիների մաթեմատիկական սպասումների գումարին։ Հաստատուն արտադրիչը կարելի է դուրս բերել մաթեմատիկական սպասման նշանի տակից), կստանանք.

$$M(Z) = M(X + 2Y) = M(X) + M(2Y) = M(X) + 2M(Y) = 5 + 2\cdot 3 = 11:$$

Պատ.՝ *բ)* $M(Z) = 30:$

190. *Օգտագործելով մաթեմատիկական սպասման հատկությունները ապացուցել, որ ա)* $M(X - Y) = M(X) - M(Y)$, *բ)* $X - M(X)$ *շեղման մաթեմատիկական սպասումը հավասար է զրոյի։*

191. *Դիսկրետ* X *պատահական մեծությունն ընդունում է 3 հնարավոր արժեքներ,* $x_1 = 4$*-ը՝* $p_1 = 0,5$ *հավանականությամբ,* $x_2 = 6$*-ը՝* $p_2 = 0,3$ *հավանականությամբ և* x_3*-ը՝* p_3 *հավանականությամբ։ Գտնել* x_3*-ը և* p_3*-ը, գիտենալով, որ* $M(X) = 8$։

Պատ.՝ $x_3 = 21,\quad p_3 = 0,2:$

192. *Տրված է դիսկրետ* X *պատահական մեծության հնարավոր արժեքների ցուցակը.*

$$x_1 = -1,\quad x_2 = 0\quad x_3 = 1,$$

ինչպես նաև հայտնի են այդ մեծության և նրա քառակուսու մաթեմատիկական սպասումները.

$$M(X) = 0,1,\quad M(X^2) = 0,9:$$

Գտնել x_1, x_2, x_3 *հնարավոր արժեքներին համապատասխանող* p_1, p_2, p_3 *հավանականությունները:*

Լուծում։ Օգտվելով այն բանից, որ X-ի բոլոր հնարավոր արժեքների հավանականությունների գումարը հավասար է 1-ի, ինչպես նաև հաշվի առնելով որ $M(X)=0,1$, $M(X^2)=0,9$, *կազմենք անհայտ հավանականությունների նկատմամբ գծային 3 հավասարումների համակարգը.*

$$p_1+p_2+p_3=1,\ (-1)p_1+0\cdot p_2+1\cdot p_3=0,1,\ (-1)^2p_1+$$
$$+0^2p_2+1^2\cdot p_3=0,9:$$

Լուծելով այս համակարգը կգտնենք որոնելի հավանականությունները.

$$p_1=0,4, \qquad p_2=0,1, \qquad p_3=0,5:$$

193. *Տրված է դիսկրետ X պատահական մեծության հնարավոր արժեքների թվարկումը,*

$$x_1=1, \qquad x_2=2, \qquad x_3=3,$$

ինչպես նաև հայտնի են այդ պատահական մեծության և նրա քառակուսու մաթեմատիկական սպասումները.

$$M(X)=2,3, \quad M(X^2)=5,9:$$

Գտնել X-ի հնարավոր արժեքներին համապատասխանող հավանականությունները:

Պատ.՝ $p_1=0,2$, $p_2=0,3$, $p_3=0,5$:

194. *10 դետալների խմբաքանակում պարունակվում է 3 ոչ միօրինակ դետալներ: Պատահականորեն ընտրված են 2 դետալ: Գտնել դիսկրետ պատահական X մեծության՝ 2 ընտրվածների մեջ ոչ միօրինակ դետալների մաթեմատիկական սպասումը:*

Ցուցում. Օգտվել գլ. 1, § 1, խնդիր 17-ի լուծումից.

Պատ.՝ $M(X)=\frac{3}{5}$:

195. *ա) Ապացուցել, որ մեկ փորձում A պատահույթի* երևալու թվի մաթեմատիկական սպասումը հավասար է A եպատահույթի երևալու p հավանականությանը։

Ցուցում։ Դիսկրետ X պատահական մեծությունը՝ մեկ փորձում պատահույթի երևումների թիվը, ունի միայն 2 հնարավոր արժեքներ. $x_1=1$ (A պատահույթը տեղի է ունեցել) և $x_2=0$ (A պատահույթը տեղի չի ունեցել)։

բ) Ապացուցել, որ դիսկրետ X պատահական մեծության՝ n անկախ փորձերում A պատահույթի երևումների թվի, որոնցից յուրաքանչյուրում պատահույթի երևալու հավանականությունը հավասար է p-ի, մաթեմատիկական սպասումը հավասար է փորձերի թվի և մեկ փորձում պատահույթի երևալու հավանականության արտադրյալին, այսինքն՝ ապացուցել, որ բինոմական բաշխման մաթեմատիկական սպասումը $M(X)=np$։

196. Գտնել դիսկրետ X պատահական մեծության՝ 5 խաղոսկրերի այնպիսի նետումների թվի մաթեմատիկական սպասումը, որոնցից յուրաքանչյուրում 2 խաղոսկրի վրա կերևա մեկական միավոր, եթե նետումների ընդհանուր թիվը հավասար է 20-ի։

Լուծում։ Օգտվենք հետևյալ բանաձևից.

$$M(X)=np,$$

որտեղ n-ը փորձերի ընդհանուր թիվն է (5 խաղոսկրերի նետումների), X-ը մեզ հետաքրքրող պատահույթի (5-ից 2 խաղոսկրի վրա կերևա մեկական միավոր) երևալու թիվն է այդ n փորձերում,

p-ն մեկ փորձում դիտարկվող պատահույթի երևալու հավանականությունն է։

Ըստ պայմանի $n=20$։ Մնում է գտնել P-ն՝ այն բանի հավանականությունը, որ 5 խաղոսկրերից 2-ի նիստերի վրա կերևա մեկական միավոր։ Այդ հավանականությունը հաշվենք Բեռնուլլիի բանաձևով, հաշվի առնելով, որ մեկ խաղոսկրի նիստին միավորի երևալու հավանականությունը՝ $P=\frac{1}{6}$ և հետևաբար չերևալու հավանականությունը՝

$$q=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6},$$

$$P=P_5(2)=C_5^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{5\cdot4\cdot5^3}{1\cdot2\cdot6^5}=\frac{5^4}{3\cdot6^4},$$

Որոնելի մաթեմատիկական սպասումը․

$$M(X)=n\cdot P=20\cdot\frac{5^4}{3\cdot6^4}=3:$$

197. *Սարքը կազմված է* n *տարրից։ Փորձի ժամանակ ցանկացած տարրի խափանվելու հավանականությունը հավասար է* p-*ի։ Գտնել այն փորձերի թվի մաթեմատիկական սպասումը, որոնցից յուրաքանչյուրում կխափանվի ճիշտ* m *տարր, եթե ընդամենը կատարված է* N *փորձ։ Ենթադրվում է, որ փորձերը միմյանցից անկախ են.*

Լուծում։ Նշանակենք X-*ով այն փորձերի թիվը, որոնցում կխափանվեն ճիշտ* m *տարր։ Քանի որ փորձերը անկախ են և մեկ հետաքրքրող պատահույթի (մեկ փորձում կխափանվի ճիշտ* m *տարր) հավանականությունն այդ փորձերում նույնն է, ապա ճիշտ է*

$$M(X)=NP \qquad (*)$$

բանաձևը, որտեղ N-*ը փորձերի ընդհանուր թիվն է,* P-*ն՝ հավանականությունը, որ 1 փորձում կխափանվի ճիշտ* m *տարր։*

Գտնենք P *հավանականությունը Բեռնուլլիի բանաձևով։*

$$P=C_n^m p^m q^{n-m}: \qquad (**)$$

Տեղադրելով (**)-ը (*)-ի մեջ, կստանանք որոնելի մաթեմատիկական սպասումը․

$$M(X)=N\cdot C_n^m p^m q^{n-m}:$$

198. *Գցում են* n *խաղոսկր։ Գտնել այն նետումների թվի մաթեմատիկական սպասումը, որոնցից յուրաքանչյուրում կընկնեն ճիշտ* m *6-յակ, եթե նետումների ընդհանուր թիվը* N *է։*

Պատ.՝ $M(X)=N\cdot C_n^m\left(\frac{1}{6}\right)^m\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-m}:$

199. *Գցում են* n *խաղոսկր: Գտնել այն միավորների թվի գումարի մաթեմատիկական սպասումը, որոնք կընկնեն բոլոր նիստերի վրա:*

Լուծում: Նշանակենք X*-ով այն միավորների թվի գումարը, որոնք կընկնեն բոլոր նիստերի վրա,* X_i*-ով* $(i=1,2,\ldots,n)$ i*-րդ խաղոսկրի նիստին երևացած միավորների թիվը: Այդ դեպքում, ակնհայտ է.*

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n:$$

Հետևաբար,

$$M(X) = M(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = M(X_1) + M(X_2) + \cdots + \\ + M(X_n): \qquad (*)$$

Ակնհայտ է, որ բոլոր X_i *մեծությունները ունեն նույն բաշխումը և, հետևաբար, միևնույն թվային բնութագրիչները և, մասնավորապես, միևնույն մաթեմատիկական սպասումները՝ այսինքն՝*

$$M(X_1) = M(X_2) = \cdots = M(X_n):$$

(*)-ի շնորհիվ կստանանք (**)

$$M(X) = n \cdot M(X_1):$$

Այսպիսով, բավական է հաշվել X_1 *մեծության մաթեմատիկական սպասումը, այսինքն՝ առաջին խաղոսկրի վրա բացվող միավորների մաթեմատիկական սպասումը: Դրա համար գրենք* X_1*-ի բաշխման օրենքը.*

X_1	1	2	3	4	5	6
P	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Գտնենք $M(X_1)$*-ը.*

$$M(X_1) = 1 \cdot 1/6 + 2 \cdot 1/6 + 3 \cdot 1/6 + 4 \cdot 1/6 + 5 \cdot 1/6 +$$

$$+6\cdot 1/6=\frac{7}{2}, \qquad (***)$$

Տեղադրելով (***)-ը (**)-ի մեջ, վերջնականապես կստանանք.

$$M(X)=\frac{7}{2}n:$$

200. *Տեխնիկական հսկողության բաժինը ստուգում է շինվածքներն ըստ միօրինակության: Հավանականությունը, որ շինվածքը միօրինակ է, հավասար է 0,9-ի: Յուրաքանչյուր խմբաքանակում պարունակվում է 5 շինվածք: Գտնել դիսկրետ* X *պատահական մեծության՝ այն խմբաքանակի թվի, որոնցից յուրաքանչյուրում կլինի ճիշտ 4 միօրինակ շինվածք, մաթեմատիկական սպասումը, եթե պետք է ստուգվի 50 խմբաքանակ:*

Պատ.՝ $M(X)=50\cdot C^4_5\cdot 0{,}9^4\cdot 0{,}1\approx 16$:

201. *Ապացուցել. 1)* $M(Y)=aM(X)+b$, *եթե* $Y=aX+b$, *2)* $M(Y)=\sum_{i=1}^{n} a_i = M(Xi)+b$, *եթե* $Y=\sum_{i=1}^{n}(a_iX_i)+b$:

202. *Ապացուցել, որ դիսկրետ* X *պատահական մեծության՝ լրիվ խումբ կազմող անհամատեղելի* $A_1, A_2, \dots A_n$ *պատահույթների հավանականությունների մաթեմատիկական սպասումն ունի ամենափոքր արժեքը, եթե բոլոր պատահույթների հավանականությունները միևնույնն են:*

Լուծում: X *մեծության հնարավոր արժեքներն, ըստ պայմանի, հավասա՛ր են* A_i *պատահույթների հավանականություններին.* P_i *հնարավոր արժեքների հավանականությունը ևս հավասար է* p_i*-ի: Այսպիսով,* X*-ն ունի հետևյալ բաշ-*

խումբ.

$$\begin{array}{cccc} X & p_1 & p_2 \cdots p_n \\ P & p_1 & p_2 \cdots p_n \end{array}$$

Գտնենք X*-ի մաթեմատիկական սպասումը.*

$$M(X) = p_1^2 + p_2^2 + \cdots + p_n^2:$$

Դիտարկվող պատահույթները կազմում են լրիվ խումբ, ուստի

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1:$$

Դիֆերենցիալ հաշվից հայտնի է, որ եթե անկախ փոփոխականների գումարը հաստատուն է, ապա այդ փոփոխականների քառակուսիների գումարն ունի ամենափոքր արժեքը փոփոխականների հավասարության դեպքում: Դիտարկվող խնդրի նկատմամբ այդ նշանակում է. (*) գումարը, այսինքն՝ մաթեմատիկական սպասումը ունի ամենափոքր արժեք, եթե բոլոր պատահույթների հավանականությունները, որոնք կազմում են լրիվ խումբ, հավասար են իրար, որը և պահանջվում էր ապացուցել:

203. *Ապացուցել, որ դիսկրետ պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը գտնվում է նրա հնարավոր արժեքներից ամենամեծի և ամենափոքրի միջև:*

Լուծում: Դիցուք X*-ը դիսկրետ պատահական մեծություն է, որը տրված է բաշխման օրենքով.*

$$\begin{array}{cccc} X & x_1 & x_2 \cdots x_n \\ P & p_1 & p_2 \cdots p_n \end{array}$$

Նշանակենք հնարավոր ամենափոքր և ամենամեծ արժեքները համապատասխանաբար m*-ով և* M*-ով: Այդ դեպքում*

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n \leq M\cdot p_1 + M\cdot p_2 + \cdots + M\cdot p_n = M\cdot(p_1 + p_2 + \cdots + p_n) = M:$$

Այսպիսով,

$$M(X) \leqslant M\text{։} \qquad (*)$$

Նույն ձևով հեշտ արտածել, որ (**)

$$M(X) \geqslant m\text{:}$$

Միավորելով (*)-ը և (**)-ը վերջնականապես կունենանք.

$$m \leqslant M(X) \leqslant M\text{:}$$

204. Դիսկրետ X պատահական մեծությունն ընդունում է k-հատ դրական արժեքներ՝ $x_1, x_2, \dots, x_k$, համապատասխանաբար $p_1, p_2, \dots p_k$ հավանականություններով։ Ենթադրելով, որ հնարավոր արժեքները գրված են աճման կարգով, ապացուցել, որ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(MX^{n+1})}{M(X^n)} = x_k\text{:}$$

Լուծում։ Նկատի ունենալով, որ

$$P(X^{n+1} = x_i^{n+1}) = P(X = x_i) = p_i \text{ և } P(X^n = x_i^n) = p_i,$$

կստանանք

$$\operatorname{iim}_{n\leftarrow\infty} \frac{M(X^{n+1})}{M(X^n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_1^{n+1}p_1 + \dots + x_{k-1}^{n+1}p_{k-1} + x_k^{n+1}p_k}{x_1^n p_1 + \dots + x_{k-1}^n p_{k-1} + x_k^n p_k} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{x_k^{n+1}p_k\left[\left(\frac{x_1}{x_k}\right)^{n+1} \cdot \frac{p_1}{p_k} + \dots + \left(\frac{x_{k-1}}{x_k}\right)^{n+1} \cdot \frac{p_{k-1}}{p_k} + 1\right]}{x_k^n p_k\left[\left(\frac{p_1}{x_k}\right)^n \cdot \frac{p_1}{p_k} + \dots + \left(\frac{x_{k-1}}{x_k}\right)^n \cdot \frac{p_{k-1}}{p_k} + 1\right]} =$$

$$= x_k \frac{\frac{p_1}{p_k} \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_1}{x_k}\right)^{n+1} + \dots + \frac{p_{k-1}}{p_k} \lim_{n\leftarrow\infty}\left(\frac{x_{k-1}}{x_k}\right)^{n+1} + 1}{\frac{p_1}{p_k} \lim_{n\leftarrow\infty}\left(\frac{x_1}{x_k}\right)^n + \dots + \frac{p_{k-1}}{p_k} \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{k-1}}{x_k}\right)^n + 1}\text{։}$$

Քանի որ ըստ պայմանի X-ի հնարավոր արժեքները գրված են աճման կարգով, այսինքն՝ $x_i < x_k$ $i = 1,2 \cdots (k-1)$, ապա

$$\lim_{n \to \infty}\left(\frac{x_i}{x_k}\right)^{n+1} = 0 \quad և \quad \lim_{n \to \infty}\left(\frac{x_i}{x_k}\right)^{n} = 0:$$

Հետևաբար,

$$\lim_{n \to \infty}\frac{M(X^{n+1})}{M(X^{n})} = x_k:$$

205։ *Ապացուցել, որ եթե $X_1, X_2, \cdots X_n$ պատահական մեծությունները անկախ են, դրական և միատեսակ են բաշխված, ապա*

$$M\left[\frac{X_1}{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}\right] = \frac{1}{n},$$

Լուծում։ Դիտարկենք հետևյալ պատահական մեծությունները.

$$Y_1 = \frac{x_1}{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}, \quad Y_2 = \frac{x_2}{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}, \cdots,$$

$$Y_n = \frac{X_n}{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}, \tag{*}$$

Նկատենք, որ այդ կոտորակների հայտարարները չեն կարող զրո լինել, քանի որ $X_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ մեծությունները դրական են։

Ըստ պայմանի X_i մեծությունները միատեսակ են բաշխված, ուստի Y_i մեծությունները ևս միատեսակ են բաշխված և, հետևաբար, ունեն միևնույն թվային բնութագրիչները, մասնավորապես, միևնույն մաթեմատիկական սպասումը

$$M(Y_1) = M(Y_2) = \cdots = M(Y_n): \tag{**}$$

Հեշտ է տեսնել, որ

$$Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n = 1,$$

ուստի,

$$M(Y_1+Y_2+\cdots+Y_n)=M(1)=1:$$

Գումարի մաթեմատիկական սպասումը հավասար է գումարելիների մաթեմատիկական սպասումների գումարին, ուստի

$$M(Y_1)+M(Y_2)+\cdots+M(Y_n)=1:$$

(**)-ի շնորհիվ կունենանք

$$n\cdot M(Y_1)=1:$$

Այստեղից

$$M(Y_1)=\frac{1}{n},$$

Հաշվի առնելով (*)-ը, վերջնականապես կստանանք

$$M\left[\frac{X_1}{X_1+X_2+\cdots+X_n}\right]=\frac{1}{n},$$

206. *Ապացուցել, որ եթե պատահական* X_1, X_2, X_3, X_4 X_5 *մեծությունները անկախ են, դրական և միատեսակ են բաշխված, ապա*

$$M\left[\frac{X_1+X_2+X_3}{X_1+X_2+X_3+X_4+X_5}\right]=\frac{3}{5},$$

Ց ո ւ ց ու մ ։ Մաթեմատիկական սպասման նշանի տակ կանգնած կոտորակը ներկայացնել 3 կոտորակների գումարի տեսքով և օգտվել 205-րդ խնդրի լուծումից։

207. *Գտնել Պուասոնի օրենքով բաշխված դիսկրետ պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը.*

X	0	1	2	$\ldots$	k	$\ldots$
p	$e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda e^{-\lambda}}{1!}$	$\frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!}$	$\ldots$	$\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$	$\ldots$

Լ ու ծ ու մ ։ Ըստ մաթեմատիկական սպասման սահման-

ման այն դեպքի համար, երբ X-ի հնարավոր արժեքների թիվը հաշվելի է․

$$M(X)=\sum_{k=0}^{\infty} k\cdot \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},$$

Հաշվի առնելով, որ $k=0$ դեպքում գումարի առաջին անդամը հավասար է զրոյի, ընդունենք որպես գումարման k ինդեքսի ամենափոքր արժեք 1-ը․

$$M(X)=\sum_{k=1}^{\infty} k\cdot \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!},$$

Տեղադրելով $k-1=m$, կստանանք

$$M(X)=\lambda e^{-\lambda}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m!},$$

Նկատի ունենալով, որ $\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m!}=e^{\lambda}$, վերջնականապես կունենանք

$$M(X)=\lambda e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}=\lambda:$$

Այսպիսով,

$$M(X)=\lambda,$$

այսինքն՝ Պուասոնի բաշխման մաթեմատիկական սպասումը հավասար է այդ բաշխման λ պարամետրին։

208. Պատահական X և Y մեծությունները անկախ են։ Գտնել պատահական $Z=3X+2Y$ մեծության դիսպերսիան, եթե հայտնի է, որ $D(X)=5$, $D(Y)=6$։

Լուծում։ Քանի որ X և Y մեծությունները անկախ են, ապա անկախ են նաև 3X և 2Y մեծությունները։ Օգտագործելով դիսպերսիայի հատկությունները (անկախ պատահական մեծությունների գումարի դիսպերսիան հավասար է գումարելիների դիսպերսիաների գումարին, հաստատուն արտադրիչը կարելի է դուրս բերել դիսպերսիայի նշանի տակից՝ այն բարձրացնելով քառակուսի), կստանանք

$$D(Z) = D(3X + 2Y) = D(3X) + D(2Y) =$$
$$= 9D(X) + 4D(Y) = 9 \cdot 5 + 4 \cdot 6 = 69:$$

209. Պատահական X և Y մեծություններն անկախ են։ Գտնել պատահական $Z = 2X + 3Y$ մեծության դիսպերսիան, եթե հայտնի է, որ $D(X) = 4$, $D(Y) = 5$:

Պատ.՝ $D(Z) = 61$:

210. Գտնել դիսկրետ X պատահական մեծության դիսպերսիան և միջին քառակուսային շեղումը, որը տրված է հետևյալ բաշխման օրենքով.

X	—5	2	3	4
P	0,4	0,3	0,1	0,2:

Լուծում։ Դիսպերսիան կարելի է հաշվել ելնելով նրա սահմանումից, բայց մենք օգտվենք հետևյալ բանաձևից.

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2,$$

որն ավելի արագ կհասցնի նպատակին։

Գտնենք X-ի մաթեմատիկական սպասումը.

$$M(X) = -5 \cdot 0{,}4 + 2 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}2 = -0{,}3:$$

Գրենք X^2-ու բաշխման օրենքը.

X^2	25	4	9	16
P	0,4	0,3	0,1	0,2

Գտնենք X^2-ու մաթեմատիկական սպասումը.

$$M(X^2) = 25 \cdot 0{,}4 + 4 \cdot 0{,}3 + 9 \cdot 0{,}1 + 16 \cdot 0{,}2 = 15{,}3:$$

Գտնենք որոնելի դիսպերսիան.

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2=15,3-(0,3)^2=15,21:$$

Գտնենք որոնելի միջին քառակուսային շեղումը․

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{15,21}=3,9:$$

211. Գտնել բաշխման

ա)

X	4,3	5,1	10,6
P	0,2	0,3	0,5

բ)

X	131	140	160	180
P	0,05	0,1	0,25	0,6

օրենքով տրված դիսկրետ X պատահական մեծության դիսպերսիան և միջին քառակուսային շեղումը։

Պատ.՝ *ա)* $D(X)\cong 8,545$, $\sigma(X)\cong 2,923$.
բ) $D(X)\cong 248,35$, $\sigma(X)\cong 15,77$:

212. Դիսկրետ X պատահական մեծությունն ունի միայն երկու հնարավոր x_1 և x_2 արժեքներ, ընդ որում հավասարահնարավոր։ Ապացուցել, որ X մեծության դիսպերսիան հավասար է հնարավոր արժեքների կիսատարբերության քառակուսուն

$$D(X)=\left[\frac{x_2-x_1}{2}\right]^2,$$

Լուծում։ Գտնենք X-ի մաթեմատիկական սպասումը, հաշվի առնելով, որ հնարավոր x_1 և x_2 արժեքների հավանականությունները հավասար են իրար, և հետևաբար, նրանցից յուրաքանչյուրը հավասար է 1/2-ի.

$$M(X)=x_1\cdot\frac{1}{2}+x_2\cdot\frac{1}{2}=\frac{x_1+x_2}{2},$$

Գտնենք X^2-ու մաթեմատիկական սպասումը.

$$M(X^2)=x_1^2\cdot\frac{1}{2}+x_2^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{x_1^2+x_2^2}{2},$$

Գտնենք X-ի դիսպերսիան.

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2=\frac{x_1^2+x_2^2}{2}-\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2=\left[\frac{x_2-x_1}{2}\right]^2,$$

213. *Գտնել դիսկրետ* X *պատահական մեծության՝ 5 անկախ փորձերում* A *պատահույթի երևալու թվի դիսպերսիան, եթե յուրաքանչյուր փորձում* A *պատահույթի հանդես գալու հավանականությունը հավասար է 0,2-ի։*

Լուծում։ Անկախ փորձերում պատահույթի երևալու թվի դիսպերսիան (յուրաքանչյուր փորձում պատահույթի երևալու նույն հավանականությամբ) հավասար է փորձերի թվի և պատահույթի երևալու ու չերևալու հավանականությունների արտադրյալին.

$$D(X) = npq:$$

Ըստ պայմանի $n=5$, $p=0{,}2$, $q=1-0{,}2=0{,}8$: *Որոնելի դիսպերսիան՝* $D(X)=npq=5\cdot0{,}2\cdot0{,}8=0{,}8$:

214. *Գտնել դիսկրետ* X *պատահական մեծության՝ 10 անկախ փորձերում ինչ-որ սարքի տարրի խափանումների թվի դիսպերսիան, եթե յուրաքանչյուր փորձում տարրի խափանվելու հավանականությունը հավասար է 0,9-ի։*

Պատ.՝ $D(X)=0{,}9$։

215. *Գտնել դիսկրետ* X *պատահական մեծության՝ 2 անկախ փորձերում* A *պատահույթի երևալու թվի դիսպերսիան, եթե այդ փորձերում պատահույթի երևալու հավանականությունները նույնն են և հայտնի է որ* $M(X)=1{,}2$։

Լուծում։ Առաջին եղանակ։ X *մեծության հնարավոր արժեքները այսպիսին են* $x_1=0$ *(պատահույթը չի երևացել),* $x_2=1$ *(պատահույթը երևացել է 1 անգամ) և* $x_3=2$ *(պատահույթը հանդես է եկել 2 անգամ)։*

Հնարավոր արժեքների հավանականությունները կգտնենք Բեռնուլլիի բանաձևով.

$$P_2(0)=p^2,\ P_2(1)=C_2^1pq=2pq,\ P_2(2)=p^2:$$

Գրենք X*-ի բաշխման օրենքը.*

հնարավոր արժեքները	0	1	2
հավանականությունները	q^2	$2pq$	p^2

Գտնենք M(X)*-ը։*

$$M(X) = 2pq + 2p^2 = 2p(q + p) = 2p:$$

Ըստ պայմանի $M(X) = 1{,}2$, *այսինքն՝* $2p = 1{,}2$։ *Այստեղից* $p = 0{,}6$ *և, հետևաբար,* $q = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$։

Որոնելի դիսպերսիան

$$D(X) = npq = 2 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 0{,}48:$$

Երկրորդ եղանակ։ Օգտվենք $M(X) = np$ *բանաձևից։ Ըստ պայմանի* $M(X) = 1{,}2$, $n = 2$: *Հետևաբար,* $1{,}2 = 2p$։ *Այստեղից* $p = 0{,}6$ *և նշանակում է,* $q = 0{,}4$։

Գտնենք որոնելի դիսպերսիան,

$$D(X) = npq = 2 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 0{,}48:$$

Հասկանալի է, երկրորդ եղանակը ավելի արագ է հասցնում նպատակին։

216. *Գտնել դիսկրետ* X *պատահական մեծության՝ 2 անկախ փորձերում* A *պատահույթի երևալու թվի դիսպերսիան, եթե այդ փորձերում պատահույթի երևալու հավանականությունները նույնն է և հայտնի է, որ* $M(X) = 0{,}9$։

Պատ.՝ $D(X) = 0{,}495$։

217. *Կատարվում են անկախ փորձեր* A *պատահույթի յուրաքանչյուր փորձում երևալու միևնույն հավանականությամբ։ Գտնել* A *պատահույթի երևալու հավանականությունը, եթե 3 անկախ փորձերում պատահույթի երևալու թվի դիսպերսիան հավասար է 0,63-ի։*

Պատ.՝ $p_1 = 0{,}3$, $p_2 = 0{,}7$։

218. *Դիսկրետ* X *պատահական մեծությունն ունի միայն երկու հնարավոր արժեքներ՝* x_1 *և* x_2, *ընդ որում* $x_2 > x_1$։ *Հավանականությունը, որ* X*-ը կընդունի* x_1 *արժեքը, հավասար է 0,6-ի։ Գտնել* X*-ի բաշխման օրենքը, եթե մաթեմատիկական սպասումն ու դիսպերսիան հայտնի են.*

$$M(X) = 1{,}4, \qquad D(X) = 0{,}24:$$

Լուծում։ Դիսկրետ պատահական մեծության բոլոր հնարավոր արժեքների հավանականությունների գումարը հավասար է 1-ի, ուստի հավանականությունը, որ X-ը կընդունի x_2 արժեքը հավասար է $1-0,6=0,4$:

Գրենք X-ի բաշխման օրենքը.

$$\begin{array}{ccc} X & x_1 & x_2 \\ p & 0,6 & 0,4 \end{array} \qquad (*)$$

x_1-ի և x_2-ի արժեքները գտնելու համար պետք է կազմել նրանց կապող երկու հավասարում։ Այդ նպատակով արտահայտենք հայտնի մաթեմատիկական սպասումն ու դիսպերսիան x_1-ի ու x_2-ի միջոցով։

Գտնենք M(X)-ը

$$M(X)=0,6x_1+0,4x_2:$$

Ըստ պայմանի $M(X)=1,4$, հետևաբար,

$$0,6x_1+0,4x_2=1,4: \qquad (**)$$

x_1-ը և x_2-ը կապող մեկ հավասարումն ստացված է։ Երկրորդ հավասարումը ստանալու համար արտահայտենք հայտնի դիսպերսիան x_1-ով և x_2-ով։

Գրենք հետևյալ բաշխման օրենքը.

$$\begin{array}{ccc} X^2 & x_1^2 & x_2^2 \\ p & 0,6 & 0,4: \end{array}$$

Գտնենք $M(X^2)$-ն

$$M(X^2)=0,6x_1^2+0,4x_2^2:$$

Գտնենք դիսպերսիան.

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2=0,6x_1^2+0,4x_2^2-1,4^2:$$

Տեղադրելով $D(X)=0,24$-ը, տարրական ձևափոխություններից հետո կստանանք.

$$0,6x_1^2+0,4x_2^2=22: \qquad (***)$$

Միավորելով (**)-ը և (***)-ը, կունենանք հավասարումների հետևյալ համակարգը․

$$\begin{cases} 0,6x_1 + 0,4x_2 = 1,4, \\ 0,6x_1^2 + 0,4x_2^2 = 2,2: \end{cases}$$

Լուծելով այս համակարգը, կգտնենք 2 լուծում

$$x_1 = 1,\ x_2 = 2 \text{ և } x_1 = 1,8,\ x_2 = 0,8:$$

Ըստ պայմանի $x_2 > x_1$, ուստի խնդրին բավարարում է միայն առաջին լուծումը․

$$x_1 = 1,\ x_2 = 2: \qquad (****)$$

Տեղադրելով (****)-ը (*)-ի մեջ, կստանանք որոնելի բաշխման օրենքը․

X	1	2
p	0,6	0,4

219. Դիսկրետ X պատահական մեծությունն ունի միայն 2 հնարավոր արժեքներ՝ x_1 և x_2, ընդ որում $x_1 < x_2$: Հավանականությունը, որ X-ը կընդունի x_1 արժեքը, հավասար է 0,2-ի: Գտնել X-ի բաշխման օրենքը, գիտենալով նրա մաթեմատիկական սպասումը՝ $M(X) = 2,6$, և միջին քառակուսային շեղումը՝ $\sigma(x) = 0,8$:

Պատ.՝

X	1	3
p	0,2	0,8

220. Դիսկրետ X պատահական մեծությունն ունի միայն 3 հնարավոր արժեքներ․ $x_1 = 1$, x_2 և x_3, ընդ որում $x_1 < x_2 < x_3$: Հավանականությունները, որ X-ը կընդունի x_1 և x_2 արժեքները համապատասխանաբար հավասար են 0,3-ի և 0,2-ի: Գտնել X մեծության բաշխման օրենքը, եթե նրա մաթեմատիկական սպասումն է $M(X) = 2,2$ և դիսպերսիան՝

$$D(X) = 0,76:$$

Պատ.՝

X	1	2	3
p	0,3	0,2	0,5

221. *Գցված են* n *խաղոսկրեր։ Գտնել միավորի գումարի դիսպերսիան, որոնք կարող են երևալ բոլոր նիստերի վրա։*

Լուծում։ Նշանակենք X*-ով հետևյալ դիսկրետ պատահական մեծությունը՝ միավորների գումարը, որոնք կերևան բոլոր նիստերին,* X_i*-ով՝* $(i=1,2,\cdots,n)$ i*-րդ խաղոսկրի նիստին երևացած միավորների թիվը։ Այն ժամանակ*

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n:$$

Ակնհայտ է, որ բոլոր X_i *մեծությունները ունեն միևնույն բաշխումը, հետևաբար, միևնույն թվային բնութագրիչները, մասնավորապես, միևնույն դիսպերսիաները, այսինքն՝*

$$D(X_1) = D(X_2) = \cdots = D(X_n): \qquad (*)$$

Քանի որ դիտարկվող պատահական մեծություններն անկախ են, ապա նրանց գումարի դիսպերսիան հավասար է գումարելիների դիսպերսիաների գումարին.

$$D(X) = D(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) =$$
$$= D(X_1) + D(X_2) + \cdots + D(X_n),$$

(*)-ն շնորհիվ կստանանք

$$D(X) = n \cdot D(X_1): \qquad (**)$$

Այսպիսով, բավական է հաշվել պատահական X_1 *մեծության դիսպերսիան, այսինքն՝ միավորների թվի դիսպերսիան, որ կարող են երևալ «առաջին» խաղոսկրի վրա։ Կատարենք այդ։ Գրենք* X_1*-ի բաշխման օրենքը.*

X_1	1	2	3	4	5	6
p	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Գտնենք $M(X_1^2)$*-ն ու* $D(X_1)$*-ը.*

$$M(X_1^2) = 1\cdot{}^1/_6 + 4\cdot{}^1/_6 + 9\cdot{}^1/_6 + 16\cdot{}^1/_6 + 25\cdot{}^1/_6 + 36\cdot{}^1/_6 = {}^{91}/_6,$$

$$D(X_1) = M(X_1^2) - [M(X_1)]^2 = {}^{91}/_6 - ({}^7/_2)^2 = {}^{35}/_{12}: \qquad (***)$$

Գտնենք որոնելի դիսպերսիան, որի համար տեղադրենք (***)-ը (**)-ի մեջ.

$$D(X) = \frac{35}{12}\,n:$$

222. *Յուրաքանչյուր փորձում պատահույթի հանդես գալու հավանականությունը հավասար է* $p(0 < p < 1)$: *Փորձերը կատարվում են այնքան ժամանակ, քանի դեռ պատահույթը հանդես չի եկել: Գտնել. ա) դիսկրետ X պատահական մեծության փորձերի թվի, որն անհրաժեշտ է կատարել մինչև պատահույթի երևալը, մաթեմատիկական սպասումը, բ) X մեծության դիսպերսիան:*

Լուծում: ա) Կազմենք X մեծության՝ փորձերի թվի, որն անհրաժեշտ է կատարել մինչև պատահույթի երևալը, բաշխման օրենքը.

X	1	2	3	...	k	...	
p	p	qp	q^2p	...	$q^{k-1}p$	...	(*)

Այստեղ $q = 1 - p$-ն պատահույթի չերևալու հավանականությունն է:

Գտնենք M(X)-ը

$$M(X) = 1\cdot p = 2\cdot qp + 3\cdot q^2p + \cdots + kq^{k-1}p + \cdots =$$

$$= P(1 + 2q + 3q^2 + \cdots + kq^{k-1} + \cdots) = p\cdot\frac{1}{(1-q)^2} =$$

$$= p\cdot\frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}$$

Այսպիսով,

$$M(X) = \frac{1}{p},$$

Դարգարանում։ Ցույց տանք, որ $1+2q+3q^2+\dots+kq^{k-1}+\dots=\frac{1}{(1-q)^2}$։ Քանի որ $0<q<1$, ապա (q-ի նկատմամբ) աստիճանային շարքը՝

$$S=1+q+q^2+\dots+q^k+\dots=\frac{1}{1-q}$$

կարելի է անդամ առ անդամ դիֆերենցել և շարքի անդամների ածանցյալների գումարը հավասար կլինի շարքի գումարի ածանցյալին, այսինքն՝

$$S'=1+2q+3q^2+\dots+kq^{k-1}+\dots=\frac{1}{(1-q)^2}, \qquad (**)$$

բ) Փնտրենք X մեծության դիսպերսիան ըստ հետևյալ բանաձևի.

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2։$$

Հաշվի առնելով, որ $M(X)=\frac{1}{p}$, կստանանք

$$D(X)=M(X^2)-\frac{1}{p^2} \qquad (***)$$

Մնում է գտնել $M(X^2)$-ն։ Գրենք X^2-ու բաշխման օրենքը՝ օգտագործելով (*)-ը.

X^2	1^2	2^2	3^2	...	k^2	...
P	p	qp	q^2p	...	$q^{k-1}p$	...

Գտնենք $M(X^2)$-ն.

$$M(X^2)=1^2\cdot p+2^2\cdot qp+3^2\cdot q^2p+\dots+k^2\cdot k^{k-1}p+\dots=$$

$$=p(1^2+2^2\cdot q^2+3^2\cdot q^2+\dots+k^2\cdot q^{k-1}+\dots)=$$

$$=p\cdot\frac{1+q}{(1-q)^3}=p\cdot\frac{1+(1-p)}{p^3}=\frac{2-p}{p^2},$$

Այսպիսով,

$$M(X^2)=\frac{2-p}{p^2}, \qquad (****)$$

Գտնենք որոնելի դիսպերսիան, որի համար տեղադրենք (****)-ը (***)-ի մեջ.

$$D(X)=\frac{2-p}{p^2}-\frac{1}{p^2}=\frac{1-p}{p^2},$$

Պարզաբանում. Ցույց տանք, որ

$$1^2+2^2\cdot q+3^2\cdot q^2+\cdots+k^2\cdot q^{k-1}+\cdots=\frac{1+q}{(1-q)^3},$$

Իրոք,

$$\int_0^q(1^2+2^2q+3^2q^2+\cdots+k^2q^{k-1}+\cdots)\,dq=$$

$$=[q+2q^2+3q^3+\cdots+kq^k+\cdots]_0^q=$$

$$=q(1+2q+3q^2+\cdots+kq^{k-1}+\cdots)=\frac{q}{(1-q)^2}\ \text{[տե՛ս (**)-ը]}.$$

Դիֆերենցելով հավասարության 2 մասը ըստ q-ի, կստանանք.

$$1^2+2^2q+3^2q^2+\cdots+k^2q^{k-1}+\cdots=\frac{1+q}{(1-q)^3},$$

223. *Կատարվում են ինչ-որ սարքի բազմակի փորձարկումներ ըստ հուսալիության այնքան ժամանակ, մինչև սարքը կխափանվի։ Գտնել. ա) դիսկրետ պատահական X մեծության՝ փորձերի թվի, որ պետք է անցկացնել, մաթեմատիկական սպասումը. բ) X-ի դիսպերսիան։ Սարքի խափանվելու հավանականությունը յուրաքանչյուր փորձում հավասար է 0,1-ի։*

Ցուցում. Օգտվել 222 խնդրի արդյունքներից։

Պատ.՝ *ա)* $M(X)=10$, *բ)* $D(X)=90$:

224. *Ապացուցել* $M\left[X-\frac{x_i+x_k}{2}\right]^2\geq D(X)$ *անհավասար-*

յունը, որտեղ x_i-ը և x_k-ն X պատահական մեծության ցանկացած 2 հնարավոր արժեքներն են։

Լուծում։ 1) Դիցուք $\frac{x_i+x_k}{2}=M(X)$։ Ապացուցենք, որ այդ դեպքում

$$M\left[X-\frac{x_i+x_k}{2}\right]^2=D(X): \qquad (*)$$

2) Դիցուք $\frac{x_i+x_k}{2}\neq M(X)$։ Ապացուցենք, որ այդ դեպքում

$$M\left[X-\frac{x_i+x_k}{2}\right]^2>D(X):$$

Ձևափոխենք անհավասարության ձախ մասը՝ օգտագործելով մաթեմատիկական սպասման հատկությունները.

$$M\left[X-\frac{x_i+x_k}{2}\right]^2=M(X^2)-2\frac{x_i+x_k}{2}\cdot M(X)+\left(\frac{x_i+x_k}{2}\right)^2:$$

Հավասարության աջ մասում հանելով և գումարելով $[M(X)]^2$, կստանանք

$$M\left[X-\frac{x_i+x_k}{2}\right]^2=D(X)+\left[M(X)-\frac{x_i+x_k}{2}\right]^2>D(X): \qquad (**)$$

Միավորելով $(*)$-ը և $(**)$-ը, վերջնականապես՝ կստանանք.

$$M\left[x-\frac{x_i+x_k}{2}\right]^2\geqslant D(X):$$

225. Ապացուցել, որ եթե X պատահական մեծությունն ունի ամենամեծ և ամենափոքր հնարավոր արժեքները, որոնք համապատասխանաբար հավասար են a-ի և b-ի, ապա այդ պատահական մեծության դիսպերսիան չի գերազանցի այդ արժեքների կիսատարբերության քառակուսուն.

$$D(X)\leqslant\left(\frac{b-a}{2}\right)^2:$$

Լուծում: Օգտվենք

$$D(X) \leqslant M\left[X - \frac{a+b}{2}\right]^2 \qquad (*)$$

անհավասարությունից (տես խնդիր (224):

Ապացուցենք այժմ, որ

$$M\left[X - \frac{a+b}{2}\right]^2 \leqslant \left[\frac{b-a}{2}\right]^2,$$

(Այստեղից և (*)-ից հետևում է ապացուցվող անհավասարության իրավացիությունը): Այս նպատակով ձևափոխենք մաթեմատիկական սպասումը:

$$M\left[\frac{b-a}{2}\right]^2 = M\left[X - \frac{a+b}{2} + (b-X)\right]^2 =$$

$$= M\left[X - \frac{a+b}{2}\right]^2 + M\Big[(b-X)(X-a)\Big],$$

Հավասարության աջ մասի երկրորդ գումարելին բացասական չէ (այդ հետևում է այն բանից, որ b-ն ամենամեծ և a-ն ամենափոքր հնարավոր արժեքներն են), ուստի առաջին գումարելին չի գերազանցում ողջ գումարը,

$$M\left[X - \frac{a+b}{2}\right]^2 \leqslant M\left[\frac{b-a}{2}\right]^2,$$

Հաշվի առնելով, որ հաստատուն մեծության մաթեմատիկական սպասումը հավասար է իրեն՝ հաստատունին, վերջնականապես կստանանք.

$$M\left[X - \frac{a+b}{2}\right]^2 \leqslant \left(\frac{b-a}{2}\right)^2,$$

226. Ապացուցել, որ եթե X-ը և Y-ը անկախ պատահական մեծություններ են, ապա

$$D(XY) = D(X)\cdot D(Y) + n^2 D(X) + m^2 D(Y),$$

որտեղ $m=M(X)$ և $n=M(Y)$:

Լուծում: Ըստ դիսպերսիայի հաշվման բանաձևի

$$D(XY)=M[(XY)^2]-[M(XY)]^2$$

Հաշվի առնելով, որ X-ը և Y-ը անկախ պատահական մեծություններ են և, հետևաբար, X^2 ու Y^2 ևս անկախ են և որ անկախ պատահական մեծությունների արտադրյալի մաթեմատիկական սպասումը հավասար է նրանց մաթեմատիկական սպասումների արտադրյալին, կստանանք.

$$D(XY)=M[X^2\cdot Y^2]-[M(X)\cdot M(Y)]^2=$$

$$=M(X^2)M(Y^2)-m^2n^2: \qquad (*)$$

Ըստ դիսպերսիայի սահմանման

$$D(X)=M(X^2)-m^2, \quad D(Y)=M(Y^2)-n^2:$$

Այստեղից

$$M(X^2)=D(X)+m^2, \quad M(Y^2)=D(Y^2)=+n^2, \qquad (**)$$

Տեղադրելով $(**)$-ը $(*)$-ի մեջ, պարզեցումներից հետո վերջնականապես կունենանք

$$D(XY)=D(X)D(Y)+n^2D(X)+m^2D(Y)$$

227. Գտնել Պուասոնի օրենքով բաշխված դիսկրետ X պատահական մեծության դիսպերսիան.

X	0	1	2	$\dots$	k	$\dots$
P	$e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda e^{-\lambda}}{1!}$	$\frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!}$	$\dots$	$\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$	$\dots$

Լուծում: Օգտվենք հետևյալ բանաձևից.

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2:$$

Քանի որ $M(X)=\lambda$ (տես խնդիր 207), ապա

$$D(X) = M(X^2) - \lambda^2: \qquad (*)$$

Գրենք պատահական X^2 մեծության բաշխումը, հաշվի առնելով, որ հավանականությունը, որ X^2-ն կընդունի k^2 արժեքը, հավասար է հավանականությանը, որ X-ը կընդունի k արժեքը (այդ հետևում է այն բանից, որ X-ի հնարավոր արժեքները բացասական չեն)։

X^2	0^2	1^2	2^2	$\ldots$	k^2	$\ldots$
P	$e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda e^{-\lambda}}{1!}$	$\frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!}$	$\ldots$	$\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$	$\ldots$

Գտնենք X^2-ու մաթեմատիկական սպասումը.

$$M(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},$$

Հաշվի առնելով, որ $k=0$ դեպքում գումարի առաջին անդամը հավասար է զրոյի, կստանանք.

$$M(X^2) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{k\lambda^k e^{-\lambda}}{k(k-1!} = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^{k-1} e^{-\lambda}}{(k-1)!} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} [(x-1)+1] \frac{\lambda^{k-1} e^{-\lambda}}{(k-1)!} = \lambda \left[\sum_{k=1}^{\infty} (k-1) \frac{\lambda^{k-1} e^{-\lambda}}{(k-1)} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1} e^{-\lambda}}{(k-1)!} \right],$$

Տեղադրելով $k-1=m$, *կունենանք*

$$M(X^2) = \lambda \left[\sum_{m=0}^{\infty} m \cdot \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} \right],$$

Ի նկատի ունենալով, որ

$$\sum_{m=0}^{\infty} m\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}=\lambda \text{ (տե՛ս. խնդիր 207)։}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}=e^{-\lambda}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m!}=e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}=1,$$

ունենք

$$M(X^2)=\lambda(\lambda+1)=\lambda^2+\lambda\text{։} \qquad (**)$$

Տեղադրենք (**)-ը (*)-ի մեջ.

$$D(X)=(\lambda^2+\lambda)-\lambda^2=\lambda\text{։}$$

Այսպիսով, Պուասոնի բաշխման դիսպերսիան հավասար է λ պարամետրին։

§ 4. Տեսական մոմենտները

X *պատահական մեծության* k-րդ կարգի սկզբնական մոմենտ կոչվում է X^k *մեծության մաթեմատիկական սպասումը.*

$$\nu_k = M(X^k)\text{։}$$

Մասնավորապես, առաջին կարգի սկզբնական մոմենտը հավասար է մաթեմատիկական սպասմանը.

$$\nu_1 = M(X)\text{։}$$

X *պատահական մեծության* k-րդ կարգի կենտրոնական մոմենտ *կոչվում է* $[X-M(X)]^k$ *մեծության մաթեմատիկական սպասումը.*

$$\mu_k = M[X-M(X)]^k\text{։}$$

Մասնավորապես առաջին կարգի կենտրոնական մոմենտը հավասար է զրոյի.

$$\mu_1 = M[X-M(X)]=0\text{։}$$

Երկրորդ կարգի կենտրոնական մոմենտը հավասար է դիսպերսիային.

$$\mu_2 = M[X]-M(X)]^2 = D(X):$$

Կենտրոնական մոմենտներն նպատակահարմար է հաշվել, օգտագործելով կենտրոնական մոմենտներն սկզբնականներով արտահայտող բանաձևերը.

$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2,$$

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\cdot\nu_1^3,$$

$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_3\nu_1 + 6\nu_2\nu_1^2 - 3\nu_1^4$$

228. *Դիսկրետ X պատահական մեծությունը տրված է բաշխման օրենքով.*

X	1	3
p	0,4	0,6

Գտնել առաջին, երկրորդ և երրորդ կարգի սկզբնական մոմենտները։

Լուծում։ Գտնենք առաջին կարգի սկզբնական մոմենտը.

$$\nu_1 = M(X) = 1\cdot 0,4 + 3\cdot 0,6 = 2,2:$$

Գրենք X_2 *մեծության բաշխման օրենքը.*

X_2	1	9
p	0,4	0,6:

Գտնենք երկրորդ կարգի սկզբնական մոմենտը.

$$\nu_2 = M(X^2) = 1\cdot 0,4 + 9\cdot 0,6 = 5,8:$$

Գրենք X_3 *մեծության բաշխման օրենքը*

X^3	1	27
p	0,4	0,6

Գտնենք երրորդ կարգի սկզբնական մոմենտը.

$$\nu_3 = M(X^3) = 1\cdot 0,4 + 27\cdot 0,6 = 16,6:$$

229. *Դիսկրետ* X *պատահական մեծությունը տրված է բաշխման օրենքով.*

X	2	3	5
p	0,1	0,4	0,5

Գտնել առաջին, երկրորդ և երրորդ կարգի սկզբնական մոմենտները

Պատ.՝ $\nu_1=3{,}9$, $\nu^2=16{,}5$ $\nu_3=74{,}1$:

230. *Դիսկրետ* X *պատահական մեծությունը տրված է բաշխման օրենքով.*

X	1	2	4
p	0,1	0,3	0,6

Գտնել առաջին, երկրորդ, երրորդ և չորրորդ կարգի կենտրոնական մոմենտները:

Լուծում: Առաջին կարգի կենտրոնական մոմենտը հավասար է զրոյի.

$$\mu_1=0:$$

Կենտրոնական մոմենտների հաշվման համար նպատակահարմար է օգտվել կենտրոնական մոմենտները սկզբնականներով արտահայտող բանաձևերից, ուստի նախ գտնենք սկզբնական մոմենտները.

$$\nu_1=M(X)=1\cdot 0{,}1+2\cdot 0{,}3+4\cdot 0{,}6=3{,}1;$$

$$\nu_2=M(X^3)=1\cdot 0{,}1+4\cdot 0{,}3+16\cdot 0{,}6=10{,}9;$$

$$\nu_3=M(X^3)=1\cdot 0{,}1+8\cdot 0{,}3+64\cdot 0{,}6=40{,}9;$$

$$\nu_4=M(X^4)=1\cdot 0{,}1+16\cdot 0{,}3+256\cdot 0{,}6=158{,}5:$$

Գտնենք կենտրոնական մոմենտները.

$$\mu_2=\nu_2-\nu_1^2=10{,}9-3{,}1^2=1{,}29;$$

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^2 = 40{,}9 - 3\cdot 3{,}1\cdot 10{,}9 + 2\cdot 3{,}1^3 =$$
$$= -0{,}888;$$

$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_3\nu_1 + 6\nu_2\nu_1^2 - 3\nu_1^4 = 158{,}5 - 4\cdot 40{,}9\cdot 3{,}1 + 6\cdot 10{,}9\cdot$$
$$\cdot 3{,}1^2 - 3\cdot 3{,}1^4 = 2{,}7777:$$

231. *Դիսկրետ պատահական մեծությունը տրված է բաշխման օրենքով.*

X	3	5
p	0,2	0,8

Գտնել առաջին, երկրորդ, երրորդ և չորրորդ կարգի կենտրոնական մոմենտները։

Ցուցում։ Նախ գտնել սկզբնական մոմենտները և նրանցով արտահայտել կենտրոնական մոմենտները։

Պատ.՝ $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0{,}64$, $\mu_3 = -1{,}12$, $\mu_4 = 1{,}33$:

232. *Ապացուցել, որ երկրորդ կարգի կենտրոնական* $\mu_2 = M[X - M(X)]^2$ *մոմենտը (դիսպերսիան) փոքր է երկրորդ կարգի սովորական* $\mu_2 = M[X - C]^2$ *մոմենտից ցանկացած* $C \neq M(X)$*-ի դեպքում։*

Լուծում։ Գրելու պարզության համար նշանակենք $M(X) = m$։ *Մաթեմատիկական սպասման նշանի տակ գումարենք և հանենք* m*-ը.*

$$\mu'_2 = M[X - C]^2 = M[(X - m) + (m - c)]^2 =$$
$$= M[(X - m)^2 + 2(m - C)(X - m) + (m - C)^2]:$$

Գումարի մաթեմատիկական սպասումը հավասար է գումարելիների մաթեմատիկական սպասումների գումարին, ուստի

$$\mu'_2 = M[X - m]^2 + M[2(m - C)(X - m)] + M[m - C]^2:$$

Հանելով $2(m - C)$ *հաստատուն մեծությունը մաթեմատիկական սպասման նշանի տակից և հաշվի առնելով, որ* $(m - C)^2$ *հաստատունի մաթեմատիկական սպասումը հավա-*

սար է իրեն՝ հաստատունին և որ ըստ սահմանման $M[X-m]^2=\mu_2$ *կստանանք*

$$\mu_2'=\mu_2+2(m-C)\cdot M[X-m]+(m-C)^2:$$

Ի նկատի ունենալով, որ $X-m$ *շեղման մաթեմատիկական սպասումը հավասար է զրոյի, ունենք*

$$\mu_2'=\mu_2+(m-C)^2:$$

Այստեղից

$$\mu_2=\mu_1'-(m-C)^2:$$

Այս հավասարությունից եզրակացնում ենք, որ երկրորդ կարգի կենտրոնական մոմենտը ցանկացած $C\neq m$ *դեպքում փոքր է երկրորդ կարգի սովորական մոմենտից:*

233. *Ապացուցել, որ երրորդ կարգի կենտրոնական մոմենտը կապված է սկզբնական մոմենտների հետ հետևյալ հավասարությամբ.*

$$\mu_3=\nu_3-3\nu_1\nu_2+2\nu_1^3:$$

Լուծում: Կենտրոնական մոմենտի սահմանումից

$$\mu_3=M[X-M(X]^3:$$

Օգտագործելով մաթեմատիկական սպասման հատկությունները և հաշվի առնելով, որ $M(X)$*-ը հաստատուն մեծություն է, կստանանք.*

$$\mu_3=M[X^3-3X^2\cdot M(X)+3X\cdot M^2(X)-M^3(X)]=$$
$$=M(X^3)-3M(X)\cdot M(X^2)+3M^2(X)\cdot M(X)-M[M^3(X)]=$$
$$=M(X^3)-3M(X)\cdot M(X^2)+3M^3(X)-M^3(X)=M(X^3)-$$
$$-3M(X)\cdot M(X^2)+2M^3(X): \qquad (*)$$

Ըստ սկզբնական մոմենտի սահմանման

$$\nu_1 = M(X), \quad \nu_2 = M(X^2), \quad \nu_3 = M(X^3): \qquad (**)$$

Տեղադրելով (**)-ը (*)-ի մեջ, վերջնականապես կստանանք

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1 \cdot \nu_2 + 2\nu_1^3,$$

234. *Ապացուցել, որ չորրորդ կարգի կենտրոնական մոմենտը կապված է սկզբնական մոմենտների հետ հետևյալ հավասարությունով.*

$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_3\nu_1 + 6\nu_1^2\nu_2 - 3\nu_1^4,$$

235. *Դիցուք* $X = X_1 + X_2$, *որտեղ* X_1*-ը և* X_2*-ը համապատասխանաբար* μ_3^1*-ի և* μ_3^2*-ի հավասար երրորդ կարգի կենտրոնական մոմենտներ ունեցող անկախ պատահական մեծություններ են։ Ապացուցել, որ* $\mu_3 = \mu_3^1 + \mu_3^2$, *որտեղ* μ_3*-ը* X *մեծության երրորդ կարգի կենտրոնական մոմենտն է։*

Լուծում։ Գրառման պարզեցման համար մտցնենք մաթեմատիկական սպասումների հետևյալ նշանակումները.

$$M(X_1) = a_1, \quad M(X_2) = a_2,$$

Այդ դեպքում

$$M(X) = M(X_1 + X_2) = M(X_1) + M(X_2) = a_1 + a_2,$$

Երրորդ կարգի կենտրոնական մոմենտի սահմանման համաձայն.

$$\mu_3 = M[X - M(X)]^3 = M[(X_1 + X_2) - (a_1 + a_2)]^3 =$$
$$= M[(X_1 - a_1) + (X_2 - a_2)]^3:$$

Օգտագործելով մաթեմատիկական սպասման հատկությունները (գումարի մաթեմատիկական սպասումը հավասար է գումարելիների մաթեմատիկական սպասումների գումարին, անկախ մեծությունների արտադրյալի մաթեմատիկական սպասումը հավասար է արտադրիչների մաթեմա-

տիկական սպասումների արտադրյալին), կստանանք

$$\mu_3 = M[(X_1-a_1)^3 + 3(X_1-a_1)^2\cdot(X_2-a_2) + 3(X_1-a_1)\cdot(X_2-a_2)^2 + (X_2-a_2)^3] = M(X_1-a_1)^3 + M[3(X_1-a_1)^2\cdot M(X_2-a_2) + M[3(X_2-a_2)^2]\cdot M(X_1-a_1) + M(X_2-a_2)^3.$$

Հաշվի առնելով, որ շեղման մաթեմատիկական սպասումը (պատահական մեծության և նրա մաթեմատիկական սպասման տարբերության միջև) հավասար է զրոյի, այսինքն՝ $M(X_1-a_1) = 0$ և $M(X_2-a_2) = 0$, վերջնականապես կունենանք.

$$\mu_3 = M(X_1-a_1)^3 + M(X_2-a_2)^3 = \mu_3^1 + \mu_3^2.$$

ՀԻՆԳԵՐՈՐԴ ԳԼՈՒԽ
ՄԵԾ ԹՎԵՐԻ ՕՐԵՆՔԸ

§ 1. Չեբիշևի անհավասարությունը

Չեբիշևի անհավասարությունը: Հավանականությունը, որ պատահական X մեծության շեղումը իր մաթեմատիկական սպասումից բացարձակ արժեքով փոքր է դրական ε թվից, փոքր չէ քան $1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$-ն,

$$P(|X-M(X)|<\varepsilon) \geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

236. *Օգտագործելով Չեբիշևի անհավասարությունը, գնահատել հավանականությունը, որ պատահական X մեծությունը կշեղվի իր մաթեմատիկական սպասումից ավելի քիչ, քան 3 միջին քառակուսային շեղում:*

Պատ.՝ $P(|X-M(X)|<3\sigma) \geq 1-\frac{\sigma^2}{9\sigma^2} = \frac{8}{9}.$

237. *Ապացուցել Չեբիշևի անհավասարությունը հետևյալ տեսքով.*

$$P(|X-M(X)|\geqslant\varepsilon)\leqslant\frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Ցուցում: *Օգտվել այն բանից, որ* $|X-M(X)|<\varepsilon$ *և* $|X-M(X)|\geqslant\varepsilon$ *պատահույթները հակադիր են:*

238. *Օգտագործելով Չեբիշևի անհավասարությունը 237 խնդրում բերված տեսքով, գնահատել հավանականությունը, որ պատահական* X *մեծությունը կշեղվի իր մաթեմատիկական սպասումից ոչ քիչ, քան 2 քառակուսային շեղում:*

Պատ.՝ $P(|X-M(X)|\geqslant 2\sigma)\leqslant\frac{\sigma^2}{4\sigma^2}=\frac{1}{4}$.

239. *Օգտագործելով Չեբիշևի անհավասարությունը, գնահատել հավանականությունը, որ* $|X-M(X)|<0{,}2$, *եթե* $D(X)=0{,}004$:

Պատ.՝ $P(|X-M(X)|<0{,}2)\geqslant 1-\frac{0{,}004}{0{,}04}=0{,}9$.

240. *Տրված է*

$$P(|X-M(X)|<\varepsilon)\geqslant 0{,}9 \text{ և } D(X)=0{,}009:$$

Օգտագործելով Չեբիշևի անհավասարությունը, գտնել ε*-ը:*

Պատ.՝ $\varepsilon=0{,}3$:

241. *Սարքը կազմված է 10 անկախ աշխատող տարրերից: Յուրաքանչյուր տարրի խափանվելու հավանականությունը* T *ժամանակում հավասար է 0,05-ի: Չեբիշևի անհավասարության օգնությամբ գնահատել հավանականությունը, որ խափանված տարրերի թվի և* T *ժամանակում եղած խափանումների միջին թվի (մաթեմատիկական սպասման) տարբերության բացարձակ արժեքը. ա) փոքր է 2-ից, բ) փոքր չէ երկուսից:*

Լուծում: *ա) Նշանակենք* X*-ով հետևյալ դիսկրետ պատահական մեծությունը՝ խափանված տարրերի թիվը* T *ժամա-*

նակում։ Այդ դեպքում

$$M(X) = np = 10 \cdot 0{,}05 = 0{,}5,$$

$$D(X) = npq = 10 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}95 = 0{,}475$$

Օգտվենք Չեբիշևի անհավասարությունից.

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geqslant 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2},$$

Տեղադրելով այստեղ $M(X) = 0{,}5$; $D(X) = 0{,}475$, $\varepsilon = 2$, կստանանք

$$P(|X - 0{,}5| < 2) \geqslant 1 - \frac{0{,}475}{4} = 0{,}88:$$

բ) $|X - 0{,}5| < 2)$ և $|X - 0{,}5| \geqslant 2$ պատահույթներն հակադիր են, ուստի նրանց հավանականությունների գումարը հավասար է 1-ի։
Հետևաբար,

$$P(|X - 0{,}5| > 2) \leqslant 1 - 0{,}88 = 0{,}12:$$

242. Լուսավորման ցանցում զուգահեռ միացված են 20 լամպեր։ Հավանականությունը, որ T ժամանակում լամպը կմիանա, հավասար է 0,8-ի։ Օգտվելով Չեբիշևի անհավասարությունից, գնահատել հավանականությունը, որ միացված լամպերի թվի և T ժամանակում միացված լամպերի միջին թվի (մաթեմատիկական սպասման) տարբերության բացարձակ արժեքը կլինի. ա) 3-ից փոքր, բ) 3-ից ոչ փոքր։

Պատ.՝ ա) $P(|X - 16| < 3) \geqslant 0{,}64$, բ) $P(|X - 16| \geqslant 3) \leqslant 0{,}36$:

243. A պատահույթի երևալու հավանականությունը յուրաքանչյուր փորձում հավասար է 1/2-ի։ Օգտագործելով Չեբիշևի անհավասարությունը, գնահատել հավանականությունը, որ A պատահույթի երևալու X թիվը կգտնվի

40-ից 60 սահմաններում, եթե կատարվի 100 անկախ փորձ։

Լուծում։ Գտնենք դիսկրետ X պատահական մեծության՝ 100 անկախ փորձերում A պատահույթի երևալու թվի, մաթեմատիկական սպասումն ու դիսպերսիան։

$$M(X) = np = 100 \cdot {}^1\!/_2 = 50,\ D(X) = npq = 100 \cdot {}^1\!/_2 \cdot \frac{1}{2} = 25:$$

Գտնենք պատահույթի երևալու տրված թվի և $M(X)=50$ *մաթեմատիկական սպասման առավելագույն տարբերությունը․*

$$\varepsilon = 60 - 50 = 10,$$

Օգտվենք Չեբիշևի անհավասարությունից՝ հետևյալ տեսքով․

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geqslant 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2},$$

Տեղադրելով $M(X) = 50,\ D(X) = 25,\ \varepsilon = 10,$ *կստանանք*

$$P(|X - 50| < 10) \geqslant 1 - \frac{25}{10^2} = 0{,}75:$$

244. *Պատահույթի երևալու հավանականությունն ամեն փորձում հավասար է 1/4-ի։ Օգտագործելով Չեբիշևի անհավասարությունը, գնահատել հավանականությունը, որ պատահույթի երևալու X թիվը գտնվում է 150-ից 250 սահմաններում, եթե կատարված է 300 փորձ։*

Պատ.՝ $P(|X - 200| < 50) \geqslant 1 - \frac{150}{50^2} = 0{,}94$։

245. *Դիսկրետ պատահական X մեծությունը տրված է բաշխման օրենքով՝*

X	0,3	0,6
p	0,2	0,8:

Օգտագործելով Չեբիշևի անհավասարությունը, գնահատել հավանականությունը, որ $|X-M(X)|<0{,}2$:

Լուծում: *Գտնենք* X *մեծության մաթեմատիկական սպասումն ու դիսպերսիան.*

$$M(X)=0{,}3\cdot 0{,}2+0{,}6\cdot 0{,}8=0{,}54;$$

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2=(0{,}3^2\cdot 0{,}2+0{,}6^2\cdot 0{,}8)-0{,}54^2=$$
$$=0{,}0144:$$

Օգտվենք Չեբիշևի անհավասարությունից հետևյալ տեսքով.

$$P(|X-M(X)|<\varepsilon)\geqslant 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2},$$

Տեղադրելով $M(X)=0{,}54$, $D(X)=0{,}0144$, $\varepsilon=0{,}2$, *վերջնականապես կունենանք*

$$P(|X-54|<0{,}2)\geqslant 1-\frac{0{,}0144}{0{,}04}=0{,}64,$$

246. *Դիսկրետ* X *պատահական մեծությունը տրված է բաշխման օրենքով.*

X	0,1	0,4	0,6
p	0,2	0,3	0,5

Օգտագործելով Չեբիշևի անհավասարությունը, գնահատել հավանականությունը, որ $|X-M(X)|<\sqrt{0{,}4}$,

Պատ.՝ $P(|X-0{,}44|<\sqrt{0{,}4})\geqslant 1-\frac{0{,}0364}{0{,}4}=0{,}909$:

§ Չեբիշևի թեորեմը.

Չեբիշևի թեորեմը: Եթե զույգ առ զույգ անկախ պատահական մեծությունների X_1, $X_2, \dots, X_n, \dots$ հաջորդականությունն ունի վերջավոր մաթեմատիկական սպասումներ և այդ մեծությունների դիսպերսիաները հավասարաչափ սահմանափակ են (չեն գերազանցում հաստատուն C թիվը), ապա պատահական մեծությունների միջին թվաբանականը զուգամիտում է ըստ հավանականության նրանց մաթեմատիկական սպասումների միջին թվաբանականին, այսինքն՝ եթե ε-ը ցանկացած դրական թիվ է, ապա

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Մասնավորապես, զույգ առ զույգ անկախ մեծությունների հաջորդականության միջին թվաբանականը, որոնց դիսպերսիաները հավասարաչափ սահմանափակ են և որոնք ունեն միևնույն մաթեմատիկական սպասումը՝ a, զուգամիտում է ըստ հավանականության մաթեմատիկական սպասմանը՝ a-ին, այսինքն՝ եթե ε-ը ցանկացած դրական թիվ է, ապա

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - a\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

√ 247. $X_1, X_2, \ldots X_n, \ldots$ *անկախ պատահական մեծությունների հաջորդականությունը տրված է բաշխման օրենքով.*

32

$M(x_n) = \Sigma x_n \cdot p$

X_n	$-n\alpha$	0	$n\alpha$
p	$1/2n^2$	$1-\frac{1}{n^2}$	$1/2n^2$

Կիրառելի՞ է արդյոք Չեբիշևի թեորեմը տրված հաջորդականության համար։

Լուծում։ Որպեսզի պատահական մեծությունների հաջորդականության համար կիրառելի լինի Չեբիշևի թեորեմը, բավարար է, որ այդ մեծությունները լինեն զույգ առ զույգ անկախ, ունենան վերջավոր մաթեմատիկական սպասումներ և հավասարաչափ սահմանափակ դիսպերսիաներ։

Քանի որ պատահական մեծությունները անկախ են, ապա նրանք առավել ևս զույգ առ զույգ անկախ են, այսինքն՝ Չեբիշևի թեորեմի առաջին պահանջը կատարված է։

Ստուգենք, կատարվա՞ծ է արդյոք մաթեմատիկական սպասումների վերջավոր լինելու պահանջը.

$$M(X_n)=-n\alpha\cdot\frac{1}{2n^2}+0\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)+n\alpha\cdot\frac{1}{2n^2}=0։$$

Այսպիսով, յուրաքանչյուր պատահական մեծություն ունի վերջավոր (զրոյի հավասար) մաթեմատիկական սպասում, այսինքն՝ թեորեմի երկրորդ պայմանը կատարված է։

Ստուգենք, կատարվա՞ծ է արդյոք դիսպերսիաների հավասարաչափ սահմանափակության պահանջը։

Գրենք X_n^2-ու բաշխման օրենքը.

X_n^2	$n^2\alpha^2$	0	$n^2\alpha^2$
p	$1/2n^2$	$1-\frac{1}{n^2}$	$1/2n^2$,

կամ գումարելով նույն հնարավոր արժեքների հավանականությունները.

X_n^2	$n^2\alpha^2$	0
p	$1/n^2$	$1-1/n^2$։

Գտնենք $M(X_n^2)$ մաթեմատիկական սպասումը.

$$M(X_n^2)=n^2\alpha^2\cdot\frac{1}{n^2}=\alpha^2:$$

Գտնենք $D(X_n)$ դիսպերսիան, հաշվի առնելով, որ

$$D(X_n)=M(X_n^2)-[M(X_n)]^2=\alpha^2:$$

Այսպիսով, տրված պատահական մեծությունների դիսպերսիաները հավասարաչափ սահմանափակ են α^2 թվով, այսինքն՝ երրորդ պահանջը կատարված է։

Եվ այսպես, քանի որ բոլոր պահանջները կատարված են, պատահական մեծությունների դիտարկվող հաջորդականության նկատմամբ Չեբիշևի թեորեմը կիրառելի է։

248. $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ *անկախ պատահական մեծությունների հաջորդականությունը տրված է բաշխման օրենքով.*

X_n	a	$-a$
p	$\frac{n}{2n+1}$	$\frac{n+1}{2n+1}$

Կիրառելի՞ է արդյոք Չեբիշևի թեորեմը տրված հաջորդականության նկատմամբ։

Պատ.՝ *Կիրառելի է։ X_n-ի մաթեմատիկական սպասումները վերջավոր են և հավասար $-\frac{a}{2n+1}$։ Դիսպերսիաները համասարաչափ սահմանափակ են a^2 թվով։*

249. $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ *անկախ պատահական մեծությունների հաջորդականությունը տրված է բաշխման օրենքով.*

X_n	$n+1$	$-n$
p	$\frac{n}{2n+1}$	$\frac{n+1}{2n+1}$

ա) Համոզվել, որ Չեբիշևի թեորեմի պահանջը դիսպերսիաների համասարաչափ սահմանափակության մասին չի կատարված։

բ) Կարելի՞ է այստեղից եզրակացնել, որ դիտարկվող հաջորդականության նկատմամբ Չեբիշևի թեորեմը կիրառելի չէ։

Պատ.՝ *ա) n-ը աճելիս $D(X_n) = \frac{2n^3+3n^2+n}{n+1}$ դիսպերսիաները անվերջորեն աճում են, բ) չի կարելի, քանի որ դիսպերսիաների համասարաչափ սահմանափակության պահանջը միայն բավարար է, բայց անհրաժեշտ չէ։*

250*. $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ *անկախ պատահական մեծությունների հաջորդականությունը տրված է բաշխման օրենքով.*

X_n	$-n\alpha$	0	$n\alpha$
p	$\frac{1}{2^n}$	$1-\frac{1}{2^{n-1}}$	$\frac{1}{2^n}$

կիրառելի՞ է, արդյոք, տրված հաջորդականության նկատմամբ Չեբիշևի թեորեմը:

Լուծում: Քանի որ X_n պատահական մեծությունները անկախ են, ապա նրանք և զույգ առ զույգ անկախ են, այսինքն՝ Չեբիշևի թեորեմի առաջին պահանջը կատարված է:

Հեշտ է գտնել, որ $M(X_n)=0$, այսինքն՝ մաթեմատիկական սպասումների վերջավորության պահանջը կատարված է:

Մնում է ստուգել դիսպերսիաների հավասարաչափ սահմանափակության պահանջի կատարվելը: Ըստ

$$D(X_n)=M(X_n^2)-[M(X_n)]^2$$

բանաձևի, հաշվի առնելով, որ $M(X_n)=0$, կգտնենք (հաշվումները թողնվում են ընթերցողին)

$$D(X_n)=\frac{n^2}{2^{n-1}}\cdot\alpha^2:$$

Ժամանակավորապես ենթադրենք, որ n-ը փոխվում է անընդհատորեն (որպեսզի ընդգծենք այդ, նշանակենք n-ը x-ով), և հետազոտենք

$$\varphi(x)=\frac{x^2}{2^{x-1}}$$

ֆունկցիան ըստ էքստրեմումների:

Հավասարեցնելով այս ֆունկցիայի առաջին կարգի ածանցյալը զրոյի, գտնենք կրիտիկական կետերը՝ $x_1=0$ և $x_2=\frac{2}{\ln 2}$:

Դեն գցենք առաջին կետը որպես հետաքրքրություն չներկայացնող կետ (n-ը չի ընդունում զրոյի հավասար արժեքներ)։ Հեշտ է տեսնել, որ $x_2=\frac{2}{\ln 2}$ կետում $\varphi(x)$ ֆունկցիան ունի մաքսիմում: Հաշվի առնելով, որ $\frac{2}{\ln 2}\cong$

$\cong 2{,}9$, և որ n-ը դրական ամբողջ թիվ է, հաշվենք $D(X_n)=\frac{n^2}{2n-1}a^2$ դիսպերսիան 2,9-ին ամենամոտ (աջից և ձախից) ամբողջ թվերի համար, այսինքն՝ $n=2$-ի և $n=3$-ի համար։

$n=2$ դեպքում $D(X_2)=2a^2$, $n=3$ դեպքում $D(X_3)=\frac{9}{4}a^2$։ Ակնհայտ է, որ

$$\frac{9}{4}a^2 > 2a^2\text{:}$$

Այսպիսով, հնարավոր ամենամեծ դիսպերսիան հավասար է $\frac{9}{4}a^2$, այսինքն՝ պատահական X_n մեծությունների դիսպերսիաները հավասարաչափ սահմանափակ են $\frac{9}{4}a^2$ թվով։

Եվ այսպես, Չեբիշևի թեորեմի բոլոր պահանջները կատարված են, հետևաբար, դիտարկվող հաջորդականության նկատմամբ այդ թեորեմը կիրառելի է։

251. $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ անկախ պատահական մեծությունների հաջորդականությունը տրված է բաշխման օրենքով.

X_n	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$
p	$1/3$	$1/3$	$1/3$

Կիրառելի՞ է արդյոք, տրված հաջորդականության նկատմամբ Չեբիշևի թեորեմը։

Պատ.՝ Կիրառելի է. $M(X_n)=0$, $D(X_n)=2$։

Դիտողություն. Քանի որ X պատահական մեծությունները միատեսակ են բաշխված և անկախ են, ապա Խինչինի թեորեմին ծանոթ ընթերցողը կարող է սահմանափակվել միայն մաթեմատիկական սպասումը հաշվելով և համոզվել, որ այն վերջավոր է։

ՎԵՑԵՐՈՐԴ ԳԼՈՒԽ

ՊԱՏԱՀԱԿԱՆ ՄԵԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԱՎԱՆԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԲԱՇԽՄԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԸ

§ 1. Պատահական մեծության հավանականությունների բաշխման ինտեգրալ ֆունկցիան

Բաշխման ինտեգրալ ֆունկցիա *կոչվում է* F(X) *ֆունկցիան, որ յուրաքանչյուր* x *արժեքի համար որոշում է հավանականությունը, որ* X *պատահական մեծությունն ընդունում է* x*-ից փոքր արժեք, այսինքն՝*

$$F(x) = P(X < x).$$

Հաճախ «ինտեգրալ ֆունկցիա» տերմինի փոխարեն օգտագործում են «բաշխման ֆունկցիա» տերմինը։

Ինտեգրալ ֆունկցիան օժտված է հետևյալ հատկություններով.

Հատկություն 1։ Ինտեգրալ ֆունկցիայի արժեքները պատկանում են [0,1] հատվածին.

$$0 \leqslant F(x) \leqslant 1.$$

Հատկություն 2. Ինտեգրալ ֆունկցիան չնվազող է, այսինքն՝

$$F(x_2) \geqslant F(x_1), \text{ եթե } x_2 > x_1.$$

Հետևանք 1։ Հավանականությունը, որ X պատահական մեծությունը կընդունի (a, b) միջակայքին պատկանող արժեք, հավասար է այդ միջակայքում ինտեգրալ ֆունկցիայի աճին։

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a).$$

Հետևանք 2։ Հավանականությունը, որ անընդհատ պատահական X մեծությունը կընդունի մեկ որոշակի արժեք, օրինակ x_1, հավասար է զրոյի.

$$P(X = x_1) = 0.$$

Հատկություն 3։ Եթե X պատահական մեծության բոլոր հնարավոր արժեքները պատկանում են (a, b) միջակայքին, ապա

$$F(x) = 0, \text{ եթե } x \leqslant a, \quad F(x) = 1, \text{ եթե } x \geqslant b.$$

Հետևանք։ Ճիշտ են հետևյալ սահմանային առնչությունները՝

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$$

252. X պատահական մեծությունը տրված է ինտեգրալ ֆունկցիայով․

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{երբ} \quad x\leqslant -1,\\ \frac{3}{4}x+\frac{3}{4}, & \text{երբ} \quad -1<x\leqslant\frac{1}{3},\\ 1 \quad , & \text{երբ} \quad x>1/3։\end{cases}$$

Գտնել հավանականությունը, որ փորձի հետևանքով X մեծությունը կընդունի $\left(0,\frac{1}{3}\right)$ միջակայքում ընկած արժեքը։

Լուծում։ Հավանականությունը, որ X-ը կընդունի (a, b) միջակայքում ընկած արժեք, հավասար է այդ միջակայքում ինտեգրալ ֆունկցիայի աճին։

$$P(a<X<b)=F(b)-F(a)։$$

Տեղադրելով $a=0$, $b=1/3$, կստանանք

$$P\left(0<X<\frac{1}{3}\right)=F\left(\frac{1}{3}\right)-F(0)=$$

$$=\left[\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}\right]_{x=1/3}-\left[\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}\right]_{x=0}=\frac{1}{4}։$$

253. Պատահական X մեծությունը ամբողջ Ox առանցքի վրա տրված է ինտեգրալ ֆունկցիայով․

$$F(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tg}x։$$

Գտնել հավանականությունը, որ փորձի հետևանքով X մեծությունը կընդունի արժեք (0, 1) միջակայքում։

Պատ.՝ $P(0<X<1)=\frac{1}{4}$։

254. X պատահական մեծությունը տրված է ինտեգրալ ֆունկցիայով.

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{երբ } x\leqslant -2,\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{x}{2}, & \text{երբ } -2<x\leqslant 2,\\ 1, & \text{երբ } x>2։\end{cases}$$

Գտնել հավանականությունը, որ փորձի հետևանքով X մեծությունը կընդունի $(-1;\ 1)$ միջակայքում ընկած արժեքը։

Պատ.՝ $P(-1<X<1)={}^{1}/_{3}$։

255. Անընդհատ X պատահական մեծության (ինչ-որ սարքի անխափան աշխատելու ժամանակամիջոցը) ինտեգրալ ֆունկցիան հավասար է

$$F(x)=1-e^{-x/T}\quad (x\geqslant 0)։$$

Գտնել $X\geqslant T$ ժամանակամիջոցում սարքի անխափան աշխատելու հավանականությունը։

Պատ.՝ $P(X\geqslant T)=1-P(X<T)=1-P(0<X<T)=\frac{1}{e}$։

256. X պատահական մեծությունը տրված է ինտեգրալ ֆունկցիայով.

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{երբ } x\leqslant 2,\\ 0{,}5x-1, & \text{երբ } 2<x\leqslant 4,\\ 1, & \text{երբ } x>4։\end{cases}$$

Գտնել հավանականությունը, որ փորձի արդյունքում X-ը կընդունի հետևյալ արժեքները ա) 0,2-ից փոքր, բ) 3-ից փոքր, գ) 3-ից ոչ փոքր, դ) 5-ից ոչ փոքր։

Լուծում. ա) Քանի որ $x\leqslant 2$ դեպքում $F(x)=0$, ապա $F(0{,}2)=0$, այսինքն՝ $P(X<0{,}2)=0$։

բ) $P(X<3)=F(3)=[0{,}5x-1]_{x=3}=1{,}5-1=0{,}5$;

գ) $X \geqslant 3$ *և* $X < 3$ *պատահույթները հակադիր են, ուստի*

$$P(X \geqslant 3) + P(X < 3) = 1։$$

Այստեղից, հաշվի առնելով, որ $P(X < 3) = 0{,}5$ *(տես բ կետը), կստանանք*

$$P(X \geqslant 3) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5,$$

դ) հակադիր պատահույթների հավանականությունների գումարը հավասար է 1-ի, ուստի

$$P(X \geqslant 5) + P(X < 5) = 1։$$

Այստեղից, օգտագործելով այն պայմանը, որի շնորհիվ $x > 4$ *դեպքում* $F(x) = 1$, *կստանանք*

$$P(X \geqslant 5) = 1 - P(X < 5) = 1 - F(5) = 1 - 1 = 0։$$

257. X *պատահական մեծությունը տրված է ինտեգրալ ֆունկցիայով՝*

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{երբ} \quad x \leqslant 0, \\ x^2, & \text{երբ} \quad 0 < x \leqslant 1, \\ 1, & \text{երբ} \quad x > 1։ \end{cases}$$

Գտնել հավանականությունը, որ 4 անկախ փորձերի արդյունքում X մեծությունը ուղիղ 3 անգամ կընդունի (0,25, 0,75) միջակայքին պատկանող արժեքը։

Պատ.՝ $p = P(0{,}25 < X < 0{,}75) = 0{,}5$, $P_4(3) = C_4^3 p^3 q = 0{,}25$։

258. X *պատահական մեծությունը տրված է ամբողջ* Ox *առանցքի վրա ինտեգրալ ֆունկցիայով՝*

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x}{2},$$

Գտնել հետևյալ պայմանին բավարարող հնարավոր x_1 *արժեքը՝ 1/4 հավանականությամբ պատահական X մեծությունը փորձի հետևանքով ընդունում է* x_1*-ից մեծ արժեք։*

Լուծում։ $X \leqslant x_1$ *և* $X > x_1$ *պատահույթները հակադիր են, ուստի*

$$P(X \leqslant x_1) + P(X > x_1) = 1\text{։}$$

Հետևաբար,

$$P(X \leqslant x_1) = 1 - P(X > x_1) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}\text{։}$$

Քանի որ $P(X = x_1) = 0$, *ապա*

$$P(X \leqslant x_1) = P(X = x_1) + P(X < x_1) = P(X < x_1) = \frac{3}{4}\text{։}$$

Ըստ ինտեգրալ ֆունկցիայի սահմանման

$$P(X < x_1) = F(x_1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x_1}{2}\text{։}$$

Հետևաբար,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x_1}{2} = \frac{3}{4},$$

կամ

$$\operatorname{arctg} \frac{x_1}{2} = \frac{\pi}{4}\text{։}$$

Այստեղից

$$\frac{x_1}{2} = 1 \quad \text{կամ} \quad x_1 = 2\text{։}$$

259. X *պատահական մեծությունը տրված է ամբողջ* Ox *առանցքի վրա ինտեգրալ ֆունկցիայով։*

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x}{2}\text{։}$$

Գտնել հետևյալ պայմանին բավարարող հնարավոր x_1 *արժեքը․ 1/6 հավանականությամբ պատահական* X *մեծությունը փորձի արդյունքում ընդունում է* x_1*-ից մեծ արժեք։*

Պատ.՝ $x_1 = 2\sqrt{3}$։

260. *Դիսկրետ* X *պատահական մեծությունը տրված է բաշխման օրենքով.*

X	2	4	7
p	0,5	0,2	0,3

Գտնել F(x) *ինտեգրալ ֆունկցիան և գծել գրաֆիկը։*

Լուծում 1։ Եթե $x \leqslant 2$, *ապա* $F(x)=0$։ *Իրոք, 2-ից փոքր արժեքներ* X *մեծությունը չի ընդունում։ Հետևաբար* $x \leqslant 2$ *դեպքում*

$$F(x)=P(X<x)=0։$$

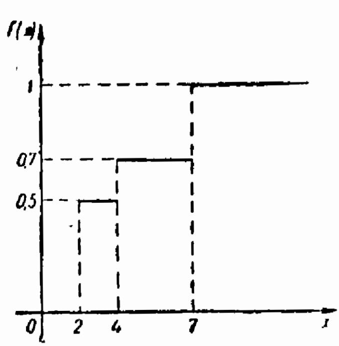
2. Եթե $2<x \leqslant 4$, *ապա* $F(x)=0,5$։ *Իրոք,* X*-ը կարող է ընդունել 2 արժեքը 0,5 հավանականությամբ։*

3. Եթե $4<x \leqslant 7$, *ապա* $F(x)=0,7$։ *Իրոք,* X*-ը կարող է ընդունել 2 արժեքը 0,5 հավանականությամբ և 4 արժեքը 0,2 հավանականությամբ. հետևաբար, այդ արժեքներից մեկը, միևնույնն է թե որը,* X*-ը կարող է ընդունել (ըստ անհամատեղելի պատահույթների հավանականությունների գումարման թեորեմի)* $0,5+0,2=0,7$ *հավանականությամբ։*

4. Եթե $x>7$, *ապա* $F(x)=1$։ *Իրոք,* $X \leqslant 7$ *պատահույթը ստույգ է և նրա հավանականությունը հավասար է 1-ի։*

Եվ այսպես, որոնելի ինտեգրալ ֆունկցիան ունի հետևյալ տեսքը։

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{երբ } x \leqslant 2 \\ 0,5, & \text{երբ } 2<x \leqslant 4 \\ 0,7, & \text{երբ } 4<x \leqslant 7 \\ 1, & \text{երբ } x>7 \end{cases}$$



Նկ. 6

Այս ֆունկցիայի գրաֆիկը բերված է նկ. 6-ում։

261. *Դիսկրետ պատահական մեծությունը տրված է բաշխման օրենքով.*

X	3	4	7	10
p	0,2	0,1	0,4	0,3։

Գտնել ինտեգրալ ֆունկցիան և կառուցել գրաֆիկը

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{երբ} \quad x \leq 3 \\ 0{,}2, & \text{երբ} \quad 3 < x \leq 4 \\ 0{,}3, & \text{երբ} \quad 4 < x \leq 7 \\ 0{,}7, & \text{երբ} \quad 7 < x \leq 10 \\ 1, & \text{երբ} \quad x > 10 \end{cases}$$

§ 2. Անընդհատ պատահական մեծության հավանականությունների բաշխման դիֆերենցիալ ֆունկցիա

Հավանականությունների բաշխման դիֆերենցիալ ֆունկցիա *կոչվում է ինտեգրալ ֆունկցիայի առաջին կարգի ածանցյալը.*

$$f(x)=F'(x)։$$

Հաճախ, «դիֆերենցիալ ֆունկցիա» տերմինի փոխարեն օգտագործում են «հավանականությունների խտություն» տերմինը։

Հավանականությունը, որ անընդհատ X պատահական մեծությունը ընդունում է (a, b) միջակայքին պատկանող արժեքներ, որոշվում է

$$P(a<X<b)=\int_a^b f(x)dx \text{ հավասարությամբ։}$$

Գիտենալով դիֆերենցիալ ֆունկցիան, կարող ենք գտնել ինտեգրալ ֆունկցիան։

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx։$$

Դիֆերենցիալ ֆունկցիան օժտված է հետևյալ հատկություններով.

Հատկություն 1։ Դիֆերենցիալ ֆունկցիան ոչ բացասական է, *այսինքն՝* $f(x) \geq 0$։

Հատկություն 2։ Դիֆերենցիալ ֆունկցիայի անիսկական ինտեգրալը $-\infty$ մինչև $+\infty$ միջակայքում հավասար է 1-ի.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

Մասնավորապես, եթե պատահական մեծության բոլոր հնարավոր արժեքները պատկանում են (a, b) միջակայքին, ապա

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = 1.$$

262. Տրված է անընդհատ X պատահական մեծության բաշխման ինտեգրալ ֆունկցիան.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{եթե} \quad x \le 0, \\ \sin x, & \text{եթե} \quad 0 < x \le \frac{\pi}{2}, \\ 1, & \text{եթե} \quad x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Գտնել $f(x)$ դիֆերենցիալ ֆունկցիան։

Լուծում։ Դիֆերենցիալ ֆունկցիան հավասար է ինտեգրալ ֆունկցիայի առաջին ածանցյալին.

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & \text{եթե} \quad x < 0, \\ \cos x, & \text{եթե} \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{եթե} \quad x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Նկատենք, որ $x = 0$ կետում $F'(x)$ ածանցյալը գոյություն չունի։

263. Տրված է անընդհատ X պատահական մեծության ինտեգրալ ֆունկցիան.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{եթե} \quad x \le 0, \\ \sin 2x, & \text{եթե} \quad 0 < x \le \frac{\pi}{4}, \\ 1, & \text{եթե} \quad x > \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Գտնել $f(x)$ դիֆերենցիալ ֆունկցիան։

Պատ.՝ $f(x)=2\cos 2x$ $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ միջակայքում. այդ միջակայքից դուրս $f(x)=0$։

264. Անընդհատ X պատահական մեծությունը տրված է դիֆերենցիալ ֆունկցիայով՝ $f(x)=\frac{2}{3}\sin 3x$ $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ միջակայքում. այդ միջակայքից դուրս $f(x)=0$։ Գտնել հավանականությունը, որ X-ը կընդունի $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$ միջակայքին պատկանող արժեք։

Լ՛ու ծ ու մ։ Օգտվենք հետևյալ բանաձևից.

$$P(a<X<b)=\int_a^b f(x)\,dx.$$

Ըստ պայմանի $a=\frac{\pi}{6}$, $b=\frac{\pi}{4}$, $f(x)=\frac{2}{3}\sin 3x$։ Հետևաբար, որոնելի հավանականությունը՝

$$P\left(\frac{\pi}{6}<X<\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2}{3}\int_{\pi/6}^{\pi/4}\sin 3x dx=\frac{\sqrt{2}}{9}$$

(բաց թողնված հաշվումները թողնվում են ընթերցողին)։

265. Անընդհատ պատահական մեծությունը $(0, \infty)$ միջակայքում տրված է դիֆերենցիալ ֆունկցիայով.

$$f(x)=ae^{-\alpha x}\ (\alpha>0),$$

այդ միջակայքից դուրս $f(x)=0$։ Գտնել հավանականությունը, որ X-ը կընդունի (1, 2) միջակայքին պատկանող արժեք։

Պատ.՝ $P(1<X<2)=(e^{\alpha}-1)/e^{2\alpha}$.

266. Անընդհատ X պատահական մեծության դիֆերենցիալ ֆունկցիան $(-\pi/2, \pi/2)$ միջակայքում՝ $f(x)=\frac{2}{\pi}\cos^2 x$. այդ միջակայքից դուրս $f(x)=0$։ Գտնել հավանականությունը, որ 3 անկախ փորձերում X-ը ճիշտ 2 անգամ կընդունի $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ միջակայքում ընկած արժեքը։

Պատ.՝ $p = P\left(0 < X < \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi + 2}{4\pi}$,

$$P_3(2) = C_3^2\left(\frac{\pi + 2}{4\pi}\right)^2 \cdot \frac{3\pi - 2}{4\pi}.$$

267. Տրված է անընդհատ X պատահական մեծության դիֆերենցիալ ֆունկցիան.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{եթե} \quad x \leq 0, \\ \cos x, & \text{եթե} \quad 0 < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{եթե} \quad x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Գտնել F(x) ինտեգրալ ֆունկցիան։

Լուծում։ Օգտվենք հետևյալ բանաձևից.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx.$$

Եթե $x \leq 0$, ապա $f(x) = 0$, հետևաբար,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0 \cdot dx = 0:$$

Եթե $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$, ապա

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx + \int_{0}^{x} \cos x\,dx = \sin x.$$

Եթե $x > \frac{\pi}{2}$, ապա

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx + \int_{0}^{\pi/2} \cos x\,dx + \int_{\pi/2}^{x} 0 \cdot dx = \sin x \Big|_{0}^{\pi/2} = 1.$$

եվ այնպես, որոնելի ինտեգրալ ֆունկցիան ունի հետևյալ տեսքը.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{երբ} \quad x\leqslant 0, \\ \sin x, & \text{երբ} \quad 0<x\leqslant \frac{\pi}{2}, \\ 1, & \text{երբ} \quad x>\frac{\pi}{2}։ \end{cases}$$

268. Տրված է անընդհատ X պատահական մեծության դիֆերենցիալ ֆունկցիան.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{երբ} \quad x\leqslant 0, \\ \sin x, & \text{երբ} \quad 0<x\leqslant \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{երբ} \quad x>\frac{\pi}{2}։ \end{cases}$$

Գտնել F(x) ինտեգրալ ֆունկցիան։

Պատ.՝ $$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{երբ} \quad x\leqslant 0, \\ 1-\cos x, & \text{երբ} \quad 0<x\leqslant \frac{\pi}{2}, \\ 1, & \text{երբ} \quad x>\frac{\pi}{2}։ \end{cases}$$

269. Տրված է անընդհատ X պատահական մեծության դիֆերենցիալ ֆունկցիան.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{երբ} \quad x\leqslant 1, \\ x-\frac{1}{2}, & \text{երբ} \quad 1<x\leqslant 2, \\ 0, & \text{երբ} \quad x>2։ \end{cases}$$

Գտնել F(x) ինտեգրալ ֆունկցիան։

Պատ.՝ $$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{երբ} \quad x\leqslant 1, \\ \frac{1}{2}(x^2-x), & \text{երբ} \quad 1<x\leqslant 2, \\ 1, & \text{երբ} \quad x>2։ \end{cases}$$

270. *Տրված է անընդհատ X պատահական մեծության դիֆերենցիալ ֆունկցիան.*

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{եթե} \quad x \leq \dfrac{\pi}{6}, \\ 3\sin 3x, & \text{եթե,} \quad \pi/6 < x \leq \pi/3, \\ 0, & \text{եթե,} \quad x > \pi/3: \end{cases}$$

Գտնել F(x) *ինտեգրալ ֆունկցիան:*

$$\text{Պատ.՝} \quad F(x) \begin{cases} 0, & \text{եթե} \quad x \leq \dfrac{\pi}{6}, \\ -\cos 3x, & \text{եթե} \quad \pi/6 < x \leq \pi/3, \\ 1, & \text{եթե} \quad x > \pi/3. \end{cases}$$

271. *Անընդհատ X պատահական մեծության դիֆերենցիալ ֆունկցիան տրված է ամբողջ* OX *առանցքի վրա հետևյալ հավասարությունով.*

$$f(x)=\frac{4c}{e^{x}+e^{-x}},$$

Գտնել հաստատուն C *պարամետրը:*

Լուծում: f(x) *դիֆերենցիալ ֆունկցիան պետք է բավարարի հետևյալ պայմանին.*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1:$$

Պահանջենք, որ այդ պայմանը կատարվի տրված ֆունկցիայի համար.

$$4C\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{e^{x}+e^{-x}}=1:$$

Այստեղից,

$$C=\frac{1}{4\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{e^{x}+e^{-x}}}, \qquad (*)$$

Սկզբում գտնենք անորոշ ինտեգրալը․

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{e^x\,dx}{1 + e^{2x}} = \operatorname{arctg} e^x.$$

Այնուհետև հաշվենք անիսկական ինտեգրալը․

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \lim_{a \to -\infty} \int_a^0 \frac{dx}{e^x + e^{-x}} + \lim_{b \to \infty} \int_0^b \frac{dx}{e^x + e^{-x}} =$$

$$= \lim_{a \to -\infty} \operatorname{arctg} e^x \Big|_a^0 + \lim_{b \to \infty} \operatorname{arctg} e^x \Big|_0^b =$$

$$\lim_{a \to -\infty} [\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} e^a] + \lim_{b \to \infty} [\operatorname{arctg} e^b - \operatorname{arctg} 1] = \pi/2.$$

Այսպիսով,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \frac{\pi}{2}, \qquad (**)$$

Տեղադրելով (**)-ը (*)-ի մեջ, վերջնականապես կստանանք

$$C = \frac{1}{2\pi}.$$

272. *Անընդհատ* X *պատահական մեծության դիֆերենցիալ ֆունկցիան տրված է ամբողջ* Ox *առանցքի վրա հետևյալ հավասարությամբ․*

$$f(x) = \frac{2C}{1 + x^2}.$$

Գտնել հաստատուն C *պարամետրը։*

Պատ.՝ $C = \dfrac{1}{2\pi}$։

273. *Անընդհատ* X *պատահական մեծության դիֆերենցիալ ֆունկցիան* $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ *միջակայքում հավասար է* $f(x) = C \sin 2x$․ *այդ միջակայքից դուրս* $f(x) = 0$։ *Գտնել հաստատուն* C *պարամետրը։*

Պատ.՝ $C = 1$։

$$M(X) = \frac{1}{\pi}\int_{-c}^{c}\frac{x\,dx}{\sqrt{c^2-x^2}}\text{։}$$

Հաշվի առնելով, որ ենթաինտեգրալ ֆունկցիան կենտ է և ինտեգրման սահմանները սիմետրիկ են կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ, եզրակացնում ենք, որ ինտեգրալը հավասար է զրոյի։ Հետևաբար,

$$M(X) = 0\text{։}$$

Այս արդյունքը կարելի է ստանալ անմիջապես, եթե ի նկատի ունենանք, որ բաշխման կորը սիմետրիկ է $x=0$ *ուղղի նկատմամբ։*

278. X *պատահական մեծությունը տրված է դիֆերենցիալ ֆունկցիայով (Լապլասի բաշխում).*

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}\text{։}$$

Գտնել X *պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը։*

Պատ.՝ $M(X)=0$։

279. X *պատահական մեծությունը տրված է (0, 1) միջակայքում դիֆերենցիալ ֆունկցիայով՝* $f(x)=c(x^2+2x)$. *այդ միջակայքից դուրս* $f(x)=0$։ *Գտնել. ա)* c *պարամետրը, բ)* X *մեծության մաթեմատիկական սպասումը։*

Պատ.՝ *ա)* $c=3/4$, *բ)* $M(X)=11/16$։

280. *Գտնել ինտեգրալ ֆունկցիայով տրված* X *պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը.*

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{երբ } x\leqslant 0,\\ \frac{x}{4}, & \text{երբ } 0<x\leqslant 4,\\ 1, & \text{երբ } x>4\text{։}\end{cases}$$

Լուծում։ Գտնենք X-ի դիֆերենցիալ ֆունկցիան․

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases} 0, & \text{երբ} \quad x\leqslant 0, \\ \dfrac{1}{4}, & \text{երբ} \quad 0<x\leqslant 4, \\ 0, & \text{երբ} \quad x>4։ \end{cases}$$

Գտնենք որոնելի մաթեմատիկական սպասումը․

$$M(X)=\int_0^4 xf(x)dx=\int_0^4 x\frac{1}{4}dx=\frac{x^2}{8}\Big|_0^4=2։$$

281. X պատահական մեծությունը, որի հնարավոր արժեքները ոչ բացասական են, տրված է ինտեգրալ ֆունկցիայով․

$$F(x)=1-e^{-\alpha|x|} \quad (\alpha>0)։$$

Գտնել X մեծության մաթեմատիկական սպասումը։

Պատ.՝ $M(X)=\dfrac{1}{\alpha}$։

282. X պատահական մեծությունը տրված է $(0, \pi)$ միջակայքում դիֆերենցիալ ֆունկցիայով՝ $f(x)=\frac{1}{2}\cdot\sin x$, այդ միջակայքից դուրս $f(x)=0$։ Գտնել $Y=\varphi(X)=X^2$ ֆունկցիայի մաթեմատիկական սպասումը (նախապես չգտնելով Y-ի դիֆերենցիալ ֆունկցիան)։

Լուծում։ Օգտվենք X պատահական արգումենտից $\varphi(X)$ ֆունկցիայի մաթեմատիկական սպասման հաշվման բանաձևից՝

$$M[\varphi(X)]=\int_a^b \varphi(x)f(x)\,dx,$$

որտեղ a-ն ու b-ն ինտերվալի ծայրակետերն են, ուր ընկած են X-ի հնարավոր արժեքները։ Տեղադրելով $\varphi(x)=x^2$,

$f(x)=\frac{1}{2}\sin x$, $a=0$, $b=\pi$ և ինտեգրելով մասերով, վերջնականապես կստանանք

$$M(X^2)=\frac{1}{2}\int_0^{\pi} x^2\cdot\sin x\,dx=\frac{\pi^2-4}{2}.$$

283. X պատահական մեծությունը տրված է $(0, \pi/2)$ միջակայքում դիֆերենցիալ ֆունկցիայով՝ $f(x)=\cos x$. այդ միջակայքից դուրս $f(x)=0$։ Գտնել $Y=\varphi(X)=X^2$ ֆունկցիայի մաթեմատիկական սպասումը (նախապես չգտնելով Y-ի դիֆերենցիալ ֆունկցիան)։

Պատ.՝ $M(X^2)=\int_0^{\pi/2} x^2\cos x\,dx=\frac{\pi^2-8}{4}$.

284. X պատահական մեծությունը տրված է $(0, 1)$ միջակայքում դիֆերենցիալ ֆունկցիայով՝ $f(x)=x+0{,}5$, այդ միջակայքից դուրս $f(x)=0$։ Գտնել $Y=X^3$ ֆունկցիայի մաթեմատիկական սպասումը (նախապես չգտնելով Y-ի դիֆերենցիալ ֆունկցիան)։

Պատ.՝ $M(X^3)=13/40$.

285. X պատահական մեծությունը տրված է $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ միջակայքում դիֆերենցիալ ֆունկցիայով՝ $f(x)=2\cos 2x$. այդ միջակայքից դուրս $f(x)=0$։ Գտնել. ա) մոդան, բ) X-ի միջնաթիվը (մեդիանը)։

Լուծում։ ա) Հեշտ է համոզվել, որ $f(x)=2\cos 2x$ ֆունկցիան $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ միջակայքում չունի մաքսիմում, ուստի և X-ը չունի մոդա։

բ) Գտնենք $M_e(X)=m_e$ միջնաթիվը, օգտվելով միջնաթվի սահմանումից.

$$P(X<m_e)=P(X>m_e),$$

կամ, որ նույնն է,

$$P(X < m_e) = \frac{1}{2}.$$

Հաշվի առնելով, որ ըստ պայմանի X-ի հնարավոր արժեքները դրական են, արտագրենք այս հավասարությունը հետևյալ կերպ․

$$P(O < X < m_e) = \frac{1}{2},$$

կամ

$$2\int_0^{m_e} \cos 2x dx = \sin 2m_e = \frac{1}{2}.$$

Այստեղից

$$2m_e = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}.$$

Հետևաբար, որոնելի միջնաթիվը

$$m_e = \frac{\pi}{12}.$$

286. X պատահական մեծությունը (2, 4) միջակայքում տրված է դիֆերենցիալ ֆունկցիայով․

$$f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{2}x - 6.$$

այդ միջակայքից դուրս $f(x) = 0$։ Գտնել X մեծության մոդան, մաթեմատիկական սպասումը և միջնաթիվը։

Լուծում։ Դիֆերենցիալ ֆունկցիան ներկայացնենք հետևյալ տեսքով․

$$f(x) = \frac{3}{4}(x-3)^2 + \frac{3}{4}.$$

Այստեղից երևում է, որ $x = 3$ դեպքում դիֆերենցիալ ֆունկցիան հասնում է մաքսիմումի, հետևաբար, $M_0(X) = 3$։ (Իհարկե, կարելի էր գտնել մաքսիմումը դիֆերենցիալ հաշվի մեթոդներով)։

Քանի որ բաշխման կորը սիմետրիկ է $x=3$ *ուղղի նկատմամբ, ապա* $M(X)=3$ *և* $M_e(X)=3$։

287. X *պատահական մեծությունը* (3, 5) *միջակայքում տրված է դիֆերենցիալ ֆունկցիայով.*

$$f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 6x - \frac{45}{4},$$

այդ միջակայքից դուրս $f(x)=0$։ *Գտնել* X-*ի մոդան, մաթեմատիկական սպասումը և միջնաթիվը։*

Պատ.՝ $M_0(X) = M(X) = M_e(X) = 4$։

288. X *պատահական մեծությունը* (−1, 1) *միջակայքում տրված է դիֆերենցիալ ֆունկցիայով.*

$$f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}.$$

այդ միջակայքից դուրս $f(x)=0$։ *Գտնել. ա) մոդան, բ)* X-*ի միջնաթիվը.*

Պատ.՝ *ա)* X-*ը մոդա չունի (դիֆերենցիալ ֆունկցիան մաքսիմում չունի) բ)* $M_e(X)=0$ *(բաշխման կորը սիմետրիկ է* $x=0$ *ուղղի նկատմամբ)։*

289. X *պատահական մեծությունը* $x=0$ *դեպքում տրված է դիֆերենցիալ ֆունկցիայով (Վեյբուլի բաշխում)*

$$f(x) = \frac{n}{x_0} x^{n-1} e^{-x^n/x_0},$$

$f(x)=0$ $x<0$ *դեպքում։ Գտնել* X-*ի մոդան։*

Պատ. $M_0(X) = \left[\frac{(n-1)x_0}{n}\right]^{1/n}$,

290. *Ապացուցել, որ անընդհատ պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը գտնվում է նրա հնարավոր ամենամեծ և ամենափոքր արժեքների միջև։*

Լուծում։ Դիցուք X-*ը անընդհատ պատահական մեծություն է, որը տրված է* $[a, b]$ *հատվածում դիֆերենցիալ* ֆունկցիայով՝ f(x). այդ միջակայքից դուրս $f(x)=0$։ Այդ դեպքում

$$a \leqslant x \leqslant b$$

Հաշվի առնելով, որ $f(x) \geqslant 0$, կստանանք

$$af(x) \leqslant xf(x) \leqslant bf(x)$$

Ինտեգրենք այս կրկնակի անհավասարությունը a-ից մինչև b սահմաններում

$$a\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b xf(x)dx \leqslant b\int_a^b f(x)dx$$

Նկատի ունենալով, որ

$$\int_a^b f(x)dx = 1, \qquad \int_a^b xf(x)dx = M(X),$$

վերջնականապես կստանանք

$$a \leqslant M(X) \leqslant b$$

291. Ապացուցել, որ եթե

$$\lim_{x\to-\infty}[xF(x)]=0 \text{ և } \lim_{x\to\infty}[x(1-F(x))]=0,$$

ապա

$$M(X)=\int_0^\infty [1-F(x)]dx - \int_{-\infty}^0 F(x)dx,$$

Ցուցում։ Ունենք

$$M(X)=\int_{-\infty}^\infty xf(x)\,dx=\int_{-\infty}^0 xf(x)\,dx+\int_0^\infty xf(x)dx,$$

Առաջին գումարելիում f(x)-ը փոխարինել $F'(x)$-ով, իսկ երկրորդում՝ $-[1-F(x)]'$-ով։

292. X *պատահական մեծությունը* $(-c,\ c)$ *միջակայքում տրված է դիֆերենցիալ ֆունկցիայով.*

$$f(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{c^2-x^2}},$$

այդ միջակայքից դուրս $f(x)=0$։ *Գտնել* X*-ի դիսպերսիան։*

Լուծում։ Փնտրենք դիսպերսիան հետևյալ բանաձևով

$$D(X)=\int_a^b [x-M(X)]^2 f(x)dx\text{։}$$

Տեղադրելով $M(X)=0$ *(բաշխման կորը սիմետրիկ է* $x=0$ *ուղղի նկատմամբ),* $a=-c,\ b=c,\ f(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{c^2-x^2}}$, *կստանանք*

$$D(X)=\frac{1}{\pi}\int_{-c}^{c}\frac{x^2\,dx}{\sqrt{c^2-x^2}}=\frac{2}{\pi}\int_0^c\frac{x^2\,dx}{\sqrt{c^2-x^2}}\text{։}$$

Կատարելով $x=c\sin t$ *տեղադրումը, վերջնականապես կստանանք.*

$$D(X)=\frac{c^2}{2}\text{։}$$

293. X *պատահական մեծությունը* $(-3,\ 3)$ *միջակայքում տրված է դիֆերենցիալ ֆունկցիայով.*

$$f(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{9-x^2}}.$$

այդ միջակայքից դուրս $f(x)=0$։ *ա) գտնել* X*-ի դիսպերսիան. բ) ի՞նչն է հավանական. փորձի արդյունքում կստացվի* $X<1$, *թե՞* $X>1$։

Պատ.՝ *ա)* $D(X)=4{,}5$. *բ)* $P(-3<X<1)=0{,}5+\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{1}{3}$.

$$P(1<X<3)=0{,}5-\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{1}{3}\text{։}$$

294. Ապացուցել, որ անընդհատ X պատահական մեծության դիսպերսիան կարող է հաշվվել հետևյալ բանաձևով.

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx-[M(X)]^2։$$

Ցուցում։ Օգտվել հետևյալ բանաձևից.

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}[x-M(X)]^2 f(x)\,dx$$

և հետևյալ հավասարություններից

$$\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx=M(X), \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=1։$$

295. X պատահական մեծությունը $(0, \pi)$ միջակայքում տրված է դիֆերենցիալ ֆունկցիայով,

$$f(x)=\frac{1}{2}\sin x,$$

այդ միջակայքից դուրս $f(x)=0$։ Գտնել X-ի դիսպերսիան։

Լուծում։ Գտնենք դիսպերսիան ըստ հետևյալ բանաձևի.

$$D(X)=\int_a^b x^2 f(x)\,dx-[M(X)]^2։$$

Տեղադրելով այստեղ $M(X)=\frac{\pi}{2}$ (բաշխման կորը սիմետրիկ է $x=\frac{\pi}{2}$ ուղղի նկատմամբ), $a=0$, $b=\pi$, $f(x)=\frac{1}{2}\sin x$, կստանանք

$$D(X)=\frac{1}{2}\int_0^{\pi} x^2 \sin x\,dx-\left[\frac{\pi}{2}\right]^2։ \qquad (*)$$

Երկու անգամ ինտեգրելով մասերով, կգտնենք

$$\int_0^{\pi} x^2 \sin x\,dx = \pi^2 - 4։ \qquad (**)$$

Տեղադրելով (**)-ը (*)-ի մեջ, վերջնականապես կստանանք

$$D(X) = \frac{\pi^2 - 8}{4}։$$

296. X *պատահական մեծությունը* (0, 5) *միջակայքում տրված է դիֆերենցիալ ֆունկցիայով՝*

$$f(x) = \frac{2}{25}x$$

այդ միջակայքից դուրս $f(x) = 0$։ *Գտնել* X-*ի դիսպերսիան.*

Պատ.՝ $D(X) = \frac{25}{18}$։

297. *Գտնել ինտեգրալ ֆունկցիայով տրված* X *պատահական մեծության դիսպերսիան.*

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{եթե} \quad x \leqslant -2, \\ \frac{x}{4} + \frac{1}{2}, & \text{եթե} \quad -2 < x \leqslant 2, \\ 1, & \text{եթե} \quad x > 2։ \end{cases}$$

Լուծում։ Գտնենք դիֆերենցիալ ֆունկցիան.

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & \text{եթե} \quad x \leqslant -2, \\ \frac{1}{4}, & \text{եթե} \quad -2 < x < 2, \\ 0, & \text{եթե} \quad x > 2։ \end{cases}$$

Գտնենք մաթեմատիկական սպասումը.

$$M(X) = \int_{-2}^{2} x f(x)\,dx = \int_{-2}^{2} x \cdot \frac{1}{4}\,dx = 0.$$

(ենթաինտեգրալ ֆունկցիան կենտ է, ինտեգրման սահման-

ները սիմետրիկ են կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ)։

Գտնենք որոնելի դիսպերսիան, հաշվի առնելով, որ $M(X)=0$.

$$D(X)=\int_{-2}^{2}[x-M(X)]^2 f(x)dx=\int_{-2}^{2}x^2\cdot\frac{1}{4}dx=$$

$$=\frac{2}{4}\int_{0}^{2}x^2 dx=\frac{4}{3}.$$

298. X *պատահական մեծությունը տրված է ինտեգրալ ֆունկցիայով.*

$$F(x)=\begin{cases}1-\dfrac{x_0^3}{x^2}, & \text{երբ } x\geqslant x_0\ (x_0>0)\\ 0, & \text{երբ } x<x_0.\end{cases}$$

Գտնել X-ի մաթեմատիկական սպասումը, դիսպերսիան և միջին քառակուսային շեղումը։

Ցուցում։ Նախ գտնել դիֆերենցիալ ֆունկցիան, օգտվել հետևյալ բանաձևից.

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2 f(x)\,dx-[M(X)]^2.$$

Պատ.՝ $M(X)=3x_0/2$, $D(X)=3x_0^2/4$, $\sigma(X)=\sqrt{3}\,x_0/2$.

299. X *պատահական մեծությունը* $(0,\ \pi)$ *միջակայքում տրված է դիֆերենցիալ ֆունկցիայով՝* $f(x)=\frac{1}{2}\sin x$. *այդ միջակայքից դուրս* $f(x)=0$։ *Գտնել* $Y=\varphi(X)=X^2$ *ֆունկցիայի դիսպերսիան, նախապես չգտնելով Y-ի դիֆերենցիալ ֆունկցիան։*

Լուծում։ Օգտվենք հետևյալ բանաձևից.

$$D(\varphi(X))=\int_{a}^{b}\varphi^2(x)\,f(x)dx-[M[\varphi(X)]]^2,$$

Տեղադրելով $\varphi(x)=x^2$, $f(x)=\frac{1}{2}\sin x$, $a=0$, $b=\pi$, $M[\varphi(X)]=M(X^2)=\frac{\pi^2-4}{2}$ *(տես խնդիր 282), կստանանք*

$$D(X^2)=\frac{1}{2}\int_0^{\pi} x^4 \sin x\, dx-\left[\frac{\pi^2-4}{2}\right]^2 \text{։} \qquad (*)$$

Ինտեգրելով մասերով, կգտնենք

$$\int_0^{\pi} x^4 \sin x\, dx=\pi^4-12\pi^2+48 \text{։} \qquad (**)$$

Տեղադրելով (**)-ը (*)-ի մեջ, վերջնականապես կունենանք.

$$D(X^2)=\frac{\pi^4-16\pi^2+80}{4} \text{։}$$

300. X *պատահական մեծությունը* $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ *միջակայքում տրված է դիֆերենցիալ ֆունկցիայով՝* $f(x)=\cos x$. *այդ միջակայքից դուրս* $f(x)=0$։ *Գտնել* $Y=\varphi(X)=X^2$ *ֆունկցիայի դիսպերսիան, նախապես չգտնելով* Y*-ի դիֆերենցիալ ֆունկցիան։*

Ցուցում։ Օգտվել հետևյալ բանաձևից.

$$D[\varphi(X)]=\int_a^b \varphi^2(x)f(x)dx-[M[\varphi(X)]]^2$$

և այն բանից, որ $M(X^2)=\frac{\pi^2-8}{4}$ *(տես խնդիր 283)։*

Պատ.՝ $D(X^2)=20-2\pi^2$։

301. X *պատահական մեծությունը տրված է դիֆերենցիալ ֆունկցիայով* $x \geqslant 0$ *դեպքում՝* $f(x)=\frac{x^n e^{-x}}{n!}$; $f(x)=0$, *երբ* $x<0$։ *Գտնել. ա) մաթեմատիկական սպասումը. բ)* X*-ի դիսպերսիան։*

Լուծում։ ա) Գտնենք մաթեմատիկական սպասումը․

$$M(X)=\int_0^{\infty} xf(x)dx=\frac{1}{n!}\int_0^{\infty} x\cdot x^n e^{-x}\,dx=\frac{1}{n!}\int_0^{\infty} x^{n+1}e^{-x}\,dx։$$

Օգտվենք այսպես կոչված գամմա ֆունկցիայից, որը որոշվում է հետևյալ հավասարությունով․

$$\Gamma(n)=\int_0^{\infty} x^{n-1}e^{-x}dx։ \qquad (*)$$

Ինչպես տեսնում ենք արգումենտը (n *ամբողջ թիվը), որը գտնվում է գամմա ֆունկցիայի նշանի տակ, 1-ով մեծ է ինտեգրալի նշանի տակ գտնվող* x*-ի ցուցչից։ Հետևաբար,*

$$\int_0^{\infty} x^{n+1}e^{-x}\,dx=\Gamma(n+2)։ \qquad (**)$$

Տեղադրելով (**)-ը (*)-ի մեջ, կստանանք

$$M(X)=\frac{\Gamma(n+2)}{n!}, \qquad (***)$$

Օգտվենք գամմա ֆունկցիայի հետևյալ հատկությունից․

$$\Gamma(n)=(n-1)!$$

Ինչպես տեսնում ենք, գամմա ֆունկցիան ամբողջ արգումենտի դեպքում հավասար է արգումենտից մեկով պակաս թվի ֆակտորիալին։ Հետևաբար,

$$\Gamma(n+2)=(n+1)! \qquad (****)$$

Տեղադրելով (****)-ը (***)-ի մեջ, կստանանք

$$M(X)=\frac{(n+1)!}{n!}=\frac{n!\cdot(n+1)}{n!}=n+1։$$

բ) Գտնենք դիսպերսիան, հաշվի առնելով որ,

$$M(X)=n+1,\quad \int_0^\infty x^{n+2}e^{-x}dx=\Gamma(n+3),$$

կստանանք

$$D(X)=\int_0^\infty x^2 f(x)dx-[M(X)]^2=\frac{1}{n!}\int_0^\infty x^2\cdot x^n e^{-x}dx-$$

$$-(n+1)^2=\frac{1}{n!}\int_0^\infty x^{n+2}e^{-x}dx-(n+1)^2=\frac{\Gamma(n+3)}{n!}-$$

$$-(n+1)^2=\frac{(n+2)!}{n!}-(n+1)^2=\frac{n!(n+1)(n+2)}{n!}-$$

$$-(n+1)^2=n+1,$$

Եվ այսպես, $D(X)=n+1$։

302. X պատահական մեծությունը $x\geqslant 0$ դեպքում տրված է դիֆերենցիալ ֆունկցիայով (գամմա բաշխում)

$$f(x)=\frac{1}{\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}x^{\alpha}e^{-x/\beta}\qquad(\alpha>-1,\quad \beta>0)$$

$f(x)=0$, $x<0$ դեպքում։ Գտնել. ա) մաթեմատիկական սպասումը բ) X-ի դիսպերսիան։

Ցուցում։ Կատարել $y=\dfrac{x}{\beta}$ տեղադրումը և օգտվել գամմա ֆունկցիայից։

Պատ.՝ ա) $M(X)=(\alpha+1)\beta$, բ) $D(X)=(\alpha+1)\beta^2$։

303. Ապացուցել, որ ցանկացած անընդհատ պատահական մեծության առաջին կարգի կենտրոնական մոմենտը հավասար է զրոյի ֆունկցիայով՝ f(x). այդ միջակայքից դուրս $f(x)=0$։ Այդ դեպքում

$$a \leqslant x \leqslant b։$$

Հաշվի առնելով, որ $f(x) \geqslant 0$, կստանանք

$$af(x) \leqslant xf(x) \leqslant bf(x)։$$

Ինտեգրենք այս կրկնակի անհավասարությունը a-ից մինչև b սահմաններում

$$a\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b xf(x)dx \leqslant b\int_a^b f(x)dx։$$

Նկատի ունենալով, որ

$$\int_a^b f(x)dx = 1, \qquad \int_a^b xf(x)dx = M(X),$$

վերջնականապես կստանանք

$$a \leqslant M(X) \leqslant b։$$

291. Ապացուցել, որ եթե

$$\lim_{x\to-\infty}[xF(x)]=0 \text{ և } \lim_{x\to\infty}[x(1-F(x))]=0,$$

ապա

$$M(X)=\int_0^{\infty}[1-F(x)]dx-\int_{-\infty}^{0}F(x)dx,$$

Ցուցում։ Ունենք

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)\,dx=\int_{-\infty}^{0}xf(x)\,dx+\int_0^{\infty}xf(x)dx։$$

Առաջին գումարելիում $f(x)$-ը փոխարինել $F'(x)$-ով, իսկ երկրորդում՝ $-[1-F(x)]'$-ով։

292. X *պատահական մեծությունը* $(-c, c)$ *միջակայքում տրված է դիֆերենցիալ ֆունկցիայով.*

$$f(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{c^2-x^2}},$$

այդ միջակայքից դուրս $f(x)=0$։ *Գտնել* X-*ի դիսպերսիան։*

Լուծում։ Փնտրենք դիսպերսիան հետևյալ բանաձևով

$$D(X)=\int_a^b [x-M(X)]^2 f(x)dx\text{։}$$

Տեղադրելով $M(X)=0$ *(բաշխման կորը սիմետրիկ է* $x=0$ *ուղղի նկատմամբ),* $a=-c,\ b=c,\ f(x)=\dfrac{1}{\pi\sqrt{c^2-x^2}}$,

կստանանք

$$D(X)=\frac{1}{\pi}\int_{-c}^{c}\frac{x^2\,dx}{\sqrt{c^2-x^2}}=\frac{2}{\pi}\int_0^c\frac{x^2\,dx}{\sqrt{c^2-x^2}}\text{։}$$

Կատարելով $x=c\sin t$ *տեղադրումը, վերջնականապես կունենանք.*

$$D(X)=\frac{c^2}{2}\text{։}$$

293. X *պատահական մեծությունը* $(-3, 3)$ *միջակայքում տրված է դիֆերենցիալ ֆունկցիայով.*

$$f(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{9-x^2}}.$$

այդ միջակայքից դուրս $f(x)=0$։ *ա) գտնել* X-*ի դիսպերսիան, բ) ի՞նչն է հավանական. փորձի արդյունքում կստացվի* $X<1$, *թե՞* $X>1$։

Պատ.՝ *ա)* $D(X)=4{,}5$. *բ)* $P(-3<X<1)=5{,}5+\dfrac{1}{\pi}\arcsin\dfrac{1}{3}$,

$$P(1<X<3)=0{,}5-\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{1}{3}\text{։}$$

294. *Ապացուցել, որ անընդհատ* X *պատահական մեծության դիսպերսիան կարող է հաշվվել հետևյալ բանաձևով.*

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx-[M(X)]^2։$$

Ցուցում։ Օգտվել հետևյալ բանաձևից.

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}[x-M(X)]^2 f(x)\,dx$$

և հետևյալ հավասարություններից

$$\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx=M(X), \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=1։$$

295. X *պատահական մեծությունը* $(0, \pi)$ *միջակայքում տրված է դիֆերենցիալ ֆունկցիայով,*

$$f(x)=\frac{1}{2}\sin x,$$

այդ միջակայքից դուրս $f(x)=0$։ *Գտնել* X*-ի դիսպերսիան։*

Լուծում։ Գտնենք դիսպերսիան ըստ հետևյալ բանաձևի.

$$D(X)=\int_a^b x^2 f(x)\,dx-[M(X)]^2։$$

Տեղադրելով այստեղ $M(X)=\frac{\pi}{2}$ *(բաշխման կորը սիմետրիկ է* $x=\frac{\pi}{2}$ *ուղղի նկատմամբ),* $a=0$, $b=\pi$, $f(x)=\frac{1}{2}\sin x$, *կստանանք*

$$D(X)=\frac{1}{2}\int_0^{\pi} x^2\sin x\,dx-\left[\frac{\pi}{2}\right]^2։ \qquad (*)$$

Երկու անգամ ինտեգրելով մասերով, կգտնենք

$$\int_0^{\pi} x^2 \sin x dx = \pi^2 - 4 \qquad (**)$$

Տեղադրելով (**)-ը (*)-ի մեջ, վերջնականապես կստանանք

$$D(X) = \frac{\pi^2 - 8}{4}$$

296. X պատահական մեծությունը (0, 5) միջակայքում տրված է դիֆերենցիալ ֆունկցիայով՝

$$f(x) = \frac{2}{25}x$$

այդ միջակայքից դուրս $f(x) = 0$։ Գտնել X-ի դիսպերսիան.

Պատ.՝ $D(X) = \frac{25}{18}$։

297. Գտնել ինտեգրալ ֆունկցիայով տրված X պատահական մեծության դիսպերսիան.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{եթե } x \leqslant -2, \\ \frac{x}{4} + \frac{1}{2}, & \text{եթե } -2 < x \leqslant 2, \\ 1, & \text{եթե } x > 2 \end{cases}$$

Լուծում։ Գտնենք դիֆերենցիալ ֆունկցիան.

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & \text{եթե } x \leqslant -2, \\ \frac{1}{4}, & \text{եթե } -2 < x < 2, \\ 0, & \text{եթե } x > 2 \end{cases}$$

Գտնենք մաթեմատիկական սպասումը.

$$M(X) = \int_{-2}^{2} x f(x) dx = \int_{-2}^{2} x \cdot \frac{1}{4} dx = 0.$$

(ենթաինտեգրալ ֆունկցիան կենտ է, ինտեգրման սահման-

ները սիմետրիկ են կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ)։

Գտնենք որոնելի դիսպերսիան, հաշվի առնելով, որ $M(X)=0$.

$$D(X)=\int_{-2}^{2}[x-M(X)]^2 f(x)dx=\int_{-2}^{2}x^2\cdot\frac{1}{4}dx=$$

$$=\frac{2}{4}\int_{0}^{2}x^2dx=\frac{4}{3}.$$

298. X *պատահական մեծությունը տրված է ինտեգրալ ֆունկցիայով.*

$$F(x)=\begin{cases}1-\dfrac{x_0^3}{x^2}, & \text{երբ } x\geqslant x_0\ (x_0>0)\\ 0, & \text{երբ } x<x_0.\end{cases}$$

Գտնել X-ի մաթեմատիկական սպասումը, դիսպերսիան և միջին քառակուսային շեղումը։

Ցուցում։ Նախ գտնել դիֆերենցիալ ֆունկցիան, օգտվել հետևյալ բանաձևից.

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)\,dx-[M(X)]^2.$$

Պատ.՝ $M(X)=3x_0/2$, $D(X)=3x_0^2/4$, $\sigma(X)=\sqrt{3}\,x_0/2$.

299. X *պատահական մեծությունը* $(0, \pi)$ *միջակայքում տրված է դիֆերենցիալ ֆունկցիայով՝* $f(x)=\frac{1}{2}\sin x$. *այդ միջակայքից դուրս* $f(x)=0$։ *Գտնել* $Y=\varphi(X)=X^2$ *ֆունկցիայի դիսպերսիան, նախապես չգտնելով Y-ի դիֆերենցիալ ֆունկցիան։*

Լուծում։ Օգտվենք հետևյալ բանաձևից.

$$D(\varphi(X))=\int_{a}^{b}\varphi^2(x)\,f(x)dx-[M[\varphi(X)]]^2.$$

Տեղադրելով $\varphi(x)=x^2$, $f(x)=\frac{1}{2}\sin x$, $a=0$, $b=\pi$, $M[\varphi(X)]=M(X^2)=\frac{\pi^2-4}{2}$ (տես խնդիր 282), կստանանք

$$D(X^2)=\frac{1}{2}\int_0^{\pi} x^4 \sin x\, dx-\left[\frac{\pi^2-4}{2}\right]^2 \qquad (*)$$

Ինտեգրելով մասերով, կգտնենք

$$\int_0^{\pi} x^4 \sin x\, dx=\pi^4-12\pi^2+48 \qquad (**)$$

Տեղադրելով (**)-ը (*)-ի մեջ, վերջնականապես կունենանք.

$$D(X^2)=\frac{\pi^4-16\pi^2+80}{4}$$

300. X պատահական մեծությունը $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ միջակայքում տրված է դիֆերենցիալ ֆունկցիայով՝ $f(x)=\cos x$. այդ միջակայքից դուրս $f(x)=0$։ Գտնել $Y=\varphi(X)=X^2$ ֆունկցիայի դիսպերսիան, նախապես չգտնելով Y-ի դիֆերենցիալ ֆունկցիան։

Ցուցում։ Օգտվել հետևյալ բանաձևից.

$$D[\varphi(X)]=\int_a^b \varphi^2(x)f(x)dx-[M[\varphi(X)]]^2$$

և այն բանից, որ $M(X^2)=\frac{\pi^2-8}{4}$ (տես խնդիր 283)։

Պատ.՝ $D(X^2)=20-2\pi^2$։

301. X պատահական մեծությունը տրված է դիֆերենցիալ ֆունկցիայով $x \geqslant 0$ դեպքում՝ $f(x)=\frac{x^n e^{-x}}{n!}$; $f(x)=0$, երբ $x<0$։ Գտնել. ա) մաթեմատիկական սպասումը. բ) X-ի դիսպերսիան։

Լուծում։ ա) Գտնենք մաթեմատիկական սպասումը․

$$M(X)=\int_0^{\infty} xf(x)dx=\frac{1}{n!}\int_0^{\infty} x\cdot x^n e^{-x}dx=\frac{1}{n!}\int_0^{\infty} x^{n+1}e^{-x}dx,$$

Օգտվենք այսպես կոչված գամմա ֆունկցիայից, որը որոշվում է հետևյալ հավասարությունով․

$$\Gamma(n)=\int_0^{\infty} x^{n-1}e^{-x}dx, \qquad (*)$$

Ինչպես տեսնում ենք արգումենտը (n ամբողջ թիվը), որը գտնվում է գամմա ֆունկցիայի նշանի տակ, 1-ով մեծ է ինտեգրալի նշանի տակ գտնվող x-ի ցուցչից։ Հետևաբար,

$$\int_0^{\infty} x^{n+1}e^{-x}dx=\Gamma(n+2)。 \qquad (**)$$

Տեղադրելով (**)-ը (*)-ի մեջ, կստանանք

$$M(X)=\frac{\Gamma(n+2)}{n!}, \qquad (***)$$

Օգտվենք գամմա ֆունկցիայի հետևյալ հատկությունից․

$$\Gamma(n)=(n-1)!$$

Ինչպես տեսնում ենք, գամմա ֆունկցիան ամբողջ արգումենտի դեպքում հավասար է արգումենտից մեկով պակաս թվի ֆակտորիալին։ Հետևաբար,

$$\Gamma(n+2)=(n+1)! \qquad (****)$$

Տեղադրելով (****)-ը (***)-ի մեջ, կստանանք

$$M(X)=\frac{(n+1)!}{n!}=\frac{n!\cdot(n+1)}{n!}=n+1.$$

բ) Գտնենք դիսպերսիան, հաշվի առնելով որ,

$$M(X) = n+1, \quad \int_0^\infty x^{n+2} e^{-x} dx = \Gamma(n+3),$$

կստանանք

$$D(X) = \int_0^\infty x^2 f(x) dx - [M(X)]^2 = \frac{1}{n!} \int_0^\infty x^2 \cdot x^n e^{-x} dx -$$

$$-(n+1)^2 = \frac{1}{n!} \int_0^\infty x^{n+2} e^{-x} dx - (n+1)^2 = \frac{\Gamma(n+3)}{n!} -$$

$$-(n+1)^2 = \frac{(n+2)!}{n!} - (n+1)^2 = \frac{n!(n+1)(n+2)}{n!} -$$

$$-(n+1)^2 = n+1,$$

Եվ այսպես, $D(X) = n+1$։

302. X պատահական մեծությունը $x \geq 0$ դեպքում տրըված է դիֆերենցիալ ֆունկցիայով (գամմա բաշխում)

$$f(x) = \frac{1}{\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)} x^{\alpha} e^{-x/\beta} \qquad (\alpha > -1, \quad \beta > 0)$$

$f(x) = 0$, $x < 0$ դեպքում։ Գտնել. ա) մաթեմատիկական սպասումը բ) X-ի դիսպերսիան։

Ցուցում։ Կատարել $y = \dfrac{x}{\beta}$ տեղադրումը և օգտվել գամմա ֆունկցիայից։

Պատ.՝ ա) $M(X) = (\alpha+1)\beta$, բ) $D(X) = (\alpha+1)\beta^2$։

303. Ապացուցել, որ ցանկացած անընդհատ պատահական մեծության առաջին կարգի կենտրոնական մոմենտը հավասար է զրոյի։

Լ ու ծ ու մ։ Առաջին կարգի կենտրոնական մոմենտի սահմանման համաձայն․

$$\mu_1 = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)] f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx -$$

$$- M(X) \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx\text{։}$$

Հաշվի առնելով, որ

$$\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx = M(X) \quad \text{և} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1,$$

կստանանք

$$\mu_1 = M(X) - M(X) = 0\text{։}$$

304. Ապացուցել, որ երկրորդ կարգի սովորական մոմենտը՝

$$\mu_2' = \int_{-\infty}^{\infty} (x - c)^2 f(x)\, dx \quad ,$$

ունի ամենափոքր արժեքը, եթե $c = M(X)$։

Լ ու ծ ու մ։ Ձևափոխենք μ_2'-ը հետևյալ կերպ․

$$\mu_2' = \int_{-\infty}^{\infty} (x - c)^2 f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} [(x - M(X)) + (M(X) -$$

$$- c)]^2 f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^2 f(x)\, dx + 2(M(X) -$$

$$- c) \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)] f(x)\, dx + [M(X) - c]^2 \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx\text{։}$$

Նկատի ունենալով հետևյալ հավասարությունները․

$$\int_{-\infty}^{\infty}[x-M(X)]\,f(x)dx=\mu_1=0,\quad \int_{-\infty}^{\infty}[x-M(X)]^2 f(x)dx=\mu_2,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=1,$$

կստանանք

$$\mu_2'=\mu_2+[M(X)-c]^2։ \qquad (*)$$

Այստեղից երևում է, որ μ_2'*-ն ունի ամենափոքր արժեքը* $c=M(X)$ *դեպքում, ինչ որ պահանջվում էր ապացուցել։*

Նկատենք, որ (*)-ից հետևում է, որ $\mu_2=\mu_2'-[M(X)-c]^2$, *այսինքն՝ երկրորդ կարգի կենտրոնական մոմենտը փոքր է ցանկացած երկրորդ կարգի սովորական մոմենտից, եթե* $c\neq M(X)$։

305. X *պատահական մեծությունը տրված է (0, 2) միջակայքում դիֆերենցիալ ֆունկցիայով՝* $f(x)=0{,}5x$. *այդ միջակայքից դուրս* $f(x)=0$։ *Գտնել առաջին, երկրորդ, երրորդ և չորրորդ կարգի սկզբնական և կենտրոնական մոմենտները։*

Լուծում։ Ըստ

$$\nu_k=\int_0^2 x^k f(x)\,dx$$

բանաձևի, գտնենք սկզբնական մոմենտները.

$$\nu_1=\int_0^2 x\cdot(0{,}5\,x)\,dx=\frac{4}{3},\quad \nu_2=\int_0^2 x^2\cdot(0{,}5\,x)=2,$$

$$\nu_3=\int_0^2 x^3\cdot(0{,}5\,x)dx=3{,}2,\qquad \nu_4=\int_0^2 x^4\cdot(0{,}5\,x)dx=\frac{16}{3},$$

Գտնենք կենտրոնական մոմենտները։ Ցանկացած պատահական մեծության առաջին կարգի կենտրոնական մոմենտը՝ $\mu_1=0$։

Օգտվենք կենտրոնական մոմենտները սկզբնականներով արտահայտող բանաձևերից.

$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2, \quad \mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3, \quad \mu_4 = \nu_4 - 4\nu_1\nu_3 + 6\nu_1^2\nu_2 - 3\nu_1^4:$$

Տեղադրելով այս բանաձևերում սկզբնական մոմենտների նախօրոք գտնված արժեքները, կստանանք

$$\mu_2 = 2/9, \quad \mu_3 = -8/135, \quad \mu_4 = 16/135:$$

306. *X պատահական մեծությունը (0, 1) միջակայքում տրված է դիֆերենցիալ ֆունկցիայով՝* $f(x) = 2x$. *այդ միջակայքից դուրս* $f(x) = 0$: *Գտնել առաջին, երկրորդ, երրորդ և չորրորդ կարգի սկզբնական և կենտրոնական մոմենտները:*

Պատ.՝ $\nu_1 = 2/3$, $\nu_2 = \frac{1}{2}$, $\nu_3 = 2/5$, $\nu_4 = 1/3$, $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 1/18$, $\mu_3 = -1/135$, $\mu_4 = 1/135$:

§ 4. Հավասարաչափ բաշխում

Հավասարաչափ է *կոչվում անընդհատ X պատահական մեծության հավանականությունների այն բաշխումը, երբ (a, b) միջակայքում, որին պատկանում են X-ի բոլոր հնարավոր արժեքները, դիֆերենցիալ ֆունկցիան պահպանում է հաստատուն արժեք, այն է՝* $f(x) = \frac{1}{b-a}$, *այդ միջակայքից դուրս* $f(x) = 0$:

307. *Հավասարաչափ բաշխման դիֆերենցիալ ֆունկցիան (a, b) միջակայքում պահպանում է C-ին հավասար հաստատուն արժեք, այդ միջակայքից դուրս* $f(x) = 0$: *Գտնել հաստատուն C պարամետրի արժեքը:*

Պատ.՝ $C = \frac{1}{b-a}$:

308. *Ամպերմետրի սանդղակի բաժանումի արժեքը հավասար է 0,1A-ի: Ցուցմունքը կլորացնում են մինչև մոտակա ամբողջ բաժանումը: Գտնել հավանականությունը, որ* *հաշվարկելիս կկատարվի 0,02Λ-ից գերազանցող սխալ:*

Լուծում։ *Հաշվարկի կլորացման սխալը կարելի է դիտել որպես X պատահական մեծություն, որը բաշխված է հավասարաչափ երկու հարևան ամբողջ բաժանումների միջև ընկած միջակայքում: Հավասարաչափ բաշխման դիֆերենցիալ ֆունկցիան*

$$f(x) = \frac{1}{b-a},$$

որտեղ $(b-a)$*-ն միջակայքի երկարությունն է, որի մեջ ընկած են* X*-ի հնարավոր արժեքները. այդ միջակայքից դուրս* $f(x) = 0$։ *Դիտարկվող խնդրում միջակայքի երկարությունը, որոնցում ընկած են* X*-ի հնարավոր արժեքները, հավասար է 0,1-ի, ուստի*

$$f(x) = \frac{1}{0,1} = 10\text{։}$$

Հեշտ է ըմբռնել, որ հաշվարկի սխալը կգերազանցի 0,02-ը, եթե այն ընկած լինի (0,02, 0,08) միջակայքում:

Ըստ բանաձևի

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx,$$

կստանանք

$$P(0,02 < X < 0,08) = \int_{0,02}^{0,08} 10\,dx = 0,6\text{։}$$

309. *Չափող գործիքի սանդղակի բաժանման արժեքը հավասար է 0,2-ի։ Գործիքի ցուցմունքը կլորացնում են մինչև մոտակա ամբողջ բաժանումը։ Գտնել հավանականությունը, որ հաշվարկելիս կկատարվի սխալ. ա) 0,04-ից փոքր, բ) 0,05-ից մեծ։*

Պատ.՝ *ա)* $P(0 < X < 0,04) + P(0,16 < X < 0,20) = 0,4$,

բ) $P(0,05 < X < 0,15) = 0,5$

310. *Մի քանի երթուղային ավտոբուսներ գնում են չվացուցակին խիստ համապատասխան։ Շարժման միջակայ-*

քը 5 րոպե է։ Գտնել հավանականությունը, որ կանգառին մոտեցած ուղևորը հերթական ավտոբուսին կսպասի 3 րոպեից քիչ։

Պատ.՝ $P(2 < X < 5) = 0,6$։

311. *Էլեկտրական ժամացույցի րոպեացույց սլաքը յուրաքանչյուր րոպեի վերջում տեղափոխվում է թռիչքով։ Գտնել հավանականությունը, որ տվյալ ակնթարթին ժամացույցը ցույց կտա ժամանակ, որը տարբեր է ճշգրտից ոչ ավելի, քան 20 վրկ.*

Պատ.՝ $P(0 < X < 1/3) = 1/3$։

312. *Հավասարաչափ բաշխման օրենքը տրված է դիֆերենցիալ բաշխման* $f(x) = \frac{1}{b-a}$ *ֆունկցիայով* (a, b) *միջակայքում, այդ միջակայքից դուրս* $f(x) = 0$։ *Գտնել* $F(x)$ *ինտեգրալ ֆունկցիան։*

$$\text{Պատ.՝ } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{երբ } x \leqslant a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{երբ } a < x \leqslant b, \\ 1, & \text{երբ } x > b. \end{cases}$$

313. *Գտնել* (a, b) *միջակայքում հավասարաչափ բաշխված պատահական* X *մեծության մաթեմատիկական սպասումը։*

Լուծում։ Հավասարաչափ բաշխման դիֆերենցիալ ֆունկցիայի գրաֆիկը սիմետրիկ է $x = \frac{a+b}{2}$ *ուղղի նկատմամբ, ուստի* $M(X) = \frac{a+b}{2}$։

Եվ այսպես, (a, b) *միջակայքում հավասարաչափ բաշխված պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը հավասար է միջակայքի ծայրերի կիսագումարին։ Հասկանալի է, այդ արդյունքը կարելի է ստանալ ըստ հետևյալ բանաձևի.*

$$M(X) = \int_a^b x f(x)\, dx$$

314. *Գտնել (2, 8) միջակայքում հավասարաչափ բաշխված պատահական X մեծության մաթեմատիկական սպասումը։*

Պատ.՝ $M(X) = 5$

315. *Գտնել* (a, b) *միջակայքում հավասարաչափ բաշխված պատահական X մեծության դիսպերսիան և միջին քառակուսային շեղումը։*

Լուծում։ Օգտվենք հետևյալ բանաձևից.

$$D(X) = \int_a^b x^2 f(x) - [M(X)]^2,$$

Տեղադրելով $f(x) = \frac{1}{b-a}$, $M(X) = \frac{a+b}{2}$ *(տես խնդիր 313) և կատարելով տարրական հաշվումներ, վերջնականապես կստանանք.*

$$D(X) = \frac{(b-a)^2}{12},$$

Միջին քառակուսային շեղումը հավասար է դիսպերսիայի քառակուսի արմատին.

$$\sigma(X) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}},$$

316. *Գտնել (2, 8) միջակայքում հավասարաչափ բաշխված X պատահական մեծության դիսպերսիան և միջին քառակուսային շեղումը։*

Պատ.՝ $D(X) = 3$, $\sigma(X) = \sqrt{3}$,

317. *Հավասարաչափ բաշխված X պատահական մեծությունը տրված է դիֆերենցիալ ֆունկցիայով՝* $f(x) = \frac{1}{2l}$ $(a - l,\ a + l)$ *միջակայքում. այդ միջակայքից դուրս* $f(x) = 0$։ *Գտնել X-ի մաթեմատիկական սպասումը և դիսպերսիան։*

Պատ.՝ $M(X) = a$ *(բաշխման «կորը» սիմետրիկ է* $x = a$ *ուղղի նկատմամբ)*, $D(X) = l^2/3$։

318. *Շրջանի* X *տրամագիծը չափված է մոտավորապես, ընդ որում* $a \leqslant X \leqslant b$։ *Դիտելով տրամագիծը որպես* X *պատահական մեծություն՝ հավասարաչափ բաշխված* (a, b) *միջակայքում, գտնել շրջանի մակերեսի մաթեմատիկական սպասումը և դիսպերսիան։*

Լուծում։ 1. Գտնենք շրջանի մակերեսի՝ պատահական $Y=\varphi(X)=\frac{\pi X^2}{4}$ *մեծության, մաթեմատիկական սպասումը ըստ հետևյալ բանաձևի.*

$$M[\varphi(X)]=\int_a^b \varphi(x)\,f(x)dx։$$

Տեղադրելով $\varphi(x)=\frac{\pi x^2}{4}$, $f(x)=\frac{1}{b-a}$ *և կատարելով ինտեգրում, կստանանք*

$$M\left[\frac{\pi X^2}{4}\right]=\frac{\pi(b^2+ab+a^2)}{12}։$$

2. Գտնենք շրջանի մակերեսի դիսպերսիան ըստ հետևյալ բանաձևի.

$$D[\varphi(X)]=\int_a^b \varphi^2(x)\,f(x)dx-[M[\varphi(X)]]^2։$$

Տեղադրելով $\varphi(x)=\frac{\pi x^2}{4}$, $f(x)=\frac{1}{b-a}$ *և կատարելով ինտեգրումը, կստանանք*

$$D\left[\frac{\pi X^2}{4}\right]=\frac{\pi^2}{720}(b-a)^2(4b^2+7ab+4a^2)։$$

319. *Խորանարդի* X *կողը չափված է մոտավորապես, ընդ որում* $a \leqslant X \leqslant b$։ *Դիտելով խորանարդի կողը որպես պատահական* X *մեծություն՝ հավասարաչափ բաշխված* (a, b) միջակայքում, գտնել մաթեմատիկական սպասումը և դիսպերսիան խորանարդի ծավալի համար:

Պատ.՝ $M(X^3) = \dfrac{(b+a)(b^2+a^2)}{4}$,

$$D(X^3) = \frac{b^7 - a^7}{7(b-a)} - \left[\frac{(b+a)(b^2+a^2)}{4}\right]^2:$$

320. *Պատահական* X *և* Y *մեծությունները անկախ են և հավասարաչափ բաշխված.* X-*ը*՝ (a, b) *միջակայքում,* Y-*ը*՝ (c, d) *միջակայքում: Գտնել արտադրյալի մաթեմատիկական սպասումը:*

Ցուցում: Օգտվել 313 խնդրի լուծումից:

Պատ.՝ $M(XY) = \dfrac{a+b}{2} \cdot \dfrac{c+d}{2}$

321. X *և* Y *պատահական մեծությունները անկախ են և հավասարաչափ բաշխված.* X-*ը*՝ (a, b) *միջակայքում,* Y-*ը*՝ (c, d) *միջակայքում: Գտնել* XY *արտադրյալի դիսպերսիան:*

Լուծում. Օգտվենք հետևյալ բանաձևից.

$$D(XY) = M[(XY)^2] - [M(XY)]^2 = M(X^2 \cdot Y^2) - [M(XY)]^2:$$

Քանի որ անկախ պատահական մեծությունների արտադրյալի մաթեմատիկական սպասումը հավասար է նրանց մաթեմատիկական սպասումների արտադրյալին, ապա

$$D(XY) = M(X^2) \cdot M(Y^2) - [M(X) \cdot M(Y)]^2: \qquad (*)$$

Գտնենք $M(X^2)$-*ն ըստ հետևյալ բանաձևի.*

$$M[\varphi(X)] = \int_a^b \varphi(x) f(x) dx:$$

Տեղադրելով $\varphi(x) = x^2$, $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$ *և կատարելով ինտեգրումը,* կստանանք

$$M(X^2)=\frac{b^2+ab+a^2}{3}, \qquad (^{**})$$

Նմանապես կգտնենք

$$M(Y^2)=\frac{c^2+cd+d^2}{3} \qquad (^{***})$$

Տեղադրելով $M(X)=\frac{a+b}{2}$, $M(Y)=\frac{c+d}{2}$, ինչպես նաև (**) և (***)-ը (*)-ի մեջ, վերջնականապես կստանանք.

$$D(XY)=\frac{(a^2+ab+b^2)(c^2+cd+d^2)}{9}-\frac{(a+b)^2(c+d)^2}{4},$$

§ 5. Նորմալ բաշխում

Նորմալ կոչվում է անընդհատ X պատահական մեծության հավանականությունների բաշխումը, եթե դիֆերենցիալ ֆունկցիան ունի հետևյալ տեսքը.

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

որտեղ a-ն մաթեմատիկական սպասումն է, σ-ն՝ միջին X քառակուսային շեղումը։

Հավանականությունը, որ X-ը կընդունի (α, β) միջակայքին պատկանող արժեք

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right),$$

որտեղ $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}dx$-ը Լապլասի ֆունկցիան է։

Հավանականությունը, որ շեղման բացարձակ արժեքը փոքր է դրական δ-ից.

$$P(|X-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right),$$

Մասնավորապես, $a=0$ դեպքում ճիշտ է հետևյալ հավասարությունը.

$$P(|X|<\delta)=2\,\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)։$$

Նորմալ բաշխման ասիմետրիան (անհամաչափությունը), էքսցեսը (զառիթափությունը), մոդան և միջնարքիվը համապատասխանաբար հավասար են՝

$$A_s=0,\quad E_k=0,\quad M_0=a,\quad M_e=a,$$

որտեղ $a=M(X)$։

322. Նորմալ բաշխված անընդհատ X պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը՝ $a=3$ և միջին քառակուսային շեղումը՝ $\sigma=2$։ Գտնել X-ի դիֆերենցիալ ֆունկցիան։

Պատ.՝ $f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(x-3)^2}{8}}$։

323. Գտնել նորմալ բաշխված X պատահական մեծության դիֆերենցիալ ֆունկցիան, գիտենալով, որ $M(X)=3$, $D(X)=16$։

Պատ.՝ $f(x)=\dfrac{1}{4\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(x-3)^2}{32}}$։

324. Նորմալ բաշխված X պատահական մեծությունը տրված է դիֆերենցիալ ֆունկցիայով.

$$f(x)=\frac{1}{5\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(x-1)^2}{50}},$$

Գտնել X-ի մաթեմատիկական սպասումը և դիսպերսիան։

Պատ.՝ $M(X)=1$, $D(X)=25$։

325. *Տրված է նորմավորված նորմալ բաշխման ինտեգրալ ֆունկցիան.*

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}} dx:$$

Գտնել $f(x)$ *դիֆերենցիալ ֆունկցիան:*

Պատ.՝ $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$:

326. *Ապացուցել, որ նորմալ բաշխման դիֆերենցիալ ֆունկցիայի* a *և* σ *պարամետրերը հանդիսանում են համապատասխանաբար* X*-ի մաթեմատիկական սպասումը և միջին քառակուսային շեղումը:*

Ցուցում: $M(X)$*-ը և* $D(X)$*-ը գտնելիս պետք է ներմուծել նոր փոփոխական* $z = \dfrac{x-a}{\sigma}$ *և օգտագործել Պուասոնի ինտեգրալը՝* $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2} dz = \sqrt{2\pi}$:

327. *Ապացուցել, որ Լապլասի*

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-z^2/2} dz$$

ֆունկցիան կենտ է.

$$\Phi(-x) = -\Phi(x):$$

Ցուցում:

$$\Phi(-z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{-x} e^{-z^2/2} dz.$$

հավասարությունում տեղադրել $z = -t$:

328. *Նորմալ բաշխված պատահական* X *մեծության մաթեմատիկական սպասումը և միջին քառակուսային շեղումը* համապատասխանաբար հավասար են 10-ի և 2-ի։ Գտնել հավանականությունը, որ փորձի արդյունքում X-ը կընդունի (12, 14) միջակայքում ընկած արժեքը։

Լուծում։ Օգտվենք հետևյալ բանաձևից.

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)։$$

Տեղադրելով $\alpha = 12$, $\beta = 14$, $a = 10$ և $\sigma = 2$, կստանանք

$$P(12 < X < 14) = \Phi(2) - \Phi(1)։$$

Աղյուսակից (տես հավելված 2) գտնում ենք.

$$\Phi(2) = 0{,}4772, \quad \Phi(1) = 0{,}3413։$$

Որոնելի հավանականությունը

$$P(12 < X < 14) = 0{,}1359։$$

329. Նորմալ բաշխված X պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը և միջին քառակուսային շեղումը համապատասխանաբար հավասար են 20-ի և 5-ի։ Գտնել հավանականությունը, որ փորձի հետևանքով X-ը կընդունի (15, 25) միջակայքում ընկած արժեք։

Պատ.՝ $P(15 < X < 25) = 0{,}6826$

320. Ավտոմատը գրոշմում է գլանակներ։ Վերահսկվում է գլանակների X երկարությունը, որը բաշխված է նորմալ 50 մմ-ի հավասար մաթեմատիկական սպասումով (նախագծային երկարությունը)։ Պատրաստված գլանակների փաստացի երկարությունը քիչ չէ 32 մմ-ից և շատ չէ 68 մմ-ից։ Գտնել հավանականությունը, որ պատահական վերցրած գլանակի երկարությունը. ա) մեծ է 55 մմ-ից, բ) փոքր է 40 մմ-ից։

Ցուցում։ $P(32 < X < 68) = 1$ հավասարությունից նախապես գտնել σ-ն։

Պատ.՝ ա) $P(55 < X < 68) = 0{,}0823$, բ) $P(32 < X < 40) = 0{,}0027$։

331. *Կատարվում են լիսեռի տրամագծի չափումներ առանց սիստեմատիկ (միևնույն նշանի) սխալների։ Չափումների X պատահական սխալներն ենթարկվում են նորմալ օրենքին $\sigma = 10$ մմ միջին քառակուսային շեղումով։ Գտնել հավանականությունը, որ չափումը կկատարվի բացարձակ մեծությամբ 15 մմ-ը չգերազանցող սխալով։*

Լուծում։ *Պատահական սխալների մաթեմատիկական սպասումը հավասար է 0-ի, ուստի կիրառելի է հետևյալ բանաձևը.*

$$P(|X| < \delta) = 2\,\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)\text{։}$$

Տեղադրելով $\delta = 15$, $\sigma = 10$, *կգտնենք*

$$P(|X| < 15) = 2\,\Phi(1{,}5)\text{։}$$

Աղյուսակից (հավելված 2) գտնում ենք՝ $\Phi(1{,}5) = 0{,}4332$։ *Որոնելի հավանականությունը*

$$P(|X| < 15) = 2 \cdot 0{,}4332 = 0{,}8664\text{։}$$

332. *Կատարվում է ինչ-որ նյութի կշռում առանց սիստեմատիկ սխալների։ Կշռելու պատահական սխալները ենթարկվում են նորմալ բաշխման $\sigma = 20$ գ. միջին քառակուսային շեղումով։ Գտնել հավանականությունը, որ կշռումը կկատարվի բացարձակ մեծությամբ 10 գ-ը չգերազանցող սխալով։*

Պատ.՝ $P(|X| < 10) = 2\Phi(0{,}5) = 0{,}383$։

333. *Չափումների պատահական սխալներն ենթարկվում են նորմալ օրենքին $\sigma = 20$ մմ միջին քառակուսային շեղումով և $a = 0$ մաթեմատիկական սպասումով։ Գտնել հավանականությունը, որ 3 անկախ չափումներից գոնե մեկի սխալը բացարձակ մեծությամբ չի գերազանցի 4 մմ-ը։*

Պատ.՝ $P \simeq 0{,}41$։

334. *Ավտոմատը պատրաստում է գնդիկներ։ Գնդիկը համարվում է պիտանի, եթե նրա տրամագծի X շեղումը նախագծված չափից բացարձակ արժեքով փոքր է 0,7 մմ-ից։ Համարելով, որ պատահական X մեծությունը բաշխված է նորմալ $\sigma=0{,}4$ մմ միջին քառակուսային շեղումով, գտնել ինչքա՞ն կլինի պիտանի գնդիկների թիվը 100 պատրաստվածների մեջ։*

Լուծում։ Քանի որ X-ը նախագծված չափից գնդի տրամագծի շեղումն է, ապա $M(X)=a=0$։

Օգտվենք հետևյալ բանաձևից

$$P(|X|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)։$$

Տեղադրելով $\delta=0{,}7$, $\sigma=0{,}4$, կստանանք

$$P(|X|<0{,}7)=2\Phi\left(\frac{0{,}7}{0{,}4}\right)=2\Phi(1{,}75)=$$

$$=2\cdot 0{,}4599=0{,}92։$$

Այսպիսով, 0,7 մմ-ից քիչ շեղման հավանականությունը հավասար է 0,92-ի։ Այստեղից հետևում է, որ 100 գնդիկից մոտ 92-ը կլինեն պիտանի։

335. *Ավտոմատի պատրաստած գլանը համարվում է պիտանի, եթե նրա վերահսկվող չափի շեղումը նախագծվածից չի գերազանցում 10 մմ-ը։ Վերահսկվող չափի պատահական շեղումները նախագծվածից ենթարկվում են նորմալ բաշխման $\sigma=5$ մմ միջին քառակուսային շեղումով և $a=0$ մաթեմատիկական սպասումով։ Քանի՞ տոկոս պիտանի գլաններ է պատրաստում ավտոմատը։*

Պատ.՝ *մոտ 95%*։

336. *30 մ երկարությամբ և 8 մ լայնությամբ կամրջի երկայնքով թռչող ռմբակոծիչը ռումբեր է գցում։ Պատահական X և Y մեծությունները (կամրջի սիմետրիայի* *ուղղաձիգ և հորիզոնական առանցքների հեռավորություն-ները ռումբի ընկնելու տեղից) անկախ են և նորմալ բաշխ-ված համապատասխանաբար 6-ի և 4 մ-ի հավասար միջին քառակուսային շեղումներով և զրոյի հավասար մաթեմա-տիկական սպասումներով: Գտնել. ա) գցված մեկ ռումբի կամուրջին դիպչելու հավանականությունը, բ) կամուրջի քանդվելու հավանականությունը, եթե գցված են երկու ռումբ, ընդ որում հայտնի է, որ կամուրջը քանդվելու համար բա-վական է մեկ դիպում:*

Պատ.՝ *ա)* $P(|X|<15)\cdot P(|Y|<4)=2\Phi(2,5)\ 2\Phi(1)=0,6741$,

բ) $P=1-(1-0,6741)^2=0,8938$:

337. X *պատահական մեծությունը բաշխված է նորմալ՝* $a=10$ *մաթեմատիկական սպասումով:* X-*ի (10, 20) միջակայքն ընկնելու հավանականությունը հավասար է 0,3-ի: Ինչի՞ է հավասար* X-*ի (0, 10) միջակայքն ընկնելու հավանակա-նությունը:*

Լուծում: *Քանի որ նորմալ կորը սիմետրիկ է* $X=a=10$ *ուղղի նկատմամբ, ապա վերևից նորմալ կորով ու ներքևից* (0, 10) *և* (10, 20) *միջակայքերով սահմանափակված մակերեսները հավասար են իրար: Քանի որ այդ մակերես-ները թվապես հավասար են* X-*ի համապատասխան միջա-կայքերն ընկնելու հավանականություններին, ապա*

$$P(0<X<10)=P(10<X<20)=0,3:$$

338. X *պատահական մեծությունը բաշխված է նորմալ* $a=25$ *մաթեմատիկական սպասումով:* X-*ի (10, 15) միջա-կայքն ընկնելու հավանականությունը հավասար է 0,2-ի: Ին-չի՞ է հավասար* X-*ի (35, 40) միջակայքն ընկնելու հավա-նականությունը:*

Պատ.՝ $P(35<X<40)=P(10<X<15)=0,2$:

339. *Ապացուցել, որ*

$$P(|X-a|<\sigma t)=2\Phi(t),$$

այսինքն, որ տրված t*-ի համար Լապլասի ֆունկցիայի կրկնապատիկի արժեքը որոշում է հավանականությունը, որ նորմալ բաշխված պատահական* X *մեծության* $X-a$ *շեղումը բացարձակ արժեքով փոքր կլինի* σt*-ից։*

Ցուցում։ Օգտվել $P(|X-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$ *բանաձևից, տեղադրելով* $\frac{\delta}{\sigma}=t$։

340. *Արտածել «3σ-ի կանոնը». հավանականությունը, որ նորմալ բաշխված պատահական մեծության շեղման բացարձակ արժեքը կլինի փոքր միջին քառակուսային շեղման եռապատիկից, հավասար է 0,9973-ի։*

Ցուցում։ Օգտվել 339 խնդրի լուծումից, տեղադրելով $t=3$։

341. X *պատահական մեծությունը բաշխված է նորմալ* $a=10$ *մաթեմատիկական սպասումով և* $\sigma=5$ *միջին քառակուսային շեղումով։ Գտնել այն միջակայքը, որի մեջ* 0,9973 *հավանականությամբ կընկնի* X*-ը փորձի հետևանքով։*

Պատ.՝ $(a-3\sigma,\ a+3\sigma)=(-5,\ 25)$։

342. X *պատահական մեծությունը բաշխված է նորմալ* $\sigma=5$*մմ միջին քառակուսային շեղումով։ Գտնել այն միջակայքի երկարությունը, որի մեջ 0,9973 հավանականությամբ կընկնի* X*-ը փորձի հետևանքով։*

Պատ.՝ $6\sigma=30$ մմ։

343. *Ավտոմատ հաստոցը պատրաստում է գլանակներ, ընդ որում ստուգվում է նրանց* X *տրամագիծը։ Համարելով, որ* X*-ը նորմալ բաշխված պատահական մեծություն է* $a=10$ մմ *մաթեմատիկական սպասումով և* $\sigma=0,1$ մմ *միջին քառակուսային շեղումով, գտնել այն միջակայքը, որ-*

տեղ 0,9973 հավանականությամբ կգտնվեն պատրաստված լիսեռիկների տրամագծերը։

Պատ.՝ (9,7; 10,3)

344. *Նորմալ բաշխված X պատահական մեծությունը տրված է դիֆերենցիալ ֆունկցիայով․*

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

Գտնել X-ի մոդան և միջնաթիվը։

Լուծում։ $M_0(X)$ *մոդա կոչվում է X-ի այն հնարավոր արժեքը, որի դեպքում դիֆերենցիալ ֆունկցիան ունի մաքսիմում։ Հեշտ է համոզվել, որ* $x=a$ *դեպքում* $f'(x)=0$. $x<a$ *դեպքում* $f'(x)>0$, $x>a$ *դեպքում* $f'(x)<0$․ *այսպիսով,* $x=a$ *կետը մաքսիմումի կետն է, հետևաբար,* $M_0(X)=a$։

$Me(X)$ *միջնաթիվ է կոչվում X-ի այն հնարավոր արժեքը, որի դեպքում* $f(x)$ *օրդինատը կիսում է բաշխման կորով սահմանափակված մակերեսը։ Քանի որ նորմալ կորը* [$f(x)$ *ֆունկցիայի գրաֆիկը*] *սիմետրիկ է* $x=a$ *ուղղի նկատմամբ, ապա* $f(a)$ *օրդինատը կիսում է նորմալ կորով սահմանափակված մակերեսը։ Հետևաբար,*

$$M_e(X)=a։$$

Եվ այսպես, նորմալ բաշխման մոդան և միջնաթիվը համընկնում են մաթեմատիկական սպասման հետ։

345. *X պատահական մեծությունը բաշխված է նորմալ, ընդ որում մաթեմատիկական սպասումը՝* $a=0$ *և միջին քառակուսային շեղումը հավասար է* σ*-ի։ Գտնել* σ*-ի արժեքը, որի դեպքում հավանականությունը, որ X-ը կընդունի* (α, β) $(\alpha>0, \beta>a)$ *միջակայքին պատկանող արժեք, կլինի ամենամեծը։*

Ցուցում։ Օգտվել հետևյալ բանաձևից․

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right)=$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\beta/\sigma} e^{-z^2/2}\,dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\alpha/\sigma} e^{-z^2/2}\,dz = \Phi(\sigma);$$

Գտնել σ*-ն* $\Phi'(\sigma)=0$ *հավասարումից։*

Պատ.՝ $\sigma = \sqrt{\dfrac{\beta^2-\alpha^2}{2\,(\ln\beta-\ln\alpha)}}$,

§ 6. Ցուցչային բաշխում և նրա թվային բնութագրիչները

Ցուցչային (էքսպոնենցիալ *է կոչվում այն անընդհատ* X *պատահական մեծության հավանականությունների բաշխումը, որը նկարագրվում է հետևյալ դիֆերենցիալ ֆունկցիայով.*

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{երբ } x<0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{երբ } x\geqslant 0, \end{cases} \qquad (*)$$

որտեղ λ*-ն դրական հաստատուն մեծություն է։*

Ցուցչային բաշխման ինտեգրալ ֆունկցիան.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{երբ } x<0, \\ 1-e^{-\lambda x}, & \text{երբ } x\geqslant 0, \end{cases} \qquad (**)$$

Ցուցչային օրենքով բաշխված անընդհատ X *պատահական մեծության* (a, b) *միջակայքին ընկնելու հավանականությունը՝*

$$P(a<X<b)=e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b},$$

Ցուցչային բաշխման մաթեմատիկական սպասումը, դիսպերսիան և միջին քառակուսային շեղումը համապատասխանաբար հավասար են.

$$M(X)=\frac{1}{\lambda}, \qquad D(X)=\frac{1}{\lambda^2}, \qquad \sigma(X)=\frac{1}{\lambda},$$

Այսպիսով, ցուցչային բաշխման մաթեմատիկական սպասումը և միջին քառակուսային շեղումը իրար հավասար են։

346. Գրել ցուցչային բաշխման դիֆերենցիալ և ինտեգրալ ֆունկցիաները, եթե պարամետրը՝ $\lambda=5$։

Լուծում։ (*)-ի և (**)-ի մեջ տեղադրելով $\lambda=5$, կստանանք

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{երբ} \quad x<0, \\ 5e^{-5x}, & \text{երբ} \quad x\geqslant 0, \end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{երբ} \quad x<0, \\ 1-e^{-5x}, & \text{երբ} \quad x\geqslant 0։ \end{cases}$$

347. Գրել ցուցչային բաշխման դիֆերենցիալ և ինտեգրալ ֆունկցիաները, եթե պարամետրը՝ $\lambda=6$

Պատ.՝ $f(x)=6e^{-6x}$ $(0,\ \infty)$ միջակայքում, այդ միջակայքից դուրս $f(x)=0$։ $F(x)=1-e^{-6x}$ $(0,\ \infty)$ միջակայքում, այդ միջակայքից դուրս $F(x)=0$։

348. Գտնել այն ցուցչային բաշխման λ պարամետրը, որը ա) տրված է $f(x)=0$ $x<0$ դեպքում, $f(x)=2e^{-2x}$ $x\geqslant 0$ դեպքում, դիֆերենցիալ ֆունկցիայով, բ) տրված է $F(x)=0$ $x<0$ դեպքում, $F(x)=1-e^{-0,4x}$ $x\geqslant 0$ դեպքում, ինտեգրալ ֆունկցիայով։

Պատ.՝ ա) $\lambda=2$, բ) $\lambda=0,4$։

349. Ապացուցել, որ եթե անընդհատ պատահական X մեծությունը բաշխված է ցուցչային օրենքով, ապա X-ի $(a,\ b)$ միջակայքն ընկնելու հավանականությունը հավասար է $e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}$։

Լուծում։ Առաջին եղանակ։ Դիցուք, X մեծությունը տրված է ինտեգրալ ֆունկցիայով՝

$$F(x)=1-e^{-\lambda x} \quad (x\geqslant 0)։$$

Այդ դեպքում X*-ի* (a, b) *միջակայքն ընկնելու հավանականությունը (տես գլ. 6, § 1)*

$$P(a<X<b)=F(b)-F(a)=$$
$$=[1-e^{-\lambda b}]-[1-e^{-\lambda a}]=e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}։$$

Երկրորդ եղանակ: Դիցուք, X *մեծությունը տրված է դիֆերենցիալ ֆունկցիայով՝* $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ $(x\geqslant 0)$։ *Այդ դեպքում (տես գլ.* VI, § *2)*

$$P(a<X<b)=\lambda\int_a^b e^{-\lambda x}\,dx=\lambda\cdot\left(-\frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda x}\Big|_a^b=$$
$$=-[e^{-\lambda b}-e^{-\lambda a}]=e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}։$$

350. *Անընդհատ* X *պատահական մեծությունը բաշխված է ցուցչային օրենքով, որը տրված է դիֆերենցիալ ֆունկցիայով՝* $f(x)=3e^{-3x}$ $x\geqslant 0$ *դեպքում,* $f(x)=0$ $x<0$ *դեպքում։ Գտնել հավանականությունը, որ փորձի արդյունքում* X*-ը կընկնի* (0,13, 0,7) *միջակայքը։*

Լուծում։ Օգտվենք հետևյալ բանաձևից.

$$P(a<X<b)=e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}։$$

Հաշվի առնելով, որ ըստ պայմանի $a=0{,}13$, $b=0{,}7$, $\lambda=3$ *և օգտվելով* e^{-x} *ֆունկցիայի արժեքների աղյուսակից, կստանանք.*

$$P(0{,}13<X<0{,}7)=e^{-3\cdot 0{,}13}-e^{-3\cdot 0{,}7}=e^{-0{,}39}-e^{-2{,}1}=$$
$$=0{,}677-0{,}122=0{,}555։$$

351. *Անընդհատ* X *պատահական մեծությունը բաշխված է ցուցչային օրենքով, որը տրված է* $x\geqslant 0$ *դեպքում դիֆերենցիալ ֆունկցիայով՝*

$$f(x)=0{,}04\cdot e^{-0{,}04x},$$

երբ $x < 0$ $f(x) = 0$։ *Գտնել հավանականությունը, որ փորձի արդյունքում* X*-ը կընդունի (1, 2) միջակայքը։*

Պատ.՝ $P(1 < X < 2) = 0{,}038$։

352. *Անընդհատ* X *պատահական մեծությունը բաշխված է ցուցչային օրենքով, որը տրված է ինտեգրալ ֆունկցիայով՝* $F(x) = 1 - e^{0{,}6x}$ $x \geqslant 0$ *դեպքում,* $F(x) = 0$ $x < 0$ *դեպքում։ Գտնել հավանականությունը, որ փորձի արդյունքում* X*-ը կընդունի (2, 5) միջակայքը։*

Պատ.՝ $P(2 < X < 5) = 0{,}252$։

353. *Գտնել տրված ցուցչային բաշխման մաթեմատիկական սպասումը.*

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \ (x \geqslant 0), \ f(x) = 0 \ (x < 0)։$$

Լուծում։ Օգտվենք հետևյալ բանաձևից.

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx։$$

Հաշվի առնելով, որ $f(x) = 0$ $x < 0$ *դեպքում և* $f(x) = e^{-\lambda x}$ $x \geqslant 0$ *դեպքում, կստանանք*

$$M(X) = \lambda \int_{0}^{\infty} x \cdot e^{-\lambda x}\, dx։$$

Ինտեգրելով մասերով, ըստ հետևյալ բանաձևի.

$$\int_{0}^{\infty} u\, dv = uv \Big|_{0}^{\infty} - \int_{0}^{\infty} v\, du,$$

տեղադրելով $u = x$, $dv = e^{-\lambda x}\, dx$, *որտեղից* $du = dx$, $v = \frac{1}{\lambda} \cdot e^{-\lambda x}$, *և կատարելով հաշվումները, վերջնականապես կստանանք*

$$M(X) = \frac{1}{\lambda},$$

այսինքն՝ ցուցչային բաշխման մաթեմատիկական սպասումը հավասար է λ*-ի հակադարձ մեծությանը։*

354. Գտնել $f(x)=5\cdot e^{-5x}$ $(x\geqslant 0)$ դիֆերենցիալ ֆունկցիայով տրված ցուցչային բաշխման մաթեմատիկական սպասումը։

Պատ.՝ $M(X)=0{,}2$։

355. Գտնել $F(x)=1-e^{-0{,}1x}$ $(x\geqslant 0)$ ինտեգրալ ֆունկցիայով տրված ցուցչային բաշխման մաթեմատիկական սպասումը։

Պատ.՝ $M(X)=10$։

356. Գտնել $f(x)=0,\ x<0$ դեպքում $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ $x\geqslant 0$ դեպքում ցուցչային բաշխման. ա) դիսպերսիան, բ) միջին քառակուսային շեղումը։

Լուծում։ ա) Օգտվենք հետևյալ բանաձևից.

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx-[M(X)]^2.$$

Հաշվի առնելով, որ $f(x)=0$ $x<0$ դեպքում, $M(X)=\frac{1}{\lambda}$ (տես խնդիր 353), կստանանք

$$D(X)=\lambda\int_{0}^{\infty} x^2 e^{-\lambda x}\,dx-\frac{1}{\lambda^2}.$$

Երկու անգամ ինտեգրելով մասերով, կգտնենք

$$\lambda\int_{0}^{\infty} x^2 e^{-\lambda x}\,dx=\frac{2}{\lambda^2}.$$

Հետևաբար, որոնելի դիսպերսիան

$$D(X)=\frac{2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2},$$

այսինքն՝ ցուցչային բաշխման դիսպերսիան հավասար է λ^2-ու հակադարձ՝ մեծությանը։

բ) Գտնենք միջին քառակուսային շեղումը.

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2}} = \frac{1}{\lambda},$$

այսինքն՝ ցուցչային բաշխման միջին քառակուսային շեղումը հավասար է λ-ի հակադարձ մեծությանը։

357. Գտնել $f(x) = 10e^{-10x}$ $(x \geqslant 0)$ դիֆերենցիալ ֆունկցիայով տրված ցուցչային բաշխման դիսպերսիան և միջին քառակուսային շեղումը։

Պատ.՝ $D(X) = 0{,}01$, $\sigma(X) = 0{,}1$։

358. Գտնել $F(x) = 1 - e^{-0{,}4x}$ $(x \geqslant 0)$ ինտեգրալ ֆունկցիայով տրված ցուցչային բաշխման դիսպերսիան և միջին քառակուսային շեղումը։

Պատ.՝ $D(X) = 6{,}25$, $\sigma(X) = 2{,}5$։

359. Ուսանողը հիշում է, որ ցուցչային բաշխման դիֆերենցիալ ֆունկցիան $f(x) = 0$ $x < 0$ դեպքում, ունի $f(x) = Ce^{-\lambda x}$ $(x \geqslant 0)$ տեսքը, սակայն նա մոռացել է, թե ինչի՞ է հավասար C հաստատունը։ Պահանջվում է գտնել C-ն։

Ցուցում։ Օգտվել դիֆերենցիալ ֆունկցիայի հետևյալ հատկությունից. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$։

Պատ.՝ $C = \lambda$։

360. Գտնել ցուցչային բաշխման երրորդ կարգի տեսական կենտրոնական մոմենտը՝ $\mu_3 = M[X - M(X)]^3$։

Ցուցում։ Օգտվել 353 և 356 խնդիրների լուծումներից։

Պատ.՝ $\mu_3 = \dfrac{2}{\lambda^3}$։

361. Գտնել ցուցչային բաշխման $A_s = \dfrac{\mu_3}{\sigma^3(X)}$ ասիմետրիան։

Ցուցում։ Օգտվել 353 և 360 խնդիրների լուծումներից։

Պատ.՝ $A_s = 2$։

362. Գտնել ցուցչային բաշխման 4-րդ կարգի տեսական կենտրոնական մոմենտը՝ $\mu_4 = M[X - M(X)]^4$։

Պատ.՝ $\mu_4 = \frac{9}{\lambda^4}$։

363. Գտնել ցուցչային բաշխման $E_k = \frac{\mu_4}{\sigma^4(X)} - 3$ էքսցեսը։

Պատ. $E_k = 6$։

364. Ապացուցել որ անընդհատ պատահական T մեծությունը՝ տրված λ ինտենսիվությամբ պարզագույն հոսքի (տես գլ. IV, § 2) պատահույթների երկու հաջորդական երևալու միջև եղած ժամանակն ունի ցուցչային բաշխում. $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ $(t \geqslant 0)$։

Լուծում։ Ենթադրենք, որ t_0 ակնթարթում հանդես է եկել հոսքի A_1 պատահույթը։ Դիցուք, $t_1 = t_0 + t$ (խորհուրդ ենք տալիս ակնառության համար գծել ժամանակի առանցքը և նշել նրա վրա t_0 ու t_1 կետերը)։

Եթե հոսքի A_1-ին հետևող գոնե մեկ պատահույթ հանդես կգա (t_0, t_1) միջակայքում. այն ընկած է օրինակ, (t_0, t_2) ներսի միջակայքում, ապա երկու հաջորդական պատահույթների երևումների միջև եղած T ժամանակը փոքր կլինի t-ից, այսինքն կստացվի, որ $T < t$։

Որպեսզի գտնենք $P(T < t)$ հավանականությունը, ուշադրության առնենք, որ „(t_0, t_1) միջակայքի մեջ կերևա հոսքի գոնե մեկ պատահույթ" և „(t_0, t_1) միջակայքի ներսում չի երևա հոսքի ոչ մի պատահույթ"՝ պատահույթները հակադիր են (նրանց հավանականությունների գումարը հավասար է 1-ի)։

Հոսքի ոչ մի պատահույթի չերևալու հավանականությունը t ժամանակում

$$P_t(0) = \frac{(\lambda t)^0 \cdot e^{-\lambda t}}{0!} = e^{-\lambda t},$$

Հետևաբար, հակադիր պատահույթի մեկ հետաքրքրող հավանականությունը՝

$$P(T < t) = 1 - e^{-\lambda t},$$

կամ [ըստ ինտեգրալ ֆունկցիայի սահմանման՝ $F(t) = P(T < t)$]

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t},$$

ինչ և պահանջվում էր ապացուցել։

365. *Տրված է պարզագույն հոսքի $\lambda = 5$ լարվածությունը։ Գտնել անընդհատ T պատահական մեծության՝ հոսքի 2 հաջորդական պատահույթների երևումների միջև եղած ժամանակի, ա) մաթեմատիկական սպասումը, բ) դիսպերսիան, գ) միջին քառակուսային շեղումը։*

Ցուցում։ Օգտվել 364 խնդրի լուծումից։

Պատ.՝ ա) $M(T) = 0{,}2$, բ) $D(T) = 0{,}04$, գ) $\sigma(T) = 0{,}2$։

366. *Ավտոմոբիլների տեխնիկական վիճակը ստուգելու համար խճուղում դրված է ստուգիչ կետ։ Գտնել T պատահական մեծության՝ ստուգողի հերթական մեքենային սպասելու ժամանակի, մաթեմատիկական սպասումը և միջին քառակուսային շեղումը, եթե մեքենաների հոսքը պարզագույն է և մեքենաների ստուգիչ կետով անցումների միջև եղած ժամանակը (ժամերով) բաշխված է ցուցչային օրենքով․*

$$f(t) = 5e^{-5t}.$$

Ցուցում։ Ստուգողի մեքենային սպասելու ժամանակը և մեքենաների ստուգիչ կետով անցումների ժամանակը միատեսակ են բաշխված։

Պատ.՝ $M(T) = \sigma(T) = 0{,}2$ ժ.։ Ստուգողը հերթական մեքենային կսպասի միջին հաշվով 12 ր.։

§ 7. Հուսալիության ֆունկցիան

Տարր է կոչվում ինչ-որ մի սարք, անկախ այն բանից «պարզ» է այն, թե «բարդ»։ Դիցուք, տարրը սկսում է աշխատել ժամանակի $t_0 = 0$ ակնթարթում, իսկ t ակնթարթում այն խափանվում է։ Նշանակենք T-ով հետևյալ անընդհատ պատահական մեծությունը՝ տարրի անխափան աշխատանքի ժամանակի տևողությունը, λ-ով՝ խափանումների լարվածությունը (միավոր ժամանակում խափանումների միջին թիվը)։

Հաճախ տարրի անխափան աշխատանքի ժամանակի տևողությունն ունի ցուցչային բաշխում, որի ինտեգրալ ֆունկցիան՝

$$F(t)=P(T<t)=1-e^{-\lambda t} \quad (\lambda>0)$$

որոշում է տարրի խափանման հավանականությունը t տևողության ժամանակում։

Հուսալիության R (t) ֆունկցիա է կոչվում t տևողության ժամանակում տարրի անխափան աշխատանքի հավանականությունը որոշող ֆունկցիան.

$$R(t)=e^{-\lambda t}։$$

367. *Տարրի անխափան աշխատանքի ժամանակի տևողությունն ունի ցուցչային բաշխում՝* $F(t)=1-e^{-0,01t}$ $(t>0)$։ *Գտնել հավանականությունը, որ* $t=50$ *ժ. տևողության ժամանակում. ա) տարրը կխափանվի, բ) տարրը չի խափանվի։*

Լուծում։ ա) Քանի որ $F(t)=1-e^{-0,01t}$ *ինտեգրալ ֆունկցիան որոշում է տարրի խափանման հավանականությունը t տևողության ժամանակամիջոցում, ապա ինտեգրալ ֆունկցիայի մեջ տեղադրելով* $t=50$, *կստանանք խափանման հավանականությունը.*

$$F(50)=1-e^{-0,01.50}=1-e^{-0,5}=1-0,606=0,394,$$

բ) «տարրը կխափանվի» և «տարրը չի խափանվի» պատահույթները հակադիր են, ուստի հավանականությունը, որ տարրը չի խափանվի

$$P=1-0,394=0,606։$$

Այս նույն արդյունքը կարելի է ստանալ անմիջականորեն, օգտվելով հուսալիության $R(t)=e^{-\lambda t}$ *ֆունկցիայից, որը որոշում է t տևողության ժամանակում տարրի անխափան աշխատանքի հավանականությունը.*

$$R(50)=e^{-0,01.50}=e^{-0,5}=0,606։$$

368. *Տարրի անխափան աշխատանքի ժամանակի տևողությունն ունի ցուցչային բաշխում՝* $F(t)=1-e^{-0,03t}$։ *Գտնել հավանականությունը, որ* $t=100$ *տևողության ժա-*

մանակամիջոցում. ա) տարրը կխափանվի, բ) տարրը չի խափանվի։

Պատ.՝ *ա)* $F(100) = 0{,}95$, *բ)* $R(100) = 0{,}05$։

369. *Փորձարկում են երկու անկախ աշխատող տարրեր։ Առաջին տարրի անխափան աշխատանքի ժամանակի տևողությունն ունի ցուցչային* $F_1(t) = 1 - e^{-0{,}02t}$ *բաշխումը, իսկ երկրորդը՝* $F_2(t) = 1 - e^{-0{,}05t}$ *բաշխումը։ Գտնել հավանականությունը, որ* $t = 6$ *ժ. տևողության ժամանակամիջոցում. ա) 2 տարրն էլ կխափանվեն, բ) 2 տարրն էլ չեն խափանվի, գ) միայն մեկ տարրը կխափանվի, դ) գոնե մեկ տարր կխափանվի։*

Լուծում։ ա) Առաջին տարրի խափանման հավանականությունը՝

$$P_1 = F(6) = 1 - e^{-0{,}02\cdot 6} = 1 - e^{-0{,}12} = 1 - 0{,}887 = 0{,}113։$$

Երկրորդ տարրի խափանման հավանականությունը՝

$$P_2 = 1 - e^{-0{,}05\cdot 6} = 1 - e^{-0{,}3} = 1 - 0{,}741 = 0{,}259։$$

Որոնելի հավանականությունը, որ 2 տարրն էլ կխափանվեն, ըստ անկախ պատահարների հավանականությունների բազմապատկման թեորեմի՝

$$P_1 P_2 = 0{,}113 \cdot 0{,}259 = 0{,}03։$$

բ) Առաջին տարրի անխափան աշխատանքի հավանականությունը՝

$$q_1 = R_1(6) = e^{-0{,}02\cdot 6} = e^{-0{,}12} = 0{,}887։$$

Երկրորդ տարրի անխափան աշխատանքի հավանականությունը՝

$$q_2 = R_2(6) = e^{-0{,}05\cdot 6} = e^{-0{,}3} = 0{,}741։$$

Երկու տարրերի անխափան աշխատանքի որոնելի հավանականությունը՝

$$q_1 \cdot q_2 = 0{,}887 \cdot 0{,}741 = 0{,}66։$$

գ) Հավանականությունը, որ կխափանվի միայն մեկ տարր՝

$$P_1 q_2 + P_2 q_1 = 0{,}113 \cdot 0{,}741 + 0{,}259 \cdot 0{,}887 = 0{,}31։$$

դ) Հավանականությունը, որ գոնե մեկ տարր չի խափանվի՝

$$P = 1 - q_1 q_2 = 1 - 0{,}66 = 0{,}34։$$

370. *Փորձարկում են 3 միմյանցից անկախ աշխատող տարրեր։ Տարրերի անխափան աշխատանքի ժամանակի տևողությունները բաշխված են ցուցչային օրենքով. առաջին տարրի համար՝* $F_1(t) = 1 - e^{-0{,}1t}$, *երկրորդ տարրի համար՝* $F_2(t) = 1 - e^{-0{,}2t}$, *երրորդ տարրի համար՝* $F_3(t) = 1 - e^{-0{,}3t}$։ *Գտնել հավանականությունը, որ ժամանակի (0,5) ժ. միջակայքում կխափանվեն. ա) միայն մեկ տարր, բ) միայն 2 տարր, գ) բոլոր 3 տարրերը։*

Պատ.՝ *ա)* 0,445, *բ)* 0,29, *գ)* 0,05։

371. *Կատարվում է 3 միմյանցից անկախ աշխատող տարրերի փորձարկում։ Տարրերի անխափան աշխատանքի ժամանակի տևողությունները բաշխված է ցուցչային օրենքով. առաջին տարրի համար՝* $f_1(t) = 0{,}1 \cdot e^{-0{,}1t}$, *երկրորդի համար՝* $f_2(t) = 0{,}2e^{-0{,}2t}$, *երրորդ տարրի համար՝* $f_3(t) = 0{,}3e^{-0{,}3t}$։ *Գտնել հավանականությունը, որ ժամանակի (0,10) ժ. միջակայքում կխափանվեն. ա) գոնե 1 տարր, բ) 2-ից ոչ քիչ տարրեր։*

Ցուցում։ Օգտվել 370 խնդրի լուծման ստացված արդյունքներից։

Պատ.՝ *ա)* 0,95, *բ)* 0,35։

372. *Հուսալիության ցուցչային օրենք կոչվում է*

$$R(t) = e^{-\lambda t}$$

հավասարությամբ որոշված հուսալիության ֆունկցիան, որտեղ դրական λ թիվը խափանումների լարվածությունն է։ Ապացուցել հուսալիության ցուցչային օրենքի բնութագրիչ հատկությունը. t տևողության ժամանակի միջակայքում տարրի անխափան աշխատանքի հավանականությունը կախված չէ դիտարկվող միջակայքին նախորդող ժամանակում աշխատելուց, այլ կախված է միայն միջակայքի t տևողությունից (խափանումների տրված λ լարվածության դեպքում)։

Լուծում։ Մտցնենք պատահույթների հետևյալ նշանակումները. A — t_0 տևողության $(0, t_0)$ միջակայքում տարրի անխափան աշխատանքը, B — t տևողության (t_0, t_0+t) միջակայքում տարրի անխափան աշխատանքը։

Այդ դեպքում $A \cdot B$-ն t_0+t տևողության $(0, t_0+t)$ միջակայքում անխափան աշխատանքն է։

$R(t)=e^{-\lambda t}$ բանաձևով գտնենք այդ պատահույթների հավանականությունները.

$$P(A)=e^{-\lambda t_0}, \quad P(B)=e^{-\lambda t}, \quad P(AB)=e^{-\lambda(t_0+t)}=e^{-\lambda t_0}\cdot e^{-\lambda t},$$

Գտնենք պայմանական հավանականությունը, որ տարրը անխափան կաշխատի (t_0, t_0+t) միջակայքում այն պայմանով, որ այն անխափան աշխատել է նախորդող $(0, t_0)$ միջակայքում.

$$P_A(B)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{e^{-\lambda t_0}\cdot e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t_0}}=e^{-\lambda t},$$

Քանի որ ստացված բանաձևում t_0-ն չի պարունակվում, այլ պարունակվում է միայն t-ն, ապա այդ էլ հենց նշանակում է, որ նախորդ միջակայքում աշխատանքի ժամանակը չի ազդում հաջորդ միջակայքում անխափան աշխատանքի հավանականության մեծության վրա և այն կախված է միայն հաջորդ միջակայքի (t_0, t_0+t)-ի երկարությունից, ինչ-որ պահանջվում էր ապացուցել։

Այլ խոսքերով, t տևողության ժամանակի միջակայքում անխափան աշխատելու $P_A(B)$ պայմանական հավանականությունը, հաշված այն ենթադրությամբ, որ տարրը անխափան է աշխատել նախորդ միջակայքում, հավասար է անպայման $P(B)$ հավանականությանը։

ՅՈԹԵՐՈՐԴ ԳԼՈՒԽ

ՄԵԿ ԵՎ ԵՐԿՈՒ ՊԱՏԱՀԱԿԱՆ ԱՐԳՈՒՄԵՆՏՆԵՐԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԲԱՇԽՈՒՄԸ

§ 1. Մեկ պատահական արգումենտի ֆունկցիա

Եթե X *պատահական մեծության յուրաքանչյուր հնարավոր արժեքին համապատասխանում է* Y *պատահական մեծության մեկ հնարավոր արժեքը, ապա* Y*-ը կոչվում է* պատահական X արգումենտի ֆունկցիա և *գրվում է՝* $Y = \varphi(X)$։

Եթե X*-ը դիսկրետ պատահական մեծություն է և* $Y = \varphi(X)$ *ֆունկցիան՝ մոնոտոն, ապա* X*-ի տարբեր արժեքներին կհամապատասխանեն* Y*-ի տարբեր արժեքներ, ընդ որում* X*-ի և* Y*-ի համապատասխան արժեքների հավանականությունները կլինեն նույնը։ Այլ խոսքով,* Y*-ի հնարավոր արժեքները գտնում են*

$$y_i = \varphi(x_i)$$

հավասարությունից, որտեղ x_i*-ն* X*-ի հնարավոր արժեքն է.* Y*-ի հնարավոր արժեքների հավանականությունները գտնում են*

$$P(Y = y_i) = P(X = x_i)$$

հավասարությունից։

Իսկ եթե $Y = \varphi(X)$*-ը ոչ մոնոտոն է, ապա, ընդհանրապես ասած,* X*-ի տարբեր արժեքներին կարող է համապատասխանել* Y*-ի միևնույն արժեքները (այդպես կլինի՝ եթե* X*-ի հնարավոր արժեքներն ընկած են մի միջակայքում, որտեղ* $\varphi(X)$ *ֆունկցիան մոնոտոն չէ)։ Այդ դեպքում* Y*-ի հնարավոր արժեքների հավանականությունները գտնելու համար պետք է գումարել* X*-ի այն հնարավոր արժեքների հավանականությունները, որոնց դեպքում* Y*-ն ընդունում է միևնույն արժեքը։ Այլ խոսքով,* Y*-ի կրկնվող արժեքի հավանականությունը հավասար է* X*-ի այն հնարավոր արժեքների հավանականությունների գումարին, որոնց դեպքում* Y*-ն ընդունում է միևնույն արժեքը։*

Եթե X*-ը անընդհատ պատահական մեծություն է, որը տրված է դիֆերենցիալ* $f(x)$ *ֆունկցիայով, իսկ եթե* $y = \varphi(x)$*-ը՝ դիֆերենցելի խիստ աճող կամ խիստ նվազող ֆունկցիա է, որի հակադարձ ֆունկցիան է* $x = \psi(y)$*-ը, ապա* Y *պատահական մեծության* $g(y)$ *դիֆերենցիալ ֆունկցիան գտնում են հետևյալ հավասարությունից.*

$$g(y) = f[\psi(y)] \cdot |\psi'(y)|\text{։}$$

Եթե $y = \varphi(x)$ *ֆունկցիան* X*-ի հնարավոր արժեքների միջակայքում մոնոտոն չէ, ապա պետք է այդ միջակայքը բաժանել այնպիսի* միջակայքերի, որ $\varphi(x)$ ֆունկցիան մոնոտոն է, և մոնոտոնության միջակայքերից յուրաքանչյուրի համար գտնել դիֆերենցիալ $g_i(y)$ ֆունկցիաները, իսկ հետո ներկայացնել $g(y)$-ը գումարի տեսքով։

$$g(y)=\Sigma g_i(y)։$$

Օրինակ, եթե $\varphi(x)$ ֆունկցիան մոնոտոն է 2 միջակայքերում, որոնցում համապատասխան հակադարձ ֆունկցիաները հավասար են $\psi_1(y)$ և $\psi_2(y)$, ապա

$$g(y)=f[\psi_1(y)]\cdot|\psi_1'(y)|+f[\psi_2(y)]\cdot|\psi_2'(y)|։$$

373. Դիսկրետ X պատահական մեծությունը տրված է բաշխման օրենքով.

X	1	3	5
P	0,4	0,1	0,5

Գտնել $Y=3X$ պատահական մեծության բաշխման օրենքը։

Լուծում։ Գտնենք $Y=3X$ մեծության հնարավոր արժեքները.

$$y_1=3\cdot1=3,\quad y_2=3\cdot3=9,\quad y_3=3\cdot5=15։$$

Մենք տեսնում ենք, որ X-ի տարբեր հնարավոր արժեքներին համապատասխանում են Y-ի տարբեր արժեքներ։ Այդ բացատրվում է նրանով, որ $y=\varphi(x)=3x$ ֆունկցիան մոնոտոն է։

Գտնենք Y-ի հնարավոր արժեքների հավանականությունները։ Որպեսզի $Y=y_1=3$, բավական է, որ X մեծությունն ընդունի $x_1=1$ արժեքը։ Իսկ $X=1$ պատահույթի հավանականությունը ըստ պայմանի հավասար է 0,4-ի, հետևաբար, և $Y=y_1=3$ պատահույթի հավանականությունը նույնպես հավասար է 0,4-ի։

Համանմանորեն կստանանք Y-ի մնացած հնարավոր արժեքների հավանականությունները.

$$P(Y=9)=P(X=3)=0{,}1,$$

$$P\,Y=15)=P(X=5)=0{,}5։$$

Գրենք Y-ի որոնելի բաշխման օրենքը.

Y	3	9	15
p	0,4	0,1	0,5

374. *Դիսկրետ X պատահական մեծությունը տրված է բաշխման օրենքով.*

X	3	6	10
p	0,2	0,1	0,7

Գտնել $Y = 2X + 1$ *պատահական մեծության բաշխման օրենքը։*

Պատ.

Y	7	13	21
p	0,2	0,1	0,7

375. *Դիսկրետ պատահական X մեծությունը տրված է բաշխման օրենքով.*

X	—1	—2	1	2
p	0,3	0,1	0,2	0,4

Գտնել $Y = X^2$ *պատահական մեծության բաշխման օրենքը։*

Լուծում։ Գտնենք Y-ի հնարավոր արժեքները.

$$y_1 = x_1^2 = (-1)^2 = 1,$$
$$y_2 = x_2^2 = (-2)^2 = 4,$$
$$y_3 = x_3^2 = 1^2 = 1,$$
$$y_4 = x_4^2 = 2^2 = 4։$$

Եվ այսպես, X-ի տարբեր արժեքներին համապատասխանում է Y-ի նույն արժեքը։ Այդ բացատրվում է նրանով, որ X-ի հնարավոր արժեքները պատկանում են այն միջակայքին, որտեղ $Y = X^2$ *ֆունկցիան մոնոտոն չէ։*

Գտնենք Y-ի հնարավոր արժեքների հավանականությունները։ Որպեսզի Y մեծությունը ընդունի $Y = 1$ *արժեքը, բավական է, որ X մեծությունն ընդունի* $X = -1$ *կամ* $X = 1$ *արժեքները։ Վերջին երկու պատահույթներն անհամատեղելի են, նրանց հավանականությունները համապատասխանաբար հավասար են 0,3-ի և 0,2-ի։ Ուստի* $Y = 1$

պատահույթի հավանականությունը ըստ գումարման թեորեմի կլինի.

$$P(Y=1)=P(X=-1)+P(X=1)=0{,}3+0{,}2=0{,}5։$$

Համանմանորեն կգտնենք $Y=4$ հնարավոր արժեքի հավանականությունը.

$$P(Y=4)=P(X=-2)+P(X=2)=0{,}1+0{,}4=0{,}5։$$

Գրենք Y մեծության որոնելի բաշխման օրենքը.

Y	1	4
p	0,5	0,5

376. Դիսկրետ X պատահական մեծությունը տրված է բաշխման օրենքով.

X	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$
p	0,2	0,7	0,1

Գտնել $Y=\sin X$ պատահական մեծության բաշխման օրենքը։

Պատ.

Y	$\sqrt{2}/2$	1
p	0,3	0,7

377. Տրված է պատահական այն X մեծության դիֆերենցիալ $f(x)$ ֆունկցիան, որի հնարավոր արժեքները ընկած են (a, b) միջակայքում։ Գտնել $Y=3X$ պատահական մեծության դիֆերենցիալ ֆունկցիան։

Լուծում։ Քանի որ $y=3x$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է և խիստ աճող, ապա կիրառելի է

$$g(y)=f[\psi(y)]\cdot|\psi'(y)|, \qquad (*)$$

բանաձևը, որտեղ $\psi(y)$-ը $y=3x$ ֆունկցիայի հակադարձ ֆունկցիան է։

Գտնենք $f(y)$-ը.

$$\psi(y)=x=\frac{y}{3}։$$

Գտնենք $f[\varphi(y)]$։

$$f[\psi(y)]f=f\left(\frac{y}{3}\right)։ \qquad (**)$$

Գտնենք $\psi'(y)$ ածանցյալը․

$$\psi'(y) = \left(\frac{y}{3}\right)' = \frac{1}{3}.$$

Ակնհայտ է, որ

$$|\psi'(y)| = \frac{1}{3}. \qquad (***)$$

Գտնենք որոնելի դիֆերենցիալ ֆունկցիան, որի համար տեղադրենք (**)-ը և (***)-ը (*)-ի մեջ․

$$g(y) = \frac{1}{3} f\left(\frac{y}{3}\right).$$

Քանի որ x-ը փոփոխվում է (a, b) միջակայքում և $y = 3x$, ապա

$$3a < y < 3b.$$

378. Տրված է պատահական այն X մեծության դիֆերենցիալ $f(x)$ ֆունկցիան, որի հնարավոր արժեքները ընկած են (a, b) միջակայքում։ Գտնել Y պատահական մեծության դիֆերենցիալ $g(y)$ ֆունկցիան, եթե. ա) $Y = -3X$, բ) $Y = AX + B$։

Պատ.՝ ա) $g(y) = \frac{1}{3} f\left[-\frac{y}{3}\right]$, $(-3b < y < -3a)$, բ) $g(y) = \frac{1}{|A|} f\left[\frac{y-B}{A}\right]$, $(Aa + B < y < Ab + B)$, եթե $A > 0$ և $(Ab + B < y < Aa + B)$ եթե $A < 0$։

379. X պատահական մեծությունը բաշխված է Կոշիի օրենքով.

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}.$$

Գտնել պատահական $Y = X^3 + 2$ մեծության դիֆերենցիալ ֆունկցիան։

Պատ.՝ $g(y) = \frac{1}{3\pi\left[(y-2)^{2/3} + (y-2)^{4/3}\right]}$.

380. *Տրված է պատահական այն X մեծության դիֆերենցիալ* f(x) *ֆունկցիան, որի հնարավոր արժեքներն ընկած են* $(0, \infty)$ *միջակայքում: Գտնել* Y *պատահական մեծության դիֆերենցիալ* g(y) *ֆունկցիան, եթե ա)* $Y=e^{-X}$, *բ)* $Y=\ln X$, *գ)* $Y=X^3$, *դ)* $Y=\dfrac{1}{X^3}$ *ե)* $Y=\sqrt{X}$:

Պատ.՝ *ա)* $g(y)=\dfrac{1}{y} f\left[\ln\dfrac{1}{y}\right]$, $(0<y<1)$, *բ)* $g(y)=e^y f[e^y]$ $(-\infty<y<\infty)$, *գ)* $g(y)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{y^2}} f[\sqrt[3]{y}]$, $(0<y<\infty)$, *դ)* $g(y)=\dfrac{1}{2y\sqrt{y}} f\left[\dfrac{1}{\sqrt{y}}\right]$, $(0<y<\infty)$, *ե)* $g(y)=2yf(y^2)$, $(0<y<\infty)$:

381. *Տրված է պատահական այն X մեծության դիֆերենցիալ* f(x) *ֆունկցիան, որի հնարավոր արժեքներն ընկած են* $(-\infty, \infty)$ *միջակայքում: Գտնել* Y *պատահական մեծության* g(y) *դիֆերենցիալ ֆունկցիան, եթե. ա)* $Y=X^2$, *բ)* $Y=e^{-X^2}$, *գ)* $Y=|X|$, *դ)* $Y=\cos X$, *ե)* $Y=\operatorname{arctg} X$, *զ)* $Y=\dfrac{1}{1+X^2}$:

Պատ.՝ *ա)* $g(y)=\dfrac{1}{2\sqrt{y}}\left[f(\sqrt{y})+f(-\sqrt{y})\right]$, $(0<y<\infty)$,

բ) $$g(y)=\frac{1}{2y\sqrt{\ln\frac{1}{y}}}\left[f\left(\sqrt{\ln\frac{1}{y}}\right)+f\left(-\sqrt{\ln\frac{1}{y}}\right)\right],$$
$(0<y<1)$,

գ) $g(y)=f(y)+f(-y)$, $(0<y<\infty)$,

դ) $$g(y)=\sum_{k=-\infty}^{k=\infty}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\left[f(2\pi k+\arccos y)+f(2\pi k-\arccos y)\right],$$
$(-1<y<1)$,

ե) $g(y)=\dfrac{1}{\cos^2 y} f(\operatorname{tg} y)$, $\left(-\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}\right)$,

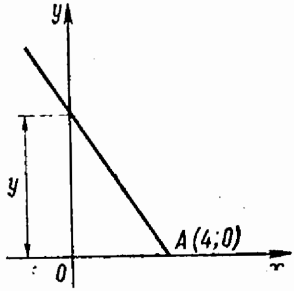
զ) $$g(y)=\frac{1}{2y^2\sqrt{\frac{1}{y}-1}}\left[f\left(\sqrt{\frac{1}{y}-1}\right)+f\left(-\sqrt{\frac{1}{y}-1}\right)\right],$$
$(0<y<\infty)$:

382. *Ուղղանկյուն կոորդինատային* xOy *հարթության* A(4, 0) *կետից պատահականորեն (կամայական* t *անկյան տակ) տարված է* Oy *առանցքը հատող ճառագայթ։ Գտնել տարված ճառագայթի* Oy *առանցքի հետ հատման կետի* y *օրդինատի հավանականությունների բաշխման* g(y) *դիֆերենցիալ ֆունկցիան։*

Լուծում։ t անկյունը կարելի է դիտել որպես $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ միջակայքում հավասարաչափ բաշխված պատահական մեծություն, ընդ որում այդ միջակայքում դիֆերենցիալ ֆունկցիան

$$f(t) = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{\pi},$$

դիտարկվող միջակայքից դուրս $f(t) = 0$։



Նկ. 7.

Նկ. 7-ից հետևում է, որ y օրդինատը t անկյան հետ կապված է հետևյալ կախվածությամբ։

$$y = 4 \operatorname{tg} t։$$

Այս ֆունկցիան $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ միջակայքում մոնոտոն աճող է, ուստի որոնելի դիֆերենցիալ g(y) ֆունկցիան գտնելու համար կիրառելի է

$$g(y) = f[\psi(y)] \cdot |\psi'(y)| \qquad (*)$$

բանաձևը, որտեղ $\psi(y)$-ը $x = 4 \operatorname{tg} t$ ֆունկցիայի հակադարձ ֆունկցիան է։

Գտնենք $\psi(y)$-ը.

$$\psi(y) = t = \operatorname{arctg} \frac{y}{4},$$

Գտնենք $\psi'(y)$-ը.

$$\psi'(y) = \frac{4}{16 + y^2},$$

Հետևաբար,

$$|\psi'(y)| = \frac{4}{16+y^2}: \qquad (**)$$

Գտնենք $f[\psi(y)]$-ը։ Քանի որ $f(t) = \frac{1}{\pi}$, ապա

$$f[\psi(y)] = \frac{1}{\pi}: \qquad (***)$$

Տեղադրելով (**)-ը և (***)-ը (*)-ի մեջ, վերջնականապես կստանանք․

$$g(y) = \frac{4}{\pi(16+y^2)},$$

ընդ որում $-\infty < y < \infty$ (վերջինը հետևում է այն բանից, որ $y = 4\operatorname{tg} t$ և $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$)։

Ստուգում։

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(y)\,dy = \frac{4}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{16+y^2} = \frac{4}{\pi}\cdot 2\int_{0}^{\infty}\frac{dy}{16+y^2} = \frac{4\cdot 2\cdot \pi}{\pi\cdot 4\cdot 2} = 1:$$

383. X պատահական մեծությունը հավասարաչափ է բաշխված $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ միջակայքում։ Գտնել պատահական $Y = \sin X$ մեծության $g(y)$ դիֆերենցիալ ֆունկցիան։

Լուծում։ Գտնենք X պատահական մեծության $f(x)$ դիֆերենցիալ ֆունկցիան։ X մեծությունը բաշխված է հավասարաչափ $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ միջակայքում, ուստի այդ միջակայքում

$$f(x) = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{\pi},$$

դիտարկվող միջակայքից դուրս $f(x) = 0$։

$y = \sin x$ ֆունկցիան $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ միջակայքում մոնոտոն է, հետևաբար, այդ միջակայքում այն ունի հակադարձ ֆունկցիան․

$$x = \psi(y) = \arcsin y:$$

Գտնենք $\psi'(y)$ *ածանցյալը․*

$$\psi'(y)=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}։$$

Գտնենք որոնելի դիֆերենցիալ ֆունկցիան ըստ հետևյալ բանաձևի․

$$g(y)=f[\psi(y)]\,|\psi'(y)|։$$

Հաշվի առնելով, որ $f(x)=\frac{1}{\pi}$ $\left(\textit{հետևաբար, } f[\psi(y)]=\frac{1}{\pi}\right)$ *և* $|\psi'(y)|=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$, *կստանանք*

$$g(y)=\frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}։$$

Քանի որ $y=\sin x$, *ընդ որում* $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$, *ապա* $-1<y<1$։ *Այսպիսով, (—1, 1) միջակայքում*

$$g(y)=\frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}},$$

այդ միջակայքից դուրս $g(y)=0$։

Ստուգում։

$$\int_{-1}^{1} g(y)\,dy=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{1}\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\frac{2}{\pi}\arcsin y\Big|_{0}^{1}=$$

$$=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}=1։$$

384. X *պատահական մեծությունը հավասարաչափ է բաշխված* $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ *միջակայքում։ Գտնել* $Y=\sin X$ *պատահական մեծության* $g(y)$ *դիֆերենցիալ ֆունկցիան։*

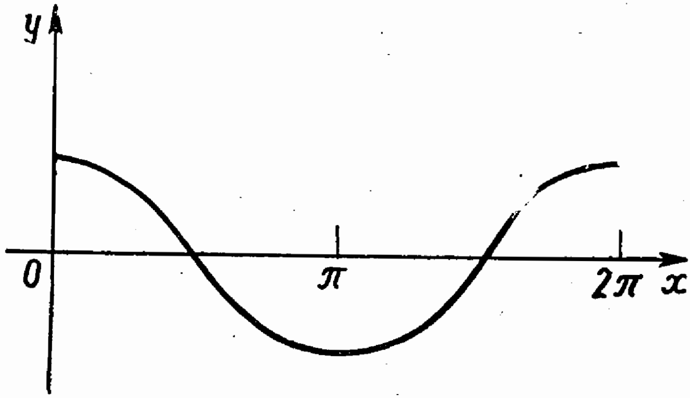
Պատ.՝ $g(y)=\frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}$ (0, 1) *միջակայքում, այդ միջակայքից դուրս* $g(y)=0$։

385. *Տրված է* X *պատահական մեծության դիֆերենցիալ ֆունկցիան.* $f(x)=\frac{1}{\pi}$ $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ *միջակայքում, այդ միջակայքից դուրս* $f(x)=0$։ *Գտնել* $Y=\operatorname{tg} X$ *պատահական մեծության* $g(y)$ *դիֆերենցիալ ֆունկցիան։*

Պատ.՝ $g(y)=\frac{2}{\pi(1+y^2)}$, $(-\infty<y<\infty)$։

386. X *պատահական մեծությունը բաշխված է հավասարաչափ* $(0,\ 2\pi)$ *միջակայքում։ Գտնել* $Y=\cos X$ *պատահական մեծության* $g(y)$ *դիֆերենցիալ ֆունկցիան։*

Լուծում։ Գտնենք X *պատահական մեծության* $f(x)$ *դիֆերենցիալ ֆունկցիան.* $(0,\ 2\pi)$ *միջակայքում ունենք*



Նկ. 8.

$$f(x)=\frac{1}{2\pi-0}=\frac{1}{2\pi},$$

այդ միջակայքից դուրս $f(x)=0$։

$Y=\cos x$ *հավասարումից գտնենք* $x=\psi(y)$ *հակադարձ ֆունկցիան։ Քանի որ* $(0,\ 2\pi)$ *միջակայքում* $y=\cos x$ *ֆունկցիան մոնոտոն չէ, ապա բաժանենք այդ միջակայքը* $(0,\ \pi)$ *և* $(\pi,\ 2\pi)$ *միջակայքերի, որոնցում այդ ֆունկցիան մոնոտոն է (Նկ. 8)։* $(0,\ \pi)$ *միջակայքում հակադարձ ֆունկցիան՝* $\psi_1(y)=\arccos y$, $(\pi,\ 2\pi)$ *միջակայքում հակադարձ ֆունկցիան՝* $\psi_2(y)=2\pi-\arccos y$։

Որոնելի դիֆերենցիալ ֆունկցիան կարող է գտնվել հետևյալ հավասարությունից.

$$g(y) = f[\psi_1(y)] \cdot |\psi_1'(y)| + f[\psi_2(y)] \cdot |\psi_2'(y)|: \qquad (*)$$

Գտնենք հակադարձ ֆունկցիաների ածանցյալները.

$$\psi_2'(y) = (\arccos y') = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},$$

$$\psi_2'(y) = (2\pi - \arccos y)' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Գտնենք ածանցյալների մոդուլները։

$$|\psi_1'(y)| = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \quad |\psi_2'(y)| = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \qquad (**)$$

Հաշվի առնելով, որ $f(x) = \frac{1}{2\pi}$, *կստանանք*

$$f[\psi_1(y)] = \frac{1}{2\pi}, \quad f[\psi_2(y)] = \frac{1}{2\pi}: \qquad (***)$$

Տեղադրելով (**)-ը և (***)-ը (*)-ի մեջ, կունենանք

$$g(y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-y^2}} + \frac{1}{2\pi\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}},$$

Քանի որ $y = \cos x$, *ընդ որում* $0 < x < 2\pi$, *ապա* $-1 < y < 1$։ *Այսպիսով,* $(-1,\ 1)$ *միջակայքում որոնելի դիֆերենցիալ ֆունկցիան կլինի*

$$g(y) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}},$$

այդ միջակայքից դուրս $g(y) = 0$։

Ստուգում։

$$\int_{-1}^{1} g(y)\,dy = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{1}\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{2}{\pi}\arcsin 1 =$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} = 1.$$

387. X պատահական մեծությունը բաշխված է հավասարաչափ $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ միջակայքում։ Գտնել $Y = \cos X$ պատահական մեծության $g(y)$ դիֆերենցիալ ֆունկցիան։

Պատ.՝ $g(y) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}$ $(0, 1)$ միջակայքում, այդ միջակայքից դուրս $g(y) = 0$։

388. X պատահական մեծությունը բաշխված է նորմալ a-ին հավասար մաթեմատիկական սպասումով և σ-ին հավասար միջին քառակուսային շեղումով։ Ապացուցել, որ $Y = AX + B$ գծային ֆունկցիան ևս բաշխված է նորմալ, ընդ որում

$$M(Y) = Aa + B, \quad \sigma(Y) = |A|\sigma։$$

Լուծում։ Գրենք X պատահական մեծության դիֆերենցիալ ֆունկցիան.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

Քանի որ $y = Ax + B$ ֆունկցիան մոնոտոն է, ապա կիրառելի է հետևյալ բանաձևը.

$$g(y) = f[\psi(y)] \cdot |\psi'(y)|։ \qquad (*)$$

Գտնենք $x = \psi(y)$-ը $y = Ax + B$ հավասարումից

$$\psi(y) = \frac{y-B}{A},$$

Գտնենք $f[\psi(y)]$-ը.

$$f[\psi(y)] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left[\frac{y-B}{A}-a\right]^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[y-(Aa+B)]^2}{2(A\sigma)^2}}. \qquad (**)$$

Գտնենք $\psi'(y)$-ը.

$$\psi'(y) = \left[\frac{y-B}{A}\right]' = \frac{1}{A},$$

Գտնենք $|\psi'(y)|$-ը.

$$|\psi'(y)| = \frac{1}{|A|}, \qquad (***)$$

Տեղադրելով (**)-ը և (***)-ը (*)-ի մեջ, կունենանք

$$g(y) = \frac{1}{(|A|\sigma)\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[y-(Aa+B)]^2}{2(A\sigma)^2}},$$

Այստեղից երևում է, որ $Y = AX + B$ գծային ֆունկցիան բաշխված է նորմալ, ընդ որում $M(Y) = Aa + B$, $\sigma(Y) = |A|\sigma$, ինչ և պահանջվում էր ապացուցել։

389. Տրված է նորմալ բաշխված X պատահական մեծության դիֆերենցիալ ֆունկցիան՝ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $(-\infty < x < \infty)$։ Գտնել պատահական $Y = X^2$ մեծության $g(y)$ դիֆերենցիալ ֆունկցիան։

Լուծում։ $y = x^2$ հավասարումից գտնենք հակադարձ ֆունկցիան։ Քանի որ $(-\infty, \infty)$ միջակայքում $y = x^2$ ֆունկցիան մոնոտոն չէ, ապա բաժանենք այդ միջակայքը $(-\infty, 0)$ և $(0, \infty)$ միջակայքերի, որոնցում դիտարկվող ֆունկցիան մոնոտոն է։ $(-\infty, 0)$ միջակայքում հակադարձ ֆունկցիան՝ $\psi_1(y) = -\sqrt{y}$, $(0, \infty)$ միջակայքում՝ $\psi_2(y) = \sqrt{y}$։

Որոնելի դիֆերենցիալ ֆունկցիան կարող է գտնվել հետևյալ հավասարությունից.

$$g(y) = f[\psi_1(y)] \cdot |\psi_1'(y)| + f[\psi_2(y)] \cdot |\psi_2'(y)|, \qquad (*)$$

Գտնենք հակադարձ ֆունկցիաների ածանցյալները.

$$\psi_1'(y) = -\frac{1}{2\sqrt{y}}, \quad \psi_2'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}},$$

Գտնենք ածանցյալների մոդուլները.

$$|\psi_1'(y)| = \frac{1}{2\sqrt{y}}, \quad |\psi_2'(y)| = \frac{1}{2\sqrt{y}}, \qquad (**)$$

Հաշվի առնելով, որ $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$, $\psi_1(y)=-\sqrt{y}$, $\psi_2(y)=\sqrt{y}$, կստանանք

$$f[\psi_1(y)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y/2}, \quad f[\psi_2(y)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y/2}. \quad (***)$$

Տեղադրելով (**)-ը և (***)-ը (*)-ի մեջ, կունենանք

$$g(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{-y/2}.$$

Քանի որ $y=x^2$, ընդ որում $-\infty<x<\infty$, ապա $0<y<\infty$։

Այսպիսով, $(0, \infty)$ միջակայքում որոնելի դիֆերենցիալ ֆունկցիան՝

$$g(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{-y/2},$$

այդ միջակայքից դուրս $g(y)=0$։

Ստուգում։

$$\int_0^\infty g(y)\,dy=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{y}}e^{-y/2}\,dy.$$

Տեղադրելով $y=t^2$, և հետևաբար, $dy=2t\,dt$, կստանանք

$$\int_0^\infty g(y)\,dy=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-t^2/2}\,dt.$$

Հաշվի առնելով, որ Պուասոնի ինտեգրալը

$$\int_0^\infty e^{-t^2/2}\,dt=\frac{\sqrt{2\pi}}{2},$$

կգտնենք

$$\int_0^\infty g(y)\,dy=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{\sqrt{2\pi}}{2}=1.$$

390. Տրված է նորմալ բաշխված X պատահական մեծության $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ դիֆերենցիալ ֆունկցիան։ Գտնել $Y=\frac{1}{2}X^2$ պատահական մեծության դիֆերենցիալ ֆունկցիան։

Պատ.՝ $g(y)=\frac{1}{\sqrt{\pi y}}e^{-y}$, $(0, \infty)$ միջակայքում, այդ միջակայքից դուրս $g(y)=0$։

391. Տրված է $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ դիֆերենցիալ ֆունկցիան։ Գտնել $Y=\frac{1}{4}X^2$ պատահական մեծության $g(y)$ դիֆերենցիալ ֆունկցիան։

Պատ.՝ $g(y)=\frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi y}}e^{-\frac{2y}{\sigma^2}}$ $(0, \infty)$ միջակայքում, այդ միջակայքից դուրս $g(y)=0$։

392. X պատահական մեծությունը տրված է $(0, \pi)$ միջակայքում $f(x)=\frac{1}{2}\sin x$ դիֆերենցիալ ֆունկցիայով, այդ միջակայքից դուրս $f(x)=0$։ Գտնել $Y=\varphi(X)=X^2$ պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը, նախապես որոշելով Y մեծության դիֆերենցիալ ֆունկցիան։

Լուծում։ Սկզբում գտնենք Y պատահական մեծության $g(y)$ դիֆերենցիալ ֆունկցիան։ Քանի որ $y=\varphi(x)=x^2$ ֆունկցիան x-ի դիտարկվող արժեքների համար $(0<x<\pi)$ խիստ աճող է, ապա $g(y)$ դիֆերենցիալ ֆունկցիան կգտնենք հետևյալ բանաձևով.

$$g(y)=f[\psi(y)]\cdot|\psi'(y)|,$$

որտեղ $\psi(y)=\sqrt{y}$-ը $y=x^2$ ֆունկցիայի հակադարձ ֆունկցիան է։ Տեղադրելով $\psi(y)=\sqrt{y}$ և հաշվի առնելով, որ $f(x)=\frac{1}{2}\sin x$, $|\psi'(y)|=|(\sqrt{y})'|=\frac{1}{2\sqrt{y}}$, կստանանք

$$g(y)=\frac{\sin\sqrt{y}}{4\sqrt{y}},$$

Գտնենք Y *մեծության որոնելի մաթեմատիկական սպասումը, հաշվի առնելով, որ* Y*-ի հնարավոր արժեքները ընկած են* (0, π^2) *միջակայքում* [*քանի որ* $y=x^2$ *և* $0<x<\pi$, *ապա* $0<y<\pi^2$]։

$$M(Y) = \int_0^{\pi} yg(y)\,dy = \frac{1}{4}\int_0^{\pi^2} \frac{y \sin\sqrt{y}}{\sqrt{y}}\,dy։$$

Օգտվելով $y=t^2$ *տեղադրումից, կստանանք*

$$M(Y) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} t^2 \sin t\,dt։$$

Երկու անգամ ինտեգրելով մասերով, վերջնականապես կունենանք,

$$M(Y) = M(X^2) = \frac{\pi^2-4}{2}.$$

Դիտողություն։ Վերը բերված լուծումը հետապնդում է ուսուցողական նպատակներ։ Շատ ավելի արագ նպատակին է հասցնում հետևյալ բանաձևը.

$$M[X^2] = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} x^2 \sin x\,dx = \frac{\pi^2-4}{2}։$$

Այս դիտողությունը վերաբերվում է և 393 խնդրին։

393. X *պատահական մեծությունը տրված է* (0, $\pi/_2$) *միջակայքում* $f(x)=\cos x$ *դիֆերենցիալ ֆունկցիայով, այդ միջակայքից դուրս* $f(x)=0$։ *Գտնել* $Y=\varphi(X)=X^2$ *ֆունկցիայի մաթեմատիկական սպասումը։*

Պատ.՝ $M(Y) = \frac{(\pi^2-8)}{4}$։

394. X *պատահական մեծությունը տրված է* (0, π) *միջակայքում* $f(x)=\frac{\sin x}{2}$ *դիֆերենցիալ ֆունկցիայով, այդ միջակայքից դուրս* $f(x)=0$։ *Գտնել* $Y=\varphi(X)=X^2$ *ֆունկցիայի դիսպերսիան, օգտագործելով* g(y) *դիֆերենցիալ ֆունկցիան։*

Լուծում։ Օգտվենք հետևյալ բանաձևից.

$$D(Y)=\int_c^d y^2 g(y)\,dy-[M(Y)]^2,$$

որտեղ c*-ն և* d*-ն ինտերվալի ծայրերն են, որտեղ ընկած են* Y*-ի հնարավոր արժեքները։ Տեղադրելով* $g(y)=\frac{\sin\sqrt{y}}{4\sqrt{y}}$, $M(Y)=\frac{\pi^2-4}{2}$ *(տես խնդիր 392) և հաշվի առնելով, որ* $c=0$ *և* $d=\pi^2$ *(քանի որ* $y=x^2$ *և* $0<x<\pi$, *ապա* $0<y<\pi^2$*), կստանանք*

$$D(Y)=D(X^2)=\int_0^{\pi^2} y\cdot\frac{\sin\sqrt{y}}{4\sqrt{y}}\,dy-\left[\frac{\pi^2-4}{2}\right]^2, \qquad (*)$$

Ինտեգրելով սկզբում $y=t^2$ *տեղադրումով, իսկ հետո 4 անգամ մասերով, կստանանք*

$$\frac{1}{4}\int_0^{\pi^2} y\,\frac{\sin\sqrt{y}}{\sqrt{y}}\,dy=\frac{\pi^4}{2}-6\pi^2+24. \qquad (**)$$

Տեղադրելով (**)-ը (*)-ի մեջ, վերջնականապես կստանանք $D(X^2)=\frac{\pi^4-16\pi^2+80}{4}$.

395. X *պատահական մեծությունը տրված է* $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ *միջակայքում* $f(x)=\cos x$ *դիֆերենցիալ ֆունկցիայով, այդ միջակայքից դուրս* $f(x)=0$։ *Գտնել* $Y=\varphi(X)=X^2$ *ֆունկցիայի դիսպերսիան։*

Ցուցում։ Նախ գտնել $g(y)=\frac{\cos\sqrt{y}}{2\sqrt{y}}$ *դիֆերենցիալ ֆունկցիան՝* $Y=X^2$ *մեծության համար։*
Օգտվել

$$D(Y)=\int_0^{\pi^2/4} y^2 g(y)\,dy-[M(Y)]^2$$

բանաձևից, որ $M(Y)=\dfrac{\pi^2-4}{8}$ (տես խնդիր 393)։ Ինտեգրալը հաշվելիս նախ օգտվել $y=t^2$ տեղադրումից, իսկ հետո ինտեգրել մասերով։

Պատ.՝ $D(X^2)=20-2\pi^2$։

396. Ուորանարդի կողը չափված է մոտավորապես, ընդ որում $a\leqslant x\leqslant b$։ Դիտելով խորանարդի կողը որպես պատահական մեծություն, որ բաշխված է (a, b) միջակայքում հավասարաչափ, գտնել. ա) խորանարդի ծավալի մաթեմատիկական սպասումը. բ) խորանարդի ծավալի դիսպերսիան։

Ցուցում։ Նախ գտնել $Y=X^3$ պատահական մեծության դիֆերենցիալ ֆունկցիան՝

$$g(y)=\frac{1}{3(b-a)\,y^{2/3}}$$

օգտվել հետևյալ բանաձևերից.

$$M(Y)=\int_{a^3}^{b^3} yg(y)\,dy,\quad D(Y)=\int_{a^3}^{b^3} y^2g(y)\,dy-[M(Y)]^2։$$

Պատ.՝ $M(Y)=\dfrac{(b+a)(b^2+a^2)}{7(b-a)}$, $\quad D(Y)=\dfrac{b^7-a^7}{7(b-a)}-$

$$-\left[\frac{(b+a)(b^2+a^2)}{4}\right]^2։$$

397. Տրված է X պատահական մեծության $F(x)$ ինտեգրալ ֆունկցիան։ Գտնել $Y=3X+2$ պատահական մեծության $G(y)$ ինտեգրալ ֆունկցիան։

Լուծում։ Ըստ ինտեգրալ ֆունկցիայի սահմանման

$$G(y)=P(Y<y)։$$

Քանի որ $y=3x+2$ ֆունկցիան աճող է, ապա $Y<y$ անհավասարությունը իրագործվում է, եթե տեղի ունի $X<x$ անհավասարությունը, ուստի

$$G(y)=P(Y<y)=P(X<x)=F(x)։\qquad (*)$$

$y=3x+2$ հավասարումից արտահայտենք x-ը,

$$x=\frac{y-2}{3},\qquad (**)$$

Տեղադրելով (**)-ը (*)-ի մեջ, վերջնականապես կստանանք

$$G(y) = F\left[\frac{y-2}{3}\right],$$

398. Տրված է X պատահական մեծության F (x) ինտեգրալ ֆունկցիան։ Գտնել $Y = -\frac{2}{3}X + 2$ պատահական մեծության G (y) ինտեգրալ ֆունկցիան։

Լուծում։ Ըստ ինտեգրալ ֆունկցիայի սահմանման

$$G(y) = P(Y < y),$$

Քանի որ $y = -\frac{2}{3}x + 2$ ֆունկցիան նվազող է, ապա $Y < y$ անհավասարությունը իրագործվում է, եթե տեղի ունի $X > x$ անհավասարությունը, ուստի

$$G(y) = P(Y < y) = P(X > x),$$

Քանի որ $X < x$ և $X > x$ պատահույթները հակադիր են, ապա այդ պատահույթների հավանականությունների գումարը հավասար է 1-ի.

$$P(X < x) + P(X > x) = 1,$$

Այստեղից

$$P(X > x) = 1 - P(X < x) = 1 - F(x),$$

Հետևաբար,

$$G(y) = 1 - F(X), \qquad (*)$$

$y = -\frac{2}{3}x + 2$ հավասարումից արտահայտենք x-ը.

$$x = \frac{3(2-y)}{2}, \qquad (**)$$

Տեղադրելով (**)-ը (*)-ի մեջ, վերջնականապես կստանանք.

$$G(y) = 1 - F\left[\frac{3(2-y)}{2}\right],$$

399. *Տրված է* X *պատահական մեծության* F(x) *ինտեգրալ ֆունկցիան։ Գտնել* Y *պատահական մեծության* G(y) *ինտեգրալ ֆունկցիան, եթե ա)* $Y=4X+6$, *բ)* $Y=-5X+1$, *գ)* $Y=aX+a$։

Պատ.՝ *ա)* $G(y)=F\left[\frac{y-6}{4}\right]$, *բ)* $G(y)=1-F\left[\frac{1-y}{5}\right]$, *գ)* $G(y)=F\left[\frac{y-b}{a}\right]$, *եթե* $a>0$, $G(y)=1-F\left[\frac{y-b}{a}\right]$, *եթե* $a<0$։

§ 2. Երկու պատահական արգումենտների ֆունկցիա

Եթե X *և* Y *պատահական մեծությունների հնարավոր արժեքների յուրաքանչյուր զույգին համապատասխանում է* Z *պատահական մեծության մեկ հնարավոր արժեք, ապա* Z*-ը կոչվում է* X *և* Y *երկու պատահական արգումենտների ֆունկցիա և գրում են*

$$Z=\varphi(X,\ Y)։$$

Եթե X*-ը և* Y*-ը անկախ դիսկրետ պատահական մեծություններ են, ապա որպեսզի գտնենք* $Z=X+Y$ *ֆունկցիայի բաշխումը, պետք է գտնենք* Z*-ի բոլոր հնարավոր արժեքները, որի համար բավական է* X*-ի յուրաքանչյուր հնարավոր արժեքը գումարել* Y*-ի բոլոր հնարավոր արժեքների հետ, իսկ* Z*-ի գտնված հնարավոր արժեքների հավանականությունները հավասար են* X*-ի և* Y*-ի գումարվող արժեքների հավանականությունների արտադրյալին։*

Եթե X*-ը և* Y*-ը անկախ անընդհատ պատահական մեծություններ են, ապա* $Z=X+Y$ *գումարի* g(z) *դիֆերենցիալ ֆունկցիան (պայմանով, որ արգումենտներից գոնե մեկի դիֆերենցիալ ֆունկցիան տրված է* $(-\infty,\ +\infty)$ *միջակայքում մեկ բանաձևով) կարող ենք գտնել*

$$g(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\, f_2(z-x)\, dx$$

բանաձևով կամ նրան համարժեք

$$g(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(z-y)\, f_2(y)\, dy$$

բանաձևով, որտեղ f_1*-ը և* f_2*-ը արգումենտների դիֆերենցիալ ֆունկցիաներն են. Եթե արգումենտների հնարավոր արժեքները բացասա-*

կան չեն, ապա $Z = X + Y$ մեծության $g(z)$ դիֆերենցիալ ֆունկցիան գտնում են

$$g(z) = \int_0^z f_1(x)\, f_2(z - x)\, dx$$

բանաձևով կամ սրան համարժեք

$$g(z) = \int_0^z f_1(z - y) \cdot f_2(y)\, dy$$

բանաձևով։

Այն դեպքում, երբ $f_1(x)$ և $f_2(y)$ երկու դիֆերենցիալ ֆունկցիաները էլ տրված են վերջավոր միջակայքերում, $Z = X + Y$ մեծության $g(z)$ դիֆերենցիալ ֆունկցիան գտնելու համար նպատակահարմար է նախ գտնել $G(z)$ ինտեգրալ ֆունկցիան, իսկ հետո դիֆերենցել այն ըստ z-ի.

$$g(z) = G'(z)։$$

Եթե X-ը և Y-ը անկախ պատահական մեծություններ են, որոնք տրված են համապատասխանաբար $f_1(x)$ և $f_2(y)$ դիֆերենցիալ ֆունկցիաներով, ապա (X, Y) պատահական կետի D տիրույթին ընկնելու հավանականությունը հավասար է այդ տիրույթով դիֆերենցիալ ֆունկցիաների արտադրյալի կրկնակի ինտեգրալին.

$$P[(X, Y) \subset D] = \iint_{(D)} f_1(x)\, f_2(y)\, dx\, dy։$$

400. *Դիսկրետ անկախ պատահական X և Y մեծությունները տրված են բաշխումներով.*

X	1	3	Y	2	4
P	0,3	0,7	P	0,6	0,4

Գտնել $Z = X + Y$ պատահական մեծության բաշխումը։

Լուծում։ Որպեսզի կազմենք $Z = X + Y$ մեծության բաշխումը, պետք է գտնել Z-ի բոլոր հնարավոր արժեքները և նրանց հավանականությունները։

Z-ի հնարավոր արժեքները X-ի յուրաքանչյուր հնարավոր արժեքի և Y-ի բոլոր հնարավոր արժեքների գումարներն են,

$$z_1 = 1 + 2 = 3, \quad z_2 = 1 + 4 = 5, \quad z_3 = 3 + 2 = 5,$$
$$z_4 = 3 + 4 = 7,$$

Գտնենք այս հնարավոր արժեքների հավանականությունները: Որպեսզի $Z=3$, բավական է, որ X մեծությունն ընդունի $x_1=1$ արժեքը և Y մեծությունը՝ $y_1=2$ արժեքը: Այդ հնարավոր արժեքների հավանականությունները, ինչպես երևում է բաշխման տրված օրենքներից, համապատասխանաբար հավասար են 0,3-ի և 0,6-ի: Քանի որ X և Y մեծություններն անկախ են, ապա $X=1$ և $Y=2$ պատահույթները ևս անկախ են և, հետևաբար, նրանց համատեղ հանդես գալու հավանականությունը (այսինքն՝ $Z=3$ պատահույթի հավանականությունը) ըստ բազմապատկման թեորեմի հավասար է $0,3\cdot0,6=0,18$:

Համանմանորեն կգտնենք.

$$P(Z=1+4=5)=0,3\cdot0,4=0,12,$$
$$P(Z=3+2=5)=0,7\cdot0,6=0,42,$$
$$P(Z=3+4=7)=0,7\cdot0,4=0,28.$$

Գտնենք որոնելի բաշխումը, նախապես գումարելով $Z=z_2=5$ և $Z=z_3=5$ անհամատեղելի պատահույթների հավանականությունները $(0,12+0,42=0,54)$.

Z	3	5	7
P	0,18	0,54	0,28

Ստուգում: $0,18+0,54+0,28=1$:

401. X և Y դիսկրետ պատահական մեծությունները տրված են բաշխումներով.

ա)

X	10	12	16
P	0,4	0,1	0,5

Y	1	2
P	0,2	0,8

բ)

X	4	10
P	0,7	0,3,

Y	1	7
P	0,8	0,2:

Գտնել $Z=X+Y$ պատահական մեծության բաշխումը:

Պատ.՝ ա)

Z	11	12	13	14	17	18,
P	0,08	0,32	0,02	0,08	0,10	0,40,

բ)

Z	5	11	17
P	0,56	0,38	0,06:

402. X և Y անկախ պատահական մեծությունները տրըված են դիֆերենցիալ ֆունկցիաներով.

$$f_1(x)=e^{-x} \quad (0\leqslant x\leqslant\infty),$$

$$f_2(y)=\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}} \quad (0\leqslant y<\infty)։$$

Գտնել այդ օրենքների բաղադրույթը, այսինքն՝ $Z=X+Y$ պատահական մեծության դիֆերենցիալ ֆունկցիան։

Լուծում։ Քանի որ արգումենտների հնարավոր արժեքները ոչ բացասական են, ապա կիրառելի է հետևյալ բանաձևը.

$$f(z)=\int_0^z f_1(x)\,f_2(z-x)\,dx։$$

Հետևաբար,

$$f(z)=\int_0^z e^{-x}\left[\frac{1}{2}e^{-\frac{z-x}{2}}\right]dx։$$

Կատարելով տարրական ձևափոխություններ, կստանանք

$$f(z)=e^{-\frac{z}{2}}\left[1-e^{-\frac{z}{2}}\right]։$$

Այստեղ $z\geqslant0$, քանի որ $Z=X+Y$ և X-ի ու Y-ի հնարավոր արժեքներն ոչ բացասական են.

Եվ այսպես, $f(z)=e^{-\frac{z}{2}}\left[1-e^{-\frac{z}{2}}\right]$ $(0,\infty)$ միջակայքում, այդ միջակայքից դուրս $f(z)=0$։

Ընթերցողին խորհուրդ ենք տալիս ստուգելու համար համոզվել՝ որ $\int_0^\infty f(z)\,dz=1$։

403. X և Y անկախ պատահական մեծությունները տրըված են դիֆերենցիալ ֆունկցիայով.

$$f_1(x)=\frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}} \quad (0\leqslant x\leqslant\infty),$$

$$f_2(y)=\frac{1}{5}e^{-\frac{y}{5}} \quad (0 \leqslant y < \infty)\text{։}$$

Գտնել այդ օրենքների բաղադրույթը, այսինքն $Z=X+Y$ *պատահական մեծության դիֆերենցիալ ֆունկցիան։*

Պատ.՝ $g(z)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{z}{5}}\left(1-e^{-\frac{2z}{15}}\right), & \text{երբ } z \geqslant 0,\\ 0 & \text{երբ } z<0\text{։}\end{cases}$

404. *Անկախ նորմալ բաշխված* X *և* Y *պատահական մեծությունները տրված են դիֆերենցիալ ֆունկցիաներով.*

$$f_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad f_2(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}},$$

Ապացուցել, որ այդ երկու օրենքների բաղադրույթը, այսինքն՝ $Z=X+Y$ *պատահական մեծության դիֆերենցիալ ֆունկցիան, ևս նորմալ օրենք է։*

Լուծում։ Օգտվենք հետևյալ բանաձևից.

$$g(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\,f_2(z-x)\,dx\text{։}$$

Այդ դեպքում

$$g(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,e^{\frac{(z-x)^2}{2}}\,dx\text{։}$$

Կատարելով տարրական հաշվումներ, կստանանք

$$g(z)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2-zx)}\,dx\text{։}$$

Ինտեգրալի նշանի տակ գտնվող ցուցչային ֆունկցիայի ցուցիչը լրացնելով մինչև լրիվ քառակուսի լինելը, $e^{\frac{z^2}{4}}$*-ը դուրս բերենք ինտեգրալի նշանի տակից.*

$$g(z)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{2}}\,e^{\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(x-\frac{z}{2}\right)^2}\,dx\text{։}$$

Հաշվի առնելով, որ հավասարության աջ մասում գրված Պուասսոնի ինտեգրալը հավասար է $\sqrt{\pi}$, վերջնականապես կստանանք

$$g(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{4}}։$$

Ընթերցողին խորհուրդ ենք տալիս ստուգման համար համոզվել, որ $\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(z)\,dz = 1$։ Դրա համար պետք է օգտվել $z = \sqrt{2t}$ տեղադրումից և ուշադրություն դարձնել, որ Պուասսոնի ինտեգրալը․

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t_2}{2}}\,dt = \sqrt{2\pi}։$$

Նկատենք, որ դիտարկվող խնդրում, հեշտ է համոզվել, որ

$$M(Z) = M(X) + M(Y) \quad \text{և} \quad \sigma(z) = \sqrt{\sigma^2(X) + \sigma^2(Y)}։$$

Կարելի է ապացուցել, որ այդ բանաձևերն իրավացի են և ընդհանուր նորմալ օրենքները բաղադրելիս (այսինքն՝ երբ մաթեմատիկական սպասումը տարբեր է զրոյից և միջին քառակուսային շեղումը հավասար չէ 1-ի)։

405. Տրված են անկախ, հավասարաչափ բաշխված X և Y պատահական մեծությունների դիֆերենցիալ ֆունկցիաները՝ $f_1(x) = \frac{1}{2}$ (0, 2) միջակայքում, այդ միջակայքից դուրս $f_1(x) = 0$, $f_2(y) = \frac{1}{2}$ (0, 2) միջակայքում, այդ միջակայքից դուրս $f_2(y) = 0$։ Գտնել $Z = X + Y$ պատահական մեծության ինտեգրալ և դիֆերենցիալ ֆունկցիաները։ Կառուցել $g(z)$ դիֆերենցիալ ֆունկցիայի գրաֆիկը։

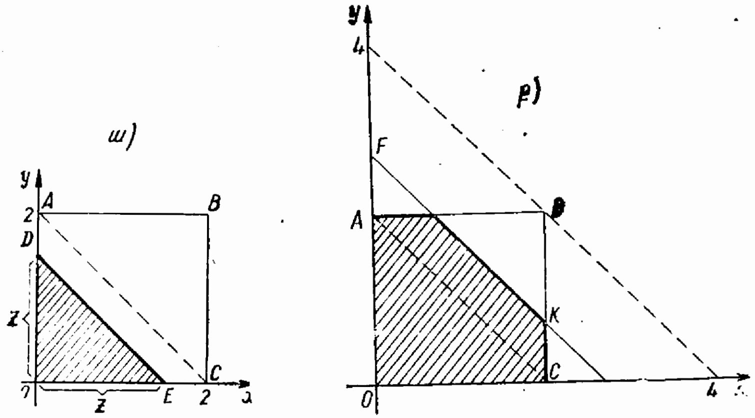
Լուծում։ Ըստ պայմանի X-ի հնարավոր արժեքները որոշվում են $0 < x < 2$ անհավասարությամբ, Y-ի հնարավոր արժեքները՝ $0 < y < 2$ անհավասարությամբ։ Այստեղից հետևում է, որ (x, y) հնարավոր պատահական կետերը ընկած են OABC քառակուսում (նկ. 9, ա)։

Ինտեգրալ ֆունկցիայի սահմանումից․

$$G(z) = P(Z < z) = P(X + Y < z)։$$

$x+y<z$ անհավասարությունը բավարարում են xOy հարթության այն (x, y) կետերը, որոնք ընկած են $x+y=z$ ուղղից ներքև (այդ ուղիղը Ox և Oy առանցքներից հատում է z-ի հավասար հատվածներ), իսկ եթե վերցնենք միայն x-ի և y-ի հնարավոր արժեքները, ապա $x+y<z$ անհավասարությունը իրագործվում է միայն $OABC$ քառակուսու $x+y=z$ ուղղից ներքև ընկած կետերի համար։

Մյուս կողմից, քանի որ X և Y մեծությունները անկախ են, ապա



Նկ. 9.

$$G(z)=\iint\limits_{(s)} f_1(x)\, f_2(y)\, dx\, dy=\frac{1}{4}\iint\limits_{(s)} dx\, dy=\frac{1}{4}S,$$

որտեղ S-ը $OABC$ քառակուսու այն մասի մակերեսի մեծությունն է, որն ընկած է $x+y=z$ ուղղից ներքև։ Ակներև է, որ S մակերեսի մեծությունը կախված է z-ի արժեքից։ Եթե $z \leqslant 0$, ապա $S=0$, այսինքն՝

$$G(z)=\frac{1}{4}\cdot 0=0։$$

Եթե $0<z<2$, ապա (Նկ. 9, ա)

$$G(z)=\frac{1}{4}S_{\triangle ODE}=\frac{1}{4}\cdot\frac{z^2}{2}=\frac{z^2}{8},$$

Եթե $2 < z < 4$, ապա (նկ. 9, բ)

$$G(z) = \frac{1}{4} S_{OAHKC} = 1 - \frac{(4-z)^2}{8},$$

OAHKC պատկերի մակերեսը գտնված է որպես OABC քառակուսու մակերեսի, որը, ակնհայտաբար, հավասար է $2^2 = 4$ և HBK ուղղանկյուն եռանկյան մակերեսին՝

$$S_{\triangle HBK} = \frac{HB^2}{2},$$

ընդ որում $HB = 2 - AH = 2 - AF = 2 - (z-2) = 4 - z$ տարբերությանը։

Եթե $z > 4$, ապա

$$G(z) = \frac{1}{4} S_{OABC} = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1։$$

Եվ այսպես, որոնելի ինտեգրալ ֆունկցիան այսպիսին է.

$$G(z) = \begin{cases} 0 & \text{երբ } z \leqslant 0, \\ z^2/8 & \text{երբ } 0 < z < 2, \\ 1-(4-z)^2/8 & \text{երբ } 2 < z < 4, \\ 1 & \text{երբ } z > 4։ \end{cases}$$

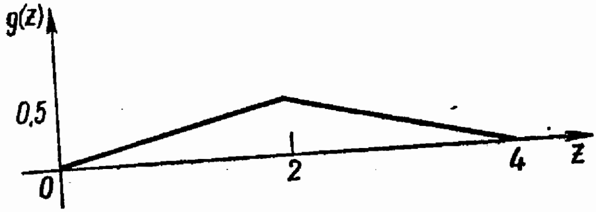
Գտնենք $g(z) = G'(z)$ դիֆերենցիալ ֆունկցիան.

$$g(z) = \begin{cases} 0 & \text{երբ } z \leqslant 0, \\ \frac{z}{4} & \text{երբ } 0 < z < 2, \\ 1 - \frac{z}{4} & \text{երբ } 2 < z < 4, \\ 0 & \text{երբ } z > 4։ \end{cases}$$

$g(z)$ դիֆերենցիալ ֆունկցիայի գրաֆիկը պատկերված է նկ. 10-ում։

Խորհուրդ ենք տալիս ընթերցողին ստուգելու համար համոզվել, որ բաշխման $g(z)$ կորով սահմանափակված մակերեսը հավասար է 1-ի։

406. Տրված են հավասարաչափ բաշխված X և Y անկախ պատահական մեծությունների դիֆերենցիալ ֆունկցիաները. $f_1(x)=1$ $(0, 1)$ միջակայքում, այդ միջակայքից դուրս $f_1(x)=0$, $f_2(y)=1$ $(0, 1)$ միջակայքում, այդ միջա-



Նկ. 10.

կայքից դուրս $f_2(y)=0$։ Գտնել պատահական $Z=X+Y$ մեծության ինտեգրալ և դիֆերենցիալ ֆունկցիաները։ Կառուցել $g(z)$ դիֆերենցիալ ֆունկցիայի գրաֆիկը։

Պատ.՝ $$G(z)=\begin{cases} 0, & \text{երբ } z<0, \\ \dfrac{z^2}{2}, & \text{երբ } 0<z<1, \\ 1-\dfrac{(2-z)^2}{2}, & \text{երբ } 1<z<2, \\ 1, & \text{երբ } z>2։ \end{cases}$$

$$g(z)=\begin{cases} 0 & \text{երբ } z<0, \\ z & \text{երբ } 0<z<1, \\ 2-z & \text{երբ } 1<z<2, \\ 0 & \text{երբ } z>2։ \end{cases}$$

407. Տրված են հավասարաչափ բաշխված X և Y անկախ պատահական մեծությունների դիֆերենցիալ ֆունկցիաները. $f_1(x)=\dfrac{1}{2}$ $(1, 3)$ միջակայքում, այդ միջակայքից դուրս $f_1(x)=0$. $f_2(y)=\dfrac{1}{4}$ $(2, 6)$ միջակայքում, այդ միջակայքից դուրս $f_2(y)=0$։ Գտնել պատահական մեծության ինտեգրալ և դիֆերենցիալ ֆունկցիաները։ Կառուցել $g(z)$ դիֆերենցիալ ֆունկցիայի գրաֆիկը.

Պատ.՝ $$G(z)=\begin{cases} 0 & \text{երբ} \quad z<3, \\ \dfrac{(z-3)^2}{16}, & \text{երբ} \quad 3<z<5, \\ \dfrac{z}{4}-1 & \text{երբ} \quad 5<z<7, \\ 1-\dfrac{(9-z)^2}{16}, & \text{երբ} \quad 7<z<9, \\ 1 & \text{երբ} \quad z>9, \end{cases}$$

$$g(z)=\begin{cases} 0 & \text{երբ} \quad z<3, \\ \dfrac{(z-3)}{8}, & \text{երբ} \quad 3<z<5, \\ \dfrac{1}{4} & \text{երբ} \quad 5<z<7, \\ \dfrac{(9-z)}{8} & \text{երբ} \quad 7<z<9, \\ 0 & \text{երբ} \quad z>9, \end{cases}$$

ՈՒԹԵՐՈՐԴ ԳԼՈՒԽ

ԵՐԿՈՒ ՊԱՏԱՀԱԿԱՆ ՄԵԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐ

§ 1. Երկչափ պատահական մեծության բաշխման օրենք

Երկչափ *անվանում են* (X, Y) *պատահական մեծությունը, որի համար հնարավոր արժեքներ են* (x, y) *թվազույգերը։ Միաժամանակ դիտարկվող* X *և* Y *բաղադրիչները կազմում են երկու պատահական մեծությունների համակարգ։*

Երկչափ մեծությունը երկրաչափորեն կարելի է մեկնաբանել որպես xOy *հարթության* M(X, Y) *պատահական կետ կամ որպես պատահական* OM *վեկտոր։*

Երկչափ մեծությունը անվանում են դիսկրետ, *եթե նրա բաղադրիչները դիսկրետ են։*

Երկչափ մեծությունը անվանում են անընդհատ, *եթե նրա բաղադրիչներն անընդհատ են։*

Հնարավոր արժեքների և նրանց հավանականությունների համապատասխանությունը կոչվում է երկչափ պատահական մեծության հավանականությունների բաշխման օրենք։

Երկչափ պատահական մեծության բաշխման օրենքը կարելի է տալ. ա) երկու մուտքով աղյուսակի տեսքով, որը պարունակում է *հնարավոր արժեքները և համապատասխան հավանականությունները, բ) անալիտիկորեն, օրինակ, ինտեգրալ ֆունկցիայի տեսքով։*

Երկչափ պատահական մեծության հավանականությունների բաշխման ինտեգրալ ֆունկցիա *անվանում են այն* $F(x, y)$ *ֆունկցիան, որը յուրաքանչյուր* (x, y) *թվազույգի համար որոշում է, այն բանի հավանականությունը, որ* X*-ը կընդունի* x*-ից փոքր արժեք և* Y*-ը կընդունի* y*-ից փոքր արժեք.*

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y)։$$

Երկրաչափորեն այդ հավասարությունը կարելի է մեկնաբանել հետևյալ կերպ. $F(x, y)$*-ը այն բանի հավանականությունն է, որ* (X, Y) *պատահական կետը կընկնի* (x, y) *գագաթով այն ուղիղ անկյան մեջ, որը ընկած է այդ գագաթից ձախ և ներքև։*

«Ինտեգրալ ֆունկցիա» արտահայտության փոխարեն հաճախ օգտագործվում է «բաշխման ֆունկցիա» արտահայտությունը։

Ինտեգրալ ֆունկցիան օժտված է հետևյալ հատկություններով.

Հատկություն 1։ Ինտեգրալ ֆունկցիայի արժեքները բավարարում են

$$0 \leqslant F(x, y) \leqslant 1$$

կրկնակի անհավասարությանը։

Հատկություն 2։ Ինտեգրալ ֆունկցիան ըստ յուրաքանչյուր արգումենտի չնվազող է.

$$F(x_2, y) \geqslant F(x_1, y), \quad \text{եթե} \quad x_2 > x_1,$$
$$F(x, y_2) \geqslant (F(x, y_1), \quad \text{եթե} \quad y_2 > y_1։$$

Հատկություն 3։ Տեղի ունեն հետևյալ սահմանային առնչությունները.

1) $F(-\infty, y) = 0,$ 3) $F(-\infty, -\infty) = 0,$

2) $F(x, -\infty) = 0,$ 4) $F(\infty, \infty) = 1։$

Հատկություն 4։ ա) երբ $y = \infty$ համակարգի ինտեգրալ ֆունկցիան վեր է ածվում X բաղադրիչի ինտեգրալ ֆունկցիայի.

$$F(x, \infty) = F_1(x)։$$

բ) Երբ $x = \infty$ համակարգի ինտեգրալ ֆունկցիան վեր է ածվում Y բաղադրիչի ինտեգրալ ֆունկցիայի,

$$F(\infty, y) = F_2(y)։$$

Օգտվելով ինտեգրալ ֆունկցիայից, կարելի է հաշվել այն բանի հավանականությունը, որի պատահական կետը կընկնի $x_1 < X < x_2$, $y_1 < Y < y_2$ *ուղղանկյան մեջ.*

$$P(x_1 < X < x_2, \ y_1 < Y < y_2) = [F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2)] - \\ - [F(x_2, y_1) - F(x_1, y_1)],$$

Ինտեգրալ ֆունկցիայի երկրորդ կարգի խառը ածանցյալը կոչվում է անընդհատ երկչափ պատահական մեծության հավանականությունների բաշխման դիֆերենցիալ ֆունկցիա:

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \, \partial y},$$

Հաճախ «դիֆերենցիալ ֆունկցիա» արտահայտության փոխարեն օգտագործում են «հավանականությունների երկչափ խտություն» արտահայտությունը:

Դիֆերենցիալ ֆունկցիան կարելի է դիտել որպես պատահական կետի Δx *և* Δy *կողմերով ուղղանկյան մեջ ընկնելու հավանականության և այդ ուղղանկյան մակերեսի հարաբերության սահման, երբ այդ կողմերը ձգտում են զրոյի, երկրաչափորեն այն մեկնաբանվում է որպես մի մակերևույթ, որը կոչվում է* բաշխման մակերևույթ:

Ունենալով դիֆերենցիալ ֆունկցիան, հետևյալ բանաձևով կարելի է գտնել ինտեգրալ ֆունկցիան.

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f(x, y) \, dx \, dy,$$

Հավանականությունը, որ (X, Y) *պատահական կետը կընկնի* D *տիրույթի մեջ, որոշվում է*

$$P[(X, Y) \subset D] = \iint_{(D)} f(x, y) \, dx \, dy$$

բանաձևով:

Դիֆերենցիալ ֆունկցիան օժտված է հետևյալ հատկություններով.

Հ ա տ կ ու թ յ ու ն 1. Դիֆերենցիալ ֆունկցիան ոչ բացասական է.

$$f(x, y) \geqslant 0,$$

Հատկություն 2. Դիֆերենցիալ ֆունկցիայից անվերջ սահմաններով կրկնակի անիսկական ինտեգրալը հավասար է մեկի:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dx\,dy = 1.$$

Մասնավորապես, եթե (X, Y)-ի բոլոր հնարավոր արժեքները պատկանում են վերջավոր D տիրույթին, ապա

$$\iint_{(D)} f(x, y)\,dx\,dy = 1.$$

408. *Տրված է դիսկրետ երկչափ պատահական մեծության բաշխման օրենքը՝*

Y \ X	3	10	12
4	0,17	0,13	0,25
5	0,10	0,30	0,05

Գտնել X և Y բաղադրիչների բաշխման օրենքները:

Լուծում: *Գումարելով հավանականությունները «ըստ սյուների», կստանանք X-ի հնարավոր արժեքների հավանականությունները.* $p(3)=0{,}27$, $p(10)=0{,}43$, $p(12)=0{,}30$.

Գրենք X բաղադրիչի բաշխման օրենքը՝

X	3	10	12
p	0,27	0,43	0,30

Ստուգում: $0{,}27+0{,}43+0{,}30=1$.

Գումարելով հավանականությունները՝ «ըստ տողերի», նույն ձևով գտնում ենք Y բաղադրիչի բաշխումը՝

Y	4	5
p	0,55	0,45

Ստուգում: $0{,}55+0{,}45=1$.

409. *Տրված է դիսկրետ երկչափ պատահական մեծության բաշխման օրենքը՝*

Y \ X	26	30	41	50
2,3	0,05	0,12	0,08	0,04
2,7	0,09	0,30	0,11	0,21

Գտնել բաղադրիչների բաշխման օրենքները։

Պատ.՝

X	26	30	41	50	Y	2,3	2,7
p	0,14	0,42	0,19	0,25	p	0,29	0,71։

410. *Տրված է երկչափ պատահական մեծության ինտեգրալ ֆունկցիան՝*

$$F(x, y)=\begin{cases} \sin x \cdot \sin y, \text{ երբ } 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2},\ 0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ 0, \quad \text{ երբ } x<0 \text{ կամ } y<0\text{։} \end{cases}$$

Գտնել (X, Y) *պատահական կետը* $x=0$, $x=\frac{\pi}{4}$, $y=\frac{\pi}{6}$; $y=\frac{\pi}{3}$ *ուղիղներով սահմանափակված ուղղանկյան մեջ ընկնելու հավանականությունը։*

Լուծում. *Օգտվենք*

$$P(x_1<X<x_2,\ y_1<Y<y_2)=[F(x_2,\ y_2)-F(x_1,\ y_2)]-$$
$$-[F(x_2,\ y_1)-F(x_1,\ y_1)] \text{ բանաձևից։}$$

Տեղադրելով $x_1=0$, $x_2=\frac{\pi}{4}$, $y_1=\frac{\pi}{6}$, $y_2=\frac{\pi}{3}$,

կստանանք

$$P=\left[\sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{3}-\sin 0\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right]-$$

$$-\left[\sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{6}-\sin 0\cdot\sin\frac{\pi}{6}\right]=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=0{,}26\text{։}$$

411. Գտնել (X, Y) պատահական կետը $x=1$, $x=2$, $y=3$, $y=5$ ուղիղներով սահմանափակված ուղղանկյան մեջ ընկնելու հավանականությունը, եթե հայտնի է ինտեգրալ ֆունկցիան.

$$F(x, y)=\begin{cases}1-2^{-x}-2^{-y}+2^{-x-y}, & \text{երբ } x\geqslant 0, \ y\geqslant 0,\\ 0, & \text{երբ } x<0 \text{ կամ } y<0։\end{cases}$$

Պատ.՝ $P=3/128$։

412. Տրված է երկչափ պատահական մեծության ինտեգրալ ֆունկցիան՝

$$F(x, y)=\begin{cases}1-3^{-x}-3^{-y}+3^{-x-y}, & \text{երբ } x\geqslant 0, \ y\geqslant 0,\\ 0, & \text{երբ } x<0 \text{ կամ } y<0։\end{cases}$$

Գտնել համակարգի դիֆերենցիալ ֆունկցիան։

Լուծում։ Օգտվենք

$$f(x, y)=\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x\,\partial y}$$

բանաձևից։

Հաշվենք մասնակի ածանցյալները՝

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\ln 3\cdot(3^{-x}-3^{-x-y}), \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}=\ln^2 3\cdot 3^{-x-y},$$

Այսպիսով, որոնելի դիֆերենցիալ ֆունկցիան կլինի՝

$$f(x, y)=\begin{cases}\ln^2 3\cdot 3^{-x-y}, & \text{երբ } x\geqslant 0, \ y\geqslant 0,\\ 0, & \text{երբ } x<0 \text{ կամ } y<0։\end{cases}$$

Խորհուրդ ենք տալիս ընթերցողին համոզվելու համար ստուգել, որ

$$\ln^2 3\int_0^\infty\int_0^\infty 3^{-x-y}\,dx\,dy=1։$$

413. Տրված է երկչափ պատահական մեծության ինտեգրալ ֆունկցիան՝

$$F(x, y)=\begin{cases}(1-e^{-4x})(1-e^{-2y}), & \text{երբ } x\geqslant 0, \ y\geqslant 0,\\ 0, & \text{երբ } x<0, \ y<0։\end{cases}$$

Գտնել համակարգի դիֆերենցիալ ֆունկցիան։

Պատ.՝ $f(x, y) = 8e^{-4x-2y}$, երբ $x > 0$, $y > 0$, $f(x, y) = 0$, երբ $x < 0$ կամ $y < 0$։

414. Տրված է (X, Y) պատահական մեծությունների համակարգի դիֆերենցիալ ֆունկցիան՝

$$f(x, y) = \frac{1}{(16 + x^2)(25 + y^2)}.$$

Գտնել համակարգի ինտեգրալ ֆունկցիան։

Ցուցում։ Օգտվել հետևյալ բանաձևից՝

$$F(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{y} \int\limits_{-\infty}^{x} f(x, y)\, dx\, dy.$$

Պատ.՝ $F(x, y) = \left(\frac{1}{4\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{4} + \frac{1}{8}\right)\left(\frac{1}{5\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{5} + \frac{1}{10}\right)$։

415. Տրված է երկու պատահական մեծությունների համակարգի դիֆերենցիալ ֆունկցիան՝ $f(x, y) = \frac{1}{2}\sin(x+y)$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ քառակուսու մեջ, քառակուսուց դուրս $f(x, y) = 0$։ Գտնել համակարգի ինտեգրալ ֆունկցիան տրված քառակուսու մեջ։

Պատ.՝ $F(x, y) = \frac{1}{2}[\sin x + \sin y - \sin(x + y)]$։

416. $x^2 + y^2 \leq R^2$ շրջանում դիֆերենցիալ ֆունկցիան $f(x, y) = C\left(R - \sqrt{x^2 + y^2}\right)$, շրջանից դուրս՝ $f(x, y) = 0$։ Գտնել ա) C հաստատունը, բ) հավանականությունը, որ պատահական (X, Y) կետը կընկնի $r = 1$ շառավղով, և $(0, 0)$ կենտրոնով շրջանի մեջ, եթե $R = 2$։

Լուծում։ ա) Օգտվենք դիֆերենցիալ ֆունկցիայի երկրորդ հատկությունից

$$\iint\limits_{(D)} C\left(R - \sqrt{x^2 + y^2}\right) dx\, dy = 1.$$

Այստեղից

$$C=\frac{1}{\iint\limits_{D}(R-\sqrt{x^2+y^2})dx\,dy},$$

Անցնելով բևեռային կոորդինատներին, կստանանք՝

$$C=\frac{1}{\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{R}(R-\rho)\,\rho d\rho}=\frac{R}{\pi R^3}=\frac{1}{\pi R^2};$$

բ) Ըստ պայմանի $R=2$, հետևաբար, $C=\frac{3}{8\pi}$ և

$$f(x,\ y)=\frac{3}{8\pi}\left(2-\sqrt{x^2+y^2}\right):$$

Պատահական կետի $r=1$ շառավղով և $(0,\ 0)$ կենտրոնով շրջանն ընկնելու հավանականությունը՝

$$P[(X,\ Y)\subset D_1]=\frac{3}{8\pi}\iint\limits_{(D_1)}\left(2-\sqrt{x^2+y^2}\right)dx\,dy.$$

Որոնելի հավանականությունը կստանանք անցնելով բևեռային կոորդինատների՝

$$P=\frac{3}{8\pi}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{1}(2-\rho)\,\rho\,d\rho=\frac{1}{2},$$

417. $(X,\ Y)$ պատահական մեծությունների համակարգի բաշխման մակերևույթը R շառավղով կիսասֆերա է, որի կենտրոնը գտնվում է կոորդինատների սկզբնակետում: Գտնել համակարգի դիֆերենցիալ ֆունկցիան:

Պատ.՝ $f(x,\ y)=\frac{3}{2\pi R^3}\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}$, եթե $x^2+y^2\leqslant R^2$ և $f(x,\ y)=0$, եթե $x^2+y^2>R^2$:

418. Տրված է երկու պատահական մեծությունների համակարգի դիֆերենցիալ ֆունկցիան՝ $f(x,\ y)=$ $=\frac{C}{(9+x^2)(16+y^2)}$: Որոշել C հաստատունը:

Պատ.՝ $C = \frac{12}{\pi^2}$։

419. *Տրված է (X, Y) երկու պատահական մեծությունների համակարգի դիֆերենցիալ ֆունկցիան՝* $f(x, y) = \frac{C}{(x^2 + y^2 + 1)^3}$։ *Գտնել C հաստատունը։*

Ցուցում։ Անցնել բևեռային կոորդինատներին։

Պատ.՝ $C = \frac{2}{\pi}$։

420. *Առաջին քառորդում տրված է երկու պատահական մեծությունների համակարգի ինտեգրալ ֆունկցիան՝*

$$F(x, y) = 1 - 2^{-x} - 2^{-y} + 2^{-x-y};$$

Առաջին քառորդից դուրս $F(x, y) = 0$։ *Գտնել ա) համակարգի դիֆերենցիալ ֆունկցիան, բ) (X, Y) պատահական կետը* A (1, 3) B (3, 3) C (2, 8) *գագաթներով եռանկյան մեջ ընկնելու հավանականությունը։*

Պատ.՝ *ա)* $f(x, y) = \ln^2 2 \cdot 2^{-x-y}$ *առաջին քառորդում, այդ քառորդից դուրս* $f(x, y) = 0$, *բ)* $P = \frac{5}{3} \cdot 2^{12}$։

§ 2. Դիսկրետ երկչափ պատահական մեծության բաղադրիչների հավանականությունների պայմանական բաշխման օրենքները

Ենթադրենք X և Y բաղադրիչները դիսկրետ են և նրանց հնարավոր արժեքներն են՝ $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $y_1, y_2, \ldots, y_m$։

X բաղադրիչի պայմանական բաշխում, *երբ* $Y = y_j$ *(j-ն պահպանում է նույն արժեքը X-ի բոլոր հնարավոր արժեքների դեպքում) կոչվում է պայմանական հավանականությունների հետևյալ համախումբը՝*

$$P(x_1 | y_j),\ p(x_2 | y_j),\ \ldots,\ p(x_n | y_j)։$$

Համանմանորեն սահմանվում է Y-ի պայմանական բաշխումը։

Բաղադրիչի պայմանական հավանականությունները հաշվում են հետևյալ բանաձևերով՝

$$p(x_i \mid y_j) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)}, \qquad p(y_j \mid x_i) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i)},$$

Հաշվումները ստուգելու համար նպատակահարմար է համոզվել, որ պայմանական բաշխման հավանականությունների գումարը հավասար է մեկի։

421. *Տրված է դիսկրետ երկչափ պատահական մեծությունը՝*

Y \ X	$x_1=2$	$x_2=5$	$x_3=8$
$y_1=0{,}4$	0,15	0,30	0,35
$y_2=0{,}8$	0,05	0,12	0,03

Գտնել՝ ա) բաղադրիչների ոչ պայմանական բաշխումները, բ) X *բաղադրիչի պայմանական բաշխումը, այն պայմանով, որ* Y *բաղադրիչը ընդունել է* $y_1=0{,}4$ *արժեքը, գ)* Y*-ի պայմանական բաշխումը, պայմանով, որ* $X=x_2=5$։

Լուծում։ ա) Գումարելով հավանականությունները «ըստ սյուների», կազմենք X*-ի բաշխման օրենքը՝*

X	2	5	8
p	0,20	0,42	0,38

Գումարելով հավանականությունները «ըստ տողերի» գտնում ենք Y*-ի բաշխման օրենքը՝*

Y	0,4	0,8
p	0,80	0,20

բ) Հաշվենք X*-ի հնարավոր արժեքների համապատասխան պայմանական հավանականությունները, այն պայմանով, որ* Y *բաղադրիչը ընդունել է* $y_1 = 0{,}4$ *արժեքը՝*

$$p(x_1/y_1)=\frac{p(x_1,\ y_1)}{p(y_1)}=\frac{0{,}15}{0{,}80}=\frac{3}{16},$$

$$p(x_2/y_1)=\frac{p(x_2,\ y_1)}{p(y_1)}=\frac{0{,}30}{0{,}80}=\frac{3}{8},$$

$$p(x_3/y_1)=\frac{p(x_3,\ y_1)}{p(y_1)}=\frac{0{,}35}{0{,}80}=\frac{7}{16}։$$

Կազմենք X*-ի որոնելի պայմանական բաշխման օրենքը՝*

X	2	5	8
$p(X/y_1)$	3/16	3/8	7/16

Ստուգում՝ $3/16+3/8+7/16=1$։

գ) Նման ձևով կգտնենք Y*-ի պայմանական բաշխման օրենքը՝*

Y	0,4	0,8
$p(Y/x_2)$	5/7	2/7

Ստուգում՝ $\frac{5}{7}+\frac{2}{7}=1$։

422. *Տրված է երկչափ դիսկրետ պատահական մեծությունը՝*

Y \ X	3	6
10	0,25	0,10
14	0,15	0,05
18	0,32	0,13

Գտնել ա) X*-ի պայմանական բաշխման օրենքը, այն պայմանով, որ* $Y=10$, *բ)* Y*-ի պայմանական բաշխման օրենքը, այն պայմանով, որ* $X=6$։

Պատ.՝ *ա)*

X	3	6
$p(X/10)$	5/7	2/7

; *բ)*

Y	10	14	17
$p(Y/6)$	5/14	5/28	13/28

§ 3. Անընդհատ երկչափ պատահական մեծության բաղադրիչների դիֆերենցիալ և պայմանական դիֆերենցիալ ֆունկցիաների որոշումը

Բաղադրիչներից մեկի դիֆերենցիալ ֆունկցիան հավասար է համակարգի դիֆերենցիալ ֆունկցիայի անվերջ սահմաններով անիսկական ինտեգրալին, ըստ որում ինտեգրման փոփոխականը համապատասխանում է մյուս բաղադրիչին։

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,dy, \quad f_2(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,dx,$$

Այստեղ ենթադրվում է, որ բաղադրիչներից յուրաքանչյուրի հնարավոր արժեքները պատկանում են ամբողջ թվային առանցքին, իսկ եթե հնարավոր արժեքները պատկանում են մի վերջավոր միջակայքի, ապա որպես ինտեգրման սահմաններ վերցվում են համապատասխան վերջավոր թվերը։

X բաղադրիչի $\varphi(x|y)$ պայմանական դիֆերենցիալ ֆունկցիա, *երբ* $Y=y$, *կոչվում է համակարգի դիֆերենցիալ ֆունկցիայի հարաբերությունը* Y-*ի դիֆերենցիալ ֆունկցիային*՝

$$\varphi(x/y)=\frac{f(x, y)}{f_2(y)}=\frac{f(x, y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,dx},$$

Նման ձևով որոշվում է Y բաղադրիչի պայմանական դիֆերենցիալ ֆունկցիան՝

$$\psi(y/x)=\frac{f(x; y)}{f_1(x)}=\frac{f(x, y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,dy},$$

Եթե X *և* Y *պատահական մեծությունների պայմանական դիֆերենցիալ ֆունկցիաները հավասար են նրանց ոչ պայմանական դիֆերենցիալ ֆունկցիաներին, ապա այդպիսի մեծությունները* անկախ են։

Երկչափ անընդհատ պատահական մեծության բաշխումը կոչվում է հավասարաչափ, *եթե տիրույթում, որին պատկանում են* (x, y) *բոլոր հնարավոր արժեքները, դիֆերենցիալ ֆունկցիան պահպանում է հաստատուն արժեք*։

423. *Տրված է անընդհատ երկչափ պատահական մեծության դիֆերենցիալ ֆունկցիան՝*

$$f(x,\ y) = \frac{1}{\pi}\, e^{-\frac{1}{2}(x^2+2xy+5y^2)}.$$

Գտնել՝ ա) բաղադրիչների դիֆերենցիալ ֆունկցիաները, բ) բաղադրիչների պայմանական դիֆերենցիալ ֆունկցիաները:

Լուծում: ա) Գտնենք X*-ի դիֆերենցիալ ֆունկցիան՝*

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\ y)\, dy = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2+2xy+5y^2)}\, dy.$$

Ինտեգրման y *փոփոխականից չկախված* $e^{-\frac{x^2}{2}}$ *արտադրիչը դուրս բերենք ինտեգրալի նշանից և մնացած աստիճանացույցը լրացնենք մինչև լրիվ քառակուսի: Այդ դեպքում*

$$f_1(x) = \frac{1}{\pi}\, e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot e^{\frac{x^2}{10}} \sqrt{\frac{2}{5}} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\,y + \sqrt{\frac{2}{5}}\,x\right)^2} d\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\,y + \sqrt{\frac{2}{5}}\,x\right).$$

Հաշվի առնելով, որ Պուասոնի ինտեգրալը $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\, du = \sqrt{\pi}$, *կստանանք,*

$$f_1(x) = \sqrt{\frac{2}{5\pi}}\, e^{-0{,}4x^2},$$

Նման ձևով կգտնենք Y*-ի դիֆերենցիալ ֆունկցիան՝*

$$f_2(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-2y^2},$$

բ) Գտնենք բաղադրիչների պայմանական դիֆերենցիալ ֆունկցիաները: Կատարելով տարրական հաշվումներ, կստանանք՝

$$\varphi(x/y) = \frac{f(x,\ y)}{f_2(y)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-0{,}5(x+y)^2},$$

$$\psi(y/x) = \frac{f(x,\ y)}{f_1(x)} = \frac{5}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-0{,}1(x+5y)^2}.$$

424. *Անընդհատ երկչափ պատահական մեծության դիֆերենցիալ ֆունկցիան*

$$f(x,\ y) = C\, e^{-x^2-2xy-4y^2}.$$

Գտնել՝ ա) C հաստատուն արտադրիչը, բ) բաղադրիչների դիֆերենցիալ ֆունկցիաները, գ) բաղադրիչների պայմանական դիֆերենցիալ ֆունկցիաները։

Պատ.՝ *ա)* $C = \frac{\sqrt{3}}{\pi}$, *բ)* $f_1(x) = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\pi}}\, e^{-0{,}75x^2}$,

$$f_2(y) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}}\, e^{-3y^2},\ \text{գ)}\ \varphi(x \mid y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, e^{-(x+y)^2},$$

$$\psi(y \mid x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-0{,}25\,(x+4y)^2}.$$

425. *Անընդհատ երկչափ պատահական մեծության դիֆերենցիալ ֆունկցիան* $f(x,\ y) = \cos x \cos y$, $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$ *քառակուսու մեջ, քառակուսուց դուրս* $f(x,\ y) = 0$։ *Ապացուցել, որ* X *և* Y *բաղադրիչներն անկախ են։*

Ցուցում։ Համոզվել, որ բաղադրիչների ոչ պայմանական դիֆերենցիալ ֆունկցիաները հավասար են համապատասխան պայմանական ֆունկցիաներին։

426. (X, Y) *անընդհատ երկչափ պատահական մեծությունը բաշխված է հավասարաչափ* 2a *և* 2b *կողմերով ուղղանկյան ներսում, որի սիմետրիայի կենտրոնը գտնվում է կոորդինատների սկզբնակետում, իսկ կողմերը զուգահեռ են առանցքներին։ Գտնել՝ ա) համակարգի դիֆերենցիալ ֆունկցիան, բ) բաղադրիչների դիֆերենցիալ ֆունկցիաները։*

Պատ.՝ ա) $f(x, y)=\frac{1}{4ab}$ տրված ուղղանկյան ներսում, նրանից դուրս $f(x, y)=0$, բ) $f_1(x)=\frac{1}{2a}$, երբ $|x| \leqslant a$, $f_1(x)=0$, երբ $|x|>a$, $f_2(y)=\frac{1}{2b}$, երբ $|y| \leqslant b$, $f_2(y)=0$, երբ $(y)>b$։

427*. Անընդհատ երկչափ պատահական մեծությունը բաշխված է հավասարաչափ $O(0, 0)$, $A(0, 4)$, $B(3, 4)$, $C(6, 0)$ գագաթներով ուղղանկյուն սեղանի ներսում։ Գտնել՝ ա) համակարգի դիֆերենցիալ ֆունկցիան, բ) բաղադրիչների դիֆերենցիալ ֆունկցիաները։

Պատ.՝ ա) $f(x, y)=\frac{1}{18}$ սեղանի ներսում, նրանից դուրս $f(x, y)=0$,

բ)
$$f_1(x)=\begin{cases} 0, & \text{երբ} \quad x<0, \\ \frac{2}{9}, & \text{երբ} \quad 0<x<3, \\ -\frac{2}{27}x+\frac{4}{9}, & \text{երբ} \quad 3<x<6, \\ 0 & \text{երբ} \quad x>6, \end{cases}$$

$$f_2(y)=\begin{cases} 0, & \text{երբ} \quad y<0, \\ -\frac{1}{24}y+\frac{1}{3} & \text{երբ} \quad 0<y<4, \\ 0 & \text{երբ} \quad y>4։ \end{cases}$$

428. (X, Y) անընդհատ երկչափ պատահական մեծությունը բաշխված է հավասարաչափ $O(0, 0)$, $A(0, 8)$, $B(8, 0)$ գագաթներով ուղղանկյուն եռանկյան մեջ։ Գտնել՝ ա) համակարգի դիֆերենցիալ ֆունկցիան, բ) բաղադրիչների դիֆերենցիալ և պայմանական դիֆերենցիալ ֆունկցիաները։

Պատ.՝ ա) $f(x, y)=\frac{1}{32}$, բ) $f_1(x)=\frac{1}{4}-\frac{1}{32}x \quad (0<x<8)$, $f_2(y)=\frac{1}{4}-\frac{1}{32}y$, $(0<y<8)$, $\varphi(x \mid y)=\frac{1}{8-y} \quad (0<y<8)$,

$\psi(y \mid x) = \frac{1}{8-x}$ $(0 < x < 8)$։ Նշված միջակայքերից դուրս բոլոր ֆունկցիաները հավասար են՝ զրոյի։

429*. (X, Y) անընդհատ երկչափ պատահական մեծությունը բաշխված է հավասարաչափ A(—6, 0), B(—3, 4), C(3, 4), D(6, 0) սեղանի մեջ։ Գտնել՝ ա) համակարգի դիֆերենցիալ ֆունկցիան, բ) բաղադրիչների դիֆերենցիալ ֆունկցիաները։

Պատ.՝ ա) $f(x, y) = \frac{1}{36}$,

բ)

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{եթե} \quad x < -6, \\ \frac{1}{27}x + \frac{2}{9}, & \text{եթե} \quad -6 < x < -3, \\ \frac{1}{9}, & \text{եթե} \quad -3 < x < 3, \\ -\frac{1}{27}x + \frac{2}{9}, & \text{եթե} \quad 3 < x < 6, \\ 0, & \text{եթե} \quad x > 6 \end{cases}$$

$$f_2(y) = \begin{cases} 0, & \text{եթե} \quad y < 0, \\ -\frac{1}{24}y + \frac{1}{3}, & \text{եթե} \quad 0 < y < 4, \\ 0, & \text{եթե} \quad y > 4 \end{cases}$$

§ 4. Երկու անընդհատ պատահական մեծությունների համակարգի թվային բնութագրիչները

Իմանալով բաղադրիչների դիֆերենցիալ ֆունկցիաները, կարելի է գտնել մաթեմատիկական սպասումները և դիսպերսիաները՝

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_1(x)\,dx, \quad M(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_2(y)\,dy,$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - M(X)]^2 f_1(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_1(x)\,dx - [M(X)]^2,$$

$$D(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} [y - M(Y)]^2 f_2(y)\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_2(y)\,dy - [M(Y)]^2,$$

Երբեմն ավելի հարմար է օգտվել համակարգի դիֆերենցիալ ֆունկցիան պարունակող բանաձևերից (կրկնակի ինտեգրալները հաշվվում են համակարգի հնարավոր արժեքների տիրույթով)՝

$$M(X) = \iint x f(x, y)\,dx\,dy, \quad M(Y) = \iint y f(x, y)\,dx\,dy,$$

$$D(X) = \iint [x - M(X)]^2 f(x, y)\,dx\,dy = \iint x^2 f(x, y)\,dx\,dy - [M(X)]^2,$$

$$D(Y) = \iint [y - M(Y)]^2 f(x, y)\,dx\,dy = \iint y^2 f(x, y)\,dx\,dy - [M(Y)]^2$$

(X, Y) համակարգի $k+s$ կարգի սկզբնական $\nu_{k,s}$ մոմենտ կոչվում է X^kY^s արտադրյալի մաթեմատիկական սպասումը՝

$$\nu_{k,s} = M[X^kY^s].$$

Մասնավորապես, $\nu_{1,0} = M(X)$, $\nu_{0,1} = M(Y)$։

(X, Y) համակարգի $k+s$ կարգի կենտրոնական $\mu_{k,s}$ մոմենտ կոչվում է համապատասխան շեղումների k և s աստիճանների արտադրյալի մաթեմատիկական սպասումը՝

$$\mu_{k,s} = M\{[X - M(X)]^k [Y - M(Y)]^s\}.$$

Մասնավորապես,

$$\mu_{1,0} = M[X - M(X)] = 0, \quad \mu_{0,1} = M[Y - M(Y)] = 0,$$

$$\mu_{2,0} = M[X - M(X)]^2 = D(X), \quad \mu_{0,2} = M[Y - M(Y)]^2 = D(Y)։$$

(X, Y) համակարգի μ_{xy} կոռելյացիոն մոմենտ կոչվում է $1+1$ կարգի $\mu_{1,1}$ կենտրոնական մոմենտը՝

$$\mu_{xy} = M\{[X - M(X)][Y - M(Y)]\}.$$

X և Y մեծությունների կոռելյացիայի գործակից կոչվում է կոռելյացիոն մոմենտի հարաբերությունը այդ մեծությունների միջին քառակուսային շեղումների արտադրյալին՝

$$r_{xy} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x \sigma_y},$$

կոռելյացիայի գործակիցը վերացական մեծություն է, ընդ որում $|r_{xy}| \leq 1$։ Կոռելյացիայի գործակիցը ծառայում է որպես X և Y մեծությունների միջև գծային կապի սերտության գնահատական՝ որքան մոտ է կոռելյացիայի գործակցի բացարձակ արժեքը 1-ի, այնքան կապը ուժեղ է, որքան մոտ է կոռելյացիայի գործակիցը 0-ի, այնքան կապը թույլ է։

Պատահական մեծությունները կոչվում են կոռելացված, եթե նրանց կոռելյացիոն մոմենտը 0-ից տարբեր է։

Պատահական մեծությունները կոչվում են չկոռելացված, եթե նրանց կոռելյացիոն մոմենտը հավասար է 0-ի։

Երկու կոռելացված մեծությունները անկախ չեն։ Եթե երկու մեծությունները անկախ չեն, ապա նրանք կարող են լինել ինչպես կոռելացված, այնպես էլ չկոռելացված։

Երկու մեծությունների անկախությունից հետևում է նրանց չկոռելացված լինելը, բայց չկոռելացված լինելուց դեռ չի հետևում այդ մեծությունների անկախությունը (նորմալ բաշխված մեծությունների չկոռելացված լինելուց հետևում է նրանց անկախությունը)։

Անընդհատ X և Y մեծությունների կոռելյացիոն մոմենտը կարելի է գտնել

$$\mu_{xy}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}[X-M(X)][Y-M(Y)]\ f(x,\ y)\,dx\,dy \text{ կամ}$$

$$\mu_{xy}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,\ y)\,dx\,dy-M(X)\cdot M(Y)$$

բանաձևերով։

430. Տրված է (X, Y) անընդհատ երկչափ պատահական մեծության դիֆերենցիալ ֆունկցիան.

$$f(x,\ y)=\begin{cases}4xye^{-x^2-y^2}, & (x>0,\ y>0),\\ 0\qquad, & (x<0 \text{ կամ } y<0)։\end{cases}$$

Գտնել՝ ա) X և Y բաղադրիչների մաթեմատիկական սպասումները, բ) բաղադրիչների դիսպերսիաները։

Լուծում։ ա) Սկզբից գտնենք X-ի դիֆերենցիալ ֆունկցիան՝

$$f_1(x)=\int_0^{\infty}f(x,\ y)\,dy=4xe^{-x^2}\int_0^{\infty}ye^{-y^2}\,dy=2xe^{-x^2}\quad(x>0)։$$

Նույն կերպ ստանում ենք

$$f_2(y)=2ye^{-y^2},\quad (y>0)։$$

Գտնենք X բաղադրիչի մաթեմատիկական սպասումը՝

$$M(X)=\int_0^{\infty}xf_1(x)\,dx=\int_0^{\infty}x(2xe^{-x^2})\,dx։$$

Ինտեգրելով մասերով և հաշվի առնելով, որ Պուասոնի ինտեգրալը. $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, կստանանք $M(X) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, ակնհայտ է, որ $M(Y) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$,

բ) Գտնենք X-ի դիսպերսիան՝

$$D(X) = \int_0^\infty x^2 f_1(x)\,dx - [M(X)]^2 =$$

$$= \int_0^\infty x^2(2xe^{-x^2})\,dx - \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right]^2 = 1 - \frac{\pi}{4},$$ ակնհայտ է, որ $D(Y) = 1 - \frac{\pi}{4}$,

431. Տրված է (X, Y) երկչափ պատահական մեծության դիֆերենցիալ ֆունկցիան՝

$$f(x, y) = \begin{cases} 36xye^{-(x^2+y^2)}, & (x>0,\ y>0) \\ 0, & (x<0 \text{ կամ } y<0), \end{cases}$$

Գտնել բաղադրիչների մաթեմատիկական սպասումները և դիսպերսիաները։

Պատ.՝ $M(X) = M(Y) = \frac{\sqrt{3\pi}}{6}$, $D(X) = D(Y) = \frac{4-\pi}{12}$,

432. Տրված է (X, Y) երկչափ անընդհատ պատահական մեծության դիֆերենցիալ ֆունկցիան՝ $f(x, y) = 2\cos x \cos y$ $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$, $0 \leq y \leq \frac{\pi}{4}$ քառակուսու մեջ, քառակուսուց դուրս՝ $f(x, y) = 0$։ Գտնել բաղադրիչների մաթեմատիկական սպասումները։

Պատ.՝ $M(X) = M(Y) = \frac{\pi + 4 - 4\sqrt{2}}{4}$,

433. Տրված է (X, Y) երկչափ անընդհատ պատահական մեծության դիֆերենցիալ ֆունկցիան՝ $f(x, y) = \frac{1}{2}\sin(x+y)$,

$0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$ *քառակուսու մեջ, քառակուսուց դուրս՝* $f(x, y) = 0$։ *Գտնել բաղադրիչների մաթեմատիկական սպասումները և դիսպերսիաները։*

Պատ.՝ $M(X) = M(Y) = \frac{\pi}{4}$, $D(X) = D(Y) = \frac{\pi^2 + 8\pi - 32}{16}$։

434. *Տրված է* (X, Y) *երկչափ անընդհատ պատահական մեծության դիֆերենցիալ ֆունկցիան՝* $f(x, y) = \frac{1}{4} \sin x \sin y$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $0 \leqslant y \leqslant \pi$ *քառակուսու մեջ, քառակուսուց դուրս* $f(x, y) = 0$։ *Գտնել՝ ա) բաղադրիչների մաթեմատիկական սպասումները և դիսպերսիաները, բ) կոռելյացիոն մոմենտը։*

Պատ.՝ *ա)* $M(X) = M(Y) = \frac{\pi}{2}$, $D(X) = D(Y) = \pi^2 - 4$, *բ)* $\mu_{xy} = 0$։

435. *Տրված են* (X, Y) *անընդհատ երկչափ պատահական մեծության անկախ բաղադրիչների դիֆերենցիալ ֆունկցիաները՝*

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{երբ } x < 0, \\ 5e^{-5x}, & \text{երբ } x \geqslant 0, \end{cases} \qquad f_2(y) = \begin{cases} 0, & \text{երբ } y < 0, \\ 2e^{-2y}, & \text{երբ } y \geqslant 0 \end{cases}$$

Գտնել՝ ա) համակարգի դիֆերենցիալ ֆունկցիան, բ) համակարգի ինտեգրալ ֆունկցիան։

Ցուցում։ Եթե համակարգի բաղադրիչները անկախ են, ապա համակարգի դիֆերենցիալ և ինտեգրալ ֆունկցիաները հավասար են համապատասխանաբար բաղադրիչների դիֆերենցիալ և ինտեգրալ ֆունկցիաների արտադրյալին։

Պատ.՝ *ա)* $f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{երբ } x < 0 \text{ կամ } y < 0, \\ 10e^{-(5x+2y)}, & \text{երբ } x > 0, \quad y > 0, \end{cases}$

բ) $F(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{երբ } x < 0, \text{ կամ } y < 0, \\ (1 - e^{-5x})(1 - e^{-2y}), & \text{երբ } x > 0, \ y > 0 \end{cases}$

436. (X, Y) *երկչափ անընդհատ պատահական մեծությունը բաշխված է հավասարաչափ* r *շառավղով շրջանում,* որի կենտրոնը գտնվում է սկզբնակետում: Ապացուցել, որ X-ը և Y-ը անկախ չեն, բայց չկոռելացված են:

Ցուցում։ Համեմատել բաղադրիչների պայմանական և ոչ պայմանական դիֆերենցիալ ֆունկցիաները, համոզվել, որ կոռելյացիոն մոմենտը հավասար է 0-ի։

$$\text{Պատ.՝ } f_1(x)=\frac{2}{\pi r^2}\sqrt{r^2-x^2},\quad \varphi(x\mid y)=\frac{1}{2\sqrt{r^2-y^2}},$$

$$f_2(y)=\frac{2}{\pi r^2}\sqrt{r^2-y^2},\quad \psi(y\mid x)=\frac{1}{2\sqrt{r^2-x^2}}.$$

437. Ապացուցել, որ եթե (X, Y) համակարգի դիֆերենցիալ ֆունկցիան կարելի է ներկայացնել երկու ֆունկցիաների արտադրյալի տեսքով, որոնցից մեկը կախված է միայն x-ից, իսկ մյուսը՝ միայն y-ից, ապա X և Y մեծությունները անկախ են։

Լուծում։ Պայմանի համաձայն

$$f(x,\ y)=\varphi(x)\,\psi(y). \qquad (*)$$

Գտնենք բաղադրիչների դիֆերենցիալ ֆունկցիաները՝

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\ y)\,dy=\varphi(x)\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(y)\,dy, \qquad (**)$$

$$f_2(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\ y)\,dx=\psi(y)\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,dx. \qquad (***)$$

Արտահայտենք $\varphi(x)$-ը՝ (**)-ից և $\psi(y)$-ը՝ (***)-ից

$$\varphi(x)=\frac{f_1(x)}{\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(y)\,dy},\qquad \psi(y)=\frac{f_2(y)}{\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,dx}.$$

Համաձայն (*)-ի

$$f(x,\ y)=f_1(x)\cdot f_2(y)\cdot\frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(y)\,dy\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,dx},$$

Հաշվի առնելով, որ դիֆերենցիալ ֆունկցիայի երկրորդ հատկության համաձայն

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\ y)\,dx\,dy = 1,$$

հետևաբար,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,\psi(y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(y)\,dy = 1,$$

վերջնականապես կստանանք

$$f(x,\ y) = f_1(x) \cdot f_2(y)։$$

Այսպիսով, դիտարկվող երկչափ պատահական մեծության դիֆերենցիալ ֆունկցիան հավասար է բաղադրիչների դիֆերենցիալ ֆունկցիաների արտադրյալին։ Այստեղից հետևում է, որ X*-ը և* Y*-ը անկախ են, ինչ և պահանջվում էր ապացուցել։*

438. *Ապացուցել, որ եթե* X*-ը և* Y*-ը կախված են գծայնորեն՝* $Y = aX + b$*, ապա կոռելյացիայի գործակցի բացարձակ արժեքը հավասար է մեկի։*

Լ ու ծ ու մ։ Համաձայն կոռելյացիայի գործակցի սահմանման

$$r_{xy} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x \sigma_y},$$

որտեղ

$$\mu_{xy} = M\{[X - M(X)][Y - M(Y)]\}։ \qquad (*)$$

Գտնենք Y*-ի մաթեմատիկական սպասումը՝*

$$M(Y) = M(aX + b) = aM(X) + b։ \qquad (**)$$

Տեղադրելով (**)-ը (*)-ի մեջ, տարրական ձևափոխություններից հետո կստանանք.

$$\mu_{xy} = aM[X - M(X)]^2 = aD(X) = a\sigma_x^2,$$

Հաշվի առնելով, որ

$$Y - M(Y) = (aX + b) - (aM(X) + b) = a[X - M(X)],$$

գտնենք Y-ի դիսպերսիան՝

$$D(Y) = M[Y - M(Y)]^2 = a^2 M[X - M(X)]^2 = a^2 \sigma_x^2։$$

Այստեղից $\sigma_y = |a| \sigma_x$։

Հետևաբար, կոռելյացիայի գործակիցը

$$r_{xy} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{a\sigma_x^2}{\sigma_x(|a|\sigma_x)} = \frac{a}{|a|}։$$

Եթե $a > 0$, ապա $r_{xy} = 1$; եթե $a < 0$, ապա $r_{xy} = -1$։

Այսպիսով, $|r_{xy}| = 1$, ինչ և պահանջվում էր ապացուցել։

Երրորդ մաս

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ՎԻՃԱԿԱԳՐՈՒԹՅԱՆ ՏԱՐՐԵՐԸ

ԻՆՆԵՐՈՐԴ ԳԼՈՒԽ

ԸՆՏՐԱՆՔԱՅԻՆ ԵՂԱՆԱԿ

§ 1. Ընտրանքի վիճակագրական բաշխումը

Ենթադրենք X քանակական (դիսկրետ կամ անընդհատ) հայտանիշի ուսումնասիրման համար գլխավոր համախմբությունից հանված է n ծավալի x_1, x_2, ..., x_n ընտրանք։ X հայտանիշի դիտված x_i արժեքները կոչվում են տարբերակներ, *իսկ աճման կարգով գրված տարբերակների հաջորդականությունը՝* վարիացիոն շարք։ *Վարիացիոն շարքի x_i տարբերակների և նրանց համապատասխան n_i հաճախությունների (բոլոր հաճախությունների գումարը հավասար է ընտրանքի n ծավալին) կամ հարաբերական w_i հաճախությունների համախումբը անվանում են* ընտրանքի վիճակագրական բաշխում։ *Ընտրանքի վիճակագրական բաշխումը կարելի է տալ նաև, հաջորդական միջակայքերի և համապատասխան հաճախությունների տեսքով (միջակայքի հաճախությունը որոշվում է որպես այդ միջակայքին պատկանող տարբերակների հաճախությունների գումար)։*

439. *1) Ընտրանքը տրված է հաճախությունների բաշխման տեսքով՝*

x_i	2	5	7
n_i	1	3	6

Գտնել հարաբերական հաճախությունների բաշխումը։

Լուծում։ Հաշվենք ընտրանքի ծավալը՝

$$n = 1 + 3 + 6 = 10,$$

Հաշվենք հարաբերական հաճախությունները՝

$$w_1 = \frac{1}{10} = 0{,}1; \quad w_2 = \frac{3}{10} = 0{,}3; \quad w_3 = \frac{6}{10} = 0{,}6:$$

Կազմենք հարաբերական հաճախությունների որոնելի բաշխումը՝

x_i	2	5	7
w_i	0,1	0,3	0,6

Ստուգում: $0{,}1 + 0{,}3 + 0{,}6 = 1$:

440. *Ընտրանքը տրված է հաճախությունների բաշխման տեսքով՝*

x_i	4	7	8	12
n_i	5	2	3	10

Գտնել հարաբերական հաճախությունների բաշխումը:

Պատ.՝

x_i	4	7	8	12
w_i	0,25	0,10	0,15	0,50

§ 2. Ընտրանքային բաշխման ֆունկցիա

Ընտրանքային *բաշխման ֆունկցիա (ընտրանքի բաշխման ֆունկցիա) կոչվում է* $F^*(x)$ *ֆունկցիան, որը* x*-ի յուրաքանչյուր արժեքի համար հավասար է* $X < x$ *պատահույթի հարաբերական հաճախությանը՝*

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n},$$

որտեղ n_x*-ը* x*-ից փոքր տարբերակների թիվն է,* n*-ը՝ ընտրանքի ծավալը:*

Ընտրանքային ֆունկցիան օժտված է հետևյալ հատկություններով՝

Հատկություն 1. Ընտրանքային ֆունկցիայի արժեքները պատկանում են $[0, 1]$ հատվածին:

Հատկություն 2. $F^*(x)$-ը չնվազող ֆունկցիա է:

Հատկություն 3. Եթե x_1-ը ամենափոքր տարբերակն է, իսկ x_n-ը՝ ամենամեծը, ապա $F^*(x) = 0$, երբ $x \leqslant x_1$ և $F^*(x) = 1$, երբ $x > x_n$:

441. Գտնել հետևյալ ընտրանքի բաշխմանը համապատասխան ընտրանքային ֆունկցիան։

x_i	1	4	6
n_i	10	15	25

Լուծում։ Գտնենք ընտրանքի ծավալը՝

$$n = 10 + 15 + 25 = 50.$$

Ամենափոքր տարբերակը հավասար է 1-ի, հետևաբար,

$$F^*(x) = 0, \quad \text{երբ} \quad x \leqslant 1.$$

$X < 4$, այսինքն $x_1 = 1$ արժեքը դիտվել է 10 անգամ, հետևաբար

$$F^*(x) = \frac{10}{50} = 0{,}2, \quad \text{երբ} \quad 1 < x \leqslant 4.$$

$x < 6$, այսինքն $x_1 = 1$ և $x_2 = 4$ արժեքները դիտվել են $10 + 15 = 25$ անգամ, հետևաբար՝

$$F^*(x) = \frac{25}{50} = 0{,}5, \quad \text{երբ} \quad 4 < x \leqslant 6.$$

Քանի որ $x = 6$ — ամենամեծ տարբերակն է, ապա

$$F^*(x) = 1, \quad \text{երբ} \quad x > 6.$$

Կազմենք որոնելի ընտրանքային ֆունկցիայի արտահայտությունը՝

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{երբ} \quad x \leqslant 1, \\ 0{,}2, & \text{երբ} \quad 1 < x \leqslant 4, \\ 0{,}5, & \text{երբ} \quad 4 < x \leqslant 6, \\ 1, & \text{երբ} \quad x > 6. \end{cases}$$

Այդ ֆունկցիայի գրաֆիկը պատկերված է նկ. 11-ում։

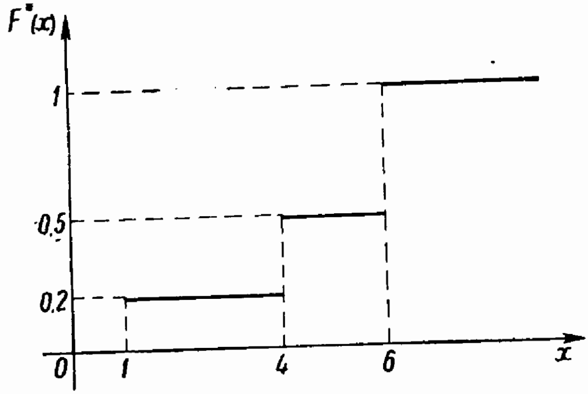
442. Գտնել տրված ընտրանքին համապատասխան բաշխման ընտրանքային ֆունկցիան.

ա)

x_i	2	5	7	8
n_i	1	3	2	4;

բ)

x_i	4	7	8
n_i	5	2	3:



Նկ. 11

Պատ.՝ ա)

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{երբ} \quad x \leqslant 2, \\ 0{,}1 & \text{երբ} \quad 2 < x \leqslant 5, \\ 0{,}4 & \text{երբ} \quad 5 < x \leqslant 7, \\ 0{,}6 & \text{երբ} \quad 7 < x \leqslant 8, \\ 1 & \text{երբ} \quad x > 8, \end{cases}$$

բ)

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{երբ} \quad x \leqslant 4, \\ 0{,}4 & \text{երբ} \quad 4 < x \leqslant 7, \\ 0{,}7 & \text{երբ} \quad 7 < x \leqslant 8, \\ 1 & \text{երբ} \quad x > 8 \end{cases}$$

§ 3. Պոլիգոն և հիստոգրամ

Ա. Դիսկրետ բաշխումով X հատկանիշ

Հաճախությունների պոլիգոն կոչվում է այն բեկյալը, որի հատվածները միացնում են (x_1, n_1), (x_2, n_2), ..., (x_k, n_k) կետերը, որտեղ x_i-երը՝ ընտրանքի տարբերակներն են, իսկ n_i-երը՝ նրանց համապատասխան հաճախությունները:

Հարաբերական հաճախությունների պոլիգոն *կոչվում է այն բեկյալը, որի հատվածները միացնում են* (x_1, w_1), (x_2, w_2), ..., (x_k, w_k) *կետերը, որտեղ* x_i*-երը ընտրանքի տարբերակներն են, իսկ* w_i*-երը՝ նրանց համապատասխան հարաբերական հաճախությունները։*

բ. Անընդհատ բաշխումով X հայտանիշ:

Երբ հայտանիշը բաշխված է անընդհատ, բոլոր դիտված արժեքները պարունակող միջակայքը տրոհում են h *երկարության մի շարք մասնակի միջակայքերի և որոշում են* i*-րդ միջակայքում ընկած տարբերակների հաճախությունների* n_i *գումարը։* Հաճախությունների հիստոգրամ *անվանում են այն ուղղանկյուններից կազմված աստիճանաձև պատկերը, որոնց հիմքերը* h *երկարությամբ մասնակի միջակայքերն են, իսկ բարձրությունները հավասար են համապատասխան* $\frac{n_i}{h}$ *(հաճախությունների խտություն) հարաբերությանը։* i*-րդ մասնակի ուղղանկյան մակերեսը հավասար է* $h\cdot\frac{n_i}{h}=n_i$, i*-րդ միջակայքն ընկած տարբերակների հաճախությունների գումարին։ Հաճախությունների հիստոգրամի մակերեսը հավասար է բոլոր հաճախությունների գումարին, այսինքն՝ ընտրանքի ծավալին։*

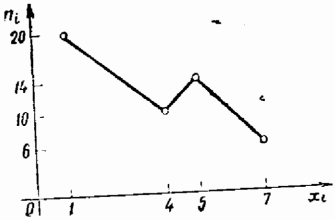
Հարաբերական հաճախությունների հիստոգրամ *կոչվում է այն ուղղանկյուններից կազմված աստիճանաձև պատկերը, որոնց հիմքերը* h *երկարությամբ մասնակի միջակայքերն են, իսկ բարձրությունները հավասար են համապատասխան* $\frac{w_i}{h}$ *(հարաբերական հաճախությունների խտություն) հարաբերությանը։* i*-րդ մասնակի ուղղանկյան մակերեսը հավասար է* $h\cdot\frac{w_i}{h}=w_i$, i*-րդ միջակայքն ընկած տարբերակների հարաբերական հաճախությունների գումարին։ Հարաբերական հաճախությունների հիստոգրամի մակերեսը հավասար է բոլոր հարաբերական հաճախությունների գումարին, այսինքն՝ մեկի։*

443. *Ընտրանքի տրված բաշխումով կառուցել հաճախությունների պոլիգոնը։*

x_i	1	4	5	7
n_i	20	10	14	6

Լուծում։ Աբսցիսների առանցքի վրա տեղադրենք x_i *տարբերակները, իսկ օրդինատների առանցքի վրա՝ նրանց համապատասխան* n_i *հաճախությունները։* (x_i, n_i) *կետերը* միացնելով ուղղի հատվածներով, կստանանք հաճախությունների օրինակի պոլիգոնը (նկ. 12)։

444. Ընտրանքի տրված բաշխումով կառուցել հաճախությունների պոլիգոնը։



Նկ. 12

ա)

x_i	2	3	5	6
n_i	10	15	5	20

;

բ)

x_i	15	20	25	30	10
n_i	10	15	30	20	25

։

445. Ընտրանքի տրված բաշխումով կառուցել հարաբերական հաճախությունների պոլիգոնը։

ա)

x_i	2	4	5	7	10
w_i	0,15	0,2	0,1	0,1	0,45

;

բ)

x_i	1	4	5	8	9
w_i	0,15	0,25	0,3	0,2	0,1

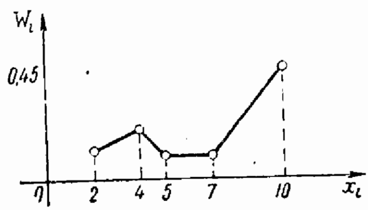
;

գ)

x_i	20	40	65	80
w_i	0,1	0,2	0,3	0,4

։

Լուծում։ ա) Աբսցիսների առանցքի վրա տեղադրենք x_i տարբերակները, իսկ օրդինատների առանցքի վրա՝ համապատասխան հարաբերական w_i հաճախությունները։ (x_i, w_i) կետերը միացնելով ուղղի հատվածներով, կստանանք հարաբերական հաճախությունների օրինակի պոլիգոնը (նկ. 13)։

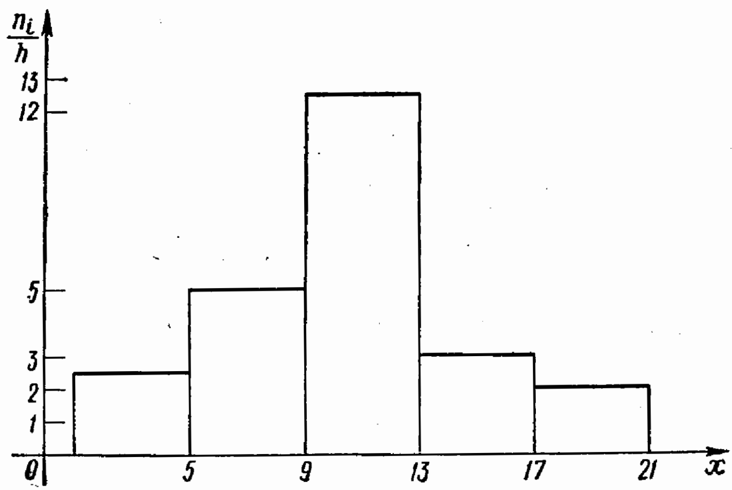


Նկ. 13

446. Տրված $n=100$ ծավալի ընտրանքի բաշխումով, կառուցել հաճախությունների հիստոգրամը:

Միջակայքի համարը	Մասնակի ինտերվալը	Միջակայքի տարբերակների հաճախութ. գումարը	Հաճախության խտությունը
i	$x_i - x_{i+1}$	n_i	n_i/h
1	1—5	10	2,5
2	5—9	20	5
3	9—13	50	12,5
4	13—17	12	3
5	17—21	8	2

Լուծում: Աբսցիսների առանցքի վրա կառուցենք $h=4$ երկարությամբ տրված միջակայքերը: Տանենք այդ միջակայքերի վրա աբսցիսների առանցքին զուգահեռ հատվածներ, որոնք գտնվում են նրանից $\frac{n_i}{h}$ համապատասխան հաճախության խտությանը հավասար հեռավորության վրա օրինակ, (1,5) միջակայքի վրա գծենք աբսցիսների առանց-



Նկ. 14

քին զուգահեռ հատված, որի հեռավորությունը այդ առանցքից հավասար է $\frac{n_i}{h}=\frac{10}{4}=2{,}5$։ Համանմանորեն կառուցվում են մյուս հատվածները։ Հաճախությունների որոնելի հիստոգրամը պատկերված է նկ. 14-ում։

447. Ընտրանքի տրված բաշխումով կառուցել հաճախությունների հիստոգրամը։

ա)

Միջակայքի համարը	Մասնակի միջակայքը	Միջակայքի տարբերակների հաճախությունների գումարը	Հաճախության խտությունը
i	$x_i - x_{i+1}$	n_i	n_i/h
1	2—7	5	
2	7—12	10	
3	12—17	25	
4	17—22	6	
5	22—27	4	

բ)

Միջակայքի համարը	Մասնակի միջակայքը	Միջակայքի տարբերակների հաճախությունների գումարը	Հաճախության խտությունը
i	$x_i - x_{i-1}$	n_i	n_i/h
1	3—5	4	
2	5—7	6	
3	7—9	20	
4	9—11	40	
5	11—13	20	
6	13—15	4	
7	15—17	6	

Ցուցում։ Նախապես հաշվել բոլոր միջակայքերին համապատասխան հաճախությունների $\frac{n_i}{h}$ խտությունները և լրացնել աղյուսակի վերջին սյունը։

448. Ընտրանքի տրված բաշխումով կառուցել հարաբերական հաճախությունների հիստոգրամը։

Միջակայքի համարը	Մասնակի միջակայքը	Մասնակի միջակայքի տարբերակների հաճախությունների գումարը
i	$x_i - x_{i+1}$	n_i
1	0—2	20
2	2—4	30
3	4—6	50
		$n = \Sigma n_i = 100$

Լուծում։ Հաշվենք հարաբերական հաճախությունները՝

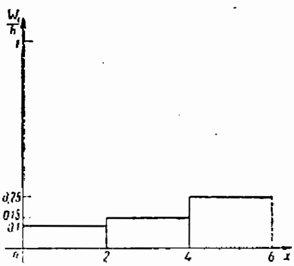
$$w_1 = \frac{20}{100} = 0{,}2, \quad w_2 = \frac{30}{100} = 0{,}3, \quad w_3 = \frac{50}{100} = 0{,}5։$$

Գտնենք հարաբերական հաճախությունների խտությունները, հաշվի առնելով, որ միջակայքի երկարությունը $h=2$.

$$\frac{w_1}{h} = \frac{0{,}2}{2} = 0{,}1,$$

$$\frac{w_2}{h} = \frac{0{,}3}{2} = 0{,}15,$$

$$\frac{w_3}{h} = \frac{0{,}5}{2} = 0{,}25։$$



Նկ. 15

Աբսցիսների առանցքի վրա կառուցենք տրված մասնակի միջակայքերը։ Այդ միջակայքերի վրա տանենք հատվածներ, որոնք զուգահեռ են աբսցիսների առանցքին և գտնվում են նրանցից համապատասխան հարաբերական հաճախություններին հավասար հեռավորության վրա։ Օրինակ, (0, 2) միջակայքի վրա կառուցենք աբսցիսների առանցքին զուգահեռ հատված, այդ միջակայքից 0, 1 հեռավորության վրա։ Նման ձևով կառուցում ենք մնացած հատվածները։

Հարաբերական հաճախությունների որոնելի հիստոգրամը պատկերված է նկ. 15-ում։

449. *Ընտրանքի տված բաշխումով կառուցել հարաբերական հաճախությունների հիստոգրամը։*

ա)

Միջակայքի համարը	*Մասնակի միջակայքը*	*Մասնակի միջակայքի տարբերակների հաճախությունների գումարը*
i	$x_i - x_{i+1}$	n_i
1	10—15	2
2	15—20	4
3	20—25	8
4	25—30	4
5	30—35	2
		$n = \Sigma n_i = 20$

բ)

Միջակայքի համարը	*Մասնակի միջակայքը*	*Մասնակի միջակայքի տարբերակների հաճախությունների գումարը*
i	$x_i - x_{i+1}$	n_i
1	2—5	6
2	5—8	10
3	8—11	4
4	11—14	5
		$n = \Sigma n_i = 25$

Ցուցում։ Նախապես գտնել հարաբերական հաճախությունները և նրանց խտությունները յուրաքանչյուր միջակայքի համար։

ՏԱՍՆԵՐՈՐԴ ԳԼՈՒԽ

ԲԱՇԽՄԱՆ ՊԱՐԱՄԵՏՐԵՐԻ ՎԻՃԱԿԱԳՐԱԿԱՆ ԳՆԱՀԱՏԱԿԱՆՆԵՐԸ

§ 1. Կետային գնահատականներ

Կետային *կոչվում է այն վիճակագրական գնահատականը, որը որոշվում է մեկ թվով։*

Անշեղելի *կոչվում է այն կետային գնահատականը, որի մաթեմատիկական սպասումը ընտրանքի ցանկացած ծավալի դեպքում հավասար է գնահատվող պարամետրին։*

Շեղելի *է կոչվում այն կետային գնահատականը, որի մաթեմատիկական սպասումը հավասար չէ գնահատվող պարամետրին։*

Գլխավոր միջինի *(մաթեմատիկական սպասման)* համար անշեղելի գնահատական *ծառայում է ընտրանքային միջինը՝*

$$\bar{x}_{\text{ը}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i,$$

որտեղ x_i*-ն ընտրանքի տարբերակն է,* n_i*-ն՝ այդ տարբերակի հաճախությունը,* $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$ *— ընտրանքի ծավալը։*

Դիտողություն 1։ Եթե x_i *սկզբնական տարբերակները մեծ թվեր են, ապա հաշվումների պարզության համար նպատակահարմար է բոլոր տարբերակներից հանել միևնույն* C *հաստատունը, այսինքն անցնել պայմանական* $u_i = x_i - C$ *տարբերակներին (որպես* C *օգտակար է ընտրել ընտրանքային միջինին մոտ որևէ թիվ, բայց քանի որ ընտրանքային միջինը անհայտ է, ապա* C *հաստատունը ընտրում են «աչքաչափով»)։ Այդ դեպքում*

$$\bar{x}_{\text{ը}} = C + \frac{1}{n}\sum n_i u_i.$$

Գլխավոր դիսպերսիայի համար շեղելի գնահատական է ծառայում ընտրանքային դիսպերսիան՝

$$D_{\text{ը}} = \frac{1}{n}\sum n_i (x_i - \bar{x}_{\text{ը}})^2.$$

Այս գնահատականը շեղելի է, քանի որ

$$M\,[D_{\text{ը}}] = \frac{n-1}{n}\,D_{\text{գ}}\text{։}$$

Ավելի հարմար է

$$D_{\text{ը}} = (\overline{x^2}) - [\,\overline{x}\,]^2 = \frac{1}{n}\sum n_i x_i^2 - \left[\frac{1}{n}\sum n_i x_i\right]^2$$

բանաձևը։

Դիտողություն 2։ Եթե x_i *սկզբնական տարբերակները մեծ թվեր են, ապա նպատակահարմար է բոլոր տարբերակներից հանել միևնույն* C *հաստատունը, որը հավասար է կամ քիչ է տարբերվում ընտրանքային միջինից, այսինքն անցնել պայմանական* $u_i = x_i - C$ *տարբերակներին (դրանից դիսպերսիան չի փոխվում)։ Այդ դեպքում*

$$D_{\text{ը}}(X) = D_{\text{ը}}(u) = \overline{u^2} - [\overline{u}]^2 = \frac{1}{n}\sum n_i u_i^2 - \left[\frac{1}{n}\sum n_i u_i\right]^2\text{։}$$

Դիտողություն 3։ Եթե սկզբնական տարբերակները տասնորդական կոտորակներ են և ստորակետից հետո պարունակում են k *նիշ, ապա կոտորակների նկատմամբ գործողություններ կատարելուց խուսափելու համար սկզբնական տարբերակները բազմապատկում են* $C = 10^k$ *հաստատունով, այսինքն անցնում են պայմանական* $u_i = Cx_i$ *տարբերակներին։ Դրանից դիսպերսիան կմեծանա* C^2 *անգամ։ Այդ պատճառով, պայմանական տարբերակներով դիսպերսիան հաշվելուց հետո, անհրաժեշտ է այն բաժանել* C^2*-ու վրա,*

$$D_{\text{ը}}(X) = \frac{D_{\text{ը}}(u)}{C^2}\text{,}$$

Գլխավոր դիսպերսիայի համար անշեղելի գնահատական *ծառայում է ուղղված ընտրանքային դիսպերսիան՝*

$$S^2 = \frac{n}{n-1}\,D_{\text{ը}} = \frac{1}{n-1}\sum n_i (x_i - \overline{x}_{\text{ը}})^2\text{։}$$

Ավելի հարմար է

$$S_x^2 = \frac{1}{n-1}\left\{\sum n_i x_i^2 - \frac{1}{n}\left[\sum n_i x_i\right]^2\right\}$$ *բանաձևը։*

Պայմանական տարբերակներով այն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$S_u^2 = \frac{1}{n-1}\left\{\sum n_i u_i^2 - \frac{1}{n}\left[\sum n_i u_i\right]^2\right\}.$$

ընդ որում, եթե $u_i = x_i - C$, ապա $s_X^2 = s_u^2$, եթե $u_i = Cx_i$, ապա $s_X^2 = \frac{s_u^2}{C^2}$։

Դիտողություն 4։ Մեծ թվով տվյալներ լինելու դեպքում օգտվում են արտադրյալների եղանակից (տես գլ. XI, § 1) կամ գումարների եղանակից (տես գլ. XI, § 2)։

450. *Գլխավոր համախմբությունից հանված է $n=50$ ծավալի ընտրանք՝*

տարբերակը	x_i	2	5	7	10
հաճախությունը	n_i	16	12	8	14

Հաշվել գլխավոր միջինի անշեղելի գնահատականը։

Լուծում։ Գլխավոր միջինի համար անշեղելի գնահատական ծառայում է ընտրանքային միջինը՝

$$\overline{x}_{\text{ը}} = \frac{1}{n}\sum n_i x_i = \frac{16\cdot 2 + 12\cdot 5 + 8\cdot 7 + 14\cdot 10}{50} = 5{,}76\text{։}$$

451. *Գլխավոր համախմբությունից հանված է $n=60$ ծավալի ընտրանք՝*

x_i	1	3	6	26
n_i	8	40	10	2

Գտնել գլխավոր միջինի անշեղելի գնահատականը։

Պատ.՝ $\overline{x}_{\text{ը}} = 4$։

452. *Տրված է n ծավալի ընտրանքի սկզբնական տարբերակների բաշխումը՝*

x_i	x_1,	x_2,	...,	x_k
n_i	n_1,	n_2,	...,	n_k

Ապացուցել, որ

$$\bar{x}_{ը}=C+\frac{1}{n}\sum n_iu_i,$$

որտեղ $u_i=x_i-C$*-ը պայմանական տարբերակներն են։*

Լուծում։ Քանի որ $u_i=x_i-C$, *ապա* $n_iu_i=n_i(x_i-C)$. *գումարելով ձախ և աջ մասերը ըստ բոլոր* i*-երի, ստանում ենք՝*

$$\sum n_iu_i=\sum n_i(x_i-C)$$

կամ

$$\sum n_iu_i=\sum n_ix_i-C\sum n_i=\sum n_ix_i-Cn.$$

Այստեղից

$$\sum n_ix_i=Cn+\sum n_iu_i.$$

Հետևաբար,

$$\frac{1}{n}\sum n_ix_i=C+\frac{1}{n}\sum n_iu_i$$

կամ

$$\bar{x}_{ը}=C+\frac{1}{n}\sum n_iu_i,$$

ինչ պահանջվում էր ապացուցել։

453. *Տրված* $n=10$ *ծավալի ընտրանքի բաշխումով գտնել ընտրանքային միջինը։*

x_i	1250	1270	1280
n_i	2	5	3

Լուծում։ Սկզբնական տարբերակները մեծ թվեր են, ուստի անցնենք $u_i=x_i-1270$ *պայմանական տարբերակներին։ Արդյունքում ստանում ենք պայմանական տարբերակների հետևյալ բաշխումը՝*

u_i	−20	0	10
n_i	2	5	3

Գտնենք որոնելի ընտրանքային միջինը՝

$$\bar{x}_ը = C + \frac{1}{n}\sum n_i u_i = 1270 + \frac{2(-20)+5\cdot 0+3\cdot 10}{10} =$$

$$= 1269։$$

454. Տրված $n=20$ ծավալի ընտրանքի բաշխումով գտնել ընտրանքային միջինը՝

x_i	2560	2600	2620	2650	2700
n_i	2	3	10	4	1

Ցուցում։ Անցնել $u_i = x_i - 2620$ պայմանական տարբերակներին։

Պատ.՝ $\bar{x}_ը = 2621$։

455. $n=41$ ծավալի ընտրանքի օգնությամբ հաշված է գլխավոր դիսպերսիայի $D_ը=3$ շեղելի գնահատականը։ Գտնել գլխավոր համախմբության դիսպերսիայի անշեղելի գնահատականը։

Լուծում։ Որոնելի անշեղելի գնահատականը հավասար է ուղղված դիսպերսիային՝

$$s^2 = \frac{n}{n-1}D_ը = \frac{41}{40}\cdot 3 = 3{,}075։$$

456. $n=51$ ծավալի ընտրանքի օգնությամբ հաշված է գլխավոր դիսպերսիայի $D_ը=5$ շեղելի գնահատականը։ Գտնել գլխավոր համախմբության դիսպերսիայի անշեղելի գնահատականը։

Պատ.՝ $s^2 = 5{,}1$։

457. Ձողի երկարությունը միևնույն գործիքով (առանց սիստեմատիկ սխալների) չափված է 5 անգամ։ Ստացվել են հետևյալ արդյունքները՝ 92, 94, 103, 105, 106 (մմ)։ Գտնել՝ ա) ձողի միջին ընտրանքային երկարությունը, բ) գործիքի սխալի ընտրանքային և ուղղված դիսպերսիաները։

Լուծում։ ա) Գտնենք ընտրանքային միջինը՝

$$\overline{x}_ը = 92 + \frac{0+2+11+13+14}{5} = 92 + 8 = 100։$$

բ) Գտնենք ընտրանքային դիսպերսիան՝

$$D_ը = \frac{1}{n}\sum (x_i - x_ը)^2 = \frac{(92-100)^2 + (94-100)^2 + (103-100)^2}{5} +$$

$$+ \frac{(105-100)^2 + (106-100)^2}{5} = 34։$$

Գտնենք ուղղված դիսպերսիան՝

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_ը = \frac{5}{4} \cdot 34 = 42,5։$$

458. *Մի որոշ ֆիզիկական մեծության միևնույն գործիքով (առանց սիստեմատիկ սխալների) չափված է 4 անգամ։ Ստացվել են հետևյալ արդյունքները՝ 8, 9, 11, 12։ Գտնել՝ ա) չափման արդյունքների միջին ընտրանքայինը, բ) գործիքի սխալի ընտրանքային և ուղղված դիսպերսիաները։*

Պատ.՝ *ա)* $\overline{x}_ը = 10$, *բ)* $D_ը$ 2,5; $s^2 = \frac{10}{3}$

459. *Ստորև բերված են պատահականորեն ընտրված 100 ուսանողների հասակի (սմ) չափման արդյունքները՝*

Հասակը	154—158	158—162	162—166	166—170	170—174	174—178	178—182
Ուսանողների թիվը	10	14	26	28	12	8	2

Գտնել ուսանողների հասակի ընտրանքային միջինը և ընտրանքային դիսպերսիան։

Ցուցում։ Գտնել միջակայքերի միջնակետերը և ընդունել դրանց որպես տարբերակներ։

Պատ.՝ $\overline{x_e} = 166$, $D_e = 33{,}44$։

460. *Տրված* $n = 10$ *ծավալի ընտրանքի բաշխումով գտնել ընտրանքային դիսպերսիան.*

x_i	186	192	194
n_i	2	5	3

Լուծում։ Տարբերակները համեմատաբար մեծ թվեր են, ուստի անցնում ենք $u_i = x_i - 191$ *պայմանական տարբերակներին (տարբերակներից հանում ենք* $C = 191$ *թիվը, որը մոտ է ընտրանքային միջինին)։ Արդյունքում ստանում ենք պայմանական տարբերակների հետևյալ բաշխումը.*

u_i	-5	1	3
n_i	2	5	3

Հաշվենք որոնելի ընտրանքային դիսպերսիան՝

$$D_e = \frac{1}{n}\sum n_i u_i^2 - \frac{1}{n}\left[\sum n_i u_i\right]^2 = \frac{2\cdot 5^2 + 5\cdot 1^2 + 3\cdot 3^2}{10} -$$

$$- \left[\frac{(2(-5) + 5\cdot 1 + 3\cdot 3)}{10}\right]^2 = 8{,}2 - 0{,}16 = 8{,}04։$$

461. *Տրված* $n = 100$ *ծավալի ընտրանքի բաշխումով գտնել ընտրանքային դիսպերսիան։*

x_i	340	360	375	380
n_i	20	50	18	12

Ցուցում։ Անցնել $u_i = x_i - 360$ *պայմանական տարբերակներին։*

Պատ.՝ $D_e(x) = D_e(u) = 167{,}29$։

462. *Տրված* $n = 100$ *ծավալի ընտրանքի բաշխումով գտնել ընտրանքային դիսպերսիան։*

x_i	2502	2804	2903	3028
n_i	8	30	60	2

Ցուցում․ Անցնել $u_i = x_i - 2844$ *պայմանական տարբերակներին։*

Պատ.՝ $D_{ը}(x) = D_{ը}(u) = 12603$:

463. *Տրված* $n=10$ *ծավալի ընտրանքի բաշխումով գտնել ընտրանքային դիսպերսիան.*

x_i	0,01	0,04	0,08
n_i	5	3	2

Լուծում։ Որպեսզի խուսափենք կոտորակների հետ գործողություններ կատարելուց, անցնենք $u_i=100x_i$ *պայմանական տարբերակներին։ Արդյունքում կստանանք հետևյալ բաշխումը՝*

x_i	1	4	8
n_i	5	3	2

Հաշվենք պայմանական տարբերակների ընտրանքային դիսպերսիան։

$$D_{ը}(u) = \frac{1}{n}\sum n_i u_i^2 - \frac{1}{n}\left[\sum n_i u_i\right]^2,$$

Այս բանաձևի մեջ տեղադրելով պայմանական տարբերակների և նրանց հաճախությունների արժեքները, կստանանք՝

$$D_{ը}(u) = 7,21:$$

Գտնենք սկզբնական տարբերակների ընտրանքային դիսպերսիան.

$$D_{ը}(x) = \frac{D_{ը}(u)}{100^2} = \frac{7,21}{10000} = 0,0007:$$

464. *Տրված* $n=50$ *ծավալի ընտրանքի բաշխումով գտնել ընտրանքային դիսպերսիան։*

x_i	0,1	0,5	0,6	0,8
n_i	5	15	20	10

Ցուցում: *Անցնել* $u_i=10x_i$ *պայմանական տարբերակներին:*

Պատ.՝ $D_{\text{в}}(x)=\frac{D_{\text{в}}(u)}{10^2}=\frac{31,664}{100}=0,32$:

465. *Տրված* $n=50$ *ծավալի ընտրանքի բաշխումով գտնել ընտրանքային դիսպերսիան:*

x_i	18,4	18,9	19,3	19,6
n_i	5	10	20	15

Ցուցում: *Անցնել* $u_i=10x_i-195$ *պայմանական տարբերակներին:*

Պատ.՝ $D_{\text{в}}(x)=\frac{D_{\text{в}}(u)}{10^2}=\frac{59,16}{100}=0,5916$:

466. *Տրված* $n=10$ *ծավալի ընտրանքի բաշխումով գտնել ուղղված ընտրանքային դիսպերսիան:*

x_i	102	104	108
n_i	2	3	5

Լուծում: *Անցնենք* $u_i=x_i-104$ *պայմանական տարբերակներին: Արդյունքում կստանանք հետևյալ բաշխումը՝*

u_i	−2	0	4
n_i	2	3	5

Գտնենք պայմանական տարբերակների ուղղված ընտրանքային դիսպերսիան՝

$$s_u^2=\frac{1}{n-1}\left\{\sum n_i u_i^2-\left[\frac{1}{n}\sum n_i u_i\right]^2\right\},$$

Տեղադրելով այս բանաձևում պայմանական տարբերակները, նրանց հաճախությունները և ընտրանքի ծավալի արժեքները, կստանանք

$$s_u^2=9,49:$$

Բոլոր սկզբնական տարբերակները պակասեցվել են միևնույն $C = 104$ *չափով, ուստի դիսպերսիան չի փոխվել, այսինքն որոնելի դիսպերսիան հավասար է պայմանական տարբերակների դիսպերսիային՝*

$$S_x^2 = S_u^2 = 9,49։$$

467. *Տրված* $n = 100$ *ծավալի ընտրանքի բաշխումով գտնել ուղղված ընտրանքային դիսպերսիան։*

x_i	1250	1275	1280	1300
n_i	20	25	50	5

Ցուցում։ Անցնել $u_i = x_i - 1275$ *պայմանական տարբերակներին։*

Պատ.՝ $s_x^2 = s_u^2 = 170,42$։

468. *Տրված* $n = 10$ *ծավալի ընտրանքի բաշխումով գտնել ուղղված ընտրանքային դիսպերսիան։*

x_i	0,01	0,05	0,09
n_i	2	3	5

Լուծում։ Կոտորակների հետ գործողություններ կատարելուց խուսափելու համար անցնենք $u_i = 100\,x_i$ *պայմանական տարբերակներին։ Արդյունքում կստանանք հետևյալ բաշխումը*

u_i	1	5	9
n_i	2	3	5

Գտնենք պայմանական տարբերակների ընտրանքային ուղղված դիսպերսիան՝

$$S_u^2 = \frac{1}{n-1}\left\{\sum n_i u_i^2 - \frac{1}{n}\left[\sum n_i u_i\right]^2\right\},$$

Տեղադրելով այս բանաձևում խնդրի տվյալները, կստանանք

$$S_u^2 = 85{,}28։$$

Գտնենք սկզբնական տարբերակների որոնելի ուղղված դիսպերսիան՝

$$S_x^2 = \frac{S_u^2}{100^2} = \frac{85{,}28}{10000} = 0{,}0085։$$

469. Տրված n = 20 ծավալի ընտրանքի բաշխումով գտնել ուղղված ընտրանքային դիսպերսիան.

x_i	0,1	0,5	0,7	0,9
n_i	6	12	1	1

Ցուցում։ Անցնել $u_i = 10x_i$ պայմանական տարբերակներին։

Պատ.՝ $S_x^2 = \frac{S_u^2}{10^2} = \frac{5{,}25}{100} = 0{,}0525։$

470. Տրված n=10 ծավալի ընտրանքի բաշխումով գտնել ուղղված ընտրանքային դիսպերսիան։

x_i	23,5	26,1	28,2	30,4
n_i	2	3	4	1

Ցուցում։ Անցնել $u_i = 10x_i - 268$ պայմանական տարբերակներին։

Պատ.՝ $S_x^2 = \frac{S_u^2}{100} = \frac{489}{100} = 4{,}89։$

§ 2. Միջակայքային գնահատականներ

Գնահատվող պարամետրը ծածկող միջակայքի երկու ծայրերով որոշվող գնահատականը կոչվում է միջակայքային։

Տվյալ γ հուսալիության գնահատվող պարամետրը ծածկող միջակայքը կոչվում է վստահելի։

Հետևյալ վստահելի միջակայքը ծառայում է նորմալ օրենքով բաշխված քանակական X հայտանիշի a մաթեմատիկական սպասման գնահատման համար ընտրանքային $\overline{x}_{ը}$ միջինի օգնությամբ, եթե հայտնի է գլխավոր համախմբության σ միջին քառակուսային շեղումը։

$$\overline{x}_{ը}-t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<a<\overline{x}_{ը}+t\frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

որտեղ $t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\delta$ գնահատման ճշտությունն է, n-ը՝ ընտրանքի ծավալը, t-ն՝ Լապլասի $\Phi(t)$ ֆունկցիայի արգումենտի այն արժեքն է (հավելված 2), որի համար $\Phi(t)=\frac{\gamma}{2}$, անհայտ σ-ի դեպքում (երբ ընտրանքի ծավալը՝ $n>30$)։

$$\overline{x}_{ը}-t_{\gamma}\frac{s}{\sqrt{n}}<a<\overline{x}_{ը}+t_{\gamma}\frac{s}{\sqrt{n}},$$

որտեղ s-ը ուղղված միջին քառակուսային շեղումն է, t_{γ}-ն որոշում են աղյուսակից (հավելված 3) տրված n-ով ու γ-ով։

Հետևյալ վստահելի միջակայքերը ծառայում են տրված γ հուսալիությամբ, նորմալ բաշխված քանակական X հայտանիշի σ միջին քառակուսային շեղման գնահատման համար, ուղղված ընտրանքային միջին քառակուսային s շեղման օգնությամբ։

$$s(1-q)<\sigma<s(1+q)\ (\text{երբ } q<1),$$

$$0<\sigma<s(1+q)\ (\text{երբ } q>1),$$

որտեղ q-ն որոշվում է աղյուսակից (հավելված 4) հայտնի n-ի ու γ-ի միջոցով։

471. Նորմալ օրենքով բաշխված գլխավոր համախմբության X քանակական հայտանիշի անհայտ a մաթեմատիկական սպասման գնահատման համար գտնել 0,95 հուսալիության համապատասխան վստահելի միջակայքը, եթե տրված են գլխավոր միջին քառակուսային շեղումը՝ $\sigma=5$, ընտրանքային միջինը՝ $\overline{x}_{ը}=14$ և ընտրանքի ծավալը՝ $n=25$։

Լուծում։ Պահանջվում է գտնել

$$\overline{x}_{ը} - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{X}_{ը} + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad (*)$$

վստահելի միջակայքը։ Այստեղ բացի t-ից, բոլոր մեծությունները հայտնի են։ Գտնենք t-ն։ $2\Phi(t) = 0{,}95$ առնչությունից ստանում ենք $\Phi(t) = 0{,}475$։ Աղյուսակից (հավելված 2) գտնում ենք $t=1{,}96$։ Տեղադրելով $t=1{,}96$ $\overline{x}_{ը} = 14$, $\sigma = 5$, $n = 25$, (*)-ից ստանում ենք որոնելի վստահելի միջակայքը՝

$$12{,}04 < a < 15{,}96։$$

472. Նորմալ օրենքով բաշխված գլխավոր համախմբության X քանակական հայտանիշի անհայտ a մաթեմատիկական սպասման գնահատման համար գտնել 0,99 հուսալիությանը համապատասխան վստահելի միջակայքը, եթե տրված են σ-ն՝ գլխավոր միջին քառակուսային շեղումը, $\overline{x}_{ը}$-ն՝ ընտրանքային միջինը և n-ը՝ ընտրանքի ծավալը։

ա) $\sigma=4$, $\overline{x}_{ը}=10{,}2$, $n=16$,

բ) $\sigma=5$, $\overline{x}_{ը}=16{,}8$, $n=25$։

Պատ.՝ ա) $7{,}63 < a < 12{,}77$, բ) $14{,}23 < a < 19{,}37$։

473. Միևնույն գործիքով, որի չափման պատահական սխալների միջին քառակուսային շեղումը՝ $\sigma=40$ մ, 5 անգամ չափված է թնդանոթից մինչև նպատակակետը եղած հեռավորությունը։ Գտնել մինչև նպատակակետը եղած a հեռավորության գնահատման համար $\gamma = 0{,}95$ հուսալիությանը համապատասխան վստահելի միջակայքը, եթե չափումների արդյունքների միջին թվաբանականը՝ $\overline{x}_{ը}=2000$ մ։

Պատ.՝ $1960{,}8 < a < 2039{,}2$։

474. Մեծ թվով ռադիոլամպերի խմբաքանակից վերցրած ընտրանքը բաղկացած է 100 լամպից։ Ընտրանքի լամպերի այրման միջին տևողությունը հավասար է 1000 ժ-ի։ Համախմբության լամպի a միջին այրման ժամանակի գնահատման համար գտնել $\gamma=0{,}95$ հուսալիությանը համապատասխանող վստահելի միջակայք, եթե հայտնի է, որ լամպի այրման ժամանակի միջին քառակուսային շեղումը՝ $\sigma=40$ ժ։

Պատ.՝ $992{,}16<a<1007{,}84$։

475. *Ավտոմատ հաստոցը մամլում է լիսեռներ։ $n=100$ ծավալի ընտրանքով հաշվված է պատրաստված լիսեռների տրամագծերի ընտրանքային միջինը։ 0,95 հուսալիությամբ գտնել δ ճշտությունը, որով ընտրանքային միջինը գնահատում է պատրաստված լիսեռների տրամագծերի մաթեմատիկական սպասումը, եթե հայտնի է, որ նրանց միջին քառակուսային շեղումը՝ $\sigma=2$ մմ։*

Պատ.՝ $\delta = t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{2}{\sqrt{100}} = 0{,}392$ մմ։

476. *Գտնել ընտրանքի մինիմալ ծավալը, որի դեպքում 0,975 հուսալիությամբ, ընտրանքային միջինի օգնությամբ գլխավոր համախմբության a մաթեմատիկական սպասման գնահատման ճշտությունը հավասար կլինի՝ $\delta=0{,}3$, եթե հայտնի է նորմալ բաշխված գլխավոր համախմբության միջին քառակուսային $\sigma=1{,}2$ շեղումը։*

Լուծում։ Օգտվենք ընտրանքային միջինի օգնությամբ գլխավոր համախմբության մաթեմատիկական սպասման գնահատման ճշտությունը որոշող բանաձևից՝

$$\delta = t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Այստեղից՝

$$n = \frac{t^2\sigma^2}{\delta^2} \qquad (*)$$

Պայմանի համաձայն $\gamma=0{,}975$, կամ $2\Phi(t)=0{,}975$, հետևվարար, $\Phi(t)=0{,}4875$: Աղյուսակից (հավելված 2) գտնում ենք՝ $t=2{,}24$: Տեղադրելով (*) բանաձևում $t=2{,}24$, $\sigma=1{,}2$, $\delta=0{,}2$, ստանում ենք ընտրանքի որոնելի ծավալը՝ $n=81$:

477. Գտնել ընտրանքի մինիմալ ծավալը, որի դեպքում 0,925 հուսալիությամբ ընտրանքային միջինի օգնությամբ նորմալ բաշխված գլխավոր համախմբության մաթեմատիկական սպասման գնահատման ճշտությունը հավասար կլինի 0,2-ի, եթե հայտնի է գլխավոր համախմբության միջին քառակուսային $\sigma=1{,}5$ շեղումը:

Պատ.՝ $n=179$:

478. Գլխավոր համախմբությունից վերցված է $n=10$ ծավալի ընտրանք՝

տարբերակը՝	x_i	-2	1	2	3	4	5
հաճախությունը՝	n_i	2	1	2	2	2	1

Ընտրանքային միջինով, վստահելի միջակայքի օգնությամբ գնահատել 0,095 հուսալիությամբ, գլխավոր համախմբության նորմալ բաշխված հայտանիշի a մաթեմատիկական սպասումը:

Լուծում: Ընտրանքային միջինը և ուղղված միջին քառակուսային շեղումը որոշում ենք հետևյալ բանաձևերով՝

$$\overline{x}_{\text{ը}}=\frac{1}{n}\sum n_i x_i, \quad s=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum n_i(x_i-\overline{x}_{\text{ը}})^2}:$$

Տեղադրելով այս բանաձևերում խնդրի տվյալները, կստանանք՝

$$\overline{x}_{\text{ը}}=2, \quad s=2{,}4:$$

Գտնենք t_γ-ն: Օգտվելով աղյուսակից (հավելված 3), $\gamma=0{,}95$ և $n=10$ արժեքներով գտնում ենք $t_\gamma=2{,}26$:

Գտնենք որոնելի վստահելի միջակայքը

$$\overline{x}_{\text{ը}} - t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} < a < \overline{x}_{\text{ը}} + t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}},$$

Տեղադրելով $\overline{x}_{\text{ը}} = 2$, $t_\gamma = 2{,}26$, $s = 2{,}4$, $n = 10$, *կըստանանք որոնելի վստահելի* $0{,}3 < a < 3{,}7$ *միջակայքը, որը ծածկում է անհայտ մաթեմատիկական սպասումը 0,95 հուսալիությամբ։*

479. *Գլխավոր համախմբությունից վերցված է* $n = 12$ *ծավալի ընտրանք՝*

տարբերակը x_i	$-0{,}5$	$-0{,}4$	$-0{,}2$	0	$0{,}2$	$0{,}6$	$0{,}8$	1	$1{,}2$	$1{,}5$
հաճախությունը n_i	1	2	1	1	1	1	1	1	2	1

Վստահելի միջակայքի օգնությամբ գնահատել, 0,95 հուսալիությամբ, գլխավոր համախմբության նորմալ բաշխված հայտանիշի մաթեմատիկական սպասումը։

Պատ.՝ $-0{,}04 < a < 0{,}88$։

480. *Մի որոշ ֆիզիկական մեծության արժեքի 9 անկախ, միատեսակ ճշտության չափումներից ստացված տվյալներով հաշվված են չափման արդյունքների միջին թվաբանականը՝* $\overline{x}_{\text{ը}} = 30{,}1$ *և ուղղված միջին քառակուսային* $s = 6$ *շեղումը։* $\gamma = 0{,}99$ *հուսալիությամբ գնահատել չափվող մեծության ճշգրիտ արժեքը վստահելի միջակայքի օգնությամբ։*

Լուծում։ Չափվող մեծության ճշգրիտ արժեքը հավասար է նրա մաթեմատիկական սպասմանը։ Հետևաբար, խնդիրը բերվում է մաթեմատիկական սպասման գնահատմանը (անհայտ σ-ի դեպքում) վստահելի միջակայքի օգնությամբ։

$$\overline{x}_{\text{ը}} - t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} < a < \overline{x}_{\text{ը}} + t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} \qquad (*)$$

Այստեղ, բացի t_γ *-ից, բոլոր մեծությունները հայտնի են։ Գտնենք* t_γ *-ն։ Աղյուսակից (հավելված 3) ունենալով* $\gamma = 0{,}95$ *և* $n = 9$, *ստանում ենք* $t_\gamma = 3{,}36$։

Տեղադրելով (*)-ում $\overline{x_{\text{ը}}} = 30{,}1$, $t_\gamma = 3{,}36$, $s=6$, $n=9$, կստանանք որոնելի միջակայքը՝

$$23{,}38 < a < 36{,}82.$$

481. Մի որոշ ֆիզիկական մեծության արժեքի 16 անկախ, միատեսակ ճշտության չափումներից ստացված արդյունքներով հաշված են չափման արդյունքների միջին թվաբանականը՝ $\overline{x_{\text{ը}}} = 42{,}8$ և ուղղված միջին քառակուսային $s=8$ շեղումը։ $\gamma = 0{,}999$ հուսալիությամբ գնահատել չափվող մեծության ճշգրիտ արժեքը։

Պատ.՝ $34{,}66 < a < 50{,}94.$

482. Գլխավոր համախմբությունից վերցրած $n=16$ ծավալի ընտրանքի տվյալներով, հաշված է նորմալ բաշխված քանակական հայտանիշի ուղղված միջին քառակուսային $s=1$ շեղումը։ Գտնել $\gamma = 0{,}95$ հուսալիությամբ գլխավոր միջին քառակուսային շեղումը ծածկող վստահելի միջակայքը։

Լուծում։ Խնդիրը բերվում է

$$s(1-q) < \sigma < s(1+q), \ (\text{եթե } q < 1) \qquad (*)$$

կամ

$$0 < \sigma < s(1+q), \ (\text{եթե } q > 1$$

վստահելի միջակայքի որոնմանը։

$\gamma = 0{,}95$ և $n=16$ տվյալներով աղյուսակից (հավելված 4) գտնում ենք $q = 0{,}44$։ Քանի որ $q<1$, ապա, տեղադրելով (*)-ում $s=1$, $q=0{,}44$, կգտնենք որոնելի վստահելի միջակայքը՝

$$0{,}56 < \sigma < 1{,}44.$$

483. Նորմալ բաշխված քանակական հայտանիշի գլխավոր համախմբությունից վերցրած n ծավալի ընտրանքի տվյալներով հաշված է ուղղված միջին քառակուսային s շեղումը։ Գտնել, $\gamma=0{,}999$ հուսալիությամբ, գլխավոր միջին քառակուսային շեղումը ծածկող վստահելի միջակայքը, եթե *ա)* $n=10$, $s=5,1$, *բ)* $n=50$, $s=14$։

Պատ.՝ *ա)* $0<\sigma<14,28$, *բ)* $7,98<\sigma<20,02$։

484. *Միևնույն գործիքով (առանց սիստեմատիկ սխալների) կատարված են մի որոշ ֆիզիկական մեծության 12 չափումներ, ընդ որում չափման պատահական սխալների ուղղված միջին քառակուսային* s *սխալի համար ստացվել է 0,6 արժեքը։ Գտնել գործիքի ճշտությունը 0,99 հուսալիությամբ։*

Լուծում։ Գործիքի ճշտությունը բնորոշվում է չափման պատահական սխալների միջին քառակուսային շեղումով։ Հետևաբար, խնդիրը բերվում է վստահելի միջակայքի որոշմանը, որը $\gamma=0,99$ հուսալիությամբ ծածկում է անհայտ միջին քառակուսային շեղումը։

$$s(1-q)<\sigma<s(1+q)։ \qquad (*)$$

$\gamma=0,99$, $n=12$ տվյալներով աղյուսակից (հավելված 4) գտնում ենք $q=0,9$։ Տեղադրելով $s=0,6$, $q=0,9$ (*) բանաձևի մեջ, վերջնականապես կստանանք՝

$$0,06<\sigma<1,14։$$

485. *Միևնույն գործիքով (առանց սիստեմատիկ սխալի) կատարված են մի որոշ ֆիզիկական մեծության 10 չափումներ, ընդ որում չափման պատահական սխալների ուղղված միջին քառակուսային շեղման համար ստացվել է 0,8 արժեքը։ Գտնել գործիքի ճշտությունը 0,95 հուսալիությամբ։*

Պատ. $0,28<\sigma<1,32$։

ՏԱՍՆՄԵԿԵՐՈՐԴ ԳԼՈՒԽ

ԸՆՏՐԱՆՔԻ ՏԵՂԵԿԱՏՈՒ ԲՆՈՒԹԱԳՐԻՉՆԵՐԻ ՀԱՇՎԱՌՄԱՆ ՄԵԹՈԴՆԵՐԸ

§ 1. Ընտրանքային միջինի և դիսպերսիայի հաշվառման արտադրյալների մեթոդը

Ա. Հավասարահեռ տարբերակներ

Ենթադրենք ընտրանքը տրված է հավասարահեռ տարբերակների և նրանց համապատասխան հաճախությունների բաշխման տեսքով։ Այդ դեպքում ընտրանքային միջինը և դիսպերսիան հարմար է հաշվել արտադրյալների մեթոդով, հետևյալ բանաձևերի օգնությամբ՝

$$\overline{x}_{\text{ը}} = M_1^* h + C, \qquad D_{\text{ը}} = [M_2^* - (M_1^*)^2]h^2,$$

որտեղ h*-ը քայլն է (հարևան տարբերակների միջև եղած տարբերությունը),* C*-ն՝ կեղծ զրոն (ամենամեծ հաճախությունն ունեցող տարբերակը),*

$$u_i = \frac{x_i - C}{h}$$ — *պայմանական տարբերակներն են,*

$$M_1^* = \frac{1}{n}\sum n_i u_i$$ — *առաջին կարգի պայմանական մոմենտն է,*

$$M_2^* = \frac{1}{n}\sum n_i u_i^2$$ — *երկրորդ կարգի պայմանական մոմենտն է։*

Խնդիր 486-ում ցույց է տված, թե ինչպես գործնականում օգտվել արտադրյալների մեթոդից։

486. *Արտադրյալների մեթոդով հաշվել ընտրանքային միջինը և դիսպերսիան, եթե տված է* $n = 100$ *ծավալի ընտրանքի բաշխումը՝*

տարբերակը x_i	12	14	16	18	20	22
հաճախությունը n_i	5	15	50	16	10	4

Լուծում։ Կազմենք հաշվարկային աղյուսակը (աղյուսակ 1), որի համար՝

1) առաջին սյունակում գրենք տարբերակները,

2) երկրորդ սյունակում գրենք հաճախությունները, հաճախությունների գումարը (100) տեղադրենք սյունակի վերջին վանդակում,

3) որպես կեղծ զրո (C) ընտրենք այն տարբերակը (16), որի հաճախությունը ամենամեծն է (որպես C կարելի է վերցնել սյունակի միջին մասում ընկած ցանկացած տարբերակը), երրորդ սյունակի այն վանդակում, որը պատկանում է կեղծ զրոն պարունակող սյունակը գրենք 0, զրոյից վերև հաջորդաբար գրում ենք —1, —2, իսկ զրոյից ներքև՝ 1, 2, 3։

4) Պայմանական տարբերակների և n_i հաճախությունների արտադրյալները գրում ենք չորրորդ սյունակում, որտեղ ենք բացասական թվերի գումարը (—25) և դրական թվերի գումարը՝ (48), այնուհետև գումարելով դրանք, արդյունքը (23) տեղավորում ենք չորրորդ սյունակի վերջին վանդակում,

5) պայմանական տարբերակների քառակուսիների և հաճախությունների $u_i^2 n_i$ արտադրյալները գրում ենք հինգերորդ սյունակում (հարմար է բազմապատկել երրորդ և չորրորդ սյունակների համապատասխան տողերի թվերը՝ $u_i n_i \cdot u_i = n_i u_i^2$), սյունակի թվերի գումարը (127) գրում ենք հինգերորդ սյունակի վերջին վանդակում։

6) Հաճախությունների և պայմանական տարբերակներից 1-ով մեծ թվերի քառակուսիների արտադրյալները $n_i(u_i + 1)^2$ գրում ենք վեցերորդ հսկիչ սյունակում, սյունակի թվերի գումարը (273) տեղադրում ենք վերջին վանդակում։

Արդյունքում ստանում ենք հաշվարկային աղյուսակը (աղյուսակ 1)։

Հաշվառումների ստուգման համար օգտվում ենք հետևյալ նույնությունից.

$$\sum n_i(u_i+1)^2 = \sum n_i u_i^2 + 2\sum n_i u_i + n\text{։}$$

Ստուգում՝

$$\sum n_i(u_i+1)^2 = 273, \qquad \sum n_i u_i^2 + 2\sum n_i u_i + n =$$

$$= 127 + 2\cdot 23 + 100 = 273\text{։}$$

Ստուգիչ գումարների համընկնումը, վկայում են հաշվումների ճշտության մասին։

Հաշվենք առաջին և երկրորդ կարգի պայմանական մոմենտները՝

$$M_1^* = \frac{1}{n}\sum n_i u_i = \frac{23}{100} = 0{,}23, \quad M_2^* = \sum n_i u_i^2 =$$

$$\frac{127}{100} = 1{,}27\text{։}$$

Գտնենք քայլը (ցանկացած երկու հարևան տարբերակների տարբերությունը), $h = 14 - 12 = 2$։

Հաշվենք որոնելի ընտրանքային միջինը և դիսպերսիան, հաշվի առնելով, որ կեղծ զրոն՝ (ամենամեծ հաճախություն ունեցող տարբերակը) $C = 16$։

$$\bar{x}_ը = M_1^* h + C = 0{,}23\cdot 2 + 16 = 16\cdot 46,$$

$$D_ը = [M_2^* - (M_1^*)^2]h^2 = (1{,}27 - 0{,}23^2)\cdot 2^2 = 4{,}87\text{։}$$

Աղյուսակ 1

1	2	3	4	5	6
x_i	n_i	u_i	$n_i u_i$	$n_i u_i^2$	$n_i(u_i+1)^2$
12	5	−2	−10	20	5
14	15	−1	−15	15	—

1	2	3	4	5	6
16	50	0	—25	—	50
18	16	1	16	16	64
20	10	2	20	40	90
22	4	3	12	36	64
			48		
	$n=100$		$\sum n_i u_i=23$	$\sum n_i u_i^2=127$	$\sum n_i(u_i+1)^2=$ $=273$

487. *Ընտրանքի տրված բաշխումով, հաշվել ընտրանքային միջինը և դիսպերսիան, օգտվելով արտադրյալների մեթոդից.*

ա) տարբերակը x_i 18,6 19,0 19,4 19,8 20,2 20,6

հաճախությունը n_i 4 6 30 40 18 2;

բ) տարբերակը x_i 65 70 75 80 85

հաճախությունը n_i 2 5 25 15 3.

Պատ. *ա)* $\overline{x}_ը=76,2$, $D_ը=18,56$, *բ)* $\overline{x}_ը=19,672$, $D_ը=0,169$.

բ) Ոչ հավասարահեռ տարբերակներ

Եթե սկզբնական տարբերակները հավասարահեռ չեն, ապա ընտրանքի բոլոր տարբերակները պարունակող միջակայքը բաժանում են միատեսակ h *երկարության մի քանի մասնակի միջակայքերի (յուրաքանչյուր մասնակի միջակայք պետք է պարունակի առնվազն 8—10 տարբերակ)։ Այնուհետև գտնում են մասնակի միջակայքերի* *միջնակետերը, որոնք և կկազմեն համապատասխան տարբերակների հաջորդականություն։ Որպես յուրաքանչյուր միջակայքի միջնակետի հաճախություն ընդունվում է բոլոր այն տարբերակների գումարային հաճախությունը, որոնք ընկնում են այդ մասնակի միջակայքի մեջ։*

Ընտրանքային դիսպերսիան հաշվելիս խմբավորման հետևանքով առաջացած սխալը փոքրացնելու համար (հատկապես, երբ միջակայքերի թիվը փոքր է) մտցնում են Շեպպարդի ուղղումը՝ դիսպերսիայի ստացված արժեքից հանում են մասնակի միջակայքի երկարության քառակուսու մեկ տասներկուերորդ մասը։

Այսպիսով, հաշվի առնելով Շեպպարդի ուղղումը, դիսպերսիան պետք է հաշվել հետևյալ բանաձևով՝

$$D'_{\text{ը}} = D_{\text{ը}} - \frac{h^2}{12},$$

488. *Տրված* $n = 100$ *ծավալի ընտրանքի բաշխումով հաշվել ընտրանքային միջինը և դիսպերսիան, օգտվելով արտադրյալների մեթոդից*

x_i	2	3	7	9	11	12,5	16	18	23	25	26
n_i	3	5	10	6	10	4	12	13	8	20	9

Լուծում։ 2—26 *միջակայքը բաժանենք* $h = 6$ *երկարության չորս մասնակի միջակայքերի՝*

$$2-8, \quad 8-14, \quad 14-20, \quad 20-26.$$

Որպես նոր y_i *տարբերակներ վերցնելով այդ միջակայքերի միջնակետերը, կստանանք հետևյալ համապատասխան տարբերակները՝*

$$y_1 = 5, \quad y_2 = 11, \quad y_3 = 17, \quad y_4 = 23.$$

Որպես նոր $y_1 = 5$ *տարբերակի* n_1 *հաճախություն ընդունելով առաջին միջակայքում եղած տարբերակների հաճախությունների գումարը, կունենանք՝* $n_1 = 3 + 5 + 10 = 18$։

Նույն կերպ, հաշվելով մյուս տարբերակների հաճախությունները, կստանանք համապատասխան տարբերակների հետևյալ բաշխումը՝

y_i	5	11	17	23
n_i	18	20	25	37

Օգտվելով արտադրյալների մեթոդից, ստանում ենք՝

$$\overline{y}_{\text{ը}} = 15{,}86, \quad D_{\text{ը}} = 45{,}14\text{։}$$

Նկատի ունենալով, որ մասնակի միջակայքերի թիվը (4) փոքր է, հաշվի ենք առնում Շեպպարդի ուղղումը։

$$D_{\text{ը}}' = D_{\text{ը}} - \frac{h^2}{12} = 45{,}14 - \frac{6^2}{12} = 42{,}14\text{։}$$

Նկատենք, որ սկզբնական տարբերակներով հաշվելիս ընտրանքային դիսպերսիայի համար ստացվում է 42,6 արժեքը։

489. *Ոչ հավասարահեռ տարբերակներով ընտրանքի դիսպերսիան հաշվելիս ընտրանքը տրոհվել է* $h = 12$ *երկարության 5 միջակայքերի։ Հավասարահեռ տարբերակների (մասնակի միջակայքերի միջնակետերի) ընտրանքային դիսպերսիան՝* $D_{\text{ը}} = 52{,}4$*։ Գտնել ընտրանքի դիսպերսիան, հաշվի առնելով Շեպպարդի ուղղումը։*

Պատ.՝ $D_{\text{ը}}' = 40{,}4$։

490. *ա)* $n = 50$ *ծավալի ընտրանքի ոչ հավասարահեռ տարբերակների տված բաշխումով, օգտվելով արտադրյալների մեթոդից, գտնել ընտրանքային միջինը և դիսպերսիան։*

x_i	6	8	11	13	15,5	17,5	20	23,5	24,5	26
n_i	1	9	6	6	4	6	8	5	4	1

բ) Գտնել ընտրանքային դիսպերսիան, հաշվի առնելով Շեպպարդի ուղղումը։

Ցուցում։ 6—26 միջակայքը տրոհել $h=4$ երկարության 5 մասնակի միջակայքերի։

Պատ.՝ ա) $\overline{y}_ը = 15,68$, $D_ը=32$, *բ)* $D_ը' = 30^1/3$։

491. *ա)* $n=100$ *ծավալի ընտրանքի ոչ հավասարահեռ տարբերակների տված բաշխումով գտնել ընտրանքային միջինը և դիսպերսիան, օգտվելով արտադրյալների մեթոդից։*

x_i	10	13	15	17	19	23	24	26	28	32	34	35
n_i	2	4	6	8	9	6	20	15	10	8	7	5

բ) գտնել ընտրանքային դիսպերսիան, հաշվի առնելով Շեպպարդի ուղղումը։

Ցուցում։ 10—35 միջակայքը բաժանել $h=5$ երկարության 5 մասնակի միջակայքերի։ $x=15$ տարբերակի հաճախությունը (այսինքն 6 հաճախությունը) բաշխել հավասարապես երկրորդ և երրորդ մասնակի միջակայքերի վրա (քանի որ 15 տարբերակը ընկած է միջակայքի ծայրակետում)։

Պատ.՝ *ա)* $\overline{y}_ը = 24,35$, $D_ը = 31,83$, *բ)* $D_ը = 29,75$։

§ 2. Ընտրանքային միջինի և դիսպերսիայի հաշվման գումարների մեթոդը

Ենթադրենք ընտրանքը տված է հավասարահեռ տարբերակների և համապատասխան հաճախությունների բաշխման տեսքով։ Այդ դեպքում, ինչպես ասված է § 1-ում, ընտրանքային միջինը և դիսպերսիան կարելի է հաշվել հետևյալ բանաձևերով՝

$$\overline{x}_ը = M_1^* h + C, \quad D_ը = [M_2^* - (M_1^*)^2]h^2.$$

Գումարների մեթոդից օգտվելիս առաջին և երկրորդ կարգի պայմանական մոմենտները հաշվում են հետևյալ բանաձևերով

$$M_1^* = \frac{d_1}{n}, \qquad M_2^* = \frac{s_1 + 2s_2}{n},$$

որտեղ $d_1 = a_1 - b_1$, $s_1 = a_1 + b_1$, $s_2 = a_2 + b_2$։ Այսպիսով, վերջնահաշվում պետք է հաշվել a_1, a_2, b_1, b_2 թվերը։ 492 խնդրում ցույց է տված, թե գործնականում ինչպես են հաշվում այդ թվերը։

492. $n = 100$ *ծավալի ընտրանքի տված բաշխումով, հաշվել ընտրանքային միջինը և դիսպերսիան, օգտվելով գումարների մեթոդից։*

x_i	48	52	56	60	64	68	72	76	80	84
n_i	2	4	6	8	12	30	18	8	7	5

Լուծում։ Կազմենք հաշվարկային աղյուսակը (աղյուսակ 2), որի համար՝

1) առաջին սյունակում գրենք տարբերակները,

2) երկրորդ սյունակում գրենք հաճախությունները, տեղադրելով այդ սյունակի վերջին վանդակում բոլոր հաճախությունների գումարը (100),

3) որպես կեղծ զրո՝ C, ընտրում ենք այն տարբերակը (68), որի հաճախությունը ամենամեծն է (որպես C կարելի է վերցնել սյունակի միջին մասում ընկած ցանկացած տարբերակը)։ Կեղծ զրո պարունակող տողի վանդակներում գրենք զրոներ, չորրորդ սյունակում, արդեն գրված զրոյից վերև և ներքև, նույնպես գրենք մեկական զրո.

4) երրորդ սյունակի զրոյից վերև ընկած չլրացված վանդակներում (բացի ամենավերին վանդակից) հաջորդաբար գրենք կուտակված հաճախությունները՝ 2; $2 + 4 = 6$; $6 + 6 = 12$; $12 + 8 = 20$; $20 + 12 = 32$։ Գումարելով բոլոր կուտակված հաճախությունները, կստանանք $b_1 = 72$ թիվը, որը կտեղադրենք երրորդ սյունակի վերին վանդակում։ Զրոյից ներքև ընկած չլրացված վանդակներում (բացի ստորին վանդակից) հաջորդաբար գրենք կուտակված հաճախությունները՝ 5; $5 + 7 = 12$; $12 + 8 = 20$։ $20 + 18 = 38$։ Գումարելով բոլոր կուտակված հաճախությունները, կստանանք $a_1 = 75$ թիվը, որը տեղադրում ենք երրորդ սյունակի ստորին վանդակում։

5) Նման ձևով լրացվում է չորրորդ սյունակը, ընդ որում

գումարվում են երրորդ սյունակի հաճախությունները։ Գումարելով զրոյից վերև ընկած կուտակված հաճախությունները, ստանում ենք $b_2=70$ թիվը, որը տեղադրում ենք չորրորդ սյունակի ամենավերին վանդակում։ Զրոյից ներքև ընկած կուտակված հաճախությունների գումարը՝ $a_2=59$, գրում ենք չորրորդ սյունակի ստորին վանդակում։

Արդյունքում ստանում ենք հաշվարկային աղյուսակը (աղյուսակ 2)։

Գտնենք d_1, s_1, s_2 մեծությունները։

$$d_1=a_1-b_1=75-72=3,$$

$$s_1=a_1+b_1=75+72=147,$$

$$s_2=a_2+b_2=59+70=129\text{։}$$

Գտնենք առաջին և երկրորդ կարգի պայմանական մոմենտները՝

$$M_1^*=\frac{d_1}{n}=\frac{3}{100}=0{,}03,$$

$$M_2^*=\frac{s_1+2s_2}{n}=\frac{147+2\cdot 129}{100}=4{,}05\text{։}$$

Աղյուսակ 2

1	2	3	4
x_i	n_i	$b_1=72$	$b_2=70$
48	2	2	2
52	4	6	8
56	6	12	20

60	8	20	40
64	12	32	0
68	30	0	0
72	18	38	0
76	8	20	37
80	7	12	17
84	5	5	5
	n=100	$a_1 = 75$	$a_2 = 59$

Հաշվենք որոնելի ընտրանքային միջինը և դիսպերսիան, հաշվի առնելով, որ քայլը՝ (երկու հարևան տարբերակների տարբերությունը) $h=4$, *իսկ կեղծ զրոն՝* $C=68$։

$$x_ը = M_1^* h + C = 0{,}03\cdot 4 + 68 = 68{,}12;$$

$$D_ը = [M_1^* - (M_1^*)^2]\cdot h^2 = [4{,}05 - 0{,}03^2]4^2 \approx 64{,}78:$$

493. $n = 100$ *ծավալի ընտրանքի տված բաշխումով հաշվել ընտրանքային միջինը և դիսպերսիան, օգտվելով գումարների մեթոդից։*

ա)

տարբերակը	x_i	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75;
հաճախությունը	n_i	4	6	8	15	25	20	8	7	5	2

բ)

տարբերակը	x_i	122	128	134	140	146	152	158	164	170	176
հաճախությունը	n_i	7	8	12	16	4	20	13	10	7	3;

գ)

տարբերակը	x_i	12	14	16	18	20	22;
հաճախությունը	n_i	5	15	50	16	10	4

դ)

տարբերակը	x_i	10,2	10,4	10,6	10,8	11,0	11,2	11,4	11,6	11,8	12,0
հաճախությունը	n_{ei}	2	3	8	13	25	20	12	10	6	1.

Պատ.՝ *ա)* $\overline{x}_ը = 51,1$, $D_ը = 101,29$, *բ)* $\overline{x}_ը = 147,62$, $D_ը = = 212,3$,

գ) $\overline{x}_ը = 16,46$, $D_ը = 4,87$ *դ)* $\overline{x}_ը - 11,114$, $D_ը = 0,14$

§ 3. Էմպիրիկ բաշխման ասիմետրիան և էքսցեսը

Էմպիրիկ բաշխման ասիմետրիան և էքսցեսը *որոշվում են համապատասխանաբար*

$$a_s = \frac{m_3}{\sigma_ը^2}, \qquad e_k = \frac{m_4}{\sigma_ը^4} - 3$$

բանաձևերով, որտեղ $\sigma_ը$*-ն ընտրանքային միջին քառակուսային շեղումն է;* m_3*-ը՝ և* m_4*-ը՝ 3-րդ և 4-րդ կարգի կենտրոնական էմպիրիկ մոմենտները՝*

$$m_3 = \frac{1}{n}\sum n_i(x_i - \overline{x}_ը)^3, \quad m_4 = \frac{1}{4}\sum n_i(x_i - \overline{x}_ը)^4.$$

h քայլով (քայլը հավասար է ցանկացած հարևան տարբերակների տարբերությանը) հավասարահեռ տարբերակների դեպքում այդ մոմենտները հարմար է հաշվել հետևյալ բանաձևերով՝

$$m_3 = [M_3^* - 3M_1^* M_2^* + 2(M_1^*)^3]h^3,$$

$$m_4 = [M_4^* - 4M_1^* M_3^* + 6(M_1^*)^2 M_2^* - 3(M_1^*)^4]h^4,$$

որտեղ

$M_k^* = \frac{1}{n}\sum n_i u_i^k$ մեծությունները k-րդ կարգի պայմանական մոմենտներն են, $u_i = \frac{x_i - C}{h}$ պայմանական տարբերակներ են։

Այստեղ x_i մեծությունները սկզբնական տարբերակներն են, C-ն՝ կեղծ զրոն, այսինքն այն տարբերակը, որի հաճախությունը ամենամեծն է (կամ վարիացիոն շարքի միջին մասի ցանկացած տարբերակ)։

Այսպիսով, ասիմետրիան և էքսցեսը գտնելու համար անհրաժեշտ է հաշվել պայմանական մոմենտները, դա կարելի է անել արտադրյալների մեթոդով կամ գումարների մեթոդով։

Ա. Արտադրյալների մեթոդը

494. $n = 100$ ծավալի ընտրանքի տված բաշխումով, օգտվելով արտադրյալների մեթոդից, գտնել ասիմետրիան և էքսցեսը։

տարբերակը	x_i	12	14	16	18	20	22
հաճախությունը	n_i	5	15	50	16	10	4

Լուծում։ Օգտվում ենք արտադրյալների մեթոդից։ Կազմենք հաշվողական աղյուսակը (աղյուսակ 3)։ Այս գլխի § 1-ում 486 խնդիրը լուծելիս արդեն ցույց է տրված, թե ինչպես են լրացվում աղյուսակի 1—5 սյունակները, ուստի սահմանափակվենք համառոտ պարզաբանումներով։

Վեցերորդ սյունակը լրացնելիս հարմար է բազմապատկել 3-րդ և 5-րդ սյունակների համապատասխան թվերը։

Յոթերորդ սյունակը լրացնելիս հարմար է բազմապատկել 3-րդ և 6-րդ սյունակների համապատասխան թվերը։

Ութերորդ սյունակը ծառայում է հաշվումների ստուգման համար, ընդ որում պետք է օգտվել հետևյալ նույնությունից՝

$$\sum n_i(u_i+1)^4=\sum n_iu_i^4+4\sum n_iu_i^3+$$
$$+6\sum n_iu_i^2+4\sum n_iu_i+n։$$

Բերենք հաշվարկային աղյուսակը․

Աղյուսակ 3

1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	n_i	u_i	n_iu_i	$n_iu_i^2$	$n_iu_i^3$	$n_iu_i^4$	$n_i(u_i+1)^4$
12	5	—2	—10	20	—40	80	5
14	15	—1	—15	15	—15	15	—
16	50	0	—25	—	—55	—	50
18	16	1	16	16	16	16	256
20	10	2	20	40	80	160	810
22	4	3	12	36	108	324	1024
			48		204		
	$n=100$		$\sum n_iu_i=$ $=23$	$\sum n_iu_i^2=$ $=127$	$\sum n_iu_i^3=$ $=149$	$\sum n_iu_i^4=$ $=595$	$\sum n_i(u_i+$ $+1)^4=$ $=2145$

Ստուգում։

$$\sum n_i(u_i+1)^4=2145,$$

$$\sum n_iu_i^4+4\sum n_iu_i^3+6\sum n_iu_i^2+4\sum n_iu_i+n=$$

$$=595+4\cdot149+6\cdot127+4\cdot23+100=2145.$$

Ստուգիչ գումարների համընկնումը վկայում է հաշվումների ճշտության մասին։

Գտնենք 3-րդ և 4-րդ կարգի պայմանական մոմենտները (առաջին և երկրորդ կարգի պայմանական մոմենտները հաշվել ենք 486 խնդրում՝ $M_1^*=0{,}23$, $M_2^*=1{,}27$)

$$M_3^*=\frac{1}{n}\sum n_iu_i^3=\frac{149}{100}=1{,}49;$$

$$M_4^*=\frac{1}{n}\sum n_iu_i^4=\frac{595}{100}=5{,}95.$$

Գտնենք երրորդ և չորրորդ կարգի կենտրոնական էմպիրիկ մոմենտները՝

$$m_3=[M_3^*-3M_1^*M_2^*+2(M_1^*)^3]h^3.$$

$$m_4=[M_4^*-4M_1^*M_3^*+6(M_1^*)^2M_2^*-3(M_1^*)^4]h^4.$$

Տեղադրելով $h=2$, $M_1^*=0{,}23$, $M_2^*=1{,}27$, $M_3^*=1{,}49$, $M_4^*=5{,}95$, *կստանանք* $m_3=5{,}124$, $m_4=79{,}582$։

Հաշվի առնելով, որ $D_{\text{ր}}=4{,}87$ *(տես 486 խնդիրը), կգտնենք ասիմետրիան և էքսցեսը՝*

$$a_s=\frac{m_3}{\sigma^3_{\text{ր}}}=\frac{5{,}124}{(\sqrt{4{,}87})^3}=0{,}49;$$

$$e_k=\frac{m^4}{\sigma^4_{\text{ր}}}-3=\frac{79{,}582}{(\sqrt{4{,}87})^4}-3=0{,}36.$$

495. $n=100$ ծավալի ընտրանքի տված բաշխումով, արտադրյալների մեթոդի օգնությամբ, գտնել ասիմետրիան և էքսցեսը։

ա)

x_i	2,6	3,0	3,4	3,8	4,2
n_i	5	20	45	15	12;

բ)

x_i	1	6	11	16	21
n_i	5	25	40	20	10

Պատ.՝ $a_s=0{,}145$, $e_k=-0{,}337$, *բ)* $a_s=0{,}18$, $e_k=-0{,}45$։

Բ. Գումարների մեթոդը

496. $n=100$ ծավալի ընտրանքի տված բաշխումով, գումարների մեթոդի օգնությամբ, գտնել ասիմետրիան և էքսցեսը․

x_i	48	52	56	60	64	68	72	76	80	84
n_i	2	4	6	8	12	30	18	8	7	5

Լուծում։ Օգտվում ենք գումարների մեթոդից, դրա համար կազմենք հաշվարկային աղյուսակ (աղյուսակ 4)։ Այս գլխի § 2-ում, 492 խնդիրը լուծելիս արդեն ասվեց, թե ինչպես լրացնել հաշվարկային աղյուսակի 1—4 սյունակները, ուստի սահմանափակվենք համառոտ պարզաբանումներով։

Հինգերորդ սյունակը լրացնելիս կեղծ զրոն (68) պարունակող տողի համապատասխան վանդակում գրենք զրո, այդ 0-ից վերև և ներքև տեղադրենք ևս 2-ական զրոներ։

Զրոներից վերև գտնվող վանդակներում գրենք 4-րդ սյունակի կուտակված հաճախությունները վերից վար, արդյունքում ստացվում են հետևյալ կուտակված հաճախությունները՝ 2; $2+8=10$; $2+8+20=30$։ Գումարելով կուտակված հաճախությունները, կստանանք $b_3=2+10+30=42$ թիվը, որը գրում ենք 5-րդ սյունակի վերին վանդակում։

Զրոներից ներքև գտնվող վանդակներում գրենք

4-րդ սյունակի կուտակված հաճախությունները վարից վեր, արդյունքում ստացվում են հետևյալ կուտակված հաճախությունները՝ 5; $5+17=22$։ Գումարելով կուտակված հաճախությունները, կստանանք $a_3=5+22=27$ թիվը, որը գրում ենք հինգերորդ սյունակի ստորին վանդակում։

Նման եղանակով լրացնում ենք 6-րդ սյունակը, ընդ որում գումարում ենք 5-րդ սյունակի հաճախությունները։ Գումարելով զրոներից վեր ընկած կուտակված հաճախությունները, ստանում ենք $b_4=2+12=14$ թիվը, որը գրում ենք 6-րդ սյունակի վերին վանդակում։ Գումարելով զրոներից ներքև ընկած կուտակված գումարները (մեր խնդրում միայն 1 գումարելի է), ստանում ենք $a_4=5$ թիվը, որը գրում ենք 6-րդ սյունակի ստորին վանդակում։

Արդյունքում ստանում ենք հաշվարկային աղյուսակը (աղյուսակ 4)։

Ստուգում։ Երրորդ սյունակի զրոյից վեր, ձախ և ներքև հարևան 3 թվերի գումարը պետք է լինի հավասար ընտրանքի ծավալին ($32+30+38=100$), սանդղաձև գծի 2 հարևան աստիճաններից (գծերը ավելի հաստ են) վերև ընկած երկու թվերի գումարը պետք է լինի հավասար նախորդ աստիճանից վերև գտնվող b_i թվին («աստիճաններով» դեպի վերև շարժվելիս), $32+40=72=b_1$, $40+30=70=b_2$, $30+12=42=b_3$։ Նման ձևով ստուգվում են դեպի ներքև տանող «սանդղակի աստիճաններից» ներքև ընկած 2 թվերի գումարը՝ $38+37=75=a_1$, $37+22=59=a_2$, $22+$ $+5=27=a_3$։

Եթե նշված հավասարություններից գոնե մեկը ճիշտ չէ, ապա պետք է փնտրել հաշվումներում եղած սխալը։

Որոշենք d_i $(i=1, 2, 3)$ և s_i $(i=1, 2, 3, 4)$ մեծությունները։

$$d_1=a_1-b_1=75-72=3, \quad d_2=a_2-b_2=59-70=-11,$$

$$d_3=a_3-b_3=27-42=-15,$$

$$s_1 = a_1 + b_1 = 75 + 72 = 147, \quad s_2 = a_2 + b_2 = 59 + 70 = 129,$$

$$s_3 = a_3 + b_3 = 27 + 42 = 69, \quad s_4 = a_4 + b_4 = 5 + 14 = 19.$$

Աղյուսակ 4

1	2	3	4	5	6
x_i	n_i	$b_1=72$	$b_2=70$	$b_3=42$	$b_4=14$
48	2	2	2	2	2
52	4	6	8	10	12
56	6	12	20	30	0
60	8	20	40	0	0
64	12	32	0	0	0
68	30	0	0	0	0
72	18	38	0	0	0
76	8	20	37	0	0
80	7	12	17	22	0
84	5	5	5	5	5
	$n=100$	$a_1=75$	$a_2=59$	$a_3=27$	$a_4=5$

Գտնենք 1-ին, 2-րդ, 3-րդ և 4-րդ կարգի պայմանական մոմենտները՝

$$M_1^* = \frac{d_1}{n} = \frac{3}{100} = 0{,}03; \qquad M_2^* = \frac{s_1 + 2s_2}{n} =$$

$$= \frac{147 + 2\cdot 129}{100} = 4{,}05;$$

$$M_3^* = \frac{d_1 + 6d_2 + 6d_3}{n} = \frac{3 + 6(-11) + 6(-15)}{100} = -1{,}53;$$

$$M_4^* = \frac{s_1 + 14s_2 + 36s_3 + 24s_4}{n} = \frac{147 + 14\cdot 129 + 36\cdot 69 + 24\cdot 19}{100} =$$

$$= 48{,}93.$$

Հաշվենք 3-րդ և 4-րդ կարգի կենտրոնական էմպիրիկ մոմենտները՝

$$m_3 = [M_3^* - 3M_1^* M_2^* + 2(M_1^*)^3]h^3 = [-1{,}53 - 3\cdot$$

$$\cdot 0{,}03\cdot 4{,}05 + 2(0{,}03)^3]\cdot 4^3 = -121{,}248;$$

$$m_4 = [M_4^* - 4M_1^* M_3^* + 6(M_1^*)^2 M_2^* - 3(M_1^*)^4]\cdot h^4 =$$

$$= [48{,}93 - 4\cdot 0{,}03\cdot(-1{,}53) + 6(0{,}03)^2\cdot 4{,}05 - 3\cdot(0{,}03)^4]4^4 =$$

$$= 49{,}135.$$

Գտնենք որոնելի ասիմետրիան և էքսցեսը, նկատի ունենալով, որ $\sigma_{\text{ը}} = \sqrt{D_{\text{ը}}} = \sqrt{64{,}78}$ *($D_{\text{ը}}$ դիսպերսիան հաշվել ենք ավելի շուտ, տես 492 խնդիրը).*

$$a_s = \frac{m_3}{\sigma_{\text{ը}}^3} = \frac{-121{,}248}{(\sqrt{64{,}78})^3} = -0{,}23;$$

$$e_k = \frac{m_4}{\sigma_{\text{ը}}^4} = \frac{49{,}134}{(\sqrt{64{,}78})^4} = 0{,}01.$$

497. $n=100$ *ծավալի ընտրանքի տված բաշխումով, օգտվելով գումարների մեթոդից, հաշվել ասիմետրիան և էքսցեսը։*

ա)

x_i	10,2	10,4	10,6	10,8	11,0	11,2	11,4	11,6	11,8	12,0;
n_i	2	3	8	13	25	20	12	10	6	1

բ)

x_i	12	14	16	18	20	22
n_i	5	15	50	16	10	4։

Պատ.՝ *ա)* $a_s=-0{,}01$, $e_k=-0{,}24$, *բ)* $a_s=0{,}49$, $e_k=0{,}36$։

ՏԱՍՆԵՐԿՈՒԵՐՈՐԴ ԳԼՈՒԽ

ԿՈՌԵԼՅԱՑԻԱՅԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՏԱՐՐԵՐԸ

§ 1. Գծային կոռելյացիա

Եթե Y-ը X-ի վրա և X-ը Y-ի վրա ռեգրեսիայի գծերը ուղիղներ են, ապա կոռելյացիան կոչվում է գծային։

Y-ը X-ի վրա ռեգրեսիայի ուղիղ գծի ընտրանքային հավասարումն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$\overline{y}_x-\overline{y}=r_{ը}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\overline{x}), \qquad (*)$$

որտեղ $\overline{y}_x$*-ը պայմանական միջինն է,* $\overline{x}$*- և* $\overline{y}$*-ը X և Y հայտանիշնե րի ընտրանքային միջիններն են,* σ_x*-ը և* σ_y*-ը՝ ընտրանքային միջին քառակուսային շեղումները,* $r_ը$*՝ ընտրանքային կոռելյացիայի գործակիցը, ընդ որում՝*

$$r_{ը}=\frac{\sum n_{xy}\,xy-n\overline{x}\,\overline{y}}{n\sigma_x\sigma_y}։$$

X-ը Y-ի վրա ռեգրեսիայի ուղղի ընտրանքային հավասարումն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$\overline{x}_y - \overline{x} = r_{\text{ը}} \frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - \overline{y}). \qquad (**)$$

Եթե X և Y հայտանիշների նկատմամբ կատարած դիտումների տվյալները տրված են հավասարահեռ տարբերակներով կոռելյացիոն աղյուսակի տեսքով, ապա նպատակահարմար է անցնել

$$u_i = \frac{x_i - C_1}{h_1}, \qquad v_i = \frac{y_i - C_2}{h_3}$$

պայմանական տարբերակներին, որտեղ C_1-ը x տարբերակների կեղծ զրոն է (հաշվման նոր սկիզբը), որպես կեղծ զրո հարմար է ընտրել այն տարբերակը, որն ընկած է վարիացիոն շարքի միջին մասում (պայմանավորվենք որպես կեղծ զրո վերցնել ամենամեծ հաճախություն ունեցող տարբերակը)։ h_1-ը քայլն է, այսինքն՝ երկու հարևան տարբերակների տարբերությունը, C_2-ը և h_2-ը՝ y տարբերակների կեղծ զրոն և քայլը։

Այդ դեպքում

$$r_{\text{ը}} = \frac{\sum n_{uv} uv - n\overline{u}\,\overline{v}}{n\sigma_u\sigma_v},$$

ընդ որում $\sum n_{uv} uv$ *արտահայտությունը հարմար է հաշվել, օգտվելով աղյուսակ 7-ից (տես 498 խնդրի լուծումը)։*

$\overline{u}$, $\overline{v}$, σ_u, σ_v *մեծությունները կարելի է գտնել կամ արտադրյալների մեթոդով (երբ տվյալների քանակը մեծ է), կամ անմիջապես, հետևյալ բանաձևերի օգնությամբ՝*

$$\overline{u} = \frac{1}{n}\sum n_u u, \qquad \overline{v} = \frac{1}{n}\sum n_v v, \qquad \sigma_u = \sqrt{\overline{u^2} - (\overline{u})^2},$$

$$\sigma_v = \sqrt{\overline{v^2} - (\overline{v})^2}.$$

Ունենալով այդ մեծությունները, (*) և (**) ռեգրեսիայի հավասարումներում եղած մեծությունները կարելի է հաշվել

$$x = u\overline{h_1} + C_1; \quad \overline{y} = \overline{v}h_2 + C_2; \quad \sigma_x = \sigma_u \cdot h_1; \quad \sigma_y = \sigma_v \cdot h_2$$

բանաձևերով։

Գծային կոռելյացիոն կախվածության ուժը գնահատվում է կոռելյացիայի ընտրանքային գործակցով։ Որքան մոտ է $|r_{ը}|$ մեկին, այնքան կապը ուժեղ է, որքան մոտ է $|r_{ը}|$ զրոյին, այնքան կապը թույլ է։

498. Կոռելյացիոն աղյուսակ 5-ում բերված տվյալներով, գտնել Y-ը X-ի վրա ռեգրեսիայի ուղղի ընտրանքային հավասարումը։

Լ ու ծ ու մ։ Կազմենք պայմանական տարբերակների կոռելյացիոն աղյուսակ 6-ը, վերցնելով որպես կեղծ զրոներ $C_1 = 30$ և $C_2 = 36$ թվերը (այդ տարբերակներից յուրաքանչյուրը ընկած է համապատասխան վարիացիոն շարքի միջին մասում), իսկ $h_1 = 5$, $h_2 = 10$։

Հաշվենք $\overline{u}$-ը և $\overline{v}$-ը։

$$\overline{u} = \frac{1}{n}\sum n_u u = \frac{4\cdot(-2) + 14(-1) + 46\cdot 0 + 16\cdot 1 + 20\cdot 2}{100} =$$

$$= 0{,}34,$$

$$\overline{v} = \frac{1}{n}\sum n_v \cdot v = \frac{10(-2) + 18\cdot(-1) + 44\cdot 0 + 22\cdot 1 + 6\cdot 2}{100} =$$

$$= -0{,}04:$$

Հաշվենք օժանդակ $\overline{u^2}$ և $\overline{v^2}$ մեծությունները։

$$\overline{u^2} = \frac{1}{n}\sum n_u u^2 = \frac{4\cdot 4 + 14\cdot 1 + 16\cdot 1 + 20\cdot 4}{100} =$$

$$= 1{,}26;$$

59.

Աղյուսակ 5

X \ Y	20	25	30	35	40	n_y
16	4	6	—	—	—	10
26	—	8	10	—	—	18
36	—	—	32	3	9	44
46	—	—	4	12	6	22
56	—	—	—	1	5	6
n_x	4	14	46	16	20	$n=100$

Աղյուսակ 6

u / v	—2	—1	0	1	2	n_v
—2	4	6	—	—	—	10
—1	—	8	10	—	—	18
0	—	—	32	3	9	44
1	—	—	4	12	6	22
2	—	—	—	1	5	6
n_u	4	14	46	16	20	$n=100$

$$\overline{v^2}\frac{1}{n}\sum n_v v^2 = \frac{10\cdot 4+18\cdot 1+22\cdot 1+6\cdot 4}{100} = 1{,}04\text{։}$$

Գտնենք σ_u-ն և σ_v-ն։

$$\sigma_u = \sqrt{\overline{u^2}-(\overline{u})^2} = \sqrt{1{,}26-0{,}34^2} = 1{,}07;$$

$$\sigma_v = \sqrt{\overline{v^2}-(\overline{v})^2} = \sqrt{1{,}04-0{,}04^2} = 1{,}02\text{։}$$

Հաշվենք $\sum n_{uv}uv$ արտահայտության արժեքը, դրա համար կազմենք հաշվարկային աղյուսակ 7-ը։ Այդ աղյուսակի վերջին սյունակի թվերը գումարելով, ստանում ենք՝

$$\sum_v \cdot U = \sum n_{uv} u \cdot v = 82\text{։}$$

Հաշվումների ճշտությունը ստուգելու համար գտնում ենք վերջին տողի թվերի գումարը՝

$$\sum_u u \cdot V = \sum n_{uv} \cdot uv = 82\text{։}$$

Գումարների համընկնումը վկայում է այն մասին, որ հաշվումները կատարված են ճիշտ։

Պարզաբանումներ աղյուսակ 7-ը կազմելու վերաբերյալ։

1. u տարբերակի և n_{uv} հաճախության $n_{uv}u$ արտադրյալը գրում ենք հաճախությունը պարունակող վանդակի վերին աջ անկյունում։ Օրինակ, առաջին տողի վանդակների վերին աջ անկյուններում գրված են $4\cdot(-2)=-8$ և $6\cdot(-1)=-6$ արտադրյալները։

2. Միևնույն տողի բոլոր վանդակների վերին աջ անկյուններում գրված թվերի գումարը գրում ենք այդ տողի «U սյունակի» վանդակում։ Օրինակ, առաջին տողի համար

$$U = -8+(-6) = -14\text{։}$$

3. Վերջապես, բազմապատկում ենք v տարբերակը U-ով և ստացված արտադրյալը գրում «vU սյունակի» վանդակում։ Օրինակ, աղյուսակի առաջին տողում $v = -2$, $U = -14$, հետևաբար,

$$vU = (-2)\cdot(-14) = 28։$$

4. Գումարելով «vU սյունակի» բոլոր թվերը ստանում ենք $\sum_{v} vU$ գումարը, որը հավասար է որոնելի $\sum n_{uv} u\cdot v$ գումարին։ Օրինակ, աղյուսակ 7-ում $\sum_{v} vU = 82$, հետևաբար, որոնելի գումարը $\sum n_{uv} uv = 82$։

Սխալներից խուսափելու համար նման հաշվումները կատարում ենք նաև սյունակների նկատմամբ։ vn_{uv} արտադրյալները գրում ենք համախությունը պարունակող վանդակի ներքևի ձախ անկյունում, գումարելով սյունակի վանդակների ներքևի ձախ անկյուններում գրված թվերը՝ ստացված արդյունքը գրում ենք «V տողում», վերջապես յուրաքանչյուր տարբերակ բազմապատկում ենք V-ով և արտադրյալը գրում վերջին տողի վանդակում։

Գումարելով վերջին տողի բոլոր թվերը, ստանում ենք $\sum_{u} uV$ գումարը, որը նույնպես հավասար է որոնելի $\sum n_{uv} U\cdot V$ գումարին։ Օրինակ, աղյուսակ 7-ում $\sum_{u} uV = 82$, հետևաբար, $\sum n_{uv}\, u\cdot v = 82$։

Հաշվենք ընտրանքային կոռելյացիայի որոնելի գործակիցը։

$$r_{ը} = \frac{\sum n_{uv} uv - n\bar{u}\bar{v}}{n\sigma_u\sigma_v} = \frac{82 - 100\cdot 0,34(-0,04)}{100\cdot 1,07\cdot 1,02} = 0,76։$$

Գտնենք h_1 և h_2 քայլերը (ցանկացած երկու տարբերակների միջև եղած տարբերությունը

$$(h_1 = 25 - 20 = 5; \quad h_2 = 26 - 16 = 10։$$

v \ u	−2	−1	0	1	2	$U=\Sigma u_{uv}\cdot u$	$v\cdot U$
−2	−8 4 −8	−6 6 −12				−14	28
−1	—	−8 8 −8	0 10 −10			−8	8
0	—	—	0 32 0	3 3 0	18 9 0	21	24
1	—	—	0 4 4	12 12 12	12 6 6	24	24
2	—	—	—	1 1 2	10 5 10	11	22
$V=\Sigma n_{uv}\cdot v$	−8	−20	−6	14	16		$\sum_v v\cdot V=82$ ↑
$u\cdot V$	16	20	0	14	32	$\sum_u u\cdot V=82$ ←	—Ստուգում

Որոշենք $\bar{x}$ և $\bar{y}$ մեծությունները, հաշվի առնելով, որ $C_1 = 30$, $C_2 = 36$;

$$\bar{x} = \bar{u} h_1 + C_1 = 0{,}34 \cdot 5 + 30 = 31{,}70;$$

$$\bar{y} = \bar{v} \cdot h_2 + C_2 = (-0{,}04) \cdot 10 + 36 = 35{,}60.$$

Գտնենք σ_x-ը և σ_y-ը։

$$\sigma_x = h_1 \sigma_u = 5 \cdot 1{,}07 = 5{,}35.$$

$$\sigma_y = h_2 \sigma_v = 10 \cdot 1{,}02 = 10.2.$$

Ստացված արժեքները տեղադրելով (*)-ում, ստանում ենք Y-ը X-ի վրա ռեգրեսիայի գծի որոնելի հավասարումը՝

$$\bar{y}_x - 35{,}60 = 0{,}76 \cdot \frac{10{,}2}{5{,}35}(x - 31{,}70)$$

Կամ վերջնականապես

$$\bar{y}_x = 1{,}45x - 10{,}36.$$

499. Հետևյալ կոռելյացիոն աղյուսակներում բերված տվյալներով գտնել Y-ը X-ի վրա և X-ը Y-ի վրա ռեգրեսիաների ուղիղների հավասարումները։

ա)

Y \ X	5	10	15	20	25	30	35	40	n_y
100	2	1		—	—	—	—	—	3
120	3	4	3	—	—	—	—	—	10
140	—	—	5	10	8	—	—	—	23
160	—	—	—	1	—	6	1	1	9
180	—	—	—	—	—	—	4	1	5
n_x	5	5	8	11	8	6	5	2	n=50

բ)

Y \ X	18	23	28	33	38	43	48	n_y
125	—	1	—	—	—	—	—	1
150	1	2	5	—	—	—	—	8
175	—	3	2	12	—	—	—	17
200	—	—	1	8	7	—	—	16
225	—	—	—	—	3	3	—	6
250	—	—	—	—	—	1	1	2
n_x	1	6	8	20	10	4	1	n=50

գ)

Y \ X	5	10	15	20	25	30	35	n_y
100	—	—	—	—	—	6	1	7
120	—	—	—	—	—	4	2	6
140	—	—	8	10	5	—	—	23
160	3	4	3	—	—	—	—	10
180	2	1	—	1	—	—	—	4
n_x	5	5	11	11	5	10	3	n=50

Պատ.՝ ա) $\overline{y}_x = 1{,}92x + 101{,}6$, $\quad \overline{x}_y = 0{,}12y + 3{,}7$,

բ) $\overline{y}_x = 4x + 57{,}8$, $\quad \overline{x}_y = 0{,}19y - 3{,}1$,

գ) $\overline{y}_x = -2{,}15x + 181{,}8$, $\quad \overline{x}_y = -0{,}33y + 65{,}7$.

2. Կորագիծ կոռելյացիա

Եթե ռեգրեսիայի գրաֆիկը կոր գիծ է, ապա կոռելյացիան կոչվում է կորագիծ։ Մասնավորապես, երկրորդ կարգի պարաբոլական կոռելյացիայի դեպքում Y-ը X-ի վրա ռեգրեսիայի ընտրանքային հավասարումն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$\overline{y}_x = Ax^2 + Bx + C.$$

A, B, C անհայտ պարամետրերը որոշում են (օրինակ, Գաուսի մեթոդով) հավասարումների հետևյալ համակարգից՝

$$\begin{cases} \left(\sum n_x x^4\right)A + \left(\sum n_x x^3\right)B + \left(\sum n_x x^2\right)C = \sum n_x \overline{y}_x x^2; \\ \left(\sum n_x x^3\right)A + \left(\sum n_x x^2\right)B + \left(\sum n_x x\right)C = \sum n_x \overline{y}_x x; \\ \left(\sum n_x x^2\right)A + \left(\sum n_x x\right)B + \left(\sum n_x\right)C = \sum n_x \overline{y}_x. \end{cases} \qquad (*)$$

Նման ձևով գտնում են X-ը և Y-ի վրա ռեգրեսիայի ընտրանքային հավասարումը

$$\overline{x}_y = A_1 y^2 + B_1 y + C_1.$$

Y-ը X-ի վրա կոռելյացիայի ուժեղությունը գնահատվում է ընտրանքային կոռելյացիոն հարաբերության օգնությամբ (Y-ի միջխմբային միջին քառակուսային շեղման հարաբերությունը նրա միջին քառակուսային շեղմանը),

$$\eta_{yx} = \frac{\sigma_{\text{միջխ}}}{\sigma_{\text{ընդ}}},$$

կամ (այլ նշանակումներով)

$$\eta_{yx} = \frac{\sigma_{\overline{y}_x}}{\sigma_y}.$$

Այստեղ

$$\sigma_{\overline{y}_x} = \sqrt{D_{\text{միջխ}}} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum n_x (\overline{y}_x - \overline{y})^2},$$

$$\sigma_y = \sqrt{D_{\text{ընդ}}} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum n_y(y-\overline{y})^2},$$

որտեղ n-ը ընտրանքի ծավալն է (բոլոր հաճախությունների գումարը), n_x-ը՝ X հայտանիշի x արժեքի հաճախությունը, n_y-ը՝ Y հայտանիշի y արժեքի հաճախությունը, $\overline{y}_x$-ը՝ Y հայտանիշի պայմանական միջինը, $\overline{y}$-ը, հայտանիշի ընդհանուր միջինը։

Նման ձևով որոշվում է X-ը Y-ի վրա ընտրանքային կոռելյացիոն հարաբերությունը.

500. Կոռելյացիոն աղյուսակ 8-ում բերված տվյալներով գտնել ռեգրեսիայի ընտրանքային $\overline{y}_x = Ax^2 + Bx + C$ հավասարումը։

Գնահատել կոռելյացիոն կապի ուժը, ելնելով ընտրանքային կոռելյացիոն հարաբերության արժեքից։

Աղյուսակ 8

Y \ X	2	3	5	n_y
25	20	—	—	20
45	—	30	1	31
110	—	1	48	49
n_x	20	31	49	$n=100$

Լուծում։ Կազմենք հաշվարկային աղյուսակը (աղյուսակ 9)

Աղյուսակ 9

$\overline{x}$	n_x	$\overline{y}_x$	$n_x x$	$n_x x^2$	$n_x x^3$	$n_x x^4$	$n_x \overline{y}_x$	$n_x \overline{y}_x x$	$n_x \overline{y}_x x^2$
2	20	25	40	80	160	320	500	1000	2000
3	31	47,1	93	279	837	2511	4380	4380	13141
5	49	108,67	245	1225	6125	30625	5325	26624	133121
$\sum$	100		378	1584	7122	33456	7285	32004	148262

Աղյուսակ 9-ի վերջին տողի թվերը տեղադրելով (*)-ի մեջ, կստանանք A, B, C *անհայտ գործակիցների նկատմամբ հավասարումների համակարգ,*

$$33456\,A + 7122\,B + 1584\,C = 148262,$$

$$7122\,A + 1584\,B + 378\,C = 32004,$$

$$1584\,A + 378\,B + 100\,C = 7285.$$

Լուծելով այս համակարգը (օրինակ, Գաուսի մեթոդով), ստանում ենք՝

$$A = 2{,}94, \quad B = 7{,}27, \quad C = -1{,}25.$$

Գործակիցների ստացած արժեքները տեղադրելով ռեգրեսիայի

$$\overline{y}_x = Ax^2 + Bx + C$$

հավասարման մեջ, վերջնականապես կունենանք՝

$$\overline{y}_x = 2{,}94x^2 + 7{,}27x - 1{,}25\text{։}$$

η_{yx} ընտրանքային կոռելյացիոն հարաբերությունը հաշվելու համար, նախապես գտնենք $\overline{y}$ ընդհանուր միջինը, σ_y ընդհանուր միջին քառակուսային շեղումը և $\sigma_{\overline{y}_x}$ միջխմբային միջին քառակուսային շեղումը.

$$\overline{y} = \frac{1}{n}\sum n_y y = \frac{20\cdot 25 + 31\cdot 45 + 49\cdot 110}{100} = 72{,}85;$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{n}\sum n_y(y - \overline{y})^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{20(25-72{,}85)^2 + 31\cdot(45-72{,}85)^2 + 49(110-72{,}85)^2}{100}} =$$

$$= 37{,}07; \quad \sigma_{\overline{y}_x} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum n_x\left(\overline{y}_x - \overline{y}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{20(25-72{,}85)^2 + 31(47{,}1-72{,}85)^2 + 49(108{,}67-72{,}85)^2}{100}} =$$

$$= 33{,}06\text{։}$$

Գտնենք որոնելի ընտրանքային կոռելյացիոն հարաբերությունը՝

$$\eta_{yx} = \frac{\sigma_{\overline{y}_x}}{\sigma_y} = \frac{33{,}06}{37{,}07} = 0{,}89\text{։}$$

501. Կոռելյացիոն աղյուսակում բերված տվյալներով գտնել ռեգրեսիայի ընտրանքային $\overline{y}_x = Ax^2 + Bx + C$ հավասարումը և η_{yx} ընտրանքային կոռելյացիոն հարաբերությունը։

ш)

X \ Y	0	1	2	3	4	n_y
0	18	1	1	—	—	20
3	1	20	—	—	—	21
5	3	5	10	2	—	20
10	—	—	7	12	—	19
17	—	—	—	—	20	20
n_x	22	26	18	14	20	n=100

щ)

X \ Y	0	4	6	7	10	n_y
7	19	1	1			21
13	2	14				16
40		3	22	2		27
80				15		15
200					21	21
n_x	21	18	23	17	21	n=100

ч)

Y \ X	0	4	5	n_y
1	50	5	1	56
35		44		44
50		5	45	50
n_x	50	54	46	$n=150$

ц)

Y \ X	0	1	2	3	4	n_y
10	20	5				25
11	7	15	3	1		26
20		3	17	4		24
35			8	13	7	28
50				5	42	47
n_x	27	23	28	23	49	$n=150$

ե)

X \ Y	7	8	9	n_y
200	41	7		48
300	1	52	1	54
400		8	40	48
n_x	42	67	41	n=150

Պատ. ա) $\overline{y_x}=0,66x^2+1,23x+1,07$; $\eta_{yx}=0,96$,

բ) $\overline{y_x}=3,20x^2-13,01x+9,09$; $\eta_{yx}=0,99$,

գ) $\overline{y_x}=1,53x^2+1,95x+1$; $\eta_{yx}=0,86$,

դ) $\overline{y_x}=1,59x^2+3,33x+9,4$; $\eta_{yx}=0,83$

ե) $\overline{y_x}=-1,52x^2+121,94x-576,61$; $\eta_{yx}=0,83$։

502. Կոռելյացիոն աղյուսակում բերված տվյալներով գտնել ռեգրեսիայի, ընտրանքային $\overline{X}_y=Ay^2+By+C$ հավասարումը և η_{xy} ընտրանքային կոռելյացիոն հարաբերությունը։

ա)

X \ Y	6	30	50	n_y
1	15			15
3	1	14		15
4		2	17	20
n_x	16	16	18	n=50

բ)

Y \ X	1	9	19	n_y
0	13			13
2	2	10		12
3	1	1	23	25
n_x	16	11	23	n=50

Պատ.՝ *ա)* $\overline{x}_y = 2{,}8y^2 + 0{,}02y + 3{,}18$, $\eta_{xy} = 0{,}96$,

բ) $\overline{x_y} = 2{,}29y^2 - 1{,}25y + 1$, $\eta_{xy} = 0{,}92$։

ՏԱՍՆԵՐԵՔԵՐՈՐԴ ԳԼՈՒԽ

ՎԻՃԱԿԱԳՐԱԿԱՆ ՀԻՊՈԹԵԶՆԵՐԻ ՎԻՃԱԿԱԳՐԱԿԱՆ ՍՏՈՒԳՈՒՄԸ

§ 1. Հիմնական տեղեկություններ

Անհայտ բաշխման տեսքի կամ հայտնի բաշխման պարամետրերի մասին հիպոթեզները, կոչվում են վիճակագրական։

Առաջադրված հիպոթեզը կոչվում է զրոյական (հիմնական)։

Մրցակցող (ալտերնատիվ) *կոչվում է այն* H_1 *հիպոթեզը, որը հակասում է զրոյականին։*

Հիպոթեզի ստուգման արդյունքում հնարավոր են երկու տիպի սխալներ։

Առաջին սեռի սխալը *այն է, որ մերժվում է ճիշտ հիպոթեզը։ Առաջին սեռի սխալի հավանականությունը կոչվում է նշանակալիության մակարդակ։*

Երկրորդ սեռի սխալը *այն է, որ ընդունվում է ոչ ճիշտ հիպոթեզը։ Երկրորդ սեռի սխալի հավանականությունը նշանակում են* β։

Հիպոթեզի ստուգմանը ծառայող K *պատահական մեծությունը* կոչվում է վիճակագրական չափանիշ (կամ պարզապես չափանիշ)։

Դիտվող (էմպիրիկ) $K_{դիտ.}$ արժեքը կոչվում է չափանիշի այն արժեքը, որը հաշվված է ընտրանքի տվյալներով։

Չափանիշի արժեքների համախմբությունը, որոնց դեպքում զրոյական հիպոթեզը մերժվում է, կոչվում է կրիտիկական տիրույթ։

Հիպոթեզի ընդունման տիրույթ (թույլատրելի արժեքների տիրույթ) կոչվում է չափանիշի այն արժեքների համախմբությունը, որոնց դեպքում զրոյական հիպոթեզը ընդունվում է։

Վիճակագրական հիպոթեզների ստուգման հիմնական սկզբունքն է՝ եթե չափանիշի դիտվող արժեքը պատկանում է կրիտիկական տիրույթին, ապա զրոյական հիպոթեզը մերժվում է, եթե չափանիշի դիտվող արժեքը պատկանում է հիպոթեզի ընդունման տիրույթին, ապա հիպոթեզը ընդունվում է։

Կրիտիկական տիրույթը հիպոթեզի ընդունման տիրույթից բաժանող $K_{կր}$ կետերը կոչվում են կրիտիկական կետեր (սահմաններ)։

Աջակողմյան է կոչվում այն կրիտիկական տիրույթը, որը որոշվում է $K > k_{կր}$ անհավասարությամբ, որտեղ $k_{կր}$ դրական թիվ է։

Ձախակողմյան է կոչվում այն կրիտիկական տիրույթը, որը որոշվում է $K < k_{կր}$ անհավասարությամբ, որտեղ $k_{կր}$ բացասական թիվ է։

Աջակողմյան կամ ձախակողմյան կրիտիկական տիրույթները կոչվում են միակողմանի։

Երկկողմանի է կոչվում այն կրիտիկական տիրույթը, որը որոշվում է $K < k_1$, $K > k_2$ $(k_2 > k_1)$ անհավասարություններով։ Մասնավորապես, եթե կրիտիկական կետերը սիմետրիկ են զրոյի նկատմամբ, ապա երկկողմանի կրիտիկական տիրույթը որոշվում է (ենթադրվում է, որ $k_{կր} > 0$) $K < -k_{կր}$, $K > k_{կր}$ անհավասարություններով կամ համարժեք

$$|K| > k_{կր} \quad \text{անհավասարությամբ.}$$

Կրիտիկական տիրույթը գտնելու համար ընտրում են նշանակալիության α մակարդակը և փնտրում են կրիտիկական կետերը, ելնելով հետևյալ առնչություններից՝

ա) աջակողմյան կրիտիկական տիրույթի դեպքում՝

$$P(K > k_{կր}) = \alpha \qquad (k_{կր} > 0);$$

բ) ձախակողմյան կրիտիկական տիրույթի դեպքում՝

$$P(K<k_{կր})=\alpha \qquad (K_{կր}<0);$$

գ) երկկողմանի սիմետրիկ տիրույթի դեպքում՝

$$P(K>k_{կր})=\frac{\alpha}{2}$$

$$P(K<-k_{կր})=\frac{\alpha}{2} \qquad (K_{կր}>0)։$$

§ 2. Նորմալ գլխավոր համախմբությունների երկու դիսպերսիաների համեմատումը

Երկու նորմալ գլխավոր համախմբություններից վերցված են համապատասխանաբար n_1 և n_2 ծավալի անկախ ընտրանքներ և գտնված են ուղղված ընտրանքային S_x^2 և S_y^2 դիսպերսիաները։ Պահանջվում է համեմատել այդ դիսպերսիաները։

Կանոն 1: Որպեսզի տրված α նշանակալիության մակարդակով ստուգել $H_0 \sim DX=DY$ հիպոթեզը նորմալ գլխավոր համախմբությունների դիսպերսիաների հավասարության մասին, $H_1 \sim DX>DY$ մրցակցող հիպոթեզի դեպքում անհրաժեշտ է հաշվել

$$F_{դիտ}=\frac{S_{մ}^2}{S_{փ}^2}$$

հայտանիշի դիտվող արժեքը (մեծ ուղղված դիսպերսիայի հարաբերությունը փոքրին) և կրիտիկական կետերի Ֆիշեր—Սնեդեկորի բաշխման աղյուսակից գտնել տրված α նշանակալիության մակարդակի և $k_1=n_1-1$, $k_2=n_2-1$ (k_1-ը մեծ ուղղված դիսպերսիայի ազատության աստիճանն է) ազատության աստիճանների համապատասխան $F_{կր}$ (α, k_1, k_2) կրիտիկական կետը:

Եթե $F_{դիտ}<F_{կր}$, ապա զրոյական հիպոթեզը մերժելու հիմք չկա։

Եթե $F_{դիտ}>F_{կր}$, ապա զրոյական հիպոթեզը մերժում են:

Կանոն 2: $H_1 \sim DX \neq DY$ մրցակցող հիպոթեզի դեպքում $F_{կր}\left(\frac{\alpha}{2}, k_1, k_2\right)$ կրիտիկական կետը որոնում են $\frac{\alpha}{2}$ (տվածից երկու անգամ փոքր) նշանակալիության մակարդակով և k_1 ու k_2 ազատության աստիճաններով (k_1-ը մեծ դիսպերսիայի ազատության աստիճանների թիվն է):

Եթե $F_{դիտ} < F_{կր}$, ապա զրոյական հիպոթեզը մերժելու հիմք չկա։
Եթե $F_{դիտ} > F_{կր}$, ապա զրոյական հիպոթեզը մերժում են։

503. X և Y նորմալ գլխավոր համախմբություններից վերցված երկու անկախ $n_1 = 11$ և $n_2 = 14$ ծավալի ընտրանքների ավյալներով հաշվված են $S_x^2 = 0{,}76$ և $S_y^2 = 0{,}38$ ուղղված ընտրանքային դիսպերսիաները։ $\alpha = 0{,}05$ նշանակալիության մակարդակով ստուգել $H_0 \sim DX = DY$ գլխավոր դիսպերսիաների հավասարության մասին զրոյական հիպոթեզը $DX > DY$ մրցակցող հիպոթեզի դեպքում։

Լուծում։ Գտնենք մեծ ուղղված դիսպերսիայի հարաբերությունը փոքրին՝

$$F_{դիտ} = \frac{0{,}76}{0{,}38} = 2.$$

Ըստ պայմանի մրցակցող հիպոթեզն ունի $DX > DY$ տեսքը, ուստի կրիտիկական տիրույթն աջակողմյան է։ $\alpha = 0{,}05$ նշանակալիության մակարդակով և $k_1 = n_1 - 1 = 11 - 1 = 10$, $k_2 = n_2 - 1 = 14 - 1 = 13$ ազատության աստիճաններով աղյուսակից (հավելված 7) գտնում ենք կրիտիկական կետը՝

$$F_{կր}(0{,}05,\ 10,\ 13) = 2{,}67.$$

Քանի որ $F_{դիտ} < F_{կր}$, ապա գլխավոր դիսպերսիաների հավասարության մասին հիպոթեզը մերժելու հիմք չկա։ Այլ կերպ ասած, ուղղված ընտրանքային դիսպերսիաների տարբերությունը նշանակալի չէ։

504. X և Y նորմալ գլխավոր համախմբություններից վերցված երկու անկախ $n_1 = 9$ և $n_2 = 16$ ծավալի ընտրանքների ավյալներով հաշվված են $S_x^2 = 34{,}02$ և $S_y^2 = 12{,}15$ ուղղված ընտրանքային դիսպերսիաները, $\alpha = 0{,}01$ նշանակալիության մակարդակով ստուգել $H_0 \sim DX = DY$ զրոյական հիպոթեզը ուղղված դիսպերսիաների հավասարության մասին $DX > DY$ մրցակցող հիպոթեզի դեպքում։

Պատ.՝ $F_{դիտ}=2,8$, $F_{կր}(0,01;\ 8;\ 15)=2,64$։ Զրոյական հիպոթեզը մերժվում է։

505. X և Y նորմալ գլխավոր համախմբություններից վերցված երկու անկախ $n_1=14$ և $n_2=10$ ծավալի ընտրանքների տվյալներով հաշված են $S_x^2=0,84$ և $S_y^2=2,52$ ուղղված ընտրանքային դիսպերսիաները։ $\alpha=0,1$ նշանակալիության մակարդակով ստուգել $H_0 \sim DX=DY$ զրոյական հիպոթեզը գլխավոր դիսպերսիաների հավասարության մասին $H_1 \sim DX \neq DY$ մրցակցող հիպոթեզի դեպքում։

Լուծում։ Հաշվենք մեծ ուղղված դիսպերսիայի հարաբերությունը փոքրին՝

$$F_{դիտ}=\frac{2,52}{0,84}=3։$$

Պայմանի համաձայն մրցակցող հիպոթեզն ունի $DX \neq DY$ տեսքը, ուստի կրիտիկական տիրույթը երկկողմանի է։ Կանոն 2-ի համաձայն, կրիտիկական կետը փնտրելիս նշանակալիության մակարդակը պետք է տվածից 2 անգամ փոքր վերցնել։

$\frac{\alpha}{2}=\frac{0,1}{2}=0,05$ նշանակալիության մակարդակով և $k_1=10-1=9$, $k_2=14-1=13$ ազատության աստիճաններով աղյուսակից (հավելված 7) գտնում ենք $F_{կր}(0,05,\ 9,\ 13)=2,71$ կրիտիկական կետը։

Քանի որ $F_{դիտ}>F_{կր}$, ապա գլխավոր դիսպերսիաների հավասարության մասին զրոյական հիպոթեզը մերժում ենք։

506. X և Y նորմալ գլխավոր համախմբություններից վերցված երկու անկախ $n_1=9$ և $n_2=6$ ծավալի ընտրանքների տվյալներով հաշված են $D_ըX=14,4$ և $D_ըY=20,5$ ընտրանքային դիսպերսիաները։ $\alpha=0,1$ նշանակալիության մակարդակով ստուգել գլխավոր դիսպերսիաների հավասարության մասին $H_0 \sim DX=DY$ զրոյական հիպոթեզը $H_1 \sim DX \neq DY$ մրցակցող հիպոթեզի դեպքում։

Ցուցում։ Նախ հաշվել ուղղված դիսպերսիաները՝

$$S_x^2 = \frac{n_1}{n_1-1} D_{\text{ը}} X, \quad S_y^2 = \frac{n_2}{n_2-1} D_{\text{ը}} Y$$

բանաձևով։

Պատ.՝ $F_{\text{դիտ}} = 1,52$, $F_{\text{կր}}$ (0,05; 5; 8) = 3,69։ Այսպիսով, զըլխավոր դիսպերսիաների հավասարության մասին զրոյական հիպոթեզը մերժելու հիմք չկա։

507. Երկու մեթոդներով կատարվել են միևնույն ֆիզիկական մեծության չափումներ։ Ստացվել են հետևյալ արդյունքները՝

ա) առաջին դեպքում $x_1 = 9,6$; $x_2 = 10,0$; $x_3 = 9,8$; $x_4 = 10,2$; $x_5 = 10,6$;

բ) երկրորդ դեպքում $y_1 = 10,4$; $y_2 = 9,7$; $y_3 = 10,0$; $y_4 = 10,3$։

Կարելի՞ է արդյոք համարել, որ երկու մեթոդները ապահովում են միևնույն ճշտությունը, եթե նշանակալիության մակարդակը $\alpha = 0,1$։ Ենթադրվում է, որ չափումների արդյունքները բաշխված են նորմալ, իսկ ընտրանքները անկախ են։

Լուծում։ Մեթոդների ճշտության մասին կդատենք, ելնելով նրանց դիսպերսիաներից։ Այսպիսով, զրոյական հիպոթեզն ունի $H_0 \sim DX = DY$ տեսքը։ Որպես մրցակցող դիտարկենք $H_1 \sim DX \neq DY$ հիպոթեզը։

Հաշվենք ընտրանքային դիսպերսիաները։ Հաշվումները պարզեցնելու նպատակով անցնենք

$$u_i = 10x_i - 100, \quad v_i = 10y_i - 100$$

պայմանական տարբերակներին։ Արդյունքում կստանանք

u_i	−4	0	−2	26
v_i	4	−3	0	3

պայմանական տարբերակները։

Գտնենք ուղղված ընտրանքային դիսպերսիաները՝

$$S_u^2=\frac{1}{n_1-1}\left\{\sum u_i^2-\frac{1}{n_1}\left[\sum u_i\right]^2\right\}=\frac{(16+4+4+36)-4/5}{5-1}=$$

$$=14{,}8;$$

$$S_v^2=\frac{1}{n_2-1}\left\{\sum v_i^2-\frac{1}{n^2}\left[\sum v_i\right]^2\right\}=\frac{(16+9+9)-\frac{16}{4}}{4-1}=$$

$$=10։$$

Համեմատենք դիսպերսիաները։ Գտնենք մեծ ուղղված դիսպերսիայի հարաբերությունը փոքրին (դիսպերսիաներից յուրաքանչյուրը մեծացել է 10^2 անգամ, բայց նրանց հարաբերությունը մնացել է անփոփոխ)

$$F_{դիտ}=\frac{S_x^2}{S_y^2}=\frac{S_u^2}{S_v^2}=\frac{14{,}8}{10}=1{,}48։$$

Պայմանի համաձայն, մրցակցող հիպոթեզն ունի $DX \neq \neq DY$ տեսքը, ուստի կրիտիկական տիրույթն երկկողմանի է և կանոն 2-ի համաձայն, կրիտիկական կետը փնտրելիս պետք է նշանակալիության մակարդակը վերցնել տվածից 2 անգամ փոքր։

$\frac{\alpha}{2}=\frac{0{,}1}{2}=0{,}05$ նշանակալիության մակարդակով և $k_1=n_1-1=5-1=4$, $k_2=n_2-1=4-1=3$ ազատության աստիճաններով աղյուսակից (հավելված 7) գտնում ենք $F_{կր}(0{,}05;\ 4;\ 3)=9{,}12$ կրիտիկական կետը։

Քանի որ $F_{դիտ}<F_{կր}$, ապա գլխավոր դիսպերսիաների հավասարության մասին զրոյական հիպոթեզը մերժելու հիմք չկա։ Այլ կերպ ասած, ուղղված դիսպերսիաների տարբերությունը նշանակալի չէ, հետևաբար, երկու մեթոդները ապահովում են չափումների միատեսակ ճշտություն։

508. Երկու ավտոմատ հաստոցները համեմատելու նպատակով վերցված են 2 փորձանմուշներ (ընտրանքներ), *որոնց ծավալները հավասար են* $n_1=10$ *և* $n_2=8$։ *Ընտրված դետալների հսկվող չափերի չափման արդյունքում ստացվել են հետևյալ տվյալները՝*

x_i 1,08 1,10 1,12 1,14 1,15 1,25 1,36 1,38 1,40 1,42

y_i 1,11 1,12 1,18 1,22 1,33 1,35 1,36 1,38

Կարելի՞ է արդյոք համարել, որ հաստոցներն ունեն միևնույն ճշտությունը $[H_0 \sim DX=DY]$ *եթե որպես նշանակալիության մակարդակ ընդունվում է* $\alpha=0{,}1$ *թիվը և մրցակցող* $H_1 \sim DX \neq DY$ *հիպոթեզը։*

Ցուցում։ *Հաշվումները պարզեցնելու համար անցնել* $u_i = 100x_i - 124$, $v_i = 100y_i - 126$ *պայմանական տարբերակներին։*

Պատ.՝ $s^2_u = 188{,}67$, $s^2_v = 124{,}84$, $F_{դիտ} = 1{,}51$, $F_{կր}(0{\cdot}05, 9, 7) = 3{,}63$։ *Այսպիսով, հաստոցների ճշտությունը միմյանցից տարբեր համարելու հիմք չկա։*

§ 3. Նորմալ համախմբության գլխավոր հիպոթեզից և ուղղված ընտրանքային դիսպերսիաների համեմատումը

Նշանակենք n*-ով այն ընտրանքի ծավալը, որով հաշվված է ուղղված* s^2 *դիսպերսիան.*

Կանոն 1: Տրված α նշանակալիության մակարդակով $H_0 \sim \sigma^2 = \sigma^2_0$ անհայտ գլխավոր դիսպերսիայի և հիպոթեզի σ^2_0 արժեքի հավասարության մասին զրոյական հիպոթեզը ստուգելու համար մրցակցող $H_1 \sim \sigma^2 > \sigma^2_0$ հիպոթեզի դեպքում անհրաժեշտ է հաշվել

$$\chi^2_{դիտ} = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2_0}$$

չափանիշի դիտվող արժեքը և χ^2 բաշխման կրիտիկական կետերի աղյուսակից գտնել $\chi^2_{կր}(\alpha, k)$ կրիտիկական կետը տրված α նշանակալիության մակարդակով և $k=n-1$ ազատության աստիճանով։

Եթե $\chi^2_{դիտ} < \chi^2_{կր}$, ապա զրոյական հիպոթեզը մերժելու հիմք չկա։

Եթե $\chi^2_{դիտ} > \chi^2_{կր}$, ապա զրոյական հիպոթեզը մերժվում է:

Կանոն. 2. Մրցակցող $H_1 \sim \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ հիպոթեզի դեպքում գտնում

ենք $\chi^2_{ձախ\ կր.}\left(1 - \dfrac{\alpha}{2}, \quad k\right)$ ձախ և $\chi^2_{աջ\ կր.}\left(\dfrac{\alpha}{2}, k\right)$ աջ կրիտիկական կետերը:

Եթե $\chi^2_{ձախ\ կր.} \chi^2_{դիտ} < \chi^2_{աջ.\ կր.}$, ապա զրոյական հիպոթեզը մերժելու հիմք չկա:

Եթե $\chi^2_{դիտ} < \chi^2_{ձախ\ կր.}$ կամ $\chi^2_{դիտ} > \chi^2_{աջ\ կր.}$, ապա զրոյական հիպոթեզը մերժվում է:

Կանոն 3: Մրցակցող $H_1 \sim \sigma^2 < \sigma_0^2$ հիպոթեզի դեպքում գտնում ենք $\chi^2_{կր.}$ $(1-\alpha,\ k)$ կրիտիկական կետը:

Եթե $\chi^2_{դիտ} > \chi^2_{կր}(1-\alpha, k)$, *ապա զրոյական հիպոթեզը մերժելու հիմք չկա։*

Եթե $\chi^2_{դիտ} < \chi^2_{կր.}$ $(1-\alpha,\ k)$, ապա զրոյական հիպոթեզը մերժվում է:

Դիտողություն: Եթե ազատության աստիճանը $k > 30$, ապա $\chi^2_{կր}(\alpha, k)$ կրիտիկական կետը կարելի է գտնել Գիլֆերտի—Ուիլսոնի համասարությունից՝

$$\chi^2_{կր}(\alpha,\ k) = k\left[1 - \frac{2}{9k} + z_\alpha\sqrt{\frac{2}{9k}}\right]^3,$$

որտեղ z_α*-ն որոշում են Լապլասի ֆունկցիայի օգնությամբ (հավելված 2), հետևյալ հավասարությունից՝*

$$\Phi(z_\alpha) = \frac{1-2\alpha}{2}\text{։}$$

509. *Նորմալ գլխավոր համախմբությունից վերցված* $n = 21$ *ծավալի ընտրանքի տվյալներով հաշված է ուղղված ընտրանքային* $s^2 = 16{,}2$ *դիսպերսիան։ Պահանջվում* $\alpha = 0{,}01$ *նշանակալիության մակարդակով ստուգել* $H_0 \sim \sim \sigma^2 = \sigma_0^2 = 15$ *զրոյական հիպոթեզը, ընդունելով որպես մրցակցող* $H_1 \sim \sigma^2 > 15$ *հիպոթեզը։*

Լուծում։ Գտնենք չափանիշի դիտվող արժեքը՝

$$\chi^2_{դիտ} = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{(21-1)\cdot 16{,}2}{15} = 21{,}6\text{։}$$

Պայմանի համաձայն մրցակցող հիպոթեզն ունի $\sigma^2>15$ տեսքը, հետևաբար կրիտիկական տիրույթը աջակողմյան է (կանոն 1)։ $\alpha=0{,}01$ նշանակալիության մակարդակով և $k=n-1=21-1=20$ ազատության աստիճանով աղյուսակից (հավելված 5) որոշում ենք $\chi^2_{կր}(0{,}01,\ 20)=37{,}6$ կրիտիկական կետը։

Քանի որ $\chi^2_{դիտ}<\chi^2_{կր}$, ապա գլխավոր դիսպերսիայի և $\sigma_0^2=15$ հիպոթետիկ արժեքի հավասարության մասին զրոյական հիպոթեզը մերժելու հիմք չկա։ Այլ կերպ ասած, ուղղված դիսպերսիայի (16,2) և հիպոթետիկ գլխավոր դիսպերսիայի (15,0) տարբերությունը նշանակալի չէ։

510. Նորմալ գլխավոր համախմբությունից վերցված $n=17$ ծավալի ընտրանքի տվյալներով հաշված է ուղղված ընտրանքային $s^2=0{,}24$ դիսպերսիան։ Պահանջվում է $\alpha=0{,}05$ նշանակալիության մակարդակով ստուգել $H_0\sim\sigma^2=\sigma_0^2=0{,}18$ զրոյական հիպոթեզը, ընդունելով որպես մրցակցող $H_1\sim\sigma^2>0{,}18$ հիպոթեզը։

Պատ.՝ $\chi^2_{դիտ}=21{,}33$, $\chi^2_{կր}(0{,}05,\ 16)=26{,}3$։ Զրոյական հիպոթեզը մերժելու հիմքեր չկան։

511. Նորմալ գլխավոր համախմբությունից վերցված է $n=31$ ծավալի ընտրանք.

տարբերակները	x_i	10,1	10,3	10,6	11,2	11,5	11,8	12,0
հաճախությունները	n_i	1	3	7	10	6	3	1

Պահանջվում է $\alpha=0{,}05$ նշանակալիության մակարդակով ստուգել $H_0\sim\sigma^2=\sigma^2_0=0{,}18$ զրոյական հիպոթեզը, որպես մրցակցող ընդունելով $H_1\sim\sigma^2>0{,}18$ հիպոթեզը։

Ցուցում։ Դիտարկել $u_i=10x_i-11$ պայմանական տարբերակները, սկզբից հաշվել

$$s_u^2=\frac{1}{n-1}\left[\sum n_iu_i^2-\frac{1}{n}\left(\sum n_iu_i\right)^2\right],$$ իսկ

այնուհետև

$$s_x^2 = \frac{s_u^2}{10^2}։$$

Պատ.՝ $s_x^2 = 0{,}27$, $\chi^2_{դիտ} = 45{,}0$; $\chi^2_{կր}(0{,}05, 30) = 43{,}8$։ Զրոյական հիպոթեզը մերժվում է։ Ուղղված ընտրանքային դիսպերսիայի տարբերությունը հիպոթետիկից նշանակալի է։

512. Ավտոմատ հաստոցի աշխատանքի ճշտությունը ստուգվում է դետալի հսկվող չափի դիսպերսիայի օգնությամբ, որը չպետք է գերազանցի $\sigma_0^2 = 0{,}1$ արժեքը։ Պատահականորեն վերցրած նմուշների չափման արդյունքում ստացվել են հետևյալ տվյալները.

Նմուշի հսկվող չափը	x_i	3,0	3,5	3,8	4,4	4,5
հաճախությունը	n_i	2	6	9	7	1

Պահանջվում է, $\alpha = 0{,}05$ նշանակալիության մակարդակով, ստուգել, ապահովո՞ւմ է արդյոք հաստոցը պահանջվող ճշտությունը։

Լուծում։ Դիտարկվում է $H_0 \sim \sigma^2 = \sigma_0^2 = 0{,}1$ զրոյական հիպոթեզը։ Որպես մրցակցող ընդունենք $H_1 \sim \sigma^2 \neq 0{,}1$ հիպոթեզը։

Հաշվենք ուղղված ընտրանքային դիսպերսիան։ Հաշվումները պարզեցնելու նպատակով անցնենք պայմանական տարբերակներին, հաշվի առնելով, որ ընտրանքային միջինը մոտավորապես հավասար է 3,9, նշանակենք $u_i = 10x_i - 39$։ Հաճախությունների բաշխումը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

u_i	−9	−4	−1	5	6
n_i	2	6	9	7	1

Գտնենք պայմանական տարբերակների դիսպերսիան

$$s^2_u = \frac{1}{n-1}\left\{ \sum n_i u_i^2 - \frac{1}{n}\left[\sum n_i u_i\right]^2\right\},$$

տեղադրելով տված արժեքները, ստանում ենք $s_u^2 = 19{,}91$։

Գտնենք որոնելի ուղղված դիսպերսիան

$$s_x^2 = \frac{s^2_u}{10^2} = \frac{19{,}91}{100} = 0{,}2։$$

Հաշվենք չափանիշի դիտված արժեքը

$$\chi^2_{\text{դիտ}} = \frac{(n-1)s_x^2}{\sigma_0^2} = \frac{(25-1)0{,}2}{0{,}1} = 48։$$

Մրցակցող հիպոթեզն ունի $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$ տեսքը, հետևաբար կրիտիկական տիրույթը երկկողմանի է (կանոն 2)։

Աղյուսակից (հավելված 5) գտնենք կրիտիկական կետերը՝ ձախը,

$$\chi^2_{\text{կր}}\left(1-\frac{\alpha}{2};\ k\right) = \chi^2_{\text{կր}}\left(1-\frac{0{,}05}{2};\ 24\right) =$$

$$=\chi^3_{\text{կր}}(0{,}975;24) = 12{,}4$$

և աջը,

$$\chi^2_{\text{կր}}\left(\frac{\alpha}{2};\ k\right) = \chi^2_{\text{կր}}(0{,}025;24) = 39{,}4։$$

Ունենք $\chi^2_{\text{դիտ}} > \chi^2_{\text{աջկր}}$, հետևաբար զրոյական հիպոթեզը մերժում ենք, հաստոցը չի ապահովում անհրաժեշտ ճշտությունը և պահանջվում է վերակարգավորում։

513. Տարբեր հավաքողների կողմից հանգույցի հավաքման ժամանակի երկարատև չափումների օգնությամբ, պարզվել է, որ այդ ժամանակի դիսպերսիան կազմում է $\sigma_0^2 = 2$ րոպ.²։ Նորեկի աշխատանքի 20 դիտումների արդյունքները հետևյալն են՝

մեկ հանգույցի հավաքման ժամանակը րոպեներով	x_i	56	58	60	62	64
հաճախությունը	n_i	1	4	10	3	2

Կարելի՞ է արդյոք, $\alpha = 0{,}05$ նշանակալիության մակարդակի դեպքում համարել, որ նորեկը աշխատում է ռիթմիկ (այն իմաստով որ նրա ծախսած ժամանակի դիսպերսիան էապես չի տարբերվում մնացած հավաքողների դիսպերսիաներից)։

Ցուցում։ Զրոյական հիպոթեզն ունի $H_0 \sim \sigma^2 = \sigma_0^2 = 2$ *տեսքը, իսկ մրցակցողը՝* $H_1 \sim \sigma^2 \neq \sigma_0^2$*։ Ընդունել* $u_i = x_i - 60$ *և հաշվել* s_u^2*։*

Պատ.՝ $s_u^2 = s_x^2 = 4$, $\chi^2_{\text{ձախ կր.}} = \chi^2(0{,}975;\ 19) = 8{,}91$, $\chi^2_{\text{աջ կր.}}(0{,}025,\ 19) = 32{,}9$, $\chi^2_{\text{դիտ}} = 38$*։ Զրոյական հիպոթեզը մերժվում է։ Նորեկը աշխատում է ոչ ռիթմիկ։*

514. *Արտադրանքի խմբաքանակը ընդունվում է, եթե հսկվող չափի դիսպերսիան 0,2-ից նշանակալի չի տարբերվում։* $n = 121$ *ծավալի ընտրանքի տվյալներով հաշված ուղղված ընտրանքային դիսպերսիան՝* $s_x^2 = 0{,}3$*։ Կարելի՞ է արդյոք ընդունել խմբաքանակը նշանակալիության մակարդակի 0,01 արժեքի դեպքում։*

Լուծում։ Որպես զրոյական դիտարկում ենք $H_0 \sim \sigma^2 = \sigma_0^2 = 0{,}2$ *հիպոթեզը, իսկ որպես մրցակցող՝* $H_1 \sim \sigma^2 > 0{,}2$ *հիպոթեզը։*

Գտնենք չափանիշի դիտվող արժեքը՝

$$\chi^2_{\text{դիտ}} = \frac{(n-1)s_x^2}{\sigma_0^2} = \frac{120 \cdot 0{,}3}{0{,}2} = 180։$$

Մրցակցող հիպոթեզն ունի $\sigma^2 > 0{,}2$ *տեսքը, հետևաբար կրիտիկական տիրույթը աջակողմյան է։ Քանի որ աղյուսակում (հավելված 15) չկա ազատության աստիճանի* $k = 120$ *արժեքը, ապա կրիտիկական կետը գտնում ենք մոտավորապես Գիլֆերտի—Ուիլսոնի հավասարությունից՝*

$$\chi^2_{\text{կր}}(\alpha,\ k) = k\left[1 - \frac{2}{9k} + z_\alpha \sqrt{\frac{2}{9k}}\right]^3,$$

Նախապես (հաշվի առնելով, որ $\alpha = 0{,}01$) գտնենք $z_\alpha = z_{0,01}$ հետևյալ հավասարությունից՝

$$\Phi\,(z_{0,01}) = \frac{1-2\alpha}{2} = \frac{1-2\cdot 0{,}01}{2} = 0{,}49$$

Լապլասի ֆունկցիայի աղյուսակից (հավելված 2), օգտվելով գծային ինտերպոլյացիայից, գտնում ենք, $z_{0,01} = 2{,}326$։ Ուիլսոն—Հիլֆերտի բանաձևի մեջ տեղադրելով $k = 120$, $z_\alpha = 2{,}326$, ստանում ենք $\chi^2_{կր}\ (0{,}01;\ \ 120) = 158{,}85$ (այս մոտավորությունը բավականին լավն է, ավելի լրիվ աղյուսակներում բերվում է 158,95 արժեքը)։ Քանի որ $\chi^2_{դիտ} > \chi^2_{կր}$, ապա զրոյական հիպոթեզը մերժում ենք։ Խմբաքանակը ընդունել չի կարելի։

515. Լուծել 514 խնդիրը, վերցնելով նշանակալիության մակարդակը՝ $\alpha = 0{,}05$։

Պատ.՝ $z_{0,05} = 1{,}645$, $\chi^2_{կր}(0{,}05;\ \ 120) = 146{,}16$։ Խմբաքանակը խոտանվում է։

§ 4. Հայտնի դիսպերսիաներով երկու գլխավոր համախմբությունների միջինների համեմատումը (մեծ ծավալի անկախ ընտրանքներ)

Մեծ ծավալի անկախ ընտրանքների ծավալները նշանակենք n և m ($n > 30$, $m > 30$)։ Ենթադրենք այդ ընտրանքների տվյալներով հաշված են $\bar{x}$ և $\bar{y}$ ընտրանքային միջինները, իսկ ընտրանքային DX և DY դիսպերսիաները հայտնի են։

Կանոն 1։ Տրված α նշանակալիության մակարդակով $H_0 \sim MX = MY$ հայտնի դիսպերսիաներով երկու նորմալ գլխավոր համախմբությունների մաթեմատիկական սպասումների (գլխավոր միջինների) հավասարության մասին, զրոյական հիպոթեզը ստուգելու համար (մեծ ծավալի ընտրանքների դեպքում), երբ որպես մրցակցող դիտարկվում է $H_1 \sim MX \neq MY$ հիպոթեզը, պետք է հաշվել

$$z_{դիտ} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\dfrac{DX}{n} + \dfrac{DY}{m}}}$$

չափանիշի դիտվող արժեքը և Լապլասի ֆունկցիայի աղյուսակով գտնել $z_{կր}$ կրիտիկական կետը հետևյալ հավասարությունից՝

$$\Phi(z_{կր}) = \frac{1-\alpha}{2},$$

Եթե $|Z_{դիտ}| < z_{կր}$, ապա զրոյական հիպոթեզը մերժելու հիմք չկա:

Եթե $|Z_{դիտ}| < z_{կր}$, ապա զրոյական հիպոթեզը մերժվում է:

Կանոն 2: $H_1 \sim MX > MY$ մրցակցող հիպոթեզի դեպքում Լապլասի ֆունկցիայի աղյուսակից որոշում են $z_{կր}$ կրիտիկական կետը, օգտվելով

$$\Phi(z_{կր}) = \frac{1-2\alpha}{2}$$

հավասարությունից:

Եթե $Z_{դիտ} < z_{կր}$, ապա զրոյական հիպոթեզը մերժելու հիմք չկա:

Եթե $Z_{դիտ} > z_{կր}$, ապա զրոյական հիպոթեզը մերժում են:

Կանոն 3: Մրցակցող $H_1 \sim MX < MY$ հիպոթեզի դեպքում «օժանդակ կետը» գտնում են կանոն 2-ի համաձայն:

Եթե $Z_{դիտ} > -z_{կր}$, ապա զրոյական հիպոթեզը մերժվում է:

516. *Նորմալ գլխավոր համախմբություններից վերցրած 2 անկախ* $n=40$ *և* $m=50$ *ծավալի ընտրանքների տվյալներով հաշված են ընտրանքային միջինները՝* $\bar{x}=130$ *և* $\bar{y}=140$*։ Հայտնի են գլխավոր դիսպերսիաները՝* $DX=80$, $DY=100$*։ Պահանջվում է,* $\alpha=0{,}01$ *նշանակալիության մակարդակով, ստուգել* $H_0 \sim MX=MY$ *զրոյական հիպոթեզը, դիտարկելով որպես մրցակցող* $H_1 \sim MX \neq MY$ *հիպոթեզը։*

Լուծում։ Հաշվենք չափանիշի դիտված արժեքը.

$$Z_{դիտ} = \frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{\frac{DX}{n}+\frac{DY}{m}}} = \frac{130-140}{\sqrt{\frac{80}{40}+\frac{100}{50}}} = -5,$$

Ըստ պայմանի մրցակցող հիպոթեզն ունի $MX \neq MY$ *տեսքը, հետևաբար կրիտիկական տիրույթը երկկողմանի է։*

Գտնենք աջ կրիտիկական կետը հետևյալ հավասարությունից՝

$$\Phi(z_{կր}) = \frac{1-\alpha}{2} = \frac{1-0,01}{2} = 0,495։$$

Լապլասի ֆունկցիայի աղյուսակից (հավելված 2) գտնում ենք $z_{կր} = 2,58$։

Քանի որ $|Z_{դիտ}| > z_{կր}$, *ապա կանոն 1-ի համաձայն զրոյական հիպոթեզը մերժում ենք։ Այլ կերպ ասած, ընտրանքային միջինների տարբերությունը նշանակալի է։*

517. *Առաջին հաստոցի վրա պատրաստված դետալների* $n=30$ *ծավալի ընտրանքի տվյալներով հաշված է դետալի* $\overline{x} = 130$ գ *միջին կշիռը։ Երկրորդ հաստոցի վրա պատրաստված դետալների* $m = 40$ *ծավալի ընտրանքի տվյալներով հաշված է դետալի* $\overline{y} = 125$ գ *միջին կշիռը։ Գլխավոր դիսպերսիաները հայտնի են՝* $DX=60$ գ^2, $DY=80^2$գ։ *Պահանջվում է,* $\alpha=0,05$ *նշանակալիության մակարդակի դեպքում, ստուգել* $H_0 \sim MX=MY$ *զրոյական հիպոթեզը.* $MX \neq MY$ *մրցակցող հիպոթեզի դեպքում։ Ենթադրվում է, որ X և Y մեծությունները բաշխված են նորմալ, և ընտրանքներն անկախ են։*

Պատ.՝ $Z_{դիտ} = 2,5$; $z_{կր} = 1,97$։ *Զրոյական հիպոթեզը մերժվում է։ Դետալների միջին կշիռների տարբերությունը նշանակալի է։*

518. $n = 50$ *ծավալի ընտրանքի տվյալներով որոշված է № 1 ավտոմատի վրա պատրաստված գլանների* $\overline{x}=20,1$ մմ *միջին չափը։*

m=50 *ծավալի ընտրանքի տվյալներով որոշված է № 2 ավտոմատի վրա պատրաստված գլանների* $\overline{y}=19{,}8$ մմ *միջին չափը։ Գլխավոր դիսպերսիաները հայտնի են՝* $DX=1{,}750$ մմ², $DY=1{,}375$ մմ²։ *Պահանջվում է, 0,05 նշանակալիության մակարդակով, ստուգել* $H_0 \sim MX=MY$ *զրոյական հիպոթեզը մրցակցող* $MX \neq MY$ *հիպոթեզի դեպքում։ Ենթադրվում է, որ X և Y մեծությունները բաշխված են նորմալ օրենքով, իսկ ընտրանքները անկախ են։*

Պատ.՝ $Z_{դիտ}=1{,}2$; $z_{կր}=1{,}96$: *Դիտման արդյունքները չեն հակասում զրոյական հիպոթեզին։ Ընտրանքային միջինների տարբերությունը նշանակալի չէ։*

§ 5. Անհայտ, բայց հավասար դիսպերսիաներով երկու նորմալ գլխավոր համախմբությունների միջինների համեմատումը (փոքր անկախ ընտրանքներ)

Փոքր ծավալի անկախ ընտրանքների ծավալները նշանակենք m և n ($m<30$, $n<30$)։ *Այդ ընտրանքներով հաշված են* $\overline{x}$ և $\overline{y}$ *ընտրանքային միջինները և* S_x^2 *ու* S_y^2 *ուղղված ընտրանքային դիսպերսիաները։ Գլխավոր դիսպերսիաները չնայած անհայտ են, բայց ենթադրվում է, որ միմյանց հավասար են։*

Կանոն 1: Որպեսզի տրված նշանակալիության մակարդակով ստուգենք անհայտ, բայց հավասար դիսպերսիաներով երկու նորմալ գլխավոր համախմբությունների մաթեմատիկական սպասումների (գլխավոր միջինների) հավասարության մասին $MX=MY$ զրոյական հիպոթեզը մրցակցող $MX \neq MY$ հիպոթեզի դեպքում (անկախ փոքր ծավալի ընտրանքներով) հարկավոր է հաշվել չափանիշի դիտվող արժեքը՝

$$T_{դիտ}=\frac{\overline{x}-\overline{y}}{\sqrt{(n-1)s_x^2+(m-1)s_y^2}}\cdot\sqrt{\frac{n\cdot m(n+m-2)}{n+m}}$$

և Ստյուդենտի բաշխման կրիտիկական կետերի աղյուսակից (հավելված 6) տրված α նշանակալիության մակարդակով (որը բերված է աղյուսակի առաջին տողում) և $K=m+n-2$ ազատության աստիճանով, գտնել $t_{երկ\ կր.}(\alpha,k)$ կրիտիկական կետը։

Եթե $|T_{դիտ}|<t_{երկ\ կր}(\alpha,k,)$ ապա զրոյական հիպոթեզը մերժելու հիմք չկա։

Եթե $|T_{դիտ}|>t_{երկ\ կր.}(\alpha\ k)$, ապա զրոյական հիպոթեզը մերժվում է։

Կանոն 2: $MX > MY$ մրցակցող հիպոթեզի դեպքում աղյուսակից (հավելված 6), տրված α նշանակալիության մակարդակով (որը բերված է աղյուսակի վերջին տողում) և $k = m + n - 2$ ազատության աստիճանով գտնել $t_{աջ.կր.}(\alpha, k)$ կրիտիկական կետը:

Եթե $T_{դիտ} < t_{աջ.կր.}$, ապա հիմք չկա զրոյական հիպոթեզը մերժելու համար:

Եթե $T_{դիտ} > t_{աջ.կր.}$, ապա զրոյական հիպոթեզը մերժվում է:

Կանոն 3: Մրցակցող $MX < MY$ հիպոթեզի դեպքում սկզբից որոշում են $t_{աջ.կր.}$ կրիտիկական կետը կանոն 2-ի համաձայն և ընդունում $t_{ձախ.կր.} = -t_{աջ.կր.}$

Եթե $T_{դիտ} > -t_{աջ.կր.}$, զրոյական հիպոթեզը մերժելու հիմք չկա:

Եթե $T_{դիտ} < -t_{աջ.կր.}$, ապա զրոյական հիպոթեզը մերժվում է:

519. X *և* Y *նորմալ բաշխված գլխավոր համախմբություններից վերցրած երկու* $n = 12$ *և* $m = 18$ *փոքր ծավալի անկախ ընտրանքների ավյալներով հաշված են* $\bar{x} = 31{,}2$, $\bar{y} = 29{,}2$ *ընտրանքային միջինները և* $S_x^2 = 0{,}84$, $S_y^2 = 0{,}40$ *ուղղված դիսպերսիաները: Պահանջվում է,* 0,05 *նշանակալիության մակարդակի դեպքում, ստուգել* $H_0 \sim MX = MY$ *զրոյական հիպոթեզը, մրցակցող* $H_1 \sim MX \neq MY$ *հիպոթեզի դեպքում:*

Լուծում: Ուղղված դիսպերսիաները տարբեր են, այդ պատճառով նախապես ստուգենք դիսպերսիաների հավասարության մասին հիպոթեզը, օգտագործելով Ֆիշեր-Սնեդեկորի չափանիշը (տես § 2):

Հաշվենք մեծ դիսպերսիայի հարաբերությունը փոքրին՝

$$F_{դիտ} = \frac{0{,}84}{0{,}40} = 2{,}1:$$

S_x^2 *դիսպերսիան բավականին մեծ է* S_y^2 *դիսպերսիայից, ուստի որպես մրցակցող դիտարկենք* $H_1 \sim DX > DY$ *հիպոթեզը: Այդ դեպքում կրիտիկական տիրույթը աջակողմյան է: Աղյուսակից (հավելված 7),* $\alpha = 0{,}05$ *նշանակալիության մակարդակով և* $k_1 = n - 1 = 12 - 1 = 11$, $k_2 = m - 1 = 18 - 1 = 17$ *ազատության աստիճաններով որոշում ենք* $F_{կր}(0{,}05;\ 11;\ 17) = 2{,}41$ *կրիտիկական կետը:*

Քանի որ $F_{դիտ} < F_{կր}$, *ապա հիմք չկա գլխավոր դիսպերսիաների հավասարության մասին զրոյական հիպոթեզը* *համեմատել դիսպերսիաները։ Կատարենք այս, ընդունելով որպես մրցակցող* $H_1 \sim DX \neq DY$ *հիպոթեզը (տես § 2, կանոն 2)։*

Գտնենք չափանիշի դիտվող արժեքը

$$F_{\text{դիտ}} = \frac{0,0267}{0,0254} = 1,05:$$

Աղյուսակից (հավելված 7) գտնում ենք՝ $F_{\text{կր}}(0,01;\ 9;\ 11)=4,63$*։ Քանի որ* $F_{\text{դիտ}} < F_{\text{կր}}$*, ապա դիսպերսիաների տարբերությունը նշանակալի չէ, հետևաբար կարելի է համարել, որ գլխավոր դիսպերսիաների հավասարության մասին ենթադրությունը ճիշտ է։*

Համեմատենք միջինները, որի համար հաշվենք Ստյուդենտի չափանիշի դիտվող արժեքը՝

$$T_{\text{դիտ}} = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{(n-1)s_x^2 + (m-1)s_y^2}} \cdot \sqrt{\frac{n \cdot m(n+m-2)}{n+m}},$$

Տեղադրելով բանաձևում եղած մեծությունների արժեքները, ստանում ենք $T_{\text{դիտ}}=0,72$*։*

Ըստ պայմանի մրցակցող հիպոթեզն ունի $MX \neq MY$ *տեսքը, հետևաբար կրիտիկական տիրույթը երկկողմանի է։*

Տրված $\alpha = 0,02$ *նշանակալիության մակարդակով և* $k = n + m - 2 = 10 + 12 - 2 = 20$ *ազատության աստիճանով աղյուսակից (հավելված 6) գտնում ենք* $t_{\text{երկ. կր.}}(0,02;\ 20) = 2,53$ *կրիտիկական կետը։*

Քանի որ $T_{\text{դիտ}} < t_{\text{երկ. կր.}}$*, ապա միջինների հավասարության մասին հիպոթեզը մերժելու հիմք չկա։ Այսպիսով, դետալների միջին չափերը էապես չեն տարբերվում։*

522. *0,05 նշանակալիության մակարդակով պահանջվում է ստուգել* $H_0 \sim MX = MY$ *հիպոթեզը,* X *և* Y *նորմալ համախմբությունների գլխավոր միջինների հավասարության մասին, մրցակցող* $H_1 \sim MX > MY$ *հիպոթեզի դեպքում։ Օգտագործել* $n = 10$ *և* $m = 16$ *փոքր ծավալի հետևյալ անկախ ընտրանքները.*

x_i	12,3	12,5	12,8	13,0	13,5	y_i	12,2	12,3	13,0
n_i	1	2	4	2	1,	m_i	6	8	2

Ցուցում: Նախապես ստուգել $H_0 \sim DX = DY$ զրոյական հիպոթեզը գլխավոր դիսպերսիաների հավասարության մասին, մրցակցող $H_1 \sim DX > DY$ հիպոթեզի դեպքում (տես § 2)։

Պատ.՝ $\overline{x}=12,8$; $\overline{y}=12,35$; $s_x^2=0,11$; $s_y^2=0,07$; $F_{\text{դիտ}}=1,57$; $F_{\text{կր}}=(0,05;\ 9;\ 15)=2,59$; $T_{\text{դիտ}}=1,71$; $t_{\text{աջ.կր}}\ (0,05;\ 24)=1,71$: *Միջինների հավասարման մասին հիպոթեզը մերժելու կամ ընդունելու հիմք չկա։ Փորձը պետք է կրկնել, մեծացնելով ընտրանքների ծավալը։*

§ 6. Նորմալ համախմբության գլխավոր հիպոթետիկ միջինի համեմատումը ընտրանքային միջինի հետ

Ա. Գլխավոր համախմբության դիսպերսիան հայտնի է

Կանոն 1: Որպեսզի, տրված α նշանակալիության մակարդակով, ստուգենք $H_0 \sim a=a_0$ հայտնի σ^2 դիսպերսիայով գլխավոր նորմալ համախմբության a գլխավոր միջինի և հիպոթետիկ (ենթադրվող) a_0 մեծության հավասարության մասին, զրոյական հիպոթեզը մրցակցող $H_1 \sim a \neq a_0$ հիպոթեզի դեպքում պետք է հաշվել հետևյալ չափանիշի դիտվող արժեքը

$$U_{\text{դիտ}} = \frac{(\overline{x}-a_0)\sqrt{n}}{\sigma}$$

և Լապլասի ֆունկցիայի աղյուսակով գտնել երկկողմանի կրիտիկական տիրույթի $U_{\text{կր.}}$ կրիտիկական կետը հետևյալ հավասարությունից՝

$$\Phi(U_{\text{կր}}) = \frac{1-\alpha}{2}.$$

Երբ $|U_{\text{դիտ}}| < u_{\text{կր.}}$, ապա զրոյական հիպոթեզը մերժելու հիմք չկա

Երբ $|U_{\text{դիտ.}}| > u_{\text{կր.}}$, ապա զրոյական հիպոթեզը մերժվում է:

Կանոն 2: Մրցակցող $H_1 \sim a > a_0$ հիպոթեզի դեպքում աջակողմյան կրիտիկական կետը գտնում ենք

$$\Phi(U_{\text{կր.}}) = \frac{1-2\alpha}{2}$$

հավասարությունից:

Երբ $U_{\text{դիտ.}} < u_{\text{կր.}}$, ապա զրոյական հիպոթեզը մերժելու հիմք չկա:
Երբ $U_{\text{դիտ.}} > u_{\text{կր.}}$, ապա զրոյական հիպոթեզը մերժում ենք:

Կանոն 3: Մրցակցող $H_1 \sim a < a_0$ հիպոթեզի դեպքում, սկզբում կանոն 2-ի համաձայն, գտնում ենք $u_{\text{կր.}}$ օժանդակ կրիտիկական կետը, այնուհետև որպես ձախակողմյան կրիտիկական տիրույթի՝ $u_{\text{կր.}}$ կրիտիկական կետ ընդունում $-u_{\text{կր.}}$ մեծությունը՝

$$u'_{\text{կր.}} = -u_{\text{կր.}}$$

Երբ $U_{\text{դիտ.}} > -u_{\text{կր.}}$, ապա զրոյական հիպոթեզը մերժելու հիմք չկա:
Երբ $U_{\text{դիտ.}} > -u_{\text{կր.}}$, ապա զրոյական հիպոթեզը մերժում ենք:

523. *Հայտնի $\sigma = 5{,}2$ միջին քառակուսային շեղումով նորմալ գլխավոր համախմբությունից վերցրած է $n = 100$ ծավալի ընտրանք և որոշված է $\overline{x} = 27{,}56$ ընտրանքային միջինը: Պահանջվում է 0,05 նշանակալիության մակարդակով, ստուգել $H_0 \sim a = a_0 = 26$ զրոյական հիպոթեզը մրցակցող $H_1 \sim a \neq 26$ հիպոթեզի դեպքում:*

Լուծում: Գտնենք չափանիշի դիտվող արժեքը,

$$U_{\text{դիտ}} = \frac{(\overline{x} - a_0)\sqrt{n}}{\sigma} = \frac{(27{,}56 - 26)\sqrt{100}}{5{,}2} = 3:$$

Պայմանի համաձայն մրցակցող հիպոթեզն ունի $a \neq a_0$ տեսքը, ուստի կրիտիկական տիրույթը երկկողմանի է:

Հետևյալ հավասարությունից որոշենք կրիտիկական կետը

$$\Phi(u_{\text{կր.}}) = \frac{1-\alpha}{2} = \frac{1-0{,}05}{2} = 0{,}475:$$

Լապլասի ֆունկցիայի աղյուսակից (հավելված 2) որոշում ենք $u_{\text{կր}} = 1{,}96$:

Քանի որ $U_{\text{դիտ.}} > u_{\text{կր.}}$, ապա զրոյական հիպոթեզը մերժում ենք: Այլ կերպ ասած, ընտրանքային և հիպոթետիկ գլխավոր միջինների տարբերությունը նշանակալի է:

524. *Հայտնի $\sigma = 40$ միջին քառակուսային շեղումով նորմալ գլխավոր համախմբությունից վերցրած է $n = 64$ ծավալի ընտրանք և որոշված է $\overline{x} = 136{,}5$ ընտրանքային միջինը: Պահանջվում է, 0,01 նշանակալիության մակարդա-*

կով, ստուգել $H_0 \sim a = a_0 = 130$ զրոյական հիպոթեզը, մըրցակցող $H_1 \sim a \neq 130$ հիպոթեզի դեպքում։

Պատ.՝ $U_{դիտ.} = 1{,}625$; $u_{կր.} = 2{,}57$: Զրոյական հիպոթեզը մերժելու հիմք չկա։

525. Լուծել 524 խնդիրը, մրցակցող $H_1 \sim a > 130$ հիպոթեզի դեպքում։

Պատ՝ $u_{կր} = 2{,}33$: Զրոյական հիպոթեզը մերժելու հիմք չկա։

526. Հայտնի է, որ ուժեղ տոկսիկ ազդեցության դեղահաբի միջին կշիռը պետք է լինի $a_0 = 0{,}50$ մգ։ Դեղի ստացված խմբաքանակի 121 դեղահաբերի ընտրանքային ստուգումը ցույց տվեց, որ խմբաքանակի դեղահաբի միջին կըշիռը կազմում է $\overline{x} = 0{,}53$ մգ: Պահանջվում է, 0,01 նշանակալիության մակարդակով, ստուգել $H_0 \sim a = a_0 = 0{,}50$ զրոյական հիպոթեզը, մրցակցող $H_1 \sim a \neq 0{,}50$ հիպոթեզի դեպքում։ Դեղագործական գործարանի թողարկած հաբերի նախնական բազմակի կշռումների միջոցով որոշված է, որ հաբերի կշիռը բաշխված է նորմալ $\sigma = 0{,}11$ մգ միջին քառակուսային շեղումով։

Պատ.՝ $U_{դիտ} = 3$, $u_{կր.} = 2{,}57$։ Հաբի միջին կշիռը նշանակալի տարբերվում է թույլատրելիից, հիվանդներին այդ դեղը տալ չի կարելի։

բ. Գլխավոր համախմբության դիսպերսիան անհայտ է

Եթե գլխավոր համախմբության դիսպերսիան անհայտ է (օրինակ, փոքր ծավալի ընտրանքի դեպքում), ապա զրոյական հիպոթեզի ստուգման համար որպես չափանիշ ընդունում են

$$T = \frac{(\overline{x} - a_0)\sqrt{n}}{S}$$

պատահական մեծությունը, որտեղ

$$S = \frac{1}{n-1}\left\{\sum n_i x_i^2 - \frac{1}{n}\left[\sum n_i x_i\right]^2\right\}$$

իրենից ներկայացնում է ուղղված միջին քառակուսային շեղումը։ T մեծությունն ունի Ստյուդենտի բաշխումը, $k = n - 1$ ազատության աստիճանով։

Կանոն 1: Տրված α նշանակալիության մակարդակով $H_0 \sim a = a_0$

անհայտ a գլխավոր միջինի (անհայտ դիսպերսիայով նորմալ համախմբություն) և հիպոթետիկ a_0 արժեքի հավասարության մասին, զրոյական հիպոթեզի ստուգման համար, մրցակցող $H_1 \sim a \neq a_0$ հիպոթեզի դեպքում, պետք է հաշվել չափանիշի հետևյալ դիտվող արժեքը

$$T_{դիտ} = \frac{(\bar{x}-a_0)\sqrt{n}}{S}$$

և Ստյուդենտի բաշխման կրիտիկական կետերի աղյուսակից, տրված նշանակալիության մակարդակով (որը տեղավորված է աղյուսակի վերին տողում) և $k=n-1$ ազատության աստիճանով գտնել $t_{երկ.\ կր.}(\alpha,k)$ կրիտիկական կետը:

Եթե $|T_{դիտ.}| < t_{երկ.\ կր.}$ ապա զրոյական հիպոթեզը մերժելու հիմք չկա։

Եթե $|T_{դիտ.}| > t_{երկ.\ կր.}$, ապա զրոյական հիպոթեզը մերժվում է:

Կանոն 2: մրցակցող $H_1 \sim a < a_0$ հիպոթեզի դեպքում α նշանակալիության մակարդակով (տեղավորված է աղյուսակի ստորին տողում) (Հավելված 6) և $k=n-1$ ազատության աստիճանով որոշում են աջակողմյան կրիտիկական տիրույթի $t_{աջ\ կր.}(\alpha,k)$ կրիտիկական կետը։

Եթե $T_{դիտ.} < t_{աջ.\ կր.}$, ապա զրոյական հիպոթեզը մերժելու հիմք չկա։

Եթե $T_{դիտ.} > t_{աջ.կր.}$, ապա զրոյական հիպոթեզը մերժվում է:

Կանոն 3: Մրցակցող $H_1 \sim a < a_0$ հիպոթեզի դեպքում, նախապես որոշում են «օժանդակ» կրիտիկական $t_{աջ.կր.}(\alpha,k)$ կետը (ըստ կանոն 2-ի), այնուհետև որոշում են ձախակողմյան կրիտիկական տիրույթի սահմանը հետևյալ հավասարությունից

$$t_{ձախ.կր.} = -t_{աջ.կր.}$$

Եթե $T_{դիտ.} > -t_{աջ.կր.}$, ապա զրոյական հիպոթեզը մերժելու հիմք չկա

Եթե $T_{դիտ.} < -t_{աջ.կր.}$ ապա զրոյական հիպոթեզը մերժվում է:

527. *Նորմալ գլխավոր համախմբությունից վերցրած* $n=16$ *ծավալի ընտրանքի տվյալներով որոշված են* $\bar{x}=118,2$ *ընտրանքային միջինը և* $s=3,6$ *ուղղված միջին քառակուսային շեղումը։ Պահանջվում է 0,05 նշանակալիության մակարդակի դեպքում, ստուգել* $H_0 \sim a=a_0=120$ *զրոյական հիպոթեզը մրցակցող* $H_1 \sim a \neq 120$ *հիպոթեզի դեպքում։*

Լուծում։ Գտնենք չափանիշի դիտվող արժեքը

$$T_{դիտ} = \frac{(\bar{x}-a_0)\sqrt{n}}{s} = \frac{(118,2-120)\sqrt{16}}{3,6} = -2:$$

Պայմանի համաձայն մրցակցող հիպոթեզն ունի $a \neq a_0$ *տեսքը, ուստի կրիտիկական տիրույթը երկկողմանի է։*

Ստյուդենտի բաշխման կրիտիկական կետերի աղյուսակից (հավելված 6), $\alpha=0{,}05$ *նշանակալիության մակարդակով (աղյուսակի վերջին տող) և* $k=n-1=16-1=15$ *ազատության աստիճանով որոշում ենք* $t_{երկ.\,կր.}(0{,}05,\ 15)=2{,}13$ *կրիտիկական կետը։*

Քանի որ $|T_{դիտ}|<t_{երկ.կր.}$, *ապա հիմք չկա զրոյական հիպոթեզը մերժելու։ Այլ կերպ ասած,* $\bar{x}=118{,}2$ *ընտրանքային միջինի և հիպոթետիկ* $a_0=120$ *գլխավոր միջինի տարբերությունը նշանակալի չէ։*

528. *Լուծել 527 խնդիրը, մրցակցող* $H_1 \sim a<a_0=120$ *հիպոթեզի դեպքում։*

Պատ.՝ $T_{դիտ.}=-2$, $-t_{ձախ.\,կր}=-1{,}75$։ *Զրոյական հիպոթեզը մերժում ենք։*

529. *Ավտոմատ հաստոցի պատրաստած դետալների նախագծային հսկվող չափը* $a=a_0=35$ մմ։

Պատահական ընտրված 20 դետալների չափումները տվել են հետևյալ արդյունքները՝

հսկվող չափը x_i	34,8	34,9	35,0	35,1	35,3
հաճախությունը (դետալների քանակը) n_i	2	3	4	6	5

Պահանջվում է, 0,05 նշանակալիության մակարդակով, ստուգել $H_0 \sim a=a_0=35$ *զրոյական հիպոթեզը մրցակցող* $H_1 \sim a\neq 35$ *հիպոթեզի դեպքում։*

Լ ու ծ ու մ ։ Հաշվենք ընտրանքի դետալների միջին չափը՝

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum n_i x_i=\frac{2\cdot 34{,}8+3\cdot 34{,}9+4\cdot 35{,}0+6\cdot 35{,}1+5\cdot 35{,}3}{20}=$$

$$=35{,}07:$$

Հաշվենք ուղղված դիսպերսիան։ Հաշվումները պարզեցնելու նպատակով անցնենք $u_i=10x_i-351$ *պայմանական* տարբերակներին։ Արդյունքում կստանանք հետևյալ բաշխումը՝

u_i	-3	-2	-1	0	2
n_i	2	3	4	6	5

Գտնենք պայմանական տարբերակների ուղղված դիսպերսիան՝

$$s_4^2=\frac{1}{n-1}\left\{\sum n_iu_i^2-\frac{1}{n}\left[\sum n_iu_i\right]^2\right\}=\frac{44-\frac{1}{20}(-6)^2}{19}=2,221:$$

Հետևաբար, նախնական տարբերակների ուղղված դիսպերսիան

$$s_x^2=\frac{2,221}{100}=0,022:$$

Այստեղից, ուղղված միջին քառակուսային շեղումը՝

$$s_x=\sqrt{0,022}=0,15:$$

Գտնենք չափանիշի դիտվող արժեքը՝

$$T_{դիտ}=\frac{(\overline{x}-a_0)\sqrt{n}}{s}=\frac{(35,07-35,0)\sqrt{20}}{0,15}=2,15:$$

Ըստ պայմանի մրցակցող հիպոթեզն ունի $a\neq a_0$ տեսքը, ուստի կրիտիկական տիրույթը երկկողմանի է։ Ստյուդենտի բաշխման կրիտիկական կետերի աղյուսակից (հավելված 6), $\alpha=0,05$ նշանակալիության մակարդակով (աղյուսակի վերին տող) և ազատության աստիճանների $k=n-1=20-1=19$ թվով գտնում ենք $t_{երկ.կր.}=(0,05,19)=2,09$ կրիտիկական կետը։

Քանի որ $T_{դիտ}>t_{երկ.կր.}$, ապա զրոյական հիպոթեզը մերժում ենք։ Այլ կերպ ասած, հաստոցը չի ապահովում դետալների նախագծային չափը և պահանջում է վերակարգավորում։

§ 7. Անհայտ դիսպերսիաներով նորմալ գլխավոր համախմբությունների երկու միջինների համեմատումը (ոչ անկախ ընտրանքներ)

Ենթադրենք X և Y գլխավոր համախմբությունները բաշխված են նորմալ, ընդ որում նրանց դիսպերսիաները անհայտ են։ Այդ համախմբություններից վերցրած են միևնույն n ծավալի ոչ անկախ ընտրանքներ, որոնց տարբերակները համապատասխանաբար հավասար, են x_i և y_i։

Մտցնենք հետևյալ նշանակումները՝

$d_i = x_i - y_i$ *միևնույն համարի տարբերակների տարբերությունը,*

$\overline{d} = \frac{1}{n}\Sigma d_i$ *միևնույն համարի տարբերակների միջին տարբերությունը,*

$s_d = \sqrt{\frac{1}{n-1}\left\{\Sigma d_i^2 - \frac{1}{n}\left[\Sigma d_i\right]^2\right\}}$ *ուղղված միջին քառակուսային շեղումը։*

Կանոն: *Տրված α նշանակալիության մակարդակով, անհայտ դիսպերսիաներով նորմալ X և Y համախմբությունների երկու միջինների հավասարության մասին (ոչ անկախ ընտրանքների դեպքում) $H_0 \sim MX = MY$ զրոյական հիպոթեզը ստուգելու համար, մրցակցող $H_1 \sim MX \neq MY$ հիպոթեզի դեպքում, պետք է հաշվել չափանիշի դիտվող արժեքը՝*

$$T_{\text{դիտ}} = \frac{\overline{d}\sqrt{n}}{s_d}$$

և Ստյուդենտի բաշխման կրիտիկական կետերի աղյուսակից, տրված α նշանակալիության մակարդակով (աղյուսակի վերին տող) և $k = n - 1$ ազատության աստիճանով գտնել $t_{\text{երկ. կր.}}(\alpha, k)$ կրիտիկական կետը։

Եթե $|T_{\text{դիտ}}| < t_{\text{երկ. կր.}}(\alpha, k)$, ապա զրոյական հիպոթեզը մերժելու հիմք չկա։

Եթե $|T_{\text{դիտ}}| > t_{\text{երկ. կր.}}(\alpha, k)$, ապա զրոյական հիպոթեզը մերժվում է։

530. *Երկու գործիքներով միևնույն հաջորդականությամբ չափված են 6 դետալներ և ստացվել են հետևյալ արդյունքները (մմ-ի հարյուրերորդ մասերով)՝*

$x_1 = 2, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = 5, \quad x_4 = 6, \quad x_5 = 8, \quad x_6 = 10;$

$y_1 = 10, \quad y_2 = 3, \quad y_3 = 6, \quad y_4 = 1, \quad y_5 = 7, \quad y_6 = 4։$

$\alpha=0,05$ նշանակալիության մակարդակով պարզել, արդյոք նշանակալի՞ է չափման արդյունքների տարբերությունը, թե՞ ոչ։ Ենթադրվում է, որ չափման արդյունքները բաշխված են նորմալ։

Լուծում։ Հաշվենք $d_i=x_i-y_i$ թվերը, հանելով առաջին տողի թվերից երկրորդ տողի համապատասխան թվերը, կստանանք՝

$$d_1=-8, \quad d_2=0, \; d_3=-1, \; d_4=5, \; d_5=1, \; d_6=6։$$

Հաշվի առնելով, որ $\Sigma d_i=3$, գտնենք ընտրանքային միջինը՝

$$\overline{d}=\frac{3}{6}=0,5։$$

Հաշվի առնելով, որ $\Sigma d_i^2=126$ և $\Sigma d_i=3$։

Գտնենք ընտրանքային «ուղղված» միջին քառակուսային շեղումը։

$$s_d=\sqrt{\frac{1}{n-1}\left\{\Sigma d_i^2-\frac{1}{n}\left[\Sigma d_i\right]^2\right\}}=\sqrt{\frac{126-\frac{9}{6}}{6-1}}=\sqrt{24,9}։$$

Գտնենք չափանիշի դիտվող արժեքը՝

$$T_{դիտ}=\frac{\overline{d}\cdot\sqrt{n}}{s_d}=\frac{0,5\sqrt{6}}{\sqrt{24,9}}=0,25։$$

Ստյուդենտի բաշխման կրիտիկական կետերի աղյուսակից (հավելված 6), 0,05 նշանակալիության մակարդակով (աղյուսակի վերևի տող) և $k=n-1=6-1=5$ ազատության աստիճանով գտնում ենք $t_{երկ.կր.}(0,05; 5)=2,57$ կրիտիկական կետը։

Քանի որ $|T_{դիտ}|<t_{երկ.կր.}$ ուստի զրոյական հիպոթեզը մերժելու հիմքեր չկան։ Այլ կերպ ասած, չափումների միջին արդյունքների տարբերությունը նշանակալի չէ։

531. *Երկու անալիտիկ կշեռքներով, միևնույն հաջորդականությամբ, կշռված են քիմիական նյութի 10 փորձանմուշներ, ստացվել են կշռման հետևյալ արդյունքները (մգ-ներով)*

x_i	25	30	28	50	20	40	32	36	42	38
y_i	28	31	26	52	24	36	33	35	45	40

$\alpha = 0,01$ նշանակալիության մակարդակով պարզել, արդյոք կշռման արդյունքները նշանակալի՞ են տարբերվում, թե՞ ոչ: Ենթադրել, որ կշռման արդյունքները բաշխված են նորմալ օրենքով:

Պատ.՝ $\bar{d} = -0,9$; $\Sigma d_i^2 = 65$; $s_d = 2,69$; $T_{դիտ} = -1,06$; $t_{երկ.կր.}(0,01;9) = 3,25$։ *կշռման արդյունքների տարբերությունը նշանակալի չէ։*

532. *9 մարզիկների ֆիզիկական պատրաստականությունը ստուգվել է սպորտային դպրոց ընդունվելիս և այնուհետև մեկ շաբաթ մարզումներից հետո: Ստուգումների արդյունքները բալերով հետևյալն է (առաջին տողում բերված են մարզիկների ստացած բալերի քանակը դպրոց ընդունվելիս, երկրորդում՝ ստուգումից հետո).*

x_i	76	71	57	49	70	69	26	65	59
y_i	81	85	52	52	70	63	33	83	62

Պահանջվում է, 0,05 նշանակալիության մակարդակով, պարզել նշանակալի՞ է արդյոք մարզիկների ֆիզիկական պատրաստականության աճը, ենթադրելով, որ բալերի թիվը բաշխված է նորմալ օրենքով:

Պատ.՝ $\bar{d} = -\frac{39}{9}$; $\sum d_i^2 = 673$; $s_d = 7,94$; $T_{դիտ} = -1,64$; $t_{երկ.կր.}(0,05;\ 8) = 2,31$։ *Հիմքեր չկան ֆիզիկական պատրաստականության աճը նշանակալի համարելու համար։*

533. *Քիմիական լաբորատորիան երկու մեթոդներով և միևնույն հերթականությամբ կատարեց 8 փորձանմուշների անալիզ։ Ստացվեցին հետևյալ արդյունքները (առաջին տողում բերված են մի որոշ նյութի պարունակությունը յուրաքանչյուր փորձանմուշում տոկոսներով, որոշված առաջին մեթոդով, երկրորդ տողում՝ երկրորդ մեթոդով)՝*

x_i	15	20	16	22	24	14	18	20
y_i	15	22	14	25	29	16	20	24

Պահանջվում է, 0,05 նշանակալիության մակարդակով, պարզել նշանակալի՞ է արդյոք անալիզների միջին արդյունքների տարբերությունը, ենթադրելով, որ անալիզի արդյունքները բաշխված են նորմալ օրենքով։

Պատ.՝ $\overline{d} = -2$; $\sum d_i^2 = 66$; $s_d = \sqrt{\frac{34}{7}}$; $T_{դիտ.} = -2,57$;

$t_{կրկ.\ կր.}(0,05;\ 7) = 2,36$։ *Անալիզների արդյունքների տարբերությունը նշանակալի է։*

534. *Երկու լաբորատորիաներ, միևնույն մեթոդով և միևնույն հաջորդականությամբ, որոշել են ածխածնի պարունակությունը պողպատի 13 փորձանմուշներում։ Ստացվել են անալիզների հետևյալ արդյունքները (առաջին տողում բերված է առաջին լաբորատորիայում ստացված յուրաքանչյուր փորձանմուշում ածխածնի պարունակությունը տոկոսներով, երկրորդ տողում՝ նույնը երկրորդ լաբորատորիայի համար)․*

x_i	0,18	0,12	0,12	0,08	0,08	0,12	0,19	0,32	0,27
y_i	0,16	0,09	0,08	0,05	0,13	0,10	0,14	0,30	0,31

x_i	0,22	0,34	0,14	0,46;
y_i	0,24	0,28	0,11	0,42։

Նալիմով Վ. Վ. Մաթեմատիկական վիճակագրության կիրառությունը նյութի անալիզում Ֆիզմաթգիզ, 1960։

Պահանջվում է, 0,05 նշանակալիության մակարդակով, պարզել նշանակալի՞ է արդյոք անալիզների միջին արդյունքների տարբերությունը, եթե անալիզների արդյունքները բաշխված են նորմալ օրենքով։

Պատ.՝ $\overline{d} = 0{,}018$; $\sum d_i^2 = 0{,}0177$; $s_d = 0{,}034$; $T_{դիտ.} = 1{,}89$; $t_{երկ.\ կր.}(0{,}05;\ 12) = 2{,}18$։ *Անալիզների արդյունքների տարբերությունը նշանակալի չէ։*

§ 8. Պատահույթի հիպոթետիկ հավանականության և դիտվող հարաբերական հաճախության համեմատումը

Ենթադրենք, բավականաչափ մեծ թվով (n) *անկախ փորձերից յուրաքանչյուրում պատահույթի տեղի ունենալու* p *հավանականությունը անհայտ է, բայց հաստատուն է։ Փորձերի այդ սերիայում դիտարկվող պատահույթի հաճախությունը նշանակենք* $\frac{m}{n}$։

Պահանջվում է, տված α *նշանակալիության մակարդակով, ստուգել անհայտ* p *և հիպոթետիկ* p_0 *հավանականությունների հավասարության մասին* $H_0 \sim p = p_0$ *զրոյական հիպոթեզը։*

Կանոն 1: Տրված α նշանակալիության մակարդակով, անհայտ p և հիպոթետիկ p_0 հավանականությունների հավասարության մասին $H_0 \sim p = p_0$ զրոյական հիպոթեզը ստուգելու համար անհրաժեշտ է հաշվել չափանիշի դիտվող արժեքը՝

$$U_{դիտ.} = \frac{\left(\frac{m}{n} - p_0\right)\sqrt{n}}{\sqrt{p_0 q_0}}$$

և Լապլասի ֆունկցիայի աղյուսակով գտնել $u_{կր.}$ կրիտիկական կետը հետևյալ հավասարությունից՝

$$\Phi(u_{կր.}) = \frac{1-\alpha}{2}\text{։}$$

Եթե $|U_{դիտ.}| < u_{կր.}$, ապա զրոյական հիպոթեզը մերժելու համար հիմք չկա։

Եթե $(U_{դիտ.}) > u_{կր.}$, ապա զրոյական հիպոթեզը մերժում են:

Կանոն 2: $H_1 \sim p > p_0$ մրցակցող հիպոթեզի դեպքում, աջակողմյան կրիտիկական տիրույթի կրիտիկական կետը որոշում են

$$\Phi(u_{կր.}) = \frac{1-2\alpha}{2}$$

հավասարությունից:

Եթե $U_{դիտ.} < u_{կր.}$, ապա զրոյական հիպոթեզը մերժելու հիմք չկա:

Եթե $U_{դիտ.} > u_{կր.}$, ապա զրոյական հիպոթեզը մերժում են:

Կանոն 3: $H_1 \sim p < p_0$ մրցակցող հիպոթեզի դեպքում սկզբից գտնում են «օժանդակ» կրիտիկական կետը, կանոն 2-ի համաձայն, այնուհետև որպես ձախակողմ կրիտիկական տիրույթի սահման ընդունում են $u'_{կր.} = -u_{կր.}$ մեծությունը:

Եթե $U_{դիտ.} > -u_{կր.}$, ապա զրոյական հիպոթեզը մերժելու համար հիմք չկա:

Եթե $U_{դիտ.} < -u_{կր.}$, ապա զրոյական հիպոթեզը մերժում են:

Դիտողություն։ $np_0q_0 > 9$ անհավասարությունը տեղի ունենալու դեպքում, արդյունքները կլինեն բավարար։

535. *100 անկախ փորձերի տվյալներով գտնված է $\frac{m}{n} = 0,14$ հարաբերական հաճախությունը։ 0,05 նշանակալիության մակարդակով պահանջվում է ստուգել $p = p_0 = 0,20$ զրոյական հիպոթեզը մրցակցող $H_1 \sim p \neq 0,20$ հիպոթեզի դեպքում։*

Լուծում։ Հաշվի առնելով, որ $q_0 = 1 - p_0 = 1 - 0,20 = 0,80$; գտնենք չափանիշի դիտվող արժեքը՝

$$U_{դիտ.} = \frac{\left(\frac{m}{n} - p_0\right) \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{p_0 q_0}} = \frac{(0,14 - 0,20) \cdot \sqrt{100}}{\sqrt{0,20 \cdot 0,80}} = -1,5.$$

Պայմանի համաձայն, մրցակցող հիպոթեզն ունի $p \neq p_0$ տեսքը, ուստի կրիտիկական տիրույթը երկկողմանի է։

Գտնենք $u_{կր.}$ կրիտիկական կետը՝

$$\Phi(u_{կր.}) = \frac{1-\alpha}{2} = \frac{1-0,05}{2} = 0,475։$$

Լապլասի ֆունկցիայի աղյուսակից (հավելված 2) գտնում ենք $u_{կր.} = 1,96$։

Քանի որ $|U_{դիտ}| < u_{կր.}$, ապա զրոյական հիպոթեզը մերժելու հիմք չկա։ Այլ կերպ ասած, դիտված 0,14 հարաբերական հաճախությունը աննշան տարբերվում է 0,20 հիպոթետիկ հավանականությունից։

536. Լուծել 535 խնդիրը մրցակցող $H_1 \sim p < p_0$ հիպոթեզի դեպքում։

Լուծում։ Պայմանի համաձայն մրցակցող հիպոթեզը $p < p_0$ տեսքի է, հետևաբար կրիտիկական տիրույթը ձախակողմ է։ Սկզբից գտնենք «օժանդակ» կետը՝ աջակողմյան կրիտիկական տիրույթի սահմանը, օգտվելով (կանոն 2)

$$\Phi(u_{կր.}) = \frac{1-2\alpha}{2} = \frac{1-2\cdot 0,05}{2} = 0,45$$

հավասարությունից։ Լապլասի ֆունկցիայի աղյուսակից գտնում ենք $u_{կր.} = 1,65$։ Հետևաբար, ձախակողմյան կրիտիկական տիրույթի սահմանը՝ $u'_{կր.} = -1,65$։

Քանի որ $U_{դիտ} > u'_{կր.}$, ապա զրոյական հիպոթեզը մերժելու հիմք չկա (կանոն 3)։

537. Դետալների խմբաքանակը ընդունվում է, եթե դետալի խոտան լինելու հավանականությունը չի գերազանցում 0,02-ը։ Պատահականորեն ընտրված 480 դետալներից 12-ը խոտան էին։ Կարելի՞ է արդյոք ընդունել այդ խմբաքանակը։

Լուծում։ Զրոյական հիպոթեզն ունի $p = p_0 = 0,02$ տեսքը։ Դիտարկենք որպես մրցակցող $H_1 \sim p > 0,02$ հիպոթեզը և որպես նշանակալիության մակարդակ ընդունենք $\alpha = 0,05$ արժեքը։

Հաշվենք խոտանի հարաբերական հաճախությունը՝

$$\frac{m}{n}=\frac{12}{480}=0{,}025։$$

Գտնենք չափանիշի դիտվող արժեքը՝

$$U_{դիտ.}=\frac{\left(\frac{m}{n}-p_0\right)\cdot\sqrt{n}}{\sqrt{p_0q_0}}=\frac{(0{,}025-0{,}02)\sqrt{480}}{\sqrt{0{,}02\cdot0{,}98}}=0{,}71։$$

Պայմանի համաձայն, մրցակցող հիպոթեզն ունի $p>p_0$ տեսքը, հետևաբար կրիտիկական տիրույթը աջակողմյան է։

Գտնենք աջակողմ կրիտիկական տիրույթի $u_{կր.}$ կրիտիկական կետը, օգտվելով (կանոն 2)

$$\Phi(u_{կր.})=\frac{1-2\cdot0{,}05}{2}=0{,}45$$

հավասարությունից:

Լապլասի ֆունկցիայի աղյուսակից (հավելված 2) ստանում ենք՝ $u_{կր.}=1{,}645$։

Քանի որ $U_{դիտ}<u_{կր.}$, ապա հիմքեր չկան մերժելու այն հիպոթեզը, որ խմբաքանակում խոտանի հավանականությունը չի գերազանցում 0,02-ը։ Այսպիսով, խմբաքանակը կարելի է ընդունել։

538. Դետալների խմբաքանակը ընդունվում է, եթե դետալի խոտան լինելու հավանականությունը չի գերազանցում 0,03-ը։ Պատահականորեն ընտրած 400 դետալներից 18-ը խոտան էին։ Կարելի՞ է արդյոք ընդունել խմբաքանակը։

Ցուցում։ Դիտարկել $H_0\sim p=p_0=0{,}03$ զրոյական և մրցակցող $H_1\sim p>0{,}03$ հիպոթեզները։ Որպես նշանակալիության մակարդակ վերցնել $\alpha=0{,}05$ արժեքը։

Պատ.՝ $U_{դիտ.}=1{,}76$, $u_{կր}=1{,}645$։ Խմբաքանակը ընդունել չի կարելի։

539. *Գործարանը հնարավոր պատվիրատուներին է ուղարկում ռեկլամային կատալոգներ։ Ինչպես ցույց է տվել փորձը, հավանականությունը, որ կատալոգ ստացող կազմակերպությունը կպատվիրի ռեկլամվող արտադրանք, հավասար 0,08։ Գործարանը ուղարկեց 1000 նոր բարելավված ձևի կատալոգներ և ստացավ 100 պատվեր։ Կարելի՞ է արդյոք համարել, որ ռեկլամի նոր ձևը նշանակալի չափով արդյունավետ է, քան հինը։*

Ցուցում։ Դիտարկել $H_0 \sim p = p_0 = 0{,}08$ *զրոյական և մրցակցող* $H_1 \sim p > 0{,}08$ *հիպոթեզները։ Որպես նշանակալիության մակարդակ վերցնել* $\alpha = 0{,}05$ *արժեքը։*

Պատ.՝ $U_{\text{դիտ}} = 2{,}32$, $u_{\text{կր}} = 1{,}645$։ *Զրոյական հիպոթեզը մերժվում է։ Ռեկլամի նոր ձևը նշանակալի չափով արդյունավետ է, քան նախկինը։*

540. *Երկարատև դիտումների միջոցով պարզվել է, որ* A *դեղամիջոցը ընդունելու դեպքում հիվանդի լրիվ առողջանալու հավանականությունը հավասար է 0,8-ի։ Նոր* B *դեղամիջոցը նշանակվել է 800 հիվանդներին, ընդ որում նրանցից 660-ը լրիվ առողջացել են։ Կարելի՞ է արդյոք* B *դեղամիջոցը համարել նշանակալի չափով արդյունավետ, քան հինը, եթե նշանակալիության* α *մակարդակը հավասար է 0,05-ի։*

Ցուցում։ Ընդունել $H_0 \sim p = 0{,}8$, $H_1 \sim p \neq 0{,}8$։

Պատ.՝ $U_{\text{դիտ}} = 1{,}77$, $U_{\text{կր}} = 1{,}96$։ *Նոր դեղամիջոցը հնի նկատմամբ արդյունավետ համարելու հիմք չկա։*

§ 9. Մի քանի նորմալ գլխավոր համախմբությունների դիսպերսիաների համեմատումը տարբեր ծավալի ընտրանքների դեպքում։ Բարտլետի չափանիշը

Դիցուք $X_1, X_2, \ldots X_l$ *գլխավոր համախմբությունները նորմալ են բաշխված։ Այդ համախմբություններից վերցված են ընդհանուր ասած* n_i *տարբեր անկախ ընտրանքների ծավալներ (որոշ ծավալներ կարող են լինել միատեսակ, բայց եթե բոլոր ընտրանքները միևնույն ծավալն ունեն, ապա գերադասելի է օգտվել Կոչրենի չափա-*

նիշից, որը բերված է հաջորդ պարագրաֆում)։ Ընտրանքների տվյալներով հաշվված են $s_1^2, s_2^2, \ldots, s_l^2$ *ուղղված ընտրանքային դիսպերսիաները։*

Պահանջվում է α *նշանակալիության մակարդակով ստուգել դիսպերսիաների համասեռության մասին զրոյական հիպոթեզը, այսինքն՝ բոլոր գլխավոր դիսպերսիաների հավասարության մասին*

$$H_0 \sim DX_1 = DX_2 = \cdots = DX_l$$

հիպոթեզը։

Նշանակենք՝

դիսպերսիաների ազատության աստիճանները՝ $k_i = n_i - 1;$

ազատության աստիճանների գումարը՝ $k = \sum\limits_{i=1}^{l} k_i;$

ուղղված դիսպերսիաների կշռային (ըստ ազատության աստիճանների) միջին թվաբանականը՝

$$\overline{s^2} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{l} k_i s_i^2;$$

$$V = 2{,}303 \left[k \lg \overline{s^2} - \sum_{i=1}^{l} k_i \lg s_i^2 \right];$$

$$C = 1 + \frac{1}{3(l-1)} \left[\sum_{i=1}^{l} \frac{1}{k_i} - \frac{1}{k} \right],$$

$B = \frac{V}{C}$ — *պատահական մեծությունը դիսպերսիաների համասեռության մասին (Բարտլետի չափանիշ) հիպոթեզի իրավացիության դեպքում մոտավորապես բաշխված է ըստ* $l-1$ *ազատության աստիճանով* χ^2 *օրենքով, եթե միայն յուրաքանչյուր ընտրանքի ծավալը* $n_i \geqslant 4$*։*

Կանոն: Տրված α նշանակալիության մակարդակով, նորմալ համախմբությունների դիսպերսիաների համասեռության մասին հիպոթեզը ստուգելու համար, պետք է հաշվել Բարտլետի չափանիշի դիտվող արժեքը՝

$$B_{դիտ} = \frac{V}{C}$$

և χ^2 բաշխման կրիտիկական կետերի աղյուսակից, տրված α նշանակալիության մակարդակով և $l-1$ ազատության աստիճանով (l-ը ընտրանքների թիվն է), գտնել աջակողմ կրիտիկական տիրույթի $\chi^2_{կր}(\alpha;l-1)$ կրիտիկական կետը:

Եթե $B_{դիտ}<\chi^2_{կր}$, ապա զրոյական հիպոթեզը մերժելու հիմքեր չկան:

Եթե $B_{դիտ}>\chi^2_{կր}$, ապա զրոյական հիպոթեզը մերժում են:

Դիտողություն 1։ C հաստատունը նախապես կարիք չկա հաշվելու։ Սկզբից պետք է գտնել V-ն և համեմատել $\chi^2_{կր.}$ *հետ, եթե* $V<\chi^2_{կր}$, *ապա առավել ևս (քանի որ C>1)* $B=\frac{V}{C}<\chi^2_{կր.}$ *և, հետևաբար, C-ն հաշվելու կարիք չկա։*

Եթե $V>\chi^2_{կր.}$, *ապա պետք է հաշվել C-ն և այնուհետև համեմատել B-ն* $\chi^2_{կր.}$*-ու հետ։*

Դիտողություն 2։ Բարտլետի չափանիշը շատ զգայուն է բաշխումների՝ նորմալից տարբեր լինելու նկատմամբ, ուստի այդ չափանիշով ստացված եզրակացությունների նկատմամբ պետք է զգույշ լինել։

Դիտողություն 3։ Դիսպերսիաների համասեռության դեպքում, որպես գլխավոր դիսպերսիայի գնահատական ընդունում են ուղղված դիսպերսիաների կշռային (ըստ ազատության աստիճանների) միջին թվաբանականը՝

$$\overline{s}^2=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{l} k_i s_i^2.$$

541. *Նորմալ գլխավոր համախմբություններից վերցված* $n_1=9$, $n_2=13$ *և* $n_3=15$ *ծավալներով ընտրանքների տվյալներով գտնված են ուղղված ընտրանքային դիսպերսիաները, որոնք համապատասխանաբար հավասար են 3,2-ի; 3,8-ի; 6,3-ի։ Պահանջվում է 0,05 նշանակալիության* մակարդակի դեպքում, ստուգել դիսպերսիաների՝ համասեռության մասին զրոյական հիպոթեզը։

Լուծում։ Կազմենք հաշվարկային աղյուսակ 10-ը (8-րդ սյունակը առայժմ չենք լրացնում, քանի որ դեռ անհայտ է. հարկ կլինի՞ արդյոք հաշվել C-ն)

Օգտվելով հաշվարկային աղյուսակից, գտնում ենք,

$$\overline{s}^2 = \frac{1}{k}\sum k_i s_i^2 = \frac{159,4}{34} = 4,688, \quad \lg \overline{s}^2 = 0,6709;$$

$$V = 2,303[k \lg \overline{s}^2 - \Sigma k_i \lg s_i^2] =$$

$$= 2,303[34 \cdot 0,6709 - 22,1886] = 1,43.$$

Աղյուսակ 10

1	2	3	4	5	6	7	8
Ընտրանքի համարը	Ընտրանքի ծավալը	Ազատության աստիճանը	Ուղղված դիսպերսիան				
i	n_i	k_i	s_i^2	$k_i s_i^2$	$\lg s_i^2$	$k_i \lg s_i^2$	$\frac{1}{k_i}$
1	9	8	3,2	25,6	0,5051	4,0408	
2	13	12	3,8	45,6	0,5798	6,9576	
3	15	14	6,3	88,2	0,7993	11,1902	
Σ		$k=34$		159,4		22,1886	

Աղյուսակից (հավելված 5), 0,05 նշանակալիության մակարդակով և $l-1=3-1=2$ ազատության աստիճանով, գտնում ենք $\chi^2_{կր.}(0,05,\ 2)=6,0$ կրիտիկական կետը։

Քանի որ $V < \chi^2_{կր.}$, ապա առավել ևս (քանի որ $C > 1$)

$B_{դիտ} = \frac{V}{C} < \chi^2_{կր.}$ հետևաբար դիսպերսիաների համասեռության համար հիպոթեզը մերժելու հիմքեր չկան։ Այլ կերպ ասած, ընտրանքային դիսպերսիաների տարբերությունը նշանակալի չէ։

542. 541 խնդրի տվյալներով պահանջվում է գնահատել դիտարկվող գլխավոր համախմբությունների գլխավոր դիսպերսիան։

Լուծում։ Քանի որ նախորդ խնդիրը լուծելիս պարզվեց դիսպերսիաների համասեռությունը, ապա որպես գլխավոր դիսպերսիայի գնահատական ընդունում ենք ուղղված դիսպերսիաների կշռային (ըստ ազատության աստիճանների) միջին թվաբանականը՝

$$D_{գ}^{*} = \bar{s}^2 = \frac{1}{k}\Sigma k_i s_i^2 = \frac{159,4}{34} \simeq 4,7։$$

543. $n_1=3$, $n_2=2$, $n_3=20$ ծավալներով ընտրանքների դեպքում կարելի՞ է արդյոք դիսպերսիաների համասեռության մասին հիպոթեզը ստուգելիս օգտվել Բարտլետի չափանիշից։

Պատ.՝ Չի կարելի (յուրաքանչյուր ընտրանքի ծավալը չպետք է լինի 4-ից փոքր)։

544. Նորմալ գլխավոր համախմբություններից վերցրած $n_1 = 17$, $n_2 = 20$, $n_3 = 15$, $n_4 = 16$ ծավալներով չորս անկախ ընտրանքների տվյալներով որոշված են ուղղված ընտրանքային դիսպերսիաները, որոնք համապատասխանաբար հավասար են 2,5-ի, 3,6-ի, 4,1-ի, 5,8-ի։ Պահանջվում է ա) 0,05 նշանակալիության մակարդակով, ստուգել դիսպերսիաների համասեռության մասին հիպոթեզը, բ) գնահատել գլխավոր դիսպերսիան։

Պատ.՝ ա) $k = 68$, $\Sigma k_i s_i^2 = 252,8$; $\Sigma k_i \lg s_i^2 = 36,9663$; $V = 2,8$; $B_{դիտ} < 2,8$; $\chi^2_{կր}(0,05; 3) = 7,8$։ Դիսպերսիաների համասեռության մասին հիպոթեզը մերժելու հիմքեր չկան, բ) $D_{գ}^{*} = 3,7$։

545. *Չորս հետազոտողներ զուգահեռ որոշում են ածխածնի տոկոսային պարունակությունը համաձուլվածքի մեջ, ընդ որում առաջին հետազոտողը կատարեց 25 նմուշների անալիզ, երկրորդը՝ 33, երրորդը՝ 29, չորրորդը՝ 33։ «Ուղղված» ընտրանքային միջին քառակուսային շեղումները համապատասխանաբար հավասար են 0,05-ի; 0,07-ի; 0,10-ի; 0,08-ի։*

Պահանջվում է, 0,01 նշանակալիության մակարդակով, ստուգել դիսպերսիաների համասեռության մասին հիպոթեզը, ենթադրելով, որ ածխածնի տոկոսային պարունակությունը համաձուլվածքի մեջ բաշխված է նորմալ օրենքով։

Ցուցում։ Հաշվումների պարզեցման համար ընդունել $r_i = 100 s_i$։

Պատ.՝ $k = 116$, $\Sigma k_i r_i^2 = 7016$; $\overline{r^2} = 60{,}48$, $\Sigma k_i \lg r_i^2 = 201{,}4344$, $V = 12{,}0475$, $C = 1{,}0146$, $B_{\text{դիտ}} = 11{,}87$, $\chi^2_{\text{կր}}(0{,}01;3) = 11{,}3$: *Դիսպերսիաների համասեռության մասին հիպոթեզը մերժվում է։*

546. *Համեմատվում են դետալների մշակման 4 եղանակներ։ Այն եղանակը, որի դեպքում հսկվող չափի դիսպերսիան փոքր է, համարվում է լավ։ Առաջին եղանակով մշակված են 15, երկրորդ եղանակով՝ 20, երրորդ եղանակով՝ 20, չորրորդ եղանակով՝ 14 դետալներ։ Ուղղված ընտրանքային* s_i^2 *դիսպերսիաները համապատասխանաբար հավասար են՝* 0,00053-*ի*; 0,00078-*ի*; 0,00096-*ի*; 0,00062-*ի*: *Կարելի՞ է արդյոք առավելությունը տալ մեթոդներից մեկին 0,05 նշանակալիության մակարդակի դեպքում։ Ենթադրվում է, որ հսկվող պարամետրը բաշխված է նորմալ օրենքով։*

Ցուցում։ Հաշվումների պարզեցման եղանակով ընդունել $r_i^2 = 100000\, s_i^2$։

Պատ.՝ $k = 65$; $\overline{r^2} = 74{,}68$; $\Sigma k_i \lg r_i^2 = 121{,}0550$; $V = 1{,}62$; $B_{\text{դիտ}} < 1 \cdot 62$; $\chi^2_{\text{կր}}(0{,}05;3) = 7{,}8$։ *Եղանակներից մեկը մյուսների նկատմամբ գերադասելու հիմքեր չկան։*

547. Պահանջվում է համեմատել երեք հաստոցներով դետալների մշակման ճշտությունը։ Այդ նպատակով առաջին հաստոցի վրա մշակված են 20, երկրորդի վրա՝ 25, երրորդի վրա՝ 26 դետալներ։ Ստացվեցին հսկվող չափի հետևյալ X, Y, Z շեղումները պահանջվող չափից՝ (մմ-ի տասներորդ մասերով)

առաջին հաստոցի

դետալների շեղումները	x_i	2	4	6	8	9,
հաճախությունները	n_i	5	6	3	2	4;

երկրորդ հաստոցի դետալ-

ների շեղումները	y_i	1	2	3	5	7	8	12,
հաճախությունները	m_i	2	4	4	6	3	5	1;

Երրորդ հաստոցի դետալ-

ների շեղումները	z_i	2	3	4	7	8	10	14,
հաճախությունները	p_i	3	5	4	6	3	2	3.

ա) Կարելի՞ է արդյոք համարել, որ հաստոցները ապահովում են միատեսակ ճշտություն, 0,05 նշանակալիության մակարդակի դեպքում, ենթադրելով, որ շեղումները բաշխված են նորմալ։

բ) Դիտարկումից հանելով երրորդ հաստոցը (այդ հաստոցի շեղումների դիսպերսիան ամենամեծն է), և օգտվելով Ֆիշեր—Սնեդեկորի չափանիշից, համոզվել, որ առաջին և երկրորդ հաստոցները ապահովում են դետալների մշակման միատեսակ ճշտություն։

Պատ.՝ $s_X^2=3{,}96$, $s_Y^2=7{,}92$, $s_Z^2=13{,}93$, $\overline{s}^2=9{,}02$, $\Sigma k_i s_i^2=613{,}32$, $\Sigma k_i \lg s_i^2=61{,}5151$, $V=7{,}92$, $C=1{,}02$, $B_{դիտ}=7{,}76$, $\chi^2_{կր.}(0{,}05;\ 2)=6{,}0$։ Դիսպերսիաների համասեռության մասին հիպոթեզը մերժվում է։ Հաստոցները չեն ապահովում միատեսակ ճշտություն։

բ) $F_{դիտ}=2$; $F_{կր.}(0{,}05;\ 19)=2{,}11$։

§ 10. Մի քանի նորմալ համախմբությունների դիսպերսիաների համեմատումը միատեսակ ծավալի ընտրանքների դեպքում: Կոչրենի չափանիշը

Դիցուք $X_1, X_2, \cdots X_l$ *գլխավոր համախմբությունները բաշխված են նորմալ օրենքով։ Այդ համախմբություններից վերցված են միատեսակ* n *ծավալի* l *անկախ ընտրանքներ և նրանցով որոշված են ուղղված ընտրանքային* $s_1^2, s_2^2, \cdots s_l^2$ *դիսպերսիաները, բոլորն էլ միատեսակ* $k = n - 1$ *ազատության աստիճանով։*

Պահանջվում է, α *նշանակալիության մակարդակով ստուգել դիսպերսիաների համասեռության մասին զրոյական հիպոթեզը, այսինքն՝ գլխավոր դիսպերսիաների միմյանց հավասար լինելու մասին* $H_0 \sim DX_1 = DX_2 = \cdots = DX_l$ *հիպոթեզը։*

Որպես զրոյական հիպոթեզի ստուգման չափանիշ ընդունենք Կոչրենի չափանիշը՝ առավելագույն ուղղված դիսպերսիայի հարաբերությունը բոլոր դիսպերսիաների գումարին՝

$$G = \frac{s^2_{\text{առ}}}{s_1^2 + s_2^2 + \cdots + s_l^2}:$$

Այս պատահական մեծության բաշխումը կախված է միայն ազատության $k = n - 1$ *աստիճանից և ընտրանքների* l *թվից։ Զրոյական հիպոթեզի ստուգման համար դիտարկվում է աջակողմյան կրիտիկական տիրույթը։*

Կանոն: Տրված α նշանակալիության մակարդակով նորմալ բաշխված համախմբությունների դիսպերսիաների համասեռության մասին զրոյական հիպոթեզը ստուգելու համար պետք է հաշվել չափանիշի դիտվող արժեքը՝

$$G_{\text{դիտ.}} = \frac{s^2_{\text{առ}}}{s_1^2 + s_2^2 + \cdots + s_l^2}$$

և Կոչրենի բաշխման կրիտիկական կետերի աղյուսակից (հավելված 8) որոշել $G_{\text{կր.}}(\alpha, k, l)$ կրիտիկական կետը:

Երբ $G_{դիտ} < G_{կր.}$, ապա զրոյական հիպոթեզը մերժելու հիմքեր չկան:

Երբ $G_{դիտ} > G_{կր.}$, զրոյական հիպոթեզը մերժում են:

Դիտողություն։ Դիսպերսիաների համասեռության դեպքում որպես գլխավոր դիսպերսիայի գնահատական ընդունում են ուղղված դիսպերսիաների միջին թվաբանականը։

548. *Նորմալ գլխավոր համախմբություններից վերցված* $n = 17$ *ծավալի 4 անկախ ընտրանքներով որոշված են ուղղված ընտրանքային 0,21, 0,25; 0,34; 0,40 դիսպերսիաները։*

Պահանջվում է՝ ա) 0,05 նշանակալիության մակարդակով, ստուգել դիսպերսիաների հավասարության մասին զրոյական հիպոթեզը (կրիտիկական տիրույթը աջակողմ է), բ) գնահատել գլխավոր դիսպերսիան։

Լուծում։ ա) Հաշվենք Կոչրենի չափանիշի (առավելագույն դիսպերսիայի հարաբերությունը բոլոր դիսպերսիաների գումարին) դիտվող արժեքը՝

$$G_{դիտ.} = \frac{0,40}{0,21+0,25+0,34+0,40} = \frac{1}{3}։$$

Կոչրենի բաշխման կրիտիկական կետերի աղյուսակից (հավելված 8) 0,05 նշանակալիության մակարդակով, $k = n-1 = 17-1 = 16$ *ազատության աստիճանով և* $l = 4$ *ընտրանքների քանակով գտնենք* $G_{կր.}(0,05;\ 16;4) = 0,4366$ *կրիտիկական կետը։*

Քանի որ $G_{դիտ} < G_{կր.}$, *ապա զրոյական հիպոթեզը մերժելու հիմք չկա։*

բ) Քանի որ դիսպերսիաների համասեռությունը հաստատվեց, ապա որպես գլխավոր դիսպերսիայի գնահատական վերցնենք ուղղված դիսպերսիաների միջին թվաբանականը՝

$$D_{գ}^{*} = \frac{0,21+0,25+0,34+0,40}{4} = 0,3։$$

549. *Նորմալ գլխավոր համախմբություններից վերցրած* $n=37$ *ծավալի 6 անկախ ընտրանքներով որոշված են ուղղված ընտրանքային 2,34; 2,66; 2,95; 3,65; 3,86; 4,54 դիսպերսիաները։*

Պահանջվում է ստուգել դիսպերսիաների համասեռության մասին զրոյական հիպոթեզը ա) 0,01 նշանակալիության մակարդակի դեպքում, բ) 0,05 նշանակալիության մակարդակի դեպքում։

Պատ.՝ $k=36$, $l=6$, $G_{դիտ}=0{,}2270$, *ա)* $G_{կր.}(0{,}01;36;6)=0{,}2858$; *բ)* $G_{կր.}(0{,}05;\ 36;\ 6)=0{,}2612$։ *Երկու դեպքում էլ դիսպերսիաների համասեռության մասին հիպոթեզը մերժելու հիմք չկա։*

550. *Ապացուցել, որ Կոչրենի չափանիշի դիտվող արժեքը չի փոխվի, եթե բոլոր դիսպերսիաները բազմապատկենք միևնույն հաստատուն թվով։*

551. *Նորմալ գլխավոր համախմբություններից վերցրած* $n=37$ *ծավալի 5 անկախ ընտրանքներով որոշված են «ուղղված» միջին քառակուսային* 0,00021; 0,00035; 0,00038, 0,00062; 0,00084 *շեղումները։*

Պահանջվում է, 0,05 նշանակալիության մակարդակով, ստուգել դիսպերսիաների համասեռության մասին զրոյական հիպոթեզը։

Ցուցում։ Նախապես բոլոր միջին քառակուսային շեղումները բազմապատկել 10^5*-ով։*

Պատ.՝ $k=36$; $l=5$, $G_{դիտ}=0{,}4271$; $G_{կր}(0{,}05;36;5)=0{,}3066$։ *Դիսպերսիաների համասեռության մասին հիպոթեզը մերժվում է։*

552. *Չորս փաթեթավորող ավտոմատներ նախապատրաստված են միևնույն քաշը կշռելու համար։ Նրանցից յուրաքանչյուրի վրա կշռեցին 10 փորձանմուշ, այնուհետև նույն նմուշները կշռեցին ճշգրիտ կշեռքով և դիտված շեղումներով որոշեցին ուղղված՝* 0,012; 0,021; 0,025; 0,032 *դիսպերսիաները։ Կարելի՞ է արդյոք 0,05 նշանակալիության մակարդակի* *դեպքում, համարել, որ ավտոմատները ապահովում են կշռման միատեսակ ճշտություն։ Ենթադրվում է, որ գրանցված կշռի շեղումը պահանջվողից բաշխված է նորմալ օրենքով։*

Պատ.՝ $k=9$, $l=4$, $G_{դիտ}=0{,}3556$; $G_{կր}\,(0{,}05;9;4)=0{,}5017$։ *Ավտոմատները ապահովում են կշռման միատեսակ ճշտություն։*

553. *Համաձուլվածքում ածխածնի պարունակությունը որոշելու համար 3 լաբորատորիաներից յուրաքանչյուրում կատարեցին 10 փորձանմուշների անալիզ, ընդ որում ստացվեցին ուղղված ընտրանքային դիսպերսիաների հետևյալ արժեքները՝ 0,45; 0,062; 0,093։*

Պահանջվում է, 0,01 նշանակալիության մակարդակով, ստուգել դիսպերսիաների համասեռության մասին հիպոթեզը։ Ենթադրվում է, որ համաձուլվածքում ածխածնի տոկոսային պարունակությունը նորմալ է բաշխված։

Պատ. $k=9$; $l=3$; $G_{դիտ}=0{,}465$; $G_{կր}\,(0{,}01;\ 9;\ 3)=0{,}6912$։ *Դիսպերսիաների համասեռության մասին զրոյական հիպոթեզը մերժելու հիմք չկա։*

554. *Արտադրանքի հսկվող չափի արժեքով ստուգվում է հաստոցի կայունությունը (ապակարգավորման բացակայությունը)։ Այդ նպատակով յուրաքանչյուր 30 րոպ. վերցնում էին 20 տարրկաններից փորձանմուշ։ Ընդամենը վերցրեցին 15 նմուշ։ Ընտրված արտադրանքի չափումների միջոցով հաշվեցին ուղղված դիսպերսիաները (նրանց արժեքները բերված են աղյուսակ 11-ում)*

Կարելի՞ է արդյոք, 0,05 նշանակալիության մակարդակի դեպքում, համարել, որ հաստոցը կայուն է աշխատում (ապակարգավորում տեղի չի ունեցել)։

Ցուցում։ Աղյուսակից (հավելված 8) օգտվելիս, կատարել գծային ինտերպոլյացիա։

Նմուշի համարը	*Ուղղված դիսպերսիան*	*Նմուշի համարը*	*Ուղղված դիսպերսիան*	*Նմուշի համարը*	*Ուղղված դիսպերսիան*
1	0,082	6	0,109	11	0,112
2	0,094	7	0,121	12	0,109
3	0,162	8	0,094	13	0,110
4	0,143	9	0,156	14	0,156
5	0,121	10	0,110	15	0,164

Պատ.՝ $k=19$; $l=15$; $G_{\text{դիտ}} = G_{\text{կր}}(0,05;\ 19;\ 15) = 0,1386$: *Հաստոցը կայուն է աշխատում։*

§ 11. Կոռելյացիայի գործակցի նշանակալիության մասին հիպոթեզի ստուգումը

Դիցուք (X, Y) երկչափ գլխավոր համախմբությունը նորմալ է բաշխված։ Այդ համախմբությունից վերցված է n *ծավալի ընտրանք և նրանով հաշված է ընտրանքային* $r_{\text{ը}} \neq 0$ *կոռելյացիայի գործակիցը։ Պահանջվում է ստուգել գլխավոր կոռելյացիայի գործակցի զրո լինելու մասին* $H_0 = r_{\text{գ}} = 0$ *զրոյական հիպոթեզը։*

Եթե զրոյական հիպոթեզը ընդունվում է, ապա դա նշանակում է, որ X *և* Y *մեծությունները չկոռելացված են, հակառակ դեպքում՝ կոռելացված են։*

Կանոն: α նշանակալիության մակարդակով, նորմալ երկչափ պատահական մեծության գլխավոր կոռելյացիայի գործակցի զրո լինելու մասին $H_0 \sim r_{\text{գ}} = 0$ զրոյական հիպոթեզը ստուգելու համար մրցակցող $H_1 \sim r_{\text{գ}} \neq 0$ հիպոթեզի դեպքում անհրաժեշտ է հաշվել չափանիշի դիտվող արժեքը՝

$$T_{\text{դիտ}} = \frac{r_{\text{ը}}\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_{\text{ը}}^2}},$$

և Ստյուդենտի բաշխման կրիտիկական կետերի աղյուսակից, տված α նշանակալիության մակարդակով և $k = n-2$ ազատության աստիճանով, գտնել երկկողմանի կրիտիկական տիրույթի $t_{կր.}(\alpha,\ k)$ կրիտիկական կետը:

Եթե $(T_{դիտ.}) > t_{կր.}$, ապա զրոյական հիպոթեզը մերժվում է:

Եթե $(T_{դիտ.}) < t_{կր.}$, ապա զրոյական հիպոթեզը մերժելու հիմքեր չկան:

555. (X, Y) *երկչափ նորմալ գլխավոր համախմբությունից վերցրած* $n=100$ *ծավալի ընտրանքով որոշված է ընտրանքային* $r_ը=0,2$ *կոռելյացիայի գործակիցը: Պահանջվում է, 0,05 նշանակալիության մակարդակով, ստուգել գլխավոր կոռելյացիայի գործակցի զրո լինելու մասին զրոյական հիպոթեզը մրցակցող* $H_1\sim r_գ \neq 0$ *հիպոթեզի դեպքում:*

Լուծում: Հաշվենք չափանիշի դիտվող (էմպիրիկ) արժեքը՝

$$T_{դիտ.} = \frac{r_ը\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_ը^2}} = \frac{0,2\sqrt{100-2}}{\sqrt{1-0,2^2}} = 2,02:$$

Պայմանի համաձայն, մրցակցող հիպոթեզն ունի $r_գ \neq 0$ *տեսքը, ուստի կրիտիկական տիրույթը երկկողմ է:*

Ստյուդենտի բաշխման կրիտիկական կետերի աղյուսակից (հավելված 6), $\alpha=0,05$ *նշանակալիության մակարդակով (աղյուսակի վերին տող) և ազատության* $k=n-2=100-2=98$ *աստիճանով գտնում ենք երկկողմ կրիտիկական տիրույթի* $t_{կր.}(0,05;\ 98)=1,665$ *կրիտիկական կետը:*

Քանի որ $T_{դիտ.} > t_{կր.}$, *ապա գլխավոր կոռելյացիայի գործակցի զրո լինելու մասին հիպոթեզը մերժվում է: Այլ կերպ ասած, կոռելյացիայի գործակիցը նշանակալի չափով տարբերվում է զրոյից: Հետևաբար, X և Y մեծությունները կոռելյացված են:*

556. (X, Y) *երկչափ նորմալ գլխավոր համախմբությունից վերցրած* $n=62$ *ծավալի ընտրանքով որոշված է ընտրանքային* $r_ը=0,3$ *կոռելյացիայի գործակիցը: Պահանջվում է, 0,01 նշանակալիության մակարդակով, ստուգել գլխավոր* կոռելյացիայի գործակցի զրո լինելու մասին զրոյական հիպոթեզը, մրցակցող $H_1 \sim r_գ \neq 0$ հիպոթեզի դեպքում։

Պատ.՝ $K=60$; $T_{դիտ}=2{,}43$; $t_{կր}(0{,}01 \cdot 60)=2{,}66$: *Զրոյական հիպոթեզը մերժելու հիմք չկա։ X և Y մեծությունները չկոռելացված են։*

557. (X, Y) *երկչափ նորմալ գլխավոր համախմբությունից վերցրած* $n=120$ *ծավալի ընտրանքով որոշված է ընտրանքային* $r_ը=0{,}4$ *կոռելյացիայի գործակիցը։ Պահանջվում է,* 0,05 *նշանակալիության մակարդակով, ստուգել գլխավոր կոռելյացիայի գործակցի զրո լինելու մասին զրոյական հիպոթեզը, մրցակցող* $H_1 \sim r_գ \neq 0$ *հիպոթեզի դեպքում։*

Պատ. $K=118$; $T_{դիտ}=4{,}74$; $t_{կր.}(0{,}05; 118)=1{,}66$: *Զրոյական հիպոթեզը մերժվում է։ X և Y պատահական մեծությունները կոռելացված են։*

558. (X, Y) *երկչափ նորմալ գլխավոր համախմբությունից վերցրած* $n=100$ *ծավալի ընտրանքով կազմված է կոռելյացիոն աղյուսակ 12-ը։*

Աղյուսակ 12

X \ Y	10	15	20	25	30	35	n_y
35	5	1	—	—	—	—	6
45	—	6	2	—	—	—	8
55	—	—	5	40	5	—	50
65	—	—	2	8	7	—	17
75	—	—	—	4	7	8	19
n_x	5	7	9	52	19	8	$n=100$

Պահանջվում է՝ ա) գտնել ընտրանքային կոռելյացիայի գործակիցը, բ) 0,05 նշանակելիության մակարդակով ստուգել գլխավոր կոռելյացիայի գործակցի զրո լինելու մասին հիպոթեզը, մրցակցող $H_1 \sim r_գ \neq 0$ հիպոթեզի դեպքում:

Լուծում: ա) Հաշվումների պարզեցման համար անցնենք

$$u_i = \frac{x_i - C_1}{h_1}, \quad v_i = \frac{y_i - C_2}{h_2},$$

պայմանական տարբերակներին, որտեղ C_1-ը և C_2-ը կեղծ զրոներ են (որպես կեղծ զրո ձեռնտու է վերցնել այն տարբերակը, որն ընկած է մոտավորապես վարիացիոն շարքի կենտրոնում, տվյալ դեպքում ընդունենք $C_1 = 25$, $C_2 = 55$), այսինքն տարբերությունը $h_1 = x_{i+1} - x_i$ գտնվում է երկու հարևան տարբերակների միջև (քայլ), $h_2 = y_{j+1} - y_j$:

Գործնականում, պայմանական տարբերակներով կոռելյացիոն աղյուսակը կազմվում է հետևյալ կերպ՝ առաջին տողում $C_1 = 25$ կեղծ զրոյի փոխարեն գրում ենք 0, զրոյից ձախ՝ հաջորդաբար −1, −2, −3, իսկ զրոյից աջ՝ 1, 2, 3 թվերը: Նման ձևով, առաջին սյունակում $C_2 = 55$ կեղծ զրոյի փոխարեն գրում ենք 0, զրոյից վերև՝ հաջորդաբար −1, −2, −3, իսկ զրոյից ներքև՝ 1, 2, 3 թվերը: Համախառնությունները արտագրում ենք սկզբնական տարբերակների կոռելյացիոն աղյուսակից: Արդյունքում ստացվում է կոռելյացիոն աղյուսակ 13-ը:

Օգտվենք պայմանական տարբերակներով ընտրանքային կոռելյացիայի գործակցի հաշվման

$$r_ը = \frac{\sum n_{uv} - \bar{u}\,\bar{v}}{n\sigma_u\sigma_v}$$

բանաձևից:

Բանաձևում մտնող $\bar{u}$, $\bar{v}$, σ_u, σ_v, մեծությունները հաշվելով արտադրյալների մեթոդով, կամ անմիջական հաշվումներով, ստանում ենք՝

$$\bar{u} = -0{,}03, \quad \bar{v} = 0{,}35, \quad \sigma_u = 1{,}153, \quad \sigma_v = 1{,}062;$$

v \ u	−3	−2	−1	0	1	2	n_v
−2	5	1	—	—	—	—	6
−1	—	6	2	—	—	—	8
0	—	—	5	40	5	—	50
1	—	—	2	8	7	—	17
2	—	—	—	4	7	8	19
n_u	5	7	9	52	19	8	$n=100$

Օգտվելով հաշվարկային աղյուսակից (տես խնդիր 498, աղյուսակ 7), ստանում ենք՝ $\Sigma n_{uv}uv = 99$։

Հետևաբար, ընտրանքային կոռելյացիայի գործակիցը՝

$$r_{\text{ը}} = \frac{\Sigma n_{uv}\,uv - \bar{u}\,\bar{v}}{n\sigma_u\sigma_v} = \frac{99-100\cdot(-0,03)\cdot(0,35)}{100\cdot 1,153\cdot 1,062} = 0,817\text{։}$$

բ) Ստուգենք գլխավոր կոռելյացիայի գործակցի զրո լինելու մասին զրոյական հիպոթեզը։

Հաշվենք չափանիշի դիտվող արժեքը՝

$$T_{\text{դիտ.}} = \frac{r_{\text{ը}}\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_{\text{ը}}^2}} = \frac{0,817\sqrt{100-2}}{\sqrt{1-0,817^2}} = 14,03\text{։}$$

Պայմանի համաձայն, մրցակցող հիպոթեզն ունի $r_{\text{գ}} \neq 0$ *տեսքը, ուստի կրիտիկական տիրույթը երկկողմ է։ Ստյուդենտի բաշխման կրիտիկական կետերի աղյուսակից (հավելված 6),* $\alpha = 0,05$ *նշանակալիության մակարդակով (աղյուսակի վերևի տող) և* $k = n - 2 = 100 - 2 = 98$ *ազատության աստիճանով գտնում ենք երկկողմանի կրիտիկական տիրույթի* $t_{\text{կր}}.(0,05;98) = 1,665$ *կրիտիկական կետը։*

Քանի որ $T_{դիտ} > t_{կր}$, *ապա գլխավոր կոռելյացիայի գործակցի զրո լինելու մասին զրոյական հիպոթեզը մերժում ենք։ Այլ կերպ ասած, կոռելյացիայի գործակիցը նշանակալի չափով տարբերվում է զրոյից, հետևաբար* X *և* Y *մեծությունները կոռելացված են։*

559. *(X, Y) գլխավոր նորմալ համախմբությունից վերցրած* $n = 100$ *ծավալի ընտրանքով կազմված է կոռելյացիոն աղյուսակ 14-ը։*

Պահանջվում է՝ ա) գտնել ընտրանքային կոռելյացիայի գործակիցը, բ) 0,01 նշանակալիության մակարդակով, ստուգել գլխավոր կոռելյացիայի $r_գ$ *գործակցի զրո լինելու մասին հիպոթեզը, մրցակցող* $H_1: r_գ \neq 0$ *հիպոթեզի դեպքում։*

Ցուցում։ Անցնել $u_i = \frac{x_i - 17}{5}$, $v_i = \frac{y_i - 130}{10}$ *պայմանական տարբերակներին։*

Պատ.՝ ա) $\bar{u} = -0,11$; $\sigma_u = 0,918$; $\bar{v} = 0,25$; $\sigma_v = 0.004$, $n_{uv}\,uv = 73$, $r_ը = 0,8$; *բ)* $T_{դիտ} = 13,2$; $t_{կր}(0,01;98) = 2,64$: *Զրոյական հիպոթեզը մերժվում է։ X և Y մեծությունները կոռելացված են։*

Աղյուսակ 14

Y \ X	2	7	12	17	22	27	n_y
110	2	4	—	—	—	—	6
120	—	6	2	—	—	—	8
130	—	—	3	50	2	—	55
140	—	—	1	10	6	—	17
150	—	—	—	4	7	3	14
n_x	2	10	6	64	15	3	n=100

560. (X, Y) *երկչափ նորմալ գլխավոր համախմբությունից վերցրած* $n=100$ *ծավալի ընտրանքով կազմված է կոռելյացիոն աղյուսակ 15-ը։*

Աղյուսակ 15

Y \ X	12	22	32	42	52	62	72	n_y
65	—	—	—	—	10	6	2	18
70	—	—	—	—	—	4	1	5
75	—	—	2	7	4	2	—	15
80	—	—	1	25	—	—		26
85	—	4	6	—	1	—	—	11
90	1	5	8	2	—	—	—	16
95	1	2	6	—	—	—	—	9
n_x	2	11	23	34	15	12	3	$n=100$

Պահանջվում է՝ ա) գտնել ընտրանքային կոռելյացիայի գործակիցը, բ) 0,001 նշանակալիության մակարդակով ստուգել գլխավոր կոռելյացիայի $r_գ$ *գործակցի զրո լինելու մասին հիպոթեզը, մրցակցող* $H_1 \sim r_գ \neq 0$ *հիպոթեզի դեպքում։*

Ցուցում։ Անցնել $u_i = \frac{x_i - 42}{10}$, $v_i = \frac{y_i - 80}{5}$ *պայմանական տարբերակներին։*

Պատ.՝ ա) $\bar{u} = -0,03$; $\sigma_4 = 1,321$; $\bar{v} = -0,09$; $\sigma_v = 1,877$; $\Sigma n_{uv}\, uv = -206$; $r_ը = -0,83$; բ) $T_{դիտ} = -14,73$; $t_{կր}(0,001;\ 98) = 3,43$։ Զրոյական հիպոթեզը մերժվում է։ X և Y մեծությունները կոռելացված են։

561. (X, Y) երկչափ նորմալ գլխավոր համախմբությունից վերցրած $n = 100$ ծավալի ընտրանքով կազմված է կոռելյացիոն աղյուսակ 16-ը։

Աղյուսակ 16

Y \ X	100	105	110	115	120	125	n_y
35	4	—	6	7	8	3	28
45	5	5	2	10	—	—	22
55	6	7	—	—	2	3	18
65	—	6	5	4	—	2	17
75	5	1	2	4	3	—	15
n_x	20	19	15	25	13	8	n=100

Պահանջվում է՝ ա) գտնել ընտրանքային կոռելյացիայի գործակիցը, բ) 0,05 նշանակալիության մակարդակով ստուգել կոռելյացիայի $r_գ$ գործակցի զրո լինելու մասին զրոյական հիպոթեզը, մրցակցող $H_1 \sim r_գ \neq 0$ հիպոթեզի դեպքում։

Ցուցում։ Անցնել պայմանական

$$u_i = \frac{x_i - 115}{5}, \qquad v_i = \frac{y_i - 45}{10}$$

տարբերակներին։

Պատ.՝ ա) $\bar{u} = -0,84$; $\sigma_u = 1,758$; $\bar{v} = 0,69$; $\sigma_v = 1,563$; $\Sigma n_{uv}uv = -94$; $r_ը = -0,13$; բ) $T_{դիտ} = -1,3$; $t_{կր}(0,05; 98) = 1,665$: *Զրոյական հիպոթեզը մերժելու հիմքեր չկան։ X և Y մեծությունները չկոռելացված են։*

§ 12. Գլխավոր համախմբության նորմալ բաշխվածության մասին հիպոթեզի ստուգումը Պիրսոնի չափանիշով

Ա. Էմպիրիկ բաշխումը տրված է հավասարահեռ տարբերակների և համապատասխան հաճախությունների հաջորդականության տեսքով:

Դիցուք, էմպիրիկ բաշխումը տրված է հավասարահեռ տարբերակների և համապատասխան հաճախությունների հաջորդականության տեսքով՝

$$
\begin{array}{ll}
x_i & x_1, x_2, \ldots, x_N \\
n_i & n_1, n_2, \ldots, n_N
\end{array}
$$

Պահանջվում է, Պիրսոնի չափանիշի օգնությամբ, ստուգել X գլխավոր համախմբությունը նորմալ բաշխված լինելու մասին հիպոթեզը։

Կանոն 1: Տրված a նշանակալիության մակարդակով գլխավոր համախմբության նորմալ բաշխվածության մասին հիպոթեզը ստուգելու համար անհրաժեշտ է՝

1. Հաշվել անմիջականորեն (փոքրաթիվ դիտումների դեպքում) կամ պարզեցված մեթոդով (մեծ թվով դիտումների դեպքում), օրինակ, արտադրյալների կամ գումարների մեթոդով՝ $\bar{x}_ը$՝ ընտրանքային միջինը և $\sigma_ը$՝ ընտրանքային միջին քառակուսային շեղումը:

2. Հաշվել տեսական հաճախությունները՝

$$n_i' = \frac{nh}{\sigma_ը}\varphi(u_i),$$

որտեղ n-ը ընտրանքի ծավալն է (բոլոր հաճախությունների գումարը), h-ը քայլն է (երկու հարևան տարբերակների միջև եղած տարբերությունը),

$$u_i = \frac{x_i - \overline{x}_ը}{\sigma_ը}, \quad \varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}},$$

3. Պիրսոնի չափանիշի օգնությամբ համեմատել էմպիրիկ և տեսական հաճախությունները: Որի համար՝

ա) կազմում են հաշվարկային աղյուսակ (տես աղյուսակ 18), որտեղից գտնում են չափանիշի դիտվող արժեքը՝

$$\chi^2_{դիտ} = \sum \frac{(n_i - n'_i)^2}{n_i};$$

բ) χ^2 բաշխման կրիտիկական կետերի աղյուսակից, տրված α նշանակալիության մակարդակով, և $k = s - 3$ ազատության աստիճանով (s-ը ընտրանքային խմբերի քանակն է) որոշում են աջակողմյան կրիտիկական տիրույթի $\chi^2_{կր}(\alpha, k)$ կրիտիկական կետը:

Երբ $\chi^2_{դիտ} < \chi^2_{կր}$, ապա գլխավոր համախմբության նորմալ բաշխված լինելու մասին հիպոթեզը մերժելու հիմքեր չկան: Այլ կերպ ասած, էմպիրիկ և տեսական հաճախությունները աննշան չափով են տարբերվում (տարբերությունը պատահական է):

Երբ $\chi^2_{դիտ} > \chi^2_{կր}$, ապա հիպոթեզը մերժվում է: Այլ կերպ ասած, էմպիրիկ և տեսական հաճախությունները տարբերվում են նշանակալի չափով:

Դիտողություն 1. *Փոքրաթիվ հաճախությունները* ($n_i < 5$) *անհրաժեշտ է միավորել, այդ դեպքում նրանց համապատասխան տեսական հաճախությունները նույնպես պետք է միավորել: Եթե իրականացվել է հաճախությունների միավորումը, ապա* $k = s - 3$ *բանաձևով ազատության աստիճանի որոշման ժամանակ անհրաժեշտ է որպես* s *վերցնել միավորումից հետո մնացած խմբերի թիվը:*

562. *Պիրսոնի չափանիշով գլխավոր համախմբության նորմալ բաշխված լինելու մասին հիպոթեզը ստուգելիս ինչո՞ւ ազատության աստիճանը որոշում են* $k = s - 3$ *բանաձևով:*

Լուծում: *Պիրսոնի չափանիշը օգտագործելիս ազատության աստիճանը հավասար է* $s - 1 - r$, *որտեղ* r-*ը ընտրանքով գնահատված պարամետրերի թիվն է: Նորմալ բաշխումը որոշվում է երկու պարամետրերով՝* a *մաթեմատիկական* ստացումով և σ միջին քառակուսային շեղումով։ Քանի որ այդ երկու պարամետրերն էլ գնահատվել են ընտրանքով (որպես a-ի գնահատական վերցնում են ընտրանքային միջինը, որպես σ-ի գնահատական ընտրանքային միջին քառակուսային շեղումը), ապա $r=2$, հետևաբար՝ $k=s-1-2=s-3$։

563. Օգտագործելով Պիրսոնի չափանիշը, 0,05 նշանակալիության մակարդակով, ստուգել) չի՞ հակասում արդյոք X գլխավոր համախմբության նորմալ բաշխվածության մասին հիպոթեզը, $n=200$ ծավալի ընտրանքի էմպիրիկ բաշխմանը՝

x_i	5	7	9	11	13	15	17	19	21
n_i	15	26	25	30	27	21	24	20	13

Լուծում. 1։ Օգտագործելով արտադրյալների մեթոդը, գտնում ենք $\overline{x}_ը=12,63$ ընտրանքային միջինը և $\sigma_ը=4,695$ ընտրանքային միջին քառակուսային շեղումը։

2. Հաշվի առնելով, որ $n=200$, $h=2$, $\sigma_ը=4,695$,

$$n'_i=\frac{nh}{\sigma_ը}\ \varphi(u_i)=\frac{200\cdot 2}{4,695}\cdot\varphi(u_i)=\ 85,2\,\varphi(u_i)$$

բանաձևով հաշվենք տեսական հաճախությունները։

Կազմենք հաշվարկային աղյուսակ 17-ը ($\varphi(u)$ ֆունկցիայի արժեքները բերված են հավելված 1-ում)

Աղյուսակ 17

i	x_i	$u_i=\dfrac{x_i-\overline{x}_ը}{\sigma_ը}$	$\varphi(u_i)$	$n'_i=85,2\cdot\varphi(u_i)$
1	5	−1,62	0,1074	9,1
2	7	−1,20	0,1942	16,5
3	9	−0,77	0,2966	25,3
4	11	−0,35	0,3752	32,0
5	13	0,08	0,3977	33,9
6	15	0,51	0,3503	29,8
7	17	0,93	0,2589	22,0
8	19	1,36	0,1582	13,5
9	21	1,78	0,0818	7,0

3. Համեմատենք էմպիրիկ և տեսական հաճախությունները։

ա) Կազմենք հաշվարկային աղյուսակ 18-ը, որտեղից կորոշենք չափանիշի դիտվող արժեքը՝

$$\chi^2_{դիտ} = \sum \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i},$$

Աղյուսակ 18

i	n_i	n_i'	$n_i - n'_i$	$(n_i - n'_i)^2$	$\frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$
1	15	9,1	−5,9	34,81	3,8
2	26	16,5	9,5	90,25	3,6
3	25	25,3	−0,3	0,09	0,0
4	30	32,0	−2,0	4,00	0,1
5	26	33,9	−7,9	62,41	1,9
6	21	29,8	−8,8	77,44	2,3
7	24	22,0	2,0	4,00	0,2
8	20	13,5	6,5	42,25	3,0
9	13	7,0	6,0	36,00	5,1
	$\Sigma = 200$				$\chi^2_{դիտ} = 20,0$

Աղյուսակ 18-ից գտնում ենք՝ $\chi^2_{դիտ} = 20,0$։

բ) χ^2 բաշխման կրիտիկական կետերի աղյուսակից (հավելված 5), $\alpha = 0,05$ նշանակալիության մակարդակով, և $k = s - 3 = 9 - 3 = 6$ ազատության աստիճանով գտնում ենք աջակողմյան կրիտիկական տիրույթի $\chi^2_{կր} = (0,05;6) = 12,6$ կրիտիկական կետը։

Քանի որ $\chi^2_{դիտ} > \chi^2_{կր}$, ապա գլխավոր համախմբության նորմալ բաշխվածության մասին հիպոթեզը մերժում ենք։ Այլ կերպ ասած, տեսական և էմպիրիկ հաճախությունները տարբերվում են նշանակալի չափով։

564. Օգտագործելով Պիրսոնի չափանիշը, 0,05 նշանակալիության մակարդակով, ստուգել, համաձա՞յն է արդյոք X գլխավոր համախմբության նորմալ բաշխվածության մասին *հիպոթեզը* n = 200 *ծավալի ընտրանքի հետևյալ էմպիրիկ բաշխմանը.*

x_i	0,3	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3	1,5	1,7	1,9	2,2	2,3
n_i	6	9	26	25	30	26	21	24	20	8	5

Պատ.՝ $K = 8$; $\chi^2_{\text{դիտ}} = 7,71$, $\chi^2_{\text{կր}}(0,05;8) = 15,5$։ *Գլխավոր համախմբության նորմալ բաշխվածության մասին հիպոթեզը մերժելու հիմք չկա։*

565. *Օգտագործելով Պիրսոնի չափանիշը, 0,01 նշանակալիության մակարդակով, պարզել, նշանակալի՞ է արդյոք, թե՞ պատահական էմպիրիկ* n_i *հաճախությունների և* X *գլխավոր համախմբության նորմալ բաշխվածության հիպոթեզի հիման վրա հաշված տեսական* n'_i *հաճախությունների տարբերությունը։*

n_i	8	16	40	72	36	18	10
n'_i	6	18	36	76	39	18	7

Լուծում։ Հաշվենք Պիրսոնի չափանիշի դիտվող արժեքը՝ $\chi^2_{\text{դիտ}} = \sum \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$։ *Կազմենք հաշվարկային աղյուսակ 19-ը։*

Աղյուսակ 19-ից գտնում ենք չափանիշի դիտվող արժեքը՝

$$\chi^2_{\text{դիտ}} = 3,068։$$

χ^2 *բաշխման կրիտիկական կետերի աղյուսակից (հավելված 5), 0,01 նշանակալիության մակարդակով, և* $k = s - 3 = 7 - 3 = 4$ *ազատության աստիճանով, գտնում ենք աջակողմյան կրիտիկական տիրույթի* $\chi^2_{\text{կր.}}(0,01;\ 7) = 13,3$ *կրիտիկական կետը։*

Քանի որ $\chi^2_{\text{դիտ.}} < \chi^2_{\text{կր.}}$, *ապա գլխավոր համախմբության նորմալ բաշխված լինելու մասին հիպոթեզը մերժելու հիմք* չկա։ Այլ կերպ ասած, էմպիրիկ և տեսական հաճախությունների տարբերությունը նշանակալի չէ (պատահական է)։

Աղյուսակ 19

i	n_i	n_i'	n_i-n_i'	$(n_i-n_i')^2$	$\frac{(n_i-n_i')^2}{n_i'}$
1	8	6	2	4	0,667
2	16	18	—2	4	0,224
3	40	36	4	16	0,448
4	72	76	—4	16	0,208
5	36	39	—3	9	0,234
6	18	18	—	—	—
7	10	7	3	9	1,287
Σ	$n=200$				$\chi^2_{դիտ}=3,068$

566. *Օգտագործելով Պիրսոնի չափանիշը. 0,05 նշանակալիության մակարդակով, պարզել, նշանակալի՞ է արդյոք, թե՞ պատահական էմպիրիկ* n_i *հաճախությունների և* X *գլխավոր համախմբության նորմալ բաշխվածության հիպոթեզի հիման վրա հաշված տեսական* n'_i *հաճախությունների տարբերությունը.*

ա) n_i 5 10 20 8 7;
n_i' 6 14 18 7 5

բ) n_i 6 8 13 15 20 16 10 7 5;
n_i' 5 9 14 16 18 16 9 6 7

գ) n_i 14 18 32 70 20 36 10;
n_i' 10 24 34 80 18 22 12

դ) n_i 5 7 15 14 21 16 9 7 6;
n_i' 6 6 14 15 22 15 8 8 6

Պատ.՝ *ա) Պատահական է*; $k=2$, $\chi^2_{\text{դիտ.}}=2{,}47$, $\chi^2_{\text{կր.}}(0{,}05;\ 2)=$ $=6{,}0$;

բ) Պատահական է; $k=6$, $\chi^2_{\text{դիտ.}}=1{,}52$, $\chi^2_{\text{կր.}}(0{,}05;\ 6)=$ $=12{,}6$;

գ) Նշանակալի է; $k=4$, $\chi^2_{\text{դիտ.}}=13{,}93$, $\chi^2_{\text{կր.}}(0{,}05;\ 4)=$ $=9{,}5$;

դ) Պատահական է; $k=6$, $\chi^2_{\text{դիտ.}}=0{,}83$, $\chi^2_{\text{կր.}}(0{,}05;\ 6)=$ $=12{,}6$։

Բ. Էմպիրիկ բաշխումը տրված է միատեսակ երկարության միջակայքերի և նրանց համապատասխան հաճախությունների հաջորդականության տեսքով:

Դիցուք էմպիրիկ բաշխումը տրված է (x_i, x_{i+1}) *միջակայքերի հաջորդականության և համապատասխան* n_i *հաճախությունների հաջորդականության տեսքով* (n_i*-ն այն տարբերակների հաճախությունների գումարն է, որոնք ընկած են* i*-րդ միջակայքում)։*

$$\begin{array}{ccc} (x_i;\ x_2) & (x_2;\ x_3) & \cdots(x_s;\ x_{s+1}) \\ n_i & n_2 & n_s \end{array}$$

Պահանջվում է, օգտվելով Պիրսոնի չափանիշից, ստուգել X գլխավոր համախմբության նորմալ բաշխվածության մասին հիպոթեզը։

Կանոն 2: α նշանակալիության մակարդակով, գլխավոր համախմբության նորմալ բաշխվածության մասին հիպոթեզը ստուգելու համար պետք է՝

1. Հաշվել, օրինակ, արտադրյալների մեթոդով, $\overline{x}^*$ ընտրանքային միջինը և σ^* ընտրանքային միջին քառակուսային շեղումը, ընդ որում որպես x_i^* տարբերակ ընդունվում է միջակայքի ծայրակետերի միջին թվաբանականը՝

$$x_i^*=\frac{x_i+x_{i+1}}{2};$$

2. Նորմավորել X-ը, այսինքն՝ անցնել $Z=\dfrac{X-\overline{x}^*}{\sigma^*}$ պատահական մեծությանը և հաշվել միջակայքի

$$z_i=\frac{x_i-x_i^*}{\sigma^*},\quad z_{i+1}-\frac{x_{i+1}-\overline{x}^*}{\sigma^*}$$

ծայրակետերը, ընդ որում որպես Z-ի ամենափոքր արժեք, այսինքն՝ z_1 ընդունում են $-\infty$-ը, իսկ ամենամեծը, այսինքն՝ z_s ընդունում են $+\infty$-ը:

3. Հաշվել տեսական հաճախությունները՝

$$n_i' = nP_i,$$

որտեղ n-ը ընտրանքի ծավալն է (բոլոր հաճախությունների գումարը), $P_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i)$ այն բանի հավանականությունն է, որ X-ը կընկնի (x_i, x_{i+1}) միջակայքը, $\Phi(z)$-ը Լապլասի ֆունկցիան է:

4. Համեմատել էմպիրիկ և տեսական հաճախությունները Պիրսոնի չափանիշի օգնությամբ: Դրա համար՝

ա) կազմել հաշվարկային աղյուսակ (տես աղյուսակ 18), որտեղից որոշել Պիրսոնի չափանիշի դիտվող արժեքը՝

$$\chi^2_{դիտ.} = \sum \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i};$$

բ) χ^2 բաշխման կրիտիկական կետերի աղյուսակից, տրված α նշանակալիության մակարդակով և $k = s - 3$ (s-ը ընտրանքի միջակայքերի թիվն է) ազատության աստիճանով գտնել աջակողմյան կրիտիկական տիրույթի $\chi^2_{կր.}(\alpha, k)$ կրիտիկական կետը:

Եթե $\chi^2_{դիտ.} < \chi^2_{կր.}$, ապա գլխավոր համախմբության նորմալ բաշխվածության մասին հիպոթեզը մերժելու հիմքեր չկան:

Եթե $\chi^2_{դիտ.} > \chi^2_{կր.}$, ապա հիպոթեզը մերժվում է:

Դիտողություն 2: Փոքրաթիվ հաճախություններով ($n_i < 5$) միջակայքերը պետք է միավորել, իսկ համապատասխան հաճախությունները՝ գումարել: Եթե կատարվել է միջակայքերի միավորում, ապա ազատության աստիճանը $k = s - 3$ բանաձևով որոշելիս, որպես s պետք է վերցնել միավորումից հետո մնացած միջակայքերի թիվը:

567. *Օգտվելով Պիրսոնի չափանիշից, 0,05 նշանակալիության մակարդակի դեպքում, ստուգել, համաձայնո՞ւմ է արդյոք X գլխավոր համախմբության նորմալ բաշխվածության մասին հիպոթեզը $n = 100$ ծավալի ընտրանքի էմպիրիկ բաշխմանը, որը բերված է աղյուսակ 20-ում:*

Միջակայքի համարը	Միջակայքի սահմանները		Հաճախությունը	Միջակայքի համարը	Միջակայքի սահմանները		Հաճախությունը
i	x_i	x_{i+1}	n_i	i	x_i	x_{i+1}	n_i
1	3	8	6	5	23	28	16
2	8	13	8	6	28	33	8
3	13	18	15	7	33	38	7
4	18	23	40				$n=100$

Լուծում: 1. Արտադրյալների մեթոդով հաշվենք ընտրանքային միջինը և ընտրանքային միջին քառակուսային շեղումը: Դրա համար տրված միջակայքային բաշխումից անցնենք հավասարահեռ տարբերակների բաշխմանը որպես x_i^* տարբերակներ, ընդունելով միջակայքի ծայրակետերի միջին թվաբանականը՝

$$x_i^* = \frac{x_i + x_{i+1}}{2},$$

Արդյունքում կստանանք հետևյալ բաշխումը՝

X_i^*	5,5	10,5	15,5	20,5	25,5	30,5	35,5
n_i	6	8	15	40	16	8	7

Հաշվարկը կատարելով արտադրյալների մեթոդով, որոշենք ընտրանքային միջինը և ընտրանքային միջին քառակուսային շեղումը՝

$$\overline{x}^* = 20{,}7; \qquad \sigma^* = 7{,}28:$$

2. Գտնենք $(z_i; z_{i+1})$ միջակայքերը, հաշվի առնելով, որ $\overline{x}^* = 20{,}7$, $\sigma^* = 7{,}28$, $\frac{1}{\sigma^*} = 0{,}137$: Դրա համար կազմենք հաշվարկային աղյուսակ 21-ը (առաջին միջակայքի ձախ ծայրակետը ընդունենք հավասար $-\infty$, իսկ վերջին միջակայքի աջ ծայրակետը՝ $+\infty$):

i	Միջակայքի սահմանները x_i	x_{i+1}	$x_i-\overline{x}^*$	$x_{i+1}-\overline{x}^*$	Միջակայքի սահմանները $z_i=\frac{x_i-\overline{x}^*}{\sigma^*}$	$z_{i+1}=\frac{x_{i+1}-x^*}{\sigma^*}$
1	3	8	—	−12,7	$-\infty$	−1,74
2	8	13	−12,7	−7,7	−1,74	−1,06
3	13	18	−7,7	−2,7	−1,06	−0,37
4	18	23	−2,7	2,3	−0,37	0,32
5	23	28	2,3	7,3	0,32	1,00
6	28	33	7,3	12,3	1,00	1,69
7	33	38	12,3	—	1,69	∞

i	Միջակայքի սահմանները z_i	z_{i+1}	$\Phi(z_i)$	$\Phi(z_{i+1})$	$P_i=\Phi(z_{i+1})-\Phi(z_i)$	$n_i'=100P_i$
1	$-\infty$	−1,74	−0,5000	−0,4591	0,0409	4,09
2	−1,74	−1,06	−0,4591	−0,3554	0,1037	10,37
3	−1,06	−0,37	−0,3554	−0,1443	0,2111	21,11
4	−0,37	0,32	−0,1443	0,1255	0,2698	26,98
5	0,32	1,00	0,1255	0,3413	0,2158	21,58
6	1,00	1,69	0,3413	0,4545	0,1132	11,32
7	1,69		0,4545	0,5000	0,0455	4,55
$\sum$					1	100

3. Գտնենք P_i տեսական հավանականությունները և $n'_i = nP_i = 100P_i$ տեսական հաճախությունները։ Դրա համար կազմենք հաշվարկային աղյուսակ 22-ը։

4. Օգտագործելով Պիրսոնի չափանիշը, համեմատենք տեսական և էմպիրիկ հաճախությունները՝

ա) Հաշվենք Պիրսոնի չափանիշի դիտվող արժեքը: Դրա համար կազմենք հաշվարկային աղյուսակ 23-ը: 7-րդ և 8-րդ սյուները ծառայում են հաշվումները ստուգելու համար ըստ

$$\chi^2_{դիտ} = \sum \frac{n_i^2}{n_i'} - n$$

բանաձևի:

Ստուգում: $\sum \frac{n_i^2}{n_i'} - n = 113,22 - 100 = 13,22 = \chi^2_{դիտ}$

Հաշվումները ճիշտ են կատարված.

բ) χ^2 բաշխման կրիտիկական կետերի աղյուսակից (հավելված 5), $\alpha = 0,05$ նշանակալիության մակարդակով, $k = s - 3 = 7 - 3 = 4$ (s-ը միջակայքերի թիվն է) ազատության աստիճանով որոշում ենք աջակողմյան կրիտիկական տիրույթի $\chi^2_{կր}(0,05; 4) = 9,5$ կրիտիկական կետը:

Աղյուսակ 23

1	2	3	4	5	6	7	8
i	n_i	n_i'	$n_i - n'_i$	$(n_i - n_i')^2$	$\frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$	n_i^2	$\frac{n_i^2}{n_i'}$
1	6	4,09	1,91	3,6481	0,8920	36	8,8019
2	8	10,37	2,37	5,6169	0,5416	64	6,1761
3	15	21,11	−6,11	37,3321	1,7684	225	10,6584
4	40	26,98	13,02	169,5204	6,2833	1600	59,3052
5	16	21,58	−5,58	31,1364	1,4428	256	11,8628
6	8	11,32	−3,32	11,0224	0,9737	64	5,6537
7	7	4,55	2,45	6,0025	1,3192	49	10,7692
$\sum$	100	100			$\chi^2_{դիտ} = 13,22$		113,22

Քանի որ $\chi^2_{դիտ} > \chi^2_{կր}$, ապա X գլխավոր համախմբության նորմալ բաշխվածության մասին հիպոթեզը մերժում ենք, այլ կերպ ասած էմպիրիկ և տեսական հաճախությունները նշանակալի չափով տարբերվում են: Դա նշանակում է, որ դիտման տվյալները հակասում են գլխավոր համախմբության նորմալ բաշխվածության մասին հիպոթեզին:

568. *Օգտվելով Պիրսոնի չափանիշից, 0,05 նշանակալիության մակարդակի դեպքում, ստուգել, հակասու՞մ է արդյոք X գլխավոր համախմբության նորմալ բաշխվածության մասին հիպոթեզը տրված էմպիրիկ բաշխմանը:*

ա)

Միջակայքի համարը	Միջակայքի սահմանները		Հաճախություն	Միջակայքի համարը	Միջակայքի սահմանները		Հաճախություն
i	x_i	x_{i+1}	n_i	i	x_i	x_{i+1}	n_i
1	—20	—10	20	5	20	30	40
2	—10	0	47	6	30	40	16
3	0	10	80	7	40	50	8
4	10	20	89				
							$n=300$

բ)

Միջակայքի համարը	Միջակայքի սահմանները		Հաճախություն	Միջակայքի համարը	Միջակայքի սահմանները		Հաճախություն
i	x_i	x_{i+1}	n_i	i	x_i	x_{i+1}	n_i
1	1	3	2	7	13	15	16
2	3	5	4	8	15	17	11
3	5	7	6	9	17	19	7
4	7	9	10	10	19	21	5
5	9	11	18	11	21	23	1
6	11	13	20				$n=100$

գ)

Միջակայքի համարը	Միջակայքի սահմանները		Հաճախությունը	Միջակայքի համարը	Միջակայքի սահմանները		Հաճախությունը
i	x_i	x_{i+1}	n_i	i	x_i	x_{i+1}	n_i
1	6	16	8	6	56	66	8
2	16	26	7	7	66	77	6
3	26	36	16	8	76	86	7
4	36	46	35				
5	46	56	15				$n=100$

դ)

Միջակայքի համարը	Միջակայքի սահմանները		Հաճախությունը	Միջակայքի համարը	Միջակայքի սահմանները		Հաճախությունը
i	x_i	x_{i+1}	n_i	i	x_i	x_{i+1}	n_i
1	5	10	7	6	30	35	19
2	10	15	8	7	35	40	14
3	15	20	15	8	40	45	10
4	20	25	18	9	45	50	6
5	25	30	23				$n=120$

Պատ.՝ *ա) Չի հակասում*; $\overline{x}^* = 10,4$; $\sigma^* = 13,67$; $k = 4$; $\chi^2_{դիտ} = 5,4$; $\chi^2_{կր}(0,05;\ 4) = 9,5$:

բ) Ցուցում: Առաջին երկու և վերջին երկու փոքրաթիվ հաճախությունները, ինչպես նաև համապատասխան միջակայքերը միավորել:

Պատ.՝ *Չի հակասում*, $\overline{x}^* = 12,04$; $\sigma^* = 4,261$; $k = 9 - 3 = 6$; $\chi^2_{դիտ} = 1,3$; $\chi^2_{կր}(0,05;\ 6) = 12,6$;

գ) Հակասում է, $\overline{x}^* = 42{,}5$; $\sigma^* = 17{,}17$; $k = 5$; $\chi^2_{\text{դիտ}} = 14$; $\chi^2_{\text{կր.}}(0{,}05;\ 5) = 11{,}1$;

դ) Չի հակասում, $\overline{x}^* = 27{,}54$; $\sigma^* = 10{,}44$; $k = 6$; $\chi^2_{\text{դիտ}} = 5{,}4$; $\chi^2_{\text{կր}}(0{,}05;6) = 12{,}6$;

§ 13. Գլխավոր համախմբության նորմալ բաշխվածության մասին հիպոթեզի գրաֆիկական ստուգումը: Ուղղված դիագրամների մեթոդը

Ա. Խմբավորված տվյալներ

Դիցուք X *գլխավոր համախմբության ընտրանքի էմպիրիկ բաշխումը տրված է* $(x_0;\ x_1)$, $(x_1;\ x_2) \cdots, (x_{k-1};\ x_k)$ *միջակայքերի և նրանց համապատասխան* n_i *հաճախությունների* (n_i*-ն* i*-րդ միջակայքի բոլոր տարբերակների քանակն է) հաջորդականության տեսքով: Պահանջվում է գրաֆիկորեն ստուգել* X *գլխավոր համախմբության նորմալ բաշխվածության մասին հիպոթեզը:*

Սահմանենք, նախապես, X *պատահական մեծության* p*-կվանտիլի հասկացությունը: Եթե տված է* p *հավանականությունը, ապա* X*-ի* p*-կվանտիլ կոչվում է* F(x) *ինտեգրալ ֆունկցիայի արգումենտի այնպիսի* u_p *արժեքը, որի համար* $x < u_p$ *պատահույթի հավանականությունը հավասար է տրված* p *թվին:*

Օրինակ, եթե X*-ը բաշխված է նորմալ և* $p = 0{,}975$, *ապա* $u_p = u_{0,975} = 1{,}96$; *Դա նշանակում է, որ* $P(X < 1{,}96) = 0{,}975$:

*Նկատենք, որ ընդհանուր և նորմավորված նորմալ բաշխումների ինտեգրալ ֆունկցիաները կապված են հետևյալ առնչությամբ**

$$F(x) = F_0\left(\frac{x - a}{\sigma}\right),$$

ուստի

$$F(x_p) = F_0\left(\frac{x_p - a}{\sigma}\right),$$

և հետևաբար,

$$u_p = \frac{x_p - a}{\sigma};$$

---

* *Տես* Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М., «Высшая школа», 1972, гл. XII, § 2, Замечание 2:

Կանոն 1: Միջակայքերի և նրանց հաճախությունների հաջորդականության տեսքով տված էմպիրիկ բաշխումով X գլխավոր համախմբության նորմալ բաշխվածության մասին հիպոթեզը գրաֆիկորեն ստուգելու համար անհրաժեշտ է՝

1. Կազմել հաշվարկային աղյուսակ 24-ը:

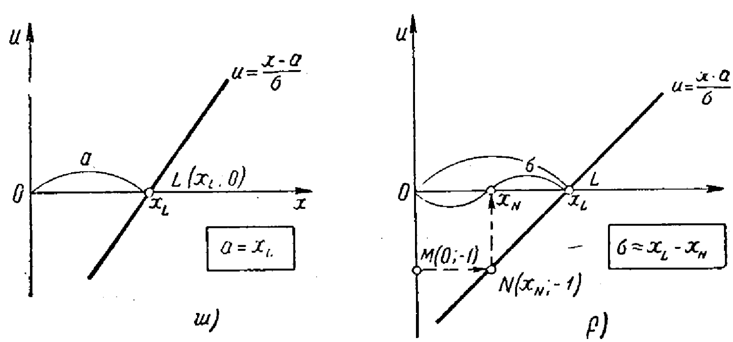
*Կվանտիլները հարմար է գտնել հատուկ աղյուսակներից**

Աղյուսակ 24

1	2	3	4	5	6	7
Միջակայքի համարը	*Միջակայքի աջ ծայրակետը*	*Հաճախությունը*	*Կուտակված հաճախությունը*	*Հարաբերական կուտակված հաճախությունը*	*Հարաբերական կուտակված հաճախությունը %*	*Կվանտիլները*
i	x_i	n_i	$\sum_{r=1}^{i} n_r$	$P_i = \frac{1}{n} \sum n_r$	$P_i \cdot 100\%$	u_{pi}

Հաշվարկային աղյուսակի 6-րդ սյունակում հարաբերական կուտակված հաճախությունները բազմապատկված են 100-ով, քանի որ Յանկոյի աղյուսակներում այդ հաճախությունները բերված են տոկոսներով:

2. Կոորդինատների ուղղանկյուն (x, u) համակարգում կառուցել $(x_1; u_1)$ $(x_2\ u_2)$ $\cdots\cdot$ կետերը (պարզության համար կվանտիլների մոտ ինդեքսը բաց է թողնված): Եթե այդ կետերը ընկած են որևէ ուղղի մոտերքում, ապա x-ի նորմալ բաշխվածության մասին հիպոթեզը մերժելու հիմքեր չկան, հակառակ դեպքում հիպոթեզը մերժվում է:



Նկ. 16

* *Տես* Ярослав Янко; Математико-статистические таблицы, Госстатиздат, 1961, таблица 2.

Դիտողություն 1. Պետք է նկատի ունենալ, որ «սկզբնական» և «վերջնական» (x_i, u_i) կետերը կարող են նկատելիորեն շեղվել $u = \frac{x-a}{\sigma}$ ուղղից։

Դիտողություն 2։ Եթե կառուցված կետերը դասավորված են ուղղի մոտերքում, ապա հեշտ է գրաֆիկորեն գնահատել նորմալ բաշխման a և σ պարամետրերը։

Որպես a մաթեմատիկական սպասման գնահատական կարելի է ընդունել կառուցված ուղղի և Ox առանցքի հատման $L(x_L, 0)$ կետի աբսցիսը։

Որպես σ միջին քառակուսային շեղման գնահատական կարելի է ընդունել $L(x_L; 0)$ և կառուցված ուղղի ու $u = -1$ ուղղի հատման $N(x_N; -1)$ կետերի աբսցիսների տարբերությունը՝ $\sigma = x_L - x_N$ (նկ. 16)։

Դիտողություն 3։ Համանականային թղթի առկայության դեպքում կվանտիլները որոշելու կարիք չկա։ Համապատասխան առանցքի վրա անմիջապես տեղադրվում են կուտակված հարաբերական հաճախությունները։

569. Ենթադրենք ուղղված դիագրամների մեթոդը հաստատում է X ընդհանուր համախմբության նորմալ բաշխվածության մասին հիպոթեզը, այսինքն՝ (x_i, u_i) կետերը դասավորված են $u = \frac{x-a}{\sigma}$ ուղղի մոտերքում։

ա) Ինչու՞ որպես նորմալ բաշխման a մաթեմատիկական սպասման գնահատական կարելի է ընդունել այդ ուղղի և Ox առանցքի L հատման կետի x_L աբսցիսը (նկ. 16, ա)։

բ) Ինչու՞ որպես նորմալ բաշխման միջին քառակուսային շեղման գնահատական կարելի է վերցնել $x_L - x_N$ աբսցիսների տարբերությունը (նկ. 16, բ)։

Լուծում։ ա) $u = \frac{x-a}{\sigma}$ ուղղի և Ox առանցքի հատման L կետում $u = 0$, իսկ աբսցիսը՝ $x = x_L$ (նկ. 16, ա)։

Տեղադրելով այդ ուղղի հավասարման մեջ $u = 0$, $x = x_L$, կստանանք՝

$$0 = \frac{x_L - a}{\sigma},$$

Այստեղից՝

$$a = x_L,$$

բ) Նշանակենք N-ով $u=\frac{x-a}{\sigma}$ *ուղղի այն կետը*, որի օրդինատը՝* $u=-1$, *այդ կետի աբսցիսը նշանակենք* x_N*։ Տեղադրենք* N *կետի կոորդինատները (*) հավասարման մեջ՝*

$$-1=\frac{x_N-a}{\sigma},$$

Այստեղից $\sigma=a-x_N$*։ Հաշվի առնելով, որ* $a=x_L$, *վերջնականապես ստանում ենք* $\sigma=x_L-x_N$*։*

570. X *գլխավոր համախմբությունից վերցրած* $n=100$ *ծավալի ընտրանքը տված է միևնույն երկարության միջակայքերի և համապատասխան* n_i *հաճախությունների (*n_i*-ն i-րդ միջակայքի տարբերակների թիվն է) հաջորդականության տեսքով։ Էմպիրիկ բաշխումը բերված է աղյուսակ 25-ում։*

Պահանջվում է՝ ա) ուղղված դիագրամների մեթոդով ստուգել գլխավոր համախմբության նորմալ բաշխվածության մասին հիպոթեզը. բ) գրաֆիկորեն գնահատել X-ի մաթեմատիկական սպասումը և միջին քառակուսային շեղումը։

Լուծում։ ա) 1. Կազմենք հաշվարկային աղյուսակ 26-ը։ 7-րդ սյունակի կվանտիլները բերված են 3ա. Յանկոյի գրքում աղյուսակ 2-ում։

2. Ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգում կառուցենք (x_i*;* u_{p_i}*) կետերը (նկ. 17)։ Կառուցված կետերը ընկած են ուղղի մոտերքում, ուստի X-ի նորմալ բաշխվածության մասին հիպոթեզը մերժելու հիմքեր չկան։ Այլ կերպ ասած, ընտրանքի տվյալները չեն հակասում այդ հիպոթեզին։*

Աղյուսակ 25

Միջակայքի համարը	Միջակայքի սահմանները		Հաճախությունը	Միջակայքի համարը	Միջակայքի սահմանները		Հաճախությունը
i	x_{i-1}	x_{i+1}	n_i	i	x_{i-1}	x_{i+1}	n_i
1	1	3	2	7	13	15	16
2	3	5	4	8	15	17	11
3	5	7	6	9	17	19	7
4	7	9	10	10	19	21	5
5	9	11	18	11	21	23	1
6	11	13	20				$n=100$

Աղյուսակ 26

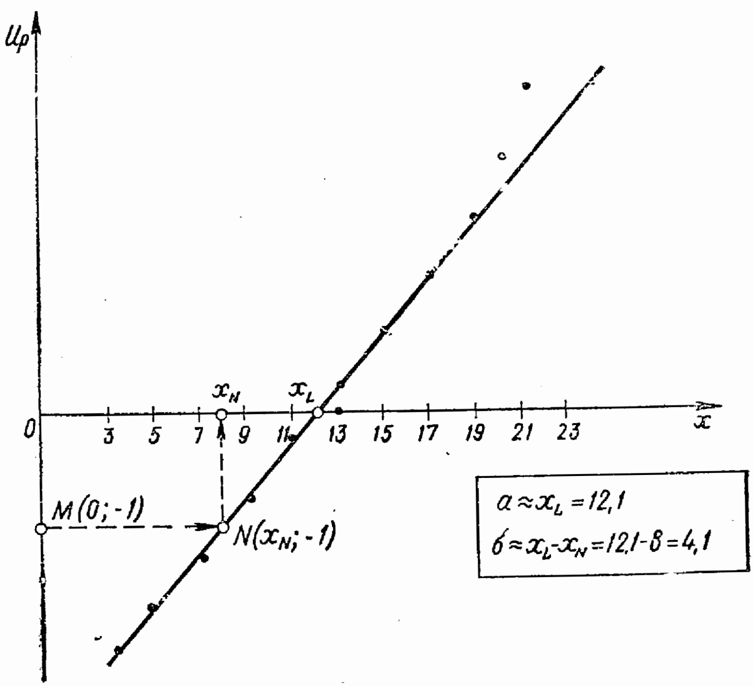
Միջակայքի համարը	Միջակայքի միջնակետը	Հաճախությունը	Կուտակված հաճախությունը	Հարաբերական կուտակված հաճախությունը	Հարաբերական կուտակված հաճախությունը	Կվանտիլները
i	x_i	n_i	$\sum_{r=1}^{i} n_r$	$P_i = \frac{1}{n}\sum n_r$	$P_i \cdot 100\%$	u_{p_i}
1	3	2	2	0,02	2	−2,054
2	5	4	6	0,06	6	−1,555
3	7	6	12	0,12	12	−1,175
4	9	10	22	0,22	22	−0,772
5	11	18	40	0,40	40	−0,253
6	13	20	60	0,60	60	−0,253
7	15	16	76	0,76	76	−0,706
8	17	11	87	0,87	87	1,126
9	19	7	94	0,94	94	1,555
10	21	5	99	0,99	99	2,326
11	23	1	100	1,00	100	3,09

բ) Գտնել ենթադրվող նորմալ բաշխման մաթեմատիկական սպասման և միջին քառակուսային շեղման գրաֆիկական գնահատականները։

Որպես a մաթեմատիկական սպասման գնահատական ընդունենք կառուցված ուղղի և Ox առանցքի հատման L կետի $x_L = 12{,}1$ աբսցիսը։

Գնահատել σ-ն, որի համար ուղղաձիգ առանցքի M(0; —1) կետից տանենք u = —1 ուղիղը, մինչև կառուցված ուղղի հետ N կետում հատվելը, N կետից ուղղահայաց իջեցնենք Ox առանցքին, այդ ուղղահայացի հիմքի աբսցիսը՝ $x_N = 8$։ Որպես միջին քառակուսային շեղման գնահատական ընդունենք L և N կետերի աբսցիսների տարբերությունը՝

$$\sigma = x_L - x_N = 12{,}1 - 8 = 4{,}1:$$



Նկ. 17

Հասկանալի է, որ ստացված գնահատականները կոպիտ են: Իրականում $a=12{,}04$, $\sigma=4{,}261$:

571. X գլխավոր համախմբությունից վերցված է $n=120$ ծավալի ընտրանք, որը տված է միևնույն երկարության միջակայքերի և համապատասխան հաճախությունների հաջորդականության տեսքով (աղ. 27):

Աղյուսակ 27

Միջակայքի համարը	Միջակայքի սահմանները		Հաճախությունը	Միջակայքի համարը	Միջակայքի սահմանները		Հաճախությունը
i	x_{i-1}	x_i	n_i	i	x_{i-1}	x_i	n_i
1	5	10	7	6	30	35	19
2	10	15	8	7	35	40	14
3	15	20	15	8	40	45	10
4	20	25	18	9	45	50	6
5	25	30	23				$n=120$

Պահանջվում է ա) ուղղված դիագրամների մեթոդով ստուգել X-ի նորմալ բաշխվածության մասին հիպոթեզը, բ) գրաֆիկորեն գնահատել X-ի մաթեմատիկական սպասումը և միջին քառակուսային շեղումը:

Ցուցում: Օգտվել կվանտիլների հետևյալ աղյուսակից՝

հարաբերական կուտակված հաճախությունը, %	5,8	12,5	25,0	40,0	59,1	75,0	86,6	95	100
կվանտիլները	−1,57	−1,15	−0,67	−0,25	0,23	0,67	1,11	1,6	3,09

Պատ.՝ ա) X-ի նորմալ բաշխվածության հիպոթեզը չի հակասում ընտրանքին; բ) $a=27{,}5$; $\sigma=10{,}4$:

572. X գլխավոր համախմբությունից վերցված է n=100 ծավալի ընտրանք, որը տրված է աղյուսակ 28-ում։

Աղյուսակ 28

Միջակայքի համարը	Միջակայքի սահմանները		Հաճախությունը	Միջակայքի համարը	Միջակայքի սահմանները		Հաճախությունը
i	x_{i-1}	x_i	n_i	i	x_{i-1}	x_i	n_i
1	6	16	8	5	46	56	35
2	16	26	16	6	56	66	6
3	26	36	7	7	66	76	5
4	36	46	15	8	76	86	8
							n=100

Պահանջվում է ուղղված դիագրամների մեթոդով ստուգել X նորմալ բաշխվածության մասին հիպոթեզը։

Ցուցում։ Օգտվել կվանտիլների հետևյալ աղյուսակից․
հարաբերական
կուտակված
հաճախությունը, % 8 24 31 46 81 87 92 100
կվանտիլները—1,405—0,706—0,496—0,100—0,878—1,126—1,405; 3,09

Պատ.՝ X նորմալ բաշխվածության մասին հիպոթեզը հակասում է ընտրանքին։

Բ. ըստ միջակայքերի չխմբավորված տվյալներ

Դիցուք ընտրանքի էմպիրիկ բաշխումը տրված է աճման կարգով դասավորված տարբերակների և համապատասխան n_i հաճախությունների հաջորդականության տեսքով, այսինքն վարիացիոն շարքի տեսքով։ Պահանջվում է ստուգել X-ի նորմալ բաշխվածության մասին հիպոթեզը։

Կանոն 2. X գլխավոր համախմբության նորմալ բաշխվածության մասին հիպոթեզը ստուգելու համար, երբ նրանից վերցրած n ծավալի ընտրանքը ըստ միջակայքերի խմբավորված չէ, անհրաժեշտ է՝

1. Կազմել հաշվարկային աղյուսակ 29.ը: Նշենք անմիջապես, որ 4-րդ սյունակը լրացնելիս ընդունված է հաճախությունների գումարից հանել 1/2: 7-րդ սյունակը լրացնելիս կվանտիլների արժեքները որոշում են աղյուսակից*:

Աղյուսակ 29

1	2	3	4	5	6	7
Տարբերակի համարը	*Տարբերակը*	*Հաճախությունը*	*Կուտակված հաճախությունը*	*Հարաբերական կուտակված հաճախությունը*	*Հարաբերական կուտակված հաճախությունը %*	*Կվանտիլները*
i	x_i	n_i	$N_i=\sum_{r=1}^{i} n_r-\frac{1}{2}$	$F^*(x_i)=\frac{N_i}{n}$	$P_i=F^*(x_i)\cdot 100$	u_{P_i}

2. Ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգում կառուցել $(x_1; u_1)$, $(x_2; u_2), \cdots, (x_k; u_k)$ կետերը (4.ի մոտ p ինդեքսը բաց է թողնված գրության պարզության համար): Եթե այդ կետերը դասավորված են մի որևէ ուղղի մոտերքում (X.ի նորմալ բաշխվածության մասին հիպոթեզի իրավացիության դեպքում այդ ուղղի հավասարումը կլինի $u=\frac{x-x}{s_e}$), ապա X գլխավոր համախմբության նորմալ բաշխվածության մասին հիպոթեզը մերժելու հիմքեր չկան, հակառակ դեպքում հիպոթեզը մերժվում է:

Դիտողություն 4: Ըստ ինտերվալների խմբավորված ընտրանքի վերը դիտարկված դեպքի 1—3 դիտողությունները մնում են ուժի մեջ:

573. X *գլխավոր համախմբությունից վերցված է* n=50 *ծավալի, ըստ միջակայքերի չխմբավորված ընտրանք (առաջին տողում տարբերակներն են, իսկ երկրորդում՝ համապատասխան հաճախությունները)՝*

---

* *Տես.* Ярослав Янко. Математико-статистические таблицы Госстатиздат, 1961, таб. 2.

x_i	1,40	1,52	1,63	1,69	1,73	1,78	1,89	1,92	1,95
n_i	1	1	1	1	2	1	1	1	1

x_i	1,98	1,99	2,03	2,07	2,12	2,16	2,20	2,23	2,26	2,31
n_i	1	1	2	1	3	2	1	1	1	3

x_i	2,36	2,40	2,44	2,47	2,50	2,52	2,55	2,60	2,64
n_i	3	3	1	1	1	1	1	1	3

x_i	2,71	2,74	2,78	2,86	2,93	3,02	3,30
n_i	1	1	2	1	2	1	1

Պահանջվում է՝ ա) ուղղված դիագրամների մեթոդով ստուգել X մեծության նորմալ բաշխվածության մասին հիպոթեզը, գրաֆիկորեն գնահատել X-ի մաթեմատիկական սպասումը և միջին քառակուսային շեղումը:

Լուծում: 1. Կազմենք հաշվարկային աղյուսակ 30-ը:

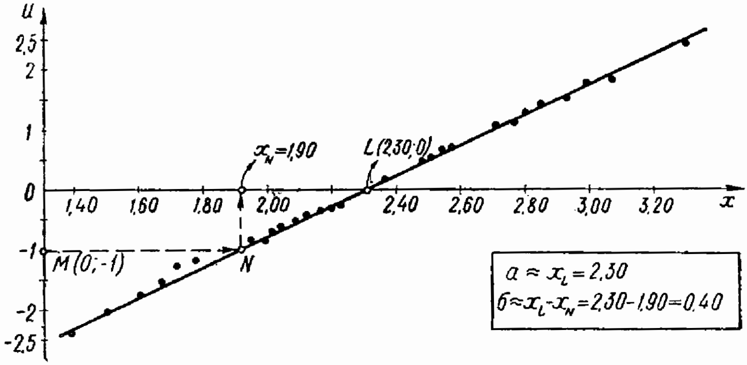
Աղյուսակ 30

1	2	3	4	5	6	7
Տարբերակի համարը	Տարբերակը	Հաճախությունը	Կուտակված հաճախությունը հանած 1/2	Հարաբերական կուտակված հաճախությունը	Հարաբերական կուտակված հաճախությունը %	Կվանտիլները
i	x_i	n_i	$N_i=\sum_{r=1}^{i} n_r-\frac{1}{2}$	$F^*(x_i)=\frac{N_i}{n}$	$P_i=F^*(x_i)100$	u_{p_i}
1	1,40	1	0,5	0,01	1	—2,326
2	1,52	1	1,5	0,03	3	—1,881
3	1,63	1	2,5	0,05	5	—1,645
4	1,69	1	3,5	0,07	7	—1,476
5—6	1,73	2	5,5	0,11	11	—1,227
7	1,78	1	6,5	0,13	13	—1,126
8	1,89	1	7,5	0,15	15	—1,036

1	2	3	4	5	6	7
9	1,92	1	8,5	0,17	17	−0,954
10	1,95	1	9,5	0,19	19	−0,878
11	1,98	1	10,5	0,21	21	−0,806
12	1,99	1	11,5	0,23	23	−0,739
13—14	2,03	2	13,5	0,27	27	−0,613
15	2,07	1	14,5	0,29	29	−0,553
16—18	2,12	3	17,5	0,35	35	−0,385
19—20	2,16	2	19,5	0,39	39	−0,279
21	2,20	1	20,5	0,41	41	−0,228
22	2,23	1	21,5	0,43	43	−0,176
23	2,26	1	22,5	0,45	45	−0,126
24—26	2,31	3	25,5	0,51	51	0,025
27—29	2,36	3	28,5	0,57	57	0,176
30—32	2,40	3	31,5	0,63	63	0,332
33	2,44	1	32,5	0,65	65	0,385
34	2,47	1	33,5	0,67	67	0,440
35	2,50	1	34,5	0,69	69	0,496
36	2,52	1	35,5	0,71	71	0,553
37	2,55	1	36,5	0,73	73	0,613
38	2,60	1	37,5	0,75	75	0,674
39—41	2,64	3	40,5	0,81	81	0,878
42	2,71	1	41,5	0,83	83	0,954
43	2,74	1	42,5	0,85	85	1,036
44—55	2,78	2	44,5	0,89	89	1,227
46	2,86	1	45,5	0,91	91	1,341
47—48	2,93	2	47,5	0,95	95	1,645
49	3,02	1	48,5	0,97	97	1,881
50	3,30	1	49,5	0,99	99	2,326

2. Ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգում կառուցենք (x_i, u_i) *կետերը (նկ. 18)։ Կառուցված կետերը դասավորված են ուղղի մոտերքում, ուստի X-ի նորմալ բաշխմա-*

ծության մասին հիպոթեզի մերժման հիմքեր չկան, ընտրան-քի տվյալները չեն հակասում այդ հիպոթեզին։



Նկ. 18

բ) Գրաֆիկորեն, օգտվելով նկ. 18-ից, գտնենք ենթադրվող նորմալ բաշխման մաթեմատիկական սպասման և միջին քառակուսային շեղման գնահատականները։

Որպես a մաթեմատիկական սպասման գնահատական ընդունենք կառուցված ուղղի և Ox առանցքի հատման L կետի $x_L = 2,30$ աբսցիսը։

Գնահատենք σ-ն։ Դրա համար ուղղաձիգ առանցքի M(0; —1) կետից տանենք $u = -1$ ուղիղը մինչև կառուցված ուղիղ գծի հետ N կետում հատվելը, N կետից իջեցնենք ուղղահայաց Ox առանցքին։ Այդ ուղղահայացի հիմքի x_N աբսցիսը հավասար է 1,90-ի։ Որպես σ միջին քառակուսային շեղման գնահատական ընդունենք $x_L - x_N$ աբսցիսների տարբերությունը՝

$$\sigma = x_L - x_N = 2,30 - 1,90 = 0,40։$$

574. X գլխավոր համախմբությունից վերցված է $n = 50$ ծավալի ընտրանք։ Կազմված են հետևյալ աղյուսակները (առաջին տողում բերված են տարբերակները, իսկ երկրորդում՝ համապատասխան հաճախությունները)՝

x_i	−20,0	−17,0	−14,1	−11,5	−10,5
n_i	1	1	1	1	1 ,

x_i	−9,0	−8,0	−6,5	−5,5
n_i	1	1	1	1 ;

x_i	−4,0	−3,0	−1,5	−1,0	0,0	0,5
n_i	1	1	1	1	1	2 ;

x_i	1,0	1,5	2,0	2,5	3,5	4,0	4,5
n_i	1	1	2	1	1	2	1 ;

x_i	5,0	6,0	6,5	7,0	7,5	8,5	9,5	10,0	10,5	11,0	12,0	12,5
n_i	2	1	1	2	2	2	1	1	1	1	1	1 ;

x_i	13,0	14,0	14,5	17,0	18,0	19,0	19,5	21,0	23,5
n_i	1	1	1	1	1	1	1	1	1 ;

Պահանջվում է՝ ա) ուղղված դիագրամների մեթոդով ստուգել գլխավոր համախմբության նորմալ բաշխվածության մասին հիպոթեզը, բ) գրաֆիկորեն գնահատել X-ի մաթեմատիկական սպասումը և դիսպերսիան։

Ցուցում։ Օգտվել կվանտիլների հետևյալ աղյուսակից (առաջին տողում բերված են հարաբերական հաճախությունները հանած 1,2%-ներով, իսկ երկրորդում համապատասխան կվանտիլները)՝

1	3	5	7	9	11	13	15
−2,326	−1,881	−1,645	−1,476	−1,341	−1,227	−1,126	−1,036
17	19	21	23	25	27	31	33
−0,954	−0,878	−0,806	−0,739	−0,674	−0,613	−0,496	−0,440
35	39	41	43	47	49	53	55
−0,385	−0,279	−0,228	−0,176	−0,075	−0,025	0,075	0,126

57	61	65	69	71	73	75	77	79
0,176	0,279	0,385	0,496	0,553	0,613	0,674	0,739	0,806

81	83	85	87	89	91	93	95	97	99
0,878	0,954	1,036	1,126	1,227	1,341	1,476	1,645	1,881	2,326

Պատ․ ա) X գլխավոր համախմբության նորմալ բաշխվածության մասին հիպոթեզը մերժելու հիմքեր չկան, բ) $a = 4{,}16$, $\sigma = 9{,}8$։

§ 14. Գլխավոր համախմբության ցուցչային բաշխվածության մասին հիպոթեզի ստուգումը

Տրված է X անընդհատ պատահական մեծության էմպիրիկ բաշխումը (x_i, x_{i+1}) միջակայքերի և համապատասխան n_i հաճախությունների հաջորդականության տեսքով, ընդ որում $\Sigma n_i = n$ (ընտրանքի ծավալը)։

Պահանջվում է, օգտագործելով Պիրսոնի չափանիշը, ստուգել հիպոթեզը այն մասին, որ X պատահական մեծությունն ունի ցուցչային բաշխում։

Կանոն: α նշանակալիության մակարդակով, *անընդհատ պատահական մեծության ցուցչային օրենքով բաշխվածության մասին հիպոթեզը ստուգելու համար, անհրաժեշտ է՝*

1. Տրված էմպիրիկ բաշխումով գտնել $\overline{x}_ը$ ընտրանքային միջինը։ Դրա համար, որպես i-րդ միջակայքի «ներկայացուցիչ» ընդունելով նրա միջնակետը՝ $x_i^* = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$, որոնք կազմում են հավասարահեռ տարբերակների և համապատասխան հաճախությունների հաջորդականություն:

2. Որպես ցուցչային բաշխման λ պարամետրի գնահատական, ընդունել ընտրանքային միջինի հակադարձ մեծությունը՝

$$\lambda^* = \frac{1}{\overline{x}_ը}\,:$$

3. Հաշվել պատահական մեծության (x_i, x_{i+1}) միջակայքն ընկնելու հավանականությունը հետևյալ բանաձևով՝

$$P_i = P_i(x_i < X < x_{i+1}) = e^{-\lambda x_i} - e^{-\lambda x_{i+1}}\,,$$

4. Հաշվել տեսական հաճախությունները՝

$$n_i' = nP_i\,,$$

որտեղ $n = \Sigma n_i$ ընտրանքի ծավալն է:

5. Պիրսոնի չափանիշի օգնությամբ համեմատել տեսական և էմպիրիկ հաճախությունները, ընդունելով որպես ազատության աստիճանների $k = s - 2$ մեծությունը, որտեղ s-ը ընտրանքի միջակայքերի սկզբնական թիվն է: Իսկ եթե իրականացված է փոքրաթիվ հաճախությունների, հետևաբար, և համապատասխան միջակայքերի միավորում, ապա s-ը միավորումից հետո մնացած միջակայքերի թիվն է:

575. *Ինչու՞ Պիրսոնի չափանիշով գլխավոր համախմբության ցուցչային օրենքով բաշխվածության մասին հիպոթեզը ստուգելիս ազատության աստիճանը որոշվում է* $k=s-2$ *բանաձևով, որտեղ* s*-ը ընտրանքի միջակայքերի թիվն է։*

Լուծում։ Պիրսոնի չափանիշը օգտագործելիս ազատության աստիճանը՝ $k=s-1-r$, որտեղ r-ը ընտրանքի տվյալներով գնահատված պարամետրերի թիվն է։ Ցուցչային բաշխումը որոշվում է մեկ (λ) պարամետրով։ Քանի որ այդ պարամետրը գնահատվում է ընտրանքով, ապա $r=1$ և, հետևաբար, ազատության աստիճանը՝

$$k=s-1-1=s-2։$$

576. *Աղյուսակ 31-ում բերված էմպիրիկ բաշխումը ստացվել է 200 տարրերի անխափան աշխատանքի ժամանակամիջոցի փորձնական որոշման արդյունքում (առաջին սյունակում բերված են ժամանակի միջակայքերը ժամերով, երկրորդում՝ հաճախությունները, այսինքն նշված միջակայքի սահմաններում անխափան աշխատած տարրերի թիվը)։*

Աղյուսակ 31

$x_i - x_{i+1}$	n_i	$x_i - x_{i+1}$	n_i
0—5	133	15—20	4
5—10	45	20—25	2
10—15	15	25—30	1

Պահանջվում է, 0,05 նշանակալիության մակարդակով, ստուգել անխափան աշխատանքի ժամանակամիջոցի ցուցչային օրենքով բաշխվածության մասին հիպոթեզը։

Լուծում։ 1. Գտնենք բոլոր տարրերի անխափան աշխատանքի միջին ժամանակը (որպես տարրի աշխատանքի միջին ժամանակ ընդունենք այն միջակայքի միջնակետը, որին պատկանում է այդ տարրը)

$$\overline{x}_{e}=\frac{133\cdot 2,5+45\cdot 7,5+15\cdot 12,5+4\cdot 17,5+2\cdot 22,5+1\cdot 27,5}{200}=$$

$$=\frac{1000}{200}=5։$$

2. Գտնենք ենթադրվող ցուցչային բաշխման պարամետրը՝

$$\lambda=\frac{1}{\overline{x}_{e}}=\frac{1}{5}=0,2։$$

Այսպիսով, ենթադրվող ցուցչային բաշխման դիֆերենցիալ ֆունկցիան ունի հետևյալ տեսքը՝

$$f(x)=0,2e^{-0,2x},\qquad (x>0)։$$

3. Գտնենք միջակայքերից յուրաքանչյուրում X-ի ընկնելու հավանականությունը հետևյալ բանաձևով՝

$$P_i=P(x_i<X<x_{i+1})=e^{-\lambda x_i}-e^{-\lambda x_{i+1}}։$$

Օրինակ, առաջին միջակայքի համար

$$P_1=P(0<X<5)=e^{-0,2\cdot 0}-e^{-0,2\cdot 5}=1-e^{-1}=$$

$$=1-0,3679=0,6321։$$

Նման ձևով հաշվում ենք X-ի մյուս միջակայքերը ընկնելու հավանականությունները՝

$$P_2=0,2326;\quad P_3=0,0855;\quad P_4=0,0315;\quad P_5=0,0116;$$

$$P_6=0,0043։$$

Գտնենք տեսական հաճախությունները՝

$$n_i'=nP_i=200P_i,$$

որտեղ P_i-*ն* X-*ի* i-*րդ միջակայքը ընկնելու հավանականությունն է.*

Օրինակ, առաջին միջակայքի համար

$$n'_1 = 200 \cdot P_1 = 200 \cdot 0,631 = 126,42։$$

Նման ձևով հաշվում ենք մնացած տեսական հաճախությունները՝

$$n'_2 = 46,52; \quad n'_3 = 17,10; \quad n'_4 = 6,30; \quad n'_5 = 2,32;$$

$$n'_6 = 0,86։$$

5. Պիրսոնի չափանիշի օգնությամբ համեմատենք տեսական և էմպիրիկ հաճախությունները։ Դրա համար կազմենք հաշվարկային աղյուսակ 32-ը, ընդ որում միավորում ենք փոքրաթիվ հաճախությունները $(4+2+1=7)$ և նրանց համապատասխան տեսական հաճախությունները $(6,30+2,32+0,86=9,48)$։

Աղյուսակ 32

i	n	n'_i	$n_i - n'_i$	$(n_i - n'_i)^2$	$\frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$
1	133	126,42	6,58	43,2964	0,3425
2	45	46,52	−1,52	2,3104	0,0497
3	15	17,10	−2,10	4,4100	0,2579
4	7	9,48	−2,48	6,1504	0,6488
Σ	$n=200$				$\chi^2_{դիտ} = 1,30$

Դիտողություն։ Փոքրաթիվ հաճախությունների միավորման դեպքում, հաշվումների պարզեցման համար, նպատակահարմար է միավորել նաև համապատասխան միջակայքերը։ Այսպես, դիտարկվող խնդրում միավորելով վերջին երեք միջակայքերը, ստանում ենք մեկ միջակայք՝ (15, 30)։ Այս դեպքում տեսական հաճախությունը՝

$$n'_4 = nP(15 < X < 30) = 200 \cdot 0,0473 = 9,46։$$

Աղյուսակում, սակայն, բերված է վերջին երեք միջակայքերի գումարային 9,48 հաճախությունը։ Արդյունքների աննշան տարբերությունը բացատրվում է թվերի կլորացումով։

Աղյուսակ 32-ից գտնում ենք՝ $\chi^2_{դիտ}=1,30$։ χ^2 բաշխման կրիտիկական կետերի աղյուսակից (հավելված 5), $\alpha=0,05$ նշանակալիության մակարդակով, և $k=s-2=4-2=2$ ազատության աստիճանով գտնում ենք աջակողմյան կրիտիկական տիրույթի $\chi^2_{կր}(0{\cdot}05,2)=6,0$ կրիտիկական կետը։

Քանի որ $\chi^2_{դիտ}<\chi^2_{կր}$, ապա X-ի ցուցչային բաշխվածության մասին հիպոթեզի մերժման համար հիմքեր չկան։ Այլ կերպ ասած, դիտման տվյալները չեն հակասում այդ հիպոթեզին։

577. 450 լամպերի փորձարկման արդյունքում ստացվել է նրանց այրման ժամանակամիջոցի էմպիրիկ բաշխումը, որը բերված է աղյուսակ 33-ում (առաջին սյունակում նշված են միջակայքերը ժամերով, երկրորդում՝ հաճախությունները, այսինքն այն լամպերի թիվը, որոնց այրման ժամանակամիջոցը ընկած է տվյալ միջակայքում)։

Աղյուսակ 33

$x_i - x_{i+1}$	n_i	$x_i - x_{i+1}$	n_i
0—400	121	1600—2000	45
400—800	95	2000—2400	36
800—1200	76	2400—2800	21
1200—1600	56		$n=450$

Պահանջվում է, 0,01 նշանակալիության մակարդակի դեպքում, ստուգել լամպի այրման ժամանակի ցուցչային օրենքով բաշխվածության մասին հիպոթեզը։

Պատ.՝ $k=5$; $\overline{x}_{ը}=1000$; $\lambda=0,001$; տեսական հաճախությունները՝ 148,36; 99,45; 66,64; 44,68; 29,97; 20,07; 13,46; $\chi^2_{դիտ}=36,43$; $\chi^2_{կր}(0,01;\ 5)=15,1$։ Ցուցչային բաշխվածության մասին հիպոթեզը մերժվում է։

578. *1000 տարրերի փորձարկման արդյունքում ստացվել է նրանց անխափան աշխատանքի էմպիրիկ բաշխումը, որը բերված է աղյուսակ 34-ում (առաջին սյունակում նշված են ժամանակի միջակայքերը ժամերով,՝ երկրորդում՝* n_i *հաճախությունները, այսինքն* i*-րդ միջակայքում խափանված տարրերի թիվը)։*

Աղյուսակ 34

$x_i - x_{i+1}$	n_i	$x_i - x_{i+1}$	n_i
0—10	365	40—50	70
10—20	245	50—60	45
20—30	150	60—70	25
30—40	100		$n=1000$

Պահանջվում է, 0,01 նշանակալիության մակարդակով, ստուգել տարրերի անխափան աշխատանքի ժամանակի ցուցչային օրենքով բաշխվածության մասին հիպոթեզը։

Պատ.՝ $k=5$; $\overline{x_{ը}}=20$; $\lambda=0,05$; տեսական հաճախությունները՝ 393,47; 238,65; 144,75; 87,79; 53,26; 39,29; 19,59; $\chi^2_{դիտ} = 11,10$; $\chi^2_{կր}(0,01;\ 5) = 15,1$։ Տարրերի աշխատանքի ժամանակի ցուցչային բաշխվածության մասին հիպոթեզը մերժելու հիմքեր չկան։

579. *800 այցելուների ցուցահանդես գալու ժամանակի գրանցման (որպես ժամանակի հաշվման սկիզբը ընդունված է ցուցահանդեսի աշխատանքի սկզբնական մոմենտը) արդյունքում ստացվել է աղյուսակ 35-ում բերված էմպիրիկ բաշխումը (առաջին սյունակում բերված են ժամանակի միջակայքերը, երկրորդում՝ հաճախությունները, այսինքն համապատասխան ժամանակի միջակայքում եկած այցելուների թիվը)։*

$x_i - x_{i+1}$	n_i	$x_i - x_{i+1}$	n_i
0—1	259	4—5	60
1—2	167	5—6	47
2—3	109	6—7	40
3—4	74	7—8	34
			$n=800$

Պահանջվում է, 0,01 նշանակալիության մակարդակի դեպքում, ստուգել այցելուների ցուցահանդես գալու ժամանակի ցուցչային օրենքով բաշխվածության մասին հիպոթեզը:

Պատ.՝ $k=6$, $\overline{x}_{ը}=2,5$, $\lambda=0,4$; *տեսական հաճախությունները* 191,76; 176,80,118,48; 79,44; 53,28; 35,68; 23,92; 16,00; $\chi^2_{դիտ}=65,1$; $\chi^2_{կր}(0,01,6)=16,8$: *Ցուցչային օրենքով բաշխվածության մասին հիպոթեզը մերժվում է:*

§ 15. Գլխավոր համախմբության բինոմական օրենքով բաշխվածության մասին հիպոթեզի ստուգումը

Կատարված է n *փորձ: Յուրաքանչյուր փորձ կազմված է* N *անկախ փորձարկումներից, որոնցից յուրաքանչյուրում* A *պատահույթի տեղի ունենալու հավանականությունը միևնույնն է: Գրանցվում է* A *պատահույթի երևալու թիվը փորձերից յուրաքանչյուրում: Արդյունքում ստացվել է* A *պատահույթի երևալու* X *(դիսկրետ պատահական մեծության) թվի հետևյալ բաշխումը (առաջին տողում բերված է պատահույթի երևումների* x_i *թիվը մեկ փորձում, երկրորդում՝* n_i *հաճախությունը, այսինքն այն փորձերի թիվը, որոնցում գրանցվել է* A *պատահույթի* x_i *անգամ հանդես գալը*

$$
\begin{array}{ccccc}
x_i & 0 & 1 & 2\cdots & N \\
n_i & n_0 & n_1 & n_2\cdots & n_N
\end{array}
$$

Պահանջվում է օգտվելով Պիրսոնի չափանիշից, ստուգել X դիսկրետ պատահական մեծության բինոմական օրենքով բաշխվածության մասին հիպոթեզը։

Կանոն։ α նշանակալիության մակարդակով, X դիսկրետ պատահական մեծության (A պատահույթի հանդես գալու թիվը) բինոմական օրենքով բաշխվածության մասին հիպոթեզը ստուգելու համար անհրաժեշտ է՝

1. Բեռնուլիի բանաձևով հաշվել N փորձարկումներում A պատահույթի i անգամ հանդես գալու P_i հավանականությունը ($i=0,1,2,\cdots s$, որտեղ s-ը մեկ փորձում A պատահույթի երևումների դիտված ամենամեծ թիվն է, հետևաբար $s \leqslant N$)։

2. *Գտնել տեսական հաճախությունները՝*

$$n'_i = n \cdot P_i$$

որտեղ n-ը փորձերի թիվն է։

3. Պիրսոնի չափանիշով համեմատել տեսական և էմպիրիկ հաճախությունները, ընդունելով, որ ազատության աստիճանը՝ $k=s$ (ենթադրվում է, որ A պատահույթի հանդես գալու p հավանականությունը տված է, այսինքն ընտրանքով չի գնահատվել, և չի կատարվել փոքրաթիվ հաճախությունների միավորում)։

Իսկ եթե p հավանականությունը գնահատվել է ընտրանքով, ապա $k=s-1$։ Եթե, բացի այդ, կիրառվել է փոքրաթիվ հաճախությունների միավորում, ապա s-ը ընտրանքի այն խմբերի թիվն է, որոնք մնացել են միավորումից հետո։

580. *Կատարված է $n=100$ փորձ, յուրաքանչյուր փորձ կազմված է $N=10$ փորձարկումներից, որոնցից յուրաքանչյուրում A պատահույթի հավանականությունը հավասար է 0,3-ի։ Արդյունքում ստացվել է հետևյալ էմպիրիկ բաշխումը (առաջին տողում բերված են A պատահույթի երևալու x_i թիվը մեկ փորձում, երկրորդում՝ n_i հաճախությունը, այսինքն՝ այն փորձերի թիվը, որոնցում A պատահույթը իրականացել է x_i անգամ)՝*

x_i	0	1	2	3	4	5
n_i	2	10	27	32	23	6

Պահանջվում է, 0,05 նշանակալիության մակարդակով, ստուգել X պատահական մեծության (A պատահույթի երևա-

լու թիվը) բինոմական օրենքով բաշխվածության մասին հիպոթեզը։

Լուծում։ 1. Բեռնուլիի

$$P_i = P_N^{(i)} = C_N^{(i)} p^i q^{N-i}$$

բանաձևից որոշենք A *պատահույթի* $N = 10$ *փորձարկումներում ճիշտ* i *անգամ տեղի ունենալու* P_i $(i = 0,1,2,3,4,5)$ *հավանականությունը։*

Հաշվի առնելով, որ $p = 0{,}3$, $q = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$, *կստանանք՝*

$$P_0 = P_{10}(0) = 0{,}7^{10} = 0{,}0282;$$

$$P_1 = P_{10}(1) = 10 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7^9 = 0{,}1211:$$

Նման ձևով ստանում ենք՝ $P_2 = 0{,}2335$; $P_3 = 0{,}2668$;

$$P_4 = 0{,}2001; \ P_5 = 0{,}1029:$$

2. Գտնենք տեսական հաճախությունները՝

$$n_i' = n \cdot P_i:$$

Հաշվի առնելով, որ $n = 100$ *կստանանք՝*

$$n_0' = 2{,}82, \ n_1' = 12{,}11; \ n_2' = 23{,}35; \ n_3' = 26{,}68; \ n_4' = 20{,}01;$$

$$n_5' = 10{,}29:$$

3. Համեմատենք էմպիրիկ և տեսական հաճախությունները Պիրսոնի չափանիշի օգնությամբ։ Դրա համար կազմենք հաշվարկային աղյուսակ 36-ը։

Քանի որ $n_0 = 2$ *հաճախությունը փոքրաթիվ է (փոքր է 5-ից), միավորենք այն* $n_1 = 10$ *հաճախության հետ և աղյուսակում գրենք* $2 + 10 = 12$, *որպես համապատասխան տեսական հաճախություն գրենք տեսական* $n_0' + n_1' = 2{,}82 + 12{,}11 = 14{,}93$ *հաճախությունների գումարը։*

Աղյուսակ 36-ից ստանում ենք $\chi^2_{դիտ} = 4{,}44$:

i	n_i	n'_i	$n_i - n'_i$	$(n_i - n'_i)^2$	$\frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$
1	12	14,93	−2,93	8,5849	0,5750
2	27	23,35	3,65	13,3225	0,5706
3	32	26,68	5,32	28,3024	1,0608
4	23	20,01	2,99	8,9401	0,4468
5	6	10,29	−4,29	18,4041	1,7886
Σ	$n=100$				$\chi^2_{դիտ} = 4,44$

χ^2 բաշխման կրիտիկական կետերի աղյուսակից, $\alpha = 0{,}05$ նշանակալիության մակարդակով, և $k = 5 - 1 = 4$ ազատության աստիճանով գտնում ենք աջակողմյան կրիտիկական տիրույթի $\chi^2_{կր}(0{,}05;\ 4) = 9{,}5$ կրիտիկական կետը։

Քանի որ $\chi^2_{դիտ} < \chi^2_{կր}$, ապա X-ի բինոմական բաշխվածության մասին հիպոթեզը մերժելու հիմքեր չկան։

581. *Փորձը կայանում է նրանում, որ միաժամանակ նետում ենք 4 մետաղադրամներ, այն կրկնված է 100 անգամ։ Երևացող «գերբերի» թվի (X դիսկրետ պատահական մեծության) էմպիրիկ բաշխումն ունի հետևյալ տեսքը (առաջին տողում նշված է մեկ նետման ժամանակ երևացող «գերբերի» x_i թիվը, երկրորդում՝ n_i հաճախությունը, այսինքն այն նետումների թիվը, որոնց ժամանակ երևացել են x_i «գերբեր»)՝*

x_i	0	1	2	3	4
n_i	8	20	42	22	8

Պահանջվում է, 0,05 նշանակալիության մակարդակի դեպքում, ստուգել հիպոթեզը այն մասին, որ X-ը բաշխված է ըստ բինոմական օրենքի։

Ցուցում։ *«Գերբը» երևալու* p *հավանականությունն ընդունել հավասար 0,5։*

Պատ.՝ $k=4$; *տեսական հաճախությունները*՝ 6,25; 25,00; 37,50; 25,00; 6,25; $\chi^2_{դիտ}=2,88$; $\chi^2_{կր}(0,05;4)=9,5$։ *Բինոմական օրենքով բաշխվածության մասին հիպոթեզը մերժելու հիմքեր չկան։*

582. *Տեխնիկական վերահսկողության բաժինը ստուգեց արտադրանքի* $n=100$ *խմբաքանակներ, յուրաքանչյուրում* $N=10$ *միավոր արտադրանք և ստացավ ոչ միօրինակ արտադրանքի* X *դիսկրետ պատահական մեծության հետևյալ էմպիրիկ բաշխումը (առաջին տողում բերված է ոչ միօրինակ միավորների* x_i *թիվը մեկ խմբաքանակում, երկրորդում՝* n_i *հաճախությունը, այսինքն այն խմբաքանակների թիվը, որոնք պարունակում են* x_i *ոչ միօրինակ միավորներ)՝*

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
n_i	2	3	10	22	26	20	12	5

Պահանջվում է, նշանակալիության 0,01 մակարդակով, ստուգել պատահական մեծության բինոմական օրենքով բաշխված լինելու մասին հիպոթեզը։

Ցուցումներ։ 1. Սկզբից գտնել միավոր արտադրանքի ոչ միօրինակ լինելու հարաբերական հաճախությունը և ընդունել այն որպես այն բանի p* *հավանականության գնահատական, որ պատահականորեն վերցրած միավոր արտադրանքը կլինի ոչ միօրինակ։*

2. Պիրսոնի հայտանիշով էմպիրիկ և տեսական հաճախությունները համեմատելու համար հաշվարկային աղյուսակ կազմելիս անհրաժեշտ է միավորել էմպիրիկ հաճախությունները (2+3=5) *և նրանց համապատասխան տեսական հաճախությունները* (0,60+4,03=4,63)*։ Հաշվի առնել, որ միավորումից հետո ընտրանքի խմբերի թիվը՝* $s=7$*։*

*3. Մեկ պարամետրը (*p *հավանականությունը) գնահատվել է ընտրանքի տվյալներով, ուստի ազատության աստիճանը որոշելիս* s*-ից պետք է հանել ոչ թե 1, այլ 2՝* $s-2=7-2=5$*։*

Պատ.՝ $p^*=0,4$, $k=5$, *տեսական հաճախությունները*՝ 0,60; 4,03; 12,09; 21,50; 25,08; 20,07; 11,15; 4,25; $\chi^2_{դիտ}=0,63$; $\chi^2_{կր}(0,01;5) =$

$=15,1$։ X-ի բինոմական օրենքով բաշխվածության մասին հիպոթեզը մերժելու հիմքեր չկան։

583. Գրադարանում պատահականորեն վերցված է 200 ընտրանք, յուրաքանչյուրում 5 գիրք։ Գրանցվել է վնասված գրքերի թիվը (ընդգծումներ, կեղտոտվածություն և այլն)։ Արդյունքում ստացվել է հետևյալ էմպիրիկ բաշխումը (առաջին տողում նշված է մեկ ընտրանքում վնասված գրքերի x_i թիվը, երկրորդում՝ n_i հաճախությունը, այսինքն x_i վնասված գիրք պարունակող ընտրանքների քանակը)՝

x_i	0	1	2	3	4	5
n_i	72	77	34	14	2	1

Պահանջվում է, օգտագործելով Պիրսոնի չափանիշը, 0,05 նշանակալիության մակարդակով, ստուգել X (վնասված գրքերի թիվը) դիսկրետ պատահական մեծության բինոմական օրենքով բաշխված լինելու մասին հիպոթեզը։

Ցուցում։ Հաշվի առնել 582 խնդրի վերաբերյալ ցուցումները։

Պատ.՝ $p^*=0,2$; $k=2$; տեսական հաճախությունները՝ 65,54 81,92, 40,96, 10,24, 1,28, 0,06, $\chi^2_{դիտ}=4,65$, $\chi^2_{կր}(0,05;2)=6,0$։ X-ի բինոմական օրենքով բաշխվածության մասին հիպոթեզը մերժելու հիմքեր չկան։

§ 16. Գլխավոր համախմբության հավասարաչափ օրենքով բաշխվածության մասին հիպոթեզի ստուգումը

X անընդհատ պատահական մեծության էմպիրիկ բաշխումը տրված է s հատ $x_i - x_{i+1}$ միջակայքերի և համապատասխան n_i հաճախությունների հաջորդականության տեսքով, ընդ որում $\sum n_i = n$ (ընտրանքի ծավալը)։ Պահանջվում է, օգտագործելով Պիրսոնի չափանիշը, ստուգել հիպոթեզը այն մասին, որ X պատահական մեծությունը հավասարաչափ է բաշխված։

Կանոն: X-ի հավասարաչափ բաշխվածության (այսինքն

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & (a,b)\ \text{միջակայքում}\\[2mm] 0\ , & (a,b)\ \text{միջակայքից դուրս}\end{cases}$$

օրենքով) մասին հիպոթեզը ստուգելու համար անհրաժեշտ է՝

1. Գնահատել a և b պարամետրերը՝ այն միջակայքի ծայրակետերը, որոնցում դիտվել են X-ի հնարավոր արժեքները հետևյալ բանաձևերով (պարամետրերի գնահատականները նշանակված են a*-ով և b*-ով)՝

$$a^*=\overline{x}_{\text{ը}}-\sqrt{3}\,\sigma_{\text{ը}},\quad b^*=\overline{x}_{\text{ը}}+\sqrt{3}\,\sigma_{\text{ը}}$$

2. Գտնել ենթադրվող բաշխման դիֆերենցիալ ֆունկցիան՝

$$f(x)=\frac{1}{b^*-a^*}:$$

3. Հաշվել տեսական հաճախությունները՝

$$n_1'=nP_1=n\,f(x)(x_1-a^*)=\frac{n(x_1-a^*)}{b^*-a^*},$$

$$n_2'=n_3'=\cdots=n_{s-1}'=\frac{n(x_i-x_{i-1})}{b^*-a^*},\quad (i=2,3,\cdots,s-1)$$

$$n_2'=\frac{n(b^*-x_{s-1})}{b^*-a^*}:$$

4. Պիրսոնի չափանիշի օգնությամբ համեմատել էմպիրիկ և տեսական հաճախությունները, ընդունելով ազատության աստիճանը՝ $k=s-3$, որտեղ s-ը այն միջակայքերի թիվն է, որոնց վրա տրոհված է ընտրանքը:

584. *Ինչու՞ հավասարաչափ բաշխված X պատահական մեծության a և b պարամետրերը գնահատվում են*

$$a^*=\overline{x}_{\text{ը}}-\sqrt{3}\,\sigma_{\text{ը}},\quad b^*=\overline{x}_{\text{ը}}+\sqrt{3}\,\sigma_{\text{ը}}$$

բանաձևերով:

Լուծում: Հայտնի է, որ որպես X պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասման և միջին քառակուսային շեղման գնահատական, կարելի է ընդունել, համապատասխանաբար, $\overline{x}_{\text{ը}}$ ընտրանքային միջինը և $\sigma_{\text{ը}}$ ընտրանքային միջին քառակուսային շեղումը:

Հայտնի է նաև (տես գլ. VI խնդիրներ 313, 315), որ հավասարաչափ բաշխման համար մաթեմատիկական սպասումը և միջին քառակուսային շեղումը, համապատասխանաբար, հավասար են՝

$$M(X) = \frac{a+b}{2}, \quad \sigma(X) = \sqrt{DX} = \sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Այդ պատճառով հավասարաչափ բաշխման պարամետրերի գնահատման համար ստանում ենք 2 գծային հավասարումների հետևյալ համակարգը՝

$$\left.\begin{aligned} \frac{b^*+a^*}{2} &= \overline{x}_{\text{ը}}, \\ \frac{b^*-a^*}{2\sqrt{3}} &= \sigma_{\text{ը}} \end{aligned}\right\}$$

կամ

$$\left\{\begin{aligned} b^*+a^* &= 2\overline{x}_{\text{ը}}, \\ b^*-a^* &= 2\sqrt{3}\,\sigma_{\text{ը}}. \end{aligned}\right.$$

Լուծելով այս համակարգը, ստանում ենք՝

$$a^* = \overline{x}_{\text{ը}} - \sqrt{3}\,\sigma_{\text{ը}}, \quad b^* = \overline{x}_{\text{ը}} + \sqrt{3}\,\sigma_{\text{ը}}.$$

585. Ինչու՞ Պիրսոնի չափանիշի օգնությամբ X գլխավոր համախմբության հավասարաչափ բաշխվածության մասին հիպոթեզը ստուգելիս, ազատության աստիճանը որոշվում է $k = s - 3$ բանաձևից, որտեղ s-ը ընտրանքի միջակայքերի թիվն է:

Լուծում: Պիրսոնի չափանիշը օգտագործելիս ազատության աստիճանը՝ $k = s - 1 - r$, որտեղ r-ը ընտրանքով գնահատված պարամետրերի թիվն է: Հավասարաչափ բաշխումը որոշվում է երկու՝ a և b պարամետրերով: Քանի որ այդ երկու պարամետրերը գնահատվում են ընտրանքով, ապա $r = 2$ և, հետևաբար, ազատության աստիճանը՝

$$k = s - 1 - 2 = s - 3$$

586. Իրականացված են $n = 200$ փորձեր, որոնցից յուրաքանչյուրում A պատահույթը հանդես է եկել ժամանակի տարբեր պահերին: Արդյունքում ստացվել է աղյուսակ 37-ում բերված էմպիրիկ բաշխումը (առաջին սյունակում բերված են ժամանակի միջակայքերը րոպեներով, երկրորդում՝ համապատասխան հաճախությունները, այսինքն A պատահույթի հանդես գալու թիվը այդ միջակայքում):

Պահանջվում է, 0,05 նշանակալիության մակարդակի դեպքում, ստուգել պատահույթի տեղի ունենալու ժամանակի հավասարաչափ բաշխվածության մասին հիպոթեզը:

Աղյուսակ 37

Միջակայքը $x_{i-1}-x_i$	Հաճախությունը n_i	Միջակայքը $x_{i-1}-x_i$	Հաճախությունը n_i
2—4	21	12—14	14
4—6	16	14—16	21
6—8	15	16—18	22
8—10	26	18—20	18
10—12	22	20—22	25

Լուծում: 1. Գտնենք հավասարաչափ բաշխման a և b պարամետրերի գնահատականները.

$$a^* = \overline{x}_{\text{ը}} - \sqrt{3}\,\sigma_{\text{ը}}, \qquad b^* = \overline{x}_{\text{ը}} + \sqrt{3}\,\sigma_{\text{ը}}$$

բանաձևերով:

$\overline{x_ը}$ ընտրանքային միջինի և $\sigma_ը$ ընտրանքային միջին քառակուսային շեղման հաշվման համար որպես x_i^* տարբերակներ (X-ի դիտվող արժեքների) ընդունենք միջակայքերի միջնակետերը։ Արդյունքում կստանանք հավասարահեռ տարբերակների հետևյալ էմպիրիկ բաշխումը՝

x_i^*	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
n_i	21	16	15	26	22	14	21	22	18	25

Օգտվելով, օրինակ, արտադրյալների մեթոդից, գտնում ենք՝ $\overline{x_ը}=12,21$, $\sigma_ը=5,81$։ Հետևաբար,

$$a^*=12,21-1,73\cdot5,81=2,16,$$

$$b^*=12,21+1,73\cdot5,81=22,26:$$

2. Գտնենք ենթադրվող բաշխման դիֆերենցիալ ֆունկցիան՝

$$f(x)=\frac{1}{b^*-a^*}=\frac{1}{22,26-2,16}=0,05:$$

3. Գտնենք տեսական հաճախությունները՝

$$n_1'=nf(x)(x_1-a^*)=200\cdot0,05\cdot(4-2\cdot16)=18,4,$$

$$n_2'=200\cdot0,05(x_2-x_1)=10(6-4)=20:$$

Երրորդ-իններորդ միջակայքերի երկարությունները հավասար են երկրորդ միջակայքի երկարությանը, ուստի այդ միջակայքերի համապատասխան տեսական հաճախությունները հավասար են երկրորդ միջակայքի տեսական հաճախությանը, այսինքն՝

$$n_3'=n_4'=n_5'=n_6'=n_7'=n_8'=n_9'=20;$$

$$n_{10}'=200\cdot0,05(b^*-x_9)=10\cdot(22,6-20)=22,6:$$

4. Օգտագործելով Պիրսոնի չափանիշը, համեմատենք տեսական և էմպիրիկ հաճախությունները, ընդունելով ազա-

ազատության աստիճանը՝ $k=s-3=10-3=7$։ Դրա համար կազմենք հաշվարկային աղյուսակ 38-ը։

Աղյուսակ 38

i	n_i	n'_i	$n_i-n'_i$	$(n_i-n'_i)^2$	$\frac{(n_i-n'_i)^2}{n'_i}$
1	21	18,4	2,6	6,76	0,37
2	16	20	−4	16,00	0,80
3	15	20	−5	25	1,25
4	26	20	6	36	1,80
5	22	20	2	4	0,20
6	14	20	−6	36	1,80
7	21	20	1	1	0,05
8	22	20	2	4	0,20
9	18	20	−2	4	0,20
10	25	22,6	2,4	5,76	0,25
					$\chi^2_{դիտ}=6,92$

Հաշվարկային աղյուսակից ստանում ենք՝ $\chi^2_{դիտ}=6,92$։

χ^2 բաշխման կրիտիկական կետերի աղյուսակից (հավելված 5), $\alpha=0,05$ նշանակալիության մակարդակով, և $k=s-3=10-3=7$ ազատության աստիճանով որոշենք աջակողմյան կրիտիկական տիրույթի $\chi^2_{կր}=(0,05;7)=14,1$ կրիտիկական կետը։

Քանի որ $\chi^2_{դիտ}<\chi^2_{կր}$, ապա X-ի հավասարաչափ բաշխվածության մասին հիպոթեզի մերժման հիմքեր չկան։ Այլ կերպ ասած դիտումների տվյալները չեն հակասում այդ հիպոթեզին։

587. 800 պողպատյա գնդիկների կշռման արդյունքում ստացվել է աղյուսակ 39-ում բերված էմպիրիկ բաշխումը (առաջին սյունակում բերված է կշռի միջակայքը գրամներով, երկրորդում՝ հաճախությունը, այսինքն այն գնդիկների թիվը, որոնց կշիռը պատկանում է այդ միջակայքին)։

Պահանջվում է, 0,01 նշանակալիության մակարդակի դեպքում, ստուգել հիպոթեզը այն մասին, որ գնդիկի X կշիռը բաշխված է հավասարաչափ։

Աղյուսակ 39

$x_{i-1}-x_i$	n_i	$x_{i-1}-x_i$	n_i
20,0—20,5	91	23,0—23,5	79
20,5—21,0	76	23,5—24,0	73
21,0—21,5	75	24,0—24,5	80
21,5—22,0	74	24,5—25,0	77
22,0—22,5	92		$n=800$
22,5—23,0	83		

Պատ.՝ $\overline{x}_B = 22,47$, $\sigma_B = 1,44$; $a^* = 19,98$; $b^* = 24,96$; $f(x) = 0,2$; $k=7$; $\chi^2_{դիտ} = 4,38$, $\chi^2_{կր}(0,01;7) = 18,5$։ X-ի հավասարաչափ բաշխվածության մասին հիպոթեզը մերժելու հիմքեր չկան։

588. Մի ինչ-որ վայրում 300 օր գրանցվել է օդի օրվա միջին ջերմաստիճանը։ Դիտումների արդյունքում ստացվել է էմպիրիկ բաշխումը, որը բերված է աղյուսակ 40-ում (առաջին սյունակում բերված են ջերմաստիճանի միջակայքերը աստիճաններով, երկրորդում՝ n_i հաճախությունը, այսինքն այն օրերի թիվը, որոնց օրվա միջին ջերմաստիճանը ընկած է տվյալ միջակայքում։

Աղյուսակ 40

$x^0_{i-1}-x^0_i$	n_i	$x^0_{i-1}-x^0_i$	n_i
—40—(—30)	25	0—10	40
—30—(—20)	40	10—20	46
—20—(—10)	30	20—30	48
—10—0	45	30—40	26

Պահանջվում է, 0,05 նշանակալիության մակարդակով, ստուգել հիպոթեզը այն մասին, որ օրվա միջին ջերմաստիճանը բաշխված է հավասարաչափ:

Պատ.՝ $\overline{x}_{\text{ը}} = 1,5$; $\sigma_{\text{ը}} = 21,31$; $a^* = -35,37$; $b^* = 38,37$, $f(x) = 0,014$; $k = 5$; $\chi^2_{\text{դիտ}} = 7,75$; $\chi^2_{\text{կր}}(0,05;\ 5) = 11,1$:
Ջերմաստիճանի հավասարաչափ բաշխվածության մասին հիպոթեզի մերժման հիմքեր չկան։

589. *10 ժամվա ընթացքում գրանցվել է ավտոմեքենաների բենզալցման կայան գալու ժամանակը և ստացվել է աղյուսակ 41-ում բերված էմպիրիկ բաշխումը (առաջին սյունակում բերված են ժամանակի միջակայքերը ժամերով, երկրորդում՝ հաճախությունները, այսինքն տվյալ միջակայքում եկած մեքենաների թիվը)*

Աղյուսակ 41

$x_{i-1} - x_i$	n_i	$x_{i-1} - x_i$	n_i
8—9	12	13—14	6
9—10	40	14—15	11
10—11	22	15—16	33
11—12	16	16—17	18
12—13	28	17—18	14

Պահանջվում է, 0,01 նշանակալիության մակարդակով, ստուգել հիպոթեզը այն մասին, որ մեքենաների գալու ժամանակը բաշխված է հավասարաչափ։

Պատ.՝ $\overline{x}_{\text{ը}} = 12,71$; $\sigma_{\text{ը}} = 2,86$; $a^* = 7,76$; $b^* = 17,66$; $f(x) = 0,101$
$k = 7$; $\chi^2_{\text{դիտ}} = 53,43$; $\chi^2_{\text{կր}}(0,01;\ 7) = 18,5$։

Ժամանակի հավասարաչափ բաշխվածության մասին հիպոթեզը մերժվում է։ Դիտումների տվյալները հակասում են այդ հիպոթեզին։

§17. Գլխավոր համախմբության Պուասսոնի օրենքով բաշխված լինելու մասին հիպոթեզի ստուգումը

Տրված է X դիսկրետ պատահական մեծության էմպիրիկ բաշխումը։ Պահանջվում է, օգտվելով Պիրսոնի չափանիշից, ստուգել գլխավոր համախմբության Պուասսոնի օրենքով բաշխվածության մասին հիպոթեզը։

Կանոն: α նշանակալիության մակարդակով, X պատահական մեծության Պուասսոնի օրենքով բաշխվածության մասին հիպոթեզը ստուգելու համար, անհրաժեշտ է՝

1. Տված էմպիրիկ բաշխումով գտնել $\overline{x}_B$ ընտրանքային միջինը:

2. Որպես Պուասսոնի բաշխման λ պարամետրի գնահատական ընդունել ընտրանքային միջինը՝

$$\lambda = \overline{x}_B։$$

3. Պուասսոնի բանաձևով (կամ պատրաստի աղյուսակով) գտնել այն բանի P_i հավանականությունը, որ n փորձերում տեղի կունենան ճիշտ i պատահույթներ ($i = 0, 1, 2, \ldots, r$, որտեղ r-ը դիտված պատահույթների առավելագույն թիվն է, n-ը՝ ընտրանքի ծավալը)

4. Հետևյալ բանաձևով հաշվել տեսական հաճախությունները՝

$$n'_i = nP_i:$$

5. Պիրսոնի չափանիշի օգնությամբ համեմատել տեսական և էմպիրիկ հաճախությունները, ընդունելով ազատության աստիճանը՝ $k = s - 2$, որտեղ s-ը ընտրանքի տարբեր խմբերի թիվն է (եթե կատարված է փոքրաթիվ հաճախությունների միավորում, ապա s-ը միավորումից հետո մնացած խմբերի թիվն է):

590. *Տեխնիկական վերահսկողության բաժինը ստուգել միատեսակ արտադրանքի $n = 200$ խմբաքանակներ և ստացավ հետևյալ էմպիրիկ բաշխումը (առաջին տողում բերված է մեկ խմբաքանակում ոչ միօրինակ արտադրանքի միավորների x_i թիվը, երկրորդում՝ n_i հաճախությունը, այսինքն x_i ոչ միօրինակ միավորներ պարունակող խմբաքանակների թիվը)։*

x_i	0	1	2	3	4
n_i	116	56	22	4	2

Պահանջվում է, 0,05 նշանակալիության մակարդակով, ստուգել ոչ միօրինակ միավորների X թվի Պուասսոնի օրենքով բաշխված լինելու մասին հիպոթեզը։

Լուծում։ 1. *Հաշվենք ընտրանքային միջինը՝*

$$\overline{x}_{ը} = \frac{1}{n}\sum x_i n_i = \frac{116 \cdot 0 + 56 \cdot 1 + 22 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 2 \cdot 4}{200} = 0,6:$$

2. *Որպես Պուասսոնի բաշխման* λ *պարամետրի գնահատական ընդունենք ընտրանքային միջինը՝* $\lambda = 0,6$։ *Հետևաբար, ենթադրվող Պուասսոնի*

$$P_n(i) = \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!}$$

բաշխման օրենքն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$P_{200}(i) = \frac{(0,6)^i \ e^{-0,6}}{i!}\ ։$$

3. *Տեղադրելով* $i = 0, 1, 2, 3, 4$, *գտնենք* P_i *հավանականությունները, որ 200 խմբաքանակներում կլինեն* i *ոչ միօրինակ միավորներ՝*

$$P_0 = P_{200}(0) = 0,5488; \ \ P_1 = P_{200}(1) = 0,3923, \ \ P_2 = P_{200}(2) =$$
$$= 0,0988; \ \ P_3 = P_{200}(3) = 0,0198; \ \ P_4 = P_{200}(4) = 0,0030։$$

4. $n_i' = nP_i = 200P_i$ *բանաձևով հաշվենք տեսական հաճախությունները։ Այդ բանաձևում տեղադրելով կետ 3-ում հաշված* P_i *հավանականությունների արժեքները, կստանանք՝*

$$n_0' = 200 \cdot 0,5488 = 109,76։$$

Նման եղանակով գտնում ենք

$$n_1' = 65,86, \quad n_2' = 19,76, \quad n_3' = 3,96, \quad n_4' = 0,60։$$

5. *Համեմատենք էմպիրիկ և տեսական հաճախությունները Պիրսոնի չափանիշի օգնությամբ։ Դրա համար կազմենք հաշվարկային աղյուսակ 42-ը։ Հաշվի առնելով դիտողություն 1-ը (տես § 12), փոքրաթիվ հաճախությունները միավորում ենք (4+2=6) միաժամանակ միավորելով հա-*

մապատասխան տեսական հաճախությունները $(3,96+0,60=$ $=4,56)$։ Հաճախությունների միավորման արդյունքները գրանցում ենք աղյուսակ 42-ում։

Աղյուսակ 42

1	2	3	4	5	6
i	n_i	n'_i	$(n_i-n'_i)$	$(n_i-n'_i)^2$	$\frac{(n_i-n'_i)^2}{n'_i}$
0	116	109,76	6,24	38,9376	0,3548
1	56	65,86	−9,86	97,2196	1,4762
2	22	19,76	2,24	5,0176	0,2539
3	6	4,56	1,44	2,0736	0,4547
Σ	200				$\chi^2_{\text{դիտ}}=2,54$

Հաշվարկային աղյուսակից գտնում ենք Պիրսոնի չափանիշի դիտվող արժեքը՝

$$\chi^2_{\text{դիտ}}=2,54։$$

χ^2 բաշխման կրիտիկական կետերի աղյուսակից (հավելված 5) $\alpha=0,05$ նշանակալիության մակարդակով և $k=4-2=2$ ազատության աստիճանով գտնում ենք աջակողմյան կրիտիկական տիրույթի $\chi^2_{\text{կր}}(0,05;\ 2)=6,0$ կրիտիկական կետը։

Քանի որ $\chi^2_{\text{դիտ}}<\chi^2_{\text{կր}}$, ապա X պատահական մեծության Պուասոնի օրենքով բաշխվածության մասին հիպոթեզի մերժման հիմքեր չկան։

591. *200* արկղ պահածոների ոչ միօրինակ ստուգման արդյունքում ստացվել է հետևյալ էմպիրիկ բաշխումը (առաջին տողում բերված են մեկ արկղում ոչ միօրինակ պահածոների տուփերի x_i քանակությունը, երկրորդում՝ n_i հաճախությունը, այսինքն այն արկղերի թիվը, որոնցում ոչ *միօրինակ պահածոների տուփերի թիվը, հավասար է* x_i)։

x_i	0	1	2	3	4
n_i	132	43	20	3	2

Պահանջվում է 0,05 նշանակալիության մակարդակով, ստուգել անորակ տուփերի թվի (X պատահական մեծության) Պուասոնի օրենքով բաշխված լինելու մասին հիպոթեզը։

Ցուցում։ Միավորել վերջին երկու խմբերի փոքրաթիվ հաճախությունները։

Պատ.՝ $k=2$, $\lambda=\overline{x_ք}=0,5$, *տեսական հաճախությունները՝* 121,31, 60,65, 15,16, 2,52, 0,32, $\chi^2_{դիտ}=927$, $\chi^2_{կր}(0,05,\ 2)=$ $=6,0$, X-*ի Պուասոնի օրենքով բաշխվածության մասին հիպոթեզի մերժման հիմքեր չկան։*

592. *Երեքնուկի սերմերի խմբաքանակի աղտոտվածությունը մոլախոտերի սերմերով որոշելու համար ստուգված է պատահականորեն վերցված 1000 փորձանմուշ և ստացվել է հետևյալ էմպիրիկ բաշխումը (առաջին տողում բերված է մոլախոտի սերմերի* x_i *թիվը մի նմուշում, երկրորդում՝* n_i *հաճախությունը, այսինքն* x_i *մոլախոտի սերմ պարունակող նմուշների թիվը՝*

x_i	0	1	2	3	4	5	6
n_i	405	366	175	40	8	4	2

Պահանջվում է 0,01 նշանակալիության մակարդակով, ստուգել X պատահական մեծության (մոլախոտի սերմերի թիվը) Պուասոնի օրենքով բաշխվածության մասին հիպոթեզը։

Ցուցում։ Միավորել վերջին երկու խմբերի փոքրաթիվ հաճախությունները։

Պատ.՝ $k=4$; $\lambda=\overline{x}_ք=0,9$; *տեսական հաճախությունները՝* 406,6; 365,9; 164,7; 49,4; 11,1; 2,3; $\chi^2_{դիտ}=9,27$; $\chi^2_{կր}=(0,01;\ 4)=$ $=13,3$; X-*ի Պուասոնի օրենքով բաշխված լինելու մասին հիպոթեզի մերժման հիմքեր չկան։*

593. *Փորձարկումը կազմված է* $n = 1000$ *փորձերից, որոնցից յուրաքանչյուրում գրանցվել է մի ինչ-որ պատահույթի հանդես գալու* x_i *թիվը։ Արդյունքում ստացվել է հետևյալ էմպիրիկ բաշխումը՝ (առաջին տողում բերված է պատահույթի հանդես գալու* x_i *թիվը, երկրորդում՝ հաճախությունը, այսինքն այն փորձերի թիվը, որոնցում պատահույթը տեղի է ունեցել* x_i *անգամ)՝*

x_i	0	1	2	3	4	5
n_i	505	336	125	24	8	2

Պահանջվում է, 0,05 նշանակալիության մակարդակով, ստուգել պատահույթի հանդես գալու X թվի Պուասոնի օրենքով բաշխված լինելու մասին հիպոթեզը։

Ցուցում։ Միավորել վերջին 2 խմբերի հաճախությունները։

Պատ.՝ $k = 3$; $\lambda = \overline{x_{ը}} = 0,07$; *տեսական հաճախությունները՝* 496,6; 347,6; 121,7; 28,4; 5,0; 0,7; $\chi^2_{դիտ} = 10,29$; $\chi^2_{կր}(0,05; 4) = 9,5$։ X-*ի Պուասոնի օրենքով բաշխված լինելու մասին հիպոթեզը մերժում ենք։*

594. *Ապակյա իրեր պարունակող 500 արկղերի ստուգումից պարզվել է, որ վնասված իրերի X թիվն ունի հետևյալ էմպիրիկ բաշխումը (առաջին տողում բերված է 1 արկղում վնասված իրերի թիվը, երկրորդում,* n_i *հաճախությունը, այսինքն* x_i *վնասված իրեր պարունակող արկղների թիվը)՝*

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
n_i	199	169	87	31	9	3	1	1

Պահանջվում է, 0,01 նշանակալիության մակարդակով ստուգել վնասված իրերի X թվի Պուասոնի օրենքով բաշխված լինելու մասին հիպոթեզը։

Ցուցում։ Միավորել վերջին երեք խմբերի հաճախությունները։

Պատ.՝ $k=4$, $\lambda=\overline{x_{\text{ը}}}=1$, *տեսական հաճախությունները՝* 183,95, 183,95, 91,95, 30,65, 7,65, 1,55, 0,25, 0,04; $\chi^2_{\text{դիտ}}=8{,}38$ $\chi^2_{\text{կր}}(0{,}01;4)=13{,}3$։ X-*ի Պուասոնի օրենքով բաշխված լինելու մասին հիպոթեզը մերժելու հիմքեր չկան։*

595. Բորտկևիչի խնդիրը: *Քսան տարվա ընթացքում, ձիու սպանվելու հետևանքով պրուսական բանակի զոհված հեծելազորայինների թվի մասին 200 զեկուցագրերի հիման վրա կազմված է հետևյալ էմպիրիկ բաշխումը (առաջին տողում բերված է մեկ զեկուցագրում ցույց տրված զոհված հեծելազորայինների* x_i *թիվը, երկրորդում՝* n_i *հաճախությունը, այսինքն այն զեկուցագրերի թիվը, որոնցում հաղորդվում է* x_i *հեծելազորայինների զոհվելու մասին)՝*

x_i	0	1	2	3	4
n_i	109	65	22	3	1

Պահանջվում է, 0,05 նշանակալիության մակարդակով, ստուգել X *պատահական մեծության (զոհված հեծելազորայինների թիվը) Պուասոնի օրենքով բաշխված լինելու մասին հիպոթեզը։*

Ցուցում։ Միավորել 3 և 1 փոքրաթիվ հաճախությունները մեկի մեջ։

Պատ.՝ $k=2$; $\lambda=\overline{x_{\text{ը}}}=0{,}61$; *տեսական հաճախությունները՝* 108,7; 66,3; 20,2; 4,1; 0,7; $\chi^2_{\text{դիտ}}=0{,}34$; $\chi^2_{\text{կր}}(0{,}05;2)=6{,}0$; X-*ի Պուասոնի օրենքով բաշխվածության մասին հիպոթեզի մերժման հիմքեր չկան։*

ՏԱՍՆՉՈՐՍԵՐՈՐԴ ԳԼՈՒԽ

ՄԻԱԳՈՐԾՈՆ ԴԻՍՊԵՐՍԻՈՆ ԱՆԱԼԻԶ

§ 1. Նույն թվով փորձարկումներ բոլոր մակարդակներում

Ենթադրենք X քանակական նորմալ բաշխված հայտանիշի վրա ազդում է F գործոնը (фактор), *որն ունի p հաստատուն* F_1, F_2, … F_p *մակարդակները։ Յուրաքանչյուր մակարդակի վրա կատարված են q-ական փորձեր։ Դիտման արդյունքները աղյուսակ 43-ում բերված* x_{ij} *թվերն են, որտեղ i-ն փորձի համարն է* ($i=1, 2, \ldots q$), *j-ն՝ գործոնի մակարդակի համարը* ($j=1, 2, \ldots p$)*։*

Աղյուսակ 43

Փորձի համարը	*Գործոնի մակարդակները*			
i	F_1	F_2	…	F_p
1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1p}
2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2p}
…	…	…	…	…
q	x_{q1}	x_{q2}	…	x_{qp}
Խմբային միջինը $\bar{x}_{\text{խ}j}$	$\bar{x}_{\text{խ}1}$	$\bar{x}_{\text{խ}2}$	…	$\bar{x}_{\text{խ}p}$

Քննարկվում է հետևյալ խնդիրը. α նշանակալիության մակարդակով ստուգել խմբային միջինների հավասարության մասին զրոյական հիպոթեզը, ենթադրելով, որ խմբային գլխավոր դիսպերսիաները չնայած անհայտ են, բայց միմյանց հավասար են։ Խնդրի լուծման համար մտցվում են. հայտանիշի դիտվող արժեքների ընդհանուր միջինից շեղումների քառակուսիների ընդհանուր գումարը

$$S_{\text{ընդ.}} = \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{q} (x_{ij} - \bar{x})^2;$$

խմբային միջինների, ընդհանուր միջիններից ունեցած շեղումների քառակուսիների գործոնային գումարը (բնորոշում է ցրումը «խմբերի միջև»)

$$S_{գործ} = q\sum_{j=1}^{p} (\bar{x}_{խj} - \bar{x})^2;$$

խմբի դիտվող արժեքների, համապատասխան խմբային միջինից ունեցած շեղումների քառակուսիների մնացորդային գումարը (բնորոշում է ցրումը «խմբի ներսում»)

$$S_{մն} = \sum_{i=1}^{q} (x_{i1} - \bar{x}_{խ1})^2 + \sum_{i=1}^{q} (x_{i2} - \bar{x}_{խ2})^2 + \ldots + \sum_{i=1}^{q} (x_{ip} - \bar{x}_{խp})^2,$$

Գործնականում մնացորդային գումարը որոշում են

$$S_{մն} = S_{ընդ.} - S_{գործ}$$

բանաձևով:

Ընդհանուր և գործոնային գումարների հաշվման համար ավելի հարմար են հետևյալ բանաձևերը՝

$$S_{ընդ} = \sum_{j=1}^{p} P_j - \frac{1}{pq}\left[\sum_{j=1}^{p} R_j\right]^2,$$

$$S_{գործ} = \frac{1}{q}\sum_{j=1}^{p} R_j^2 - \frac{1}{pq}\left[\sum_{j=1}^{p} R^i\right]^2,$$

որտեղ $P_j = \sum_{i=1}^{q} x_{ij}^2$ հանդիսանում է F_j մակարդակի վրա դիտված արժեքների քառակուսիների գումարը, $R_j = \sum_{i=1}^{q} x_{ij}$ հանդիսանում է F_j մակարդակի վրա դիտված արժեքների գումարը:

Եթե հայտանիշի դիտված արժեքները համեմատաբար մեծ թվեր են, ապա հաշվումների պարզեցման համար յուրաքանչյուր—դիտված արժեքից հանում են միևնույն C թիվը, որը մոտավորապես հավասար է ընդհանուր միջինին:

Եթե փոքրացված արժեքները $y_{ij} = x_{ij} - C$, ապա

$$S_{\text{ընդ}} = \sum_{j=1}^{p} Q_j - \frac{1}{pq}\left[\sum_{j=1}^{p} T_j\right]^2,$$

$$S_{\text{գործ}} = \frac{1}{q}\sum_{j=1}^{p} T_j^2 - \frac{1}{pq}\left[\sum_{j=1}^{p} T_j\right]^2,$$

որտեղ $Q_j = \sum_{i=1}^{q} y_{ij}^2$ F_j մակարդակի վրա հայտանիշի փոքրացված արժեքների քառակուսիների գումարն է, իսկ $T_j = \sum_{i=1}^{q} y_{ij}$ հանդիսանում է F_j մակարդակի վրա հայտանիշի փոքրացված արժեքների գումարը։

Բաժանելով արդեն հաշված գործոնային և մնացորդային գումարները համապատասխան ազատության աստիճանի վրա, գտնում ենք գործոնային և մնացորդային դիսպերսիաները

$$s^2_{\text{գործ}} = \frac{S_{\text{գործ}}}{p-1}, \qquad s^2_{\text{մն}} = \frac{S_{\text{մն}}}{p(q-1)}։$$

Վերջապես, համեմատում են գործոնային և մնացորդային դիսպերսիաները Ֆիշեր-Սնեդեկորի չափանիշով (տես գլ. XIII, § 2)։

Եթե $F_{\text{դիտ}} < F_{\text{կր}}$, ապա խմբային միջինների տարբերությունը նշանակալի չէ։

Եթե $F_{\text{դիտ}} > F_{\text{կր}}$, ապա խմբային միջինների տարբերությունը նշանակալի է։

Դիտողություն 1։ Եթե պարզվի, որ գործոնային դիսպերսիան փոքր է մնացորդայինից, ապա այստեղից անմիջապես հետևում է խմբային միջինների հավասարության մասին դրույթական հիպոթեզի իրավացիությունը և հետագա հաշվումները (դիսպերսիաների համեմատումը F չափանիշով) ավելորդ են։

Դիտողություն 2։ Եթե x_{ij} դիտվող արժեքները ստորակետից հետո k նիշերով տասնորդական կոտորակներ են, ապա նպատակահարմար է անցնել ամբողջ թվերին $y_{ij} = 10^k x_{ij} - C$ բանաձևով, որտեղ C-ն մոտավորապես $10^k x_{ij}$ թվերի միջին արժեքն է։ Ընդ որում գործոնային և մնացորդային դիսպերսիաները կմեծանան 10 անգամ, սակայն նրանց հարաբերությունը չի փոխվի։

596. F գործոնի երեք մակարդակներից յուրաքանչյուրում կատարված է 4-ական փորձ։ Դիսպերսիոն անալիզի մեթոդով, 0,05 նշանակալիության մակարդակի դեպքում, ստուգել խմբային միջինների հավասարության մասին զրոյական հիպոթեզը։ Ենթադրվում է, որ ընտրանքները վերցված են միատեսակ դիսպերսիաներով նորմալ համախմբություններից։ Փորձարկման արդյունքները բերված են աղյուսակ 44-ում։

Աղյուսակ 44

Փորձի համարը	Գործոնի մակարդակները		
i	F_1	F_2	F_3
1	38	20	21
2	36	24	22
3	35	26	31
4	31	30	34
$\bar{x}_{\text{ր}j}$	35	25	27

Լուծում։ Հաշվումը պարզեցնելու համար x_{ij} յուրաքանչյուր դիտված արժեքներից հանենք $\bar{x} = 29$ ընդհանուր միջինը, այսինքն անցնենք $y_{ij} = x_{ij} - 29$ փոքրացված մեծություններին։ Օրինակ, $y_{11} = x_{11} - 29 = 38 - 29 = 9$; $y_{21} = x_{21} - 29 = 36 - 29 = 7$ և այլն։

Կազմենք հաշվարկային աղյուսակ 45-ը։ Օգտագործելով աղյուսակ 45-ի արդյունարար սյունակը, գտնենք շեղումների քառակուսիների ընդհանուր և գործոնային գումարները, հաշվի առնելով, որ գործոնի մակարդակների թիվը՝ $p = 3$, իսկ յուրաքանչյուր մակարդակում փորձարկումների թիվը՝ $q = 4$։

$$S_{\text{ընդ}} = \sum_{j=1}^{p} S_j - \frac{1}{pq}\left[\sum_{j=1}^{p} T_j\right]^2 = 428 - 0 = 428:$$

Փորձի համարը	Գործոնի մակարդակները						Արդյունարար սյուն
	F_1		F_2		F_3		
i	y_{i1}	y_{i1}^2	y_{i2}	y_{i2}^2	y_{i3}	y_{i3}^2	
1	9	81	−9	81	−8	64	
2	7	49	−5	25	−7	49	
3	6	36	−3	9	2	4	
4	2	4	1	1	5	25	
$S_j=\Sigma y_{ij}^2$	—	170		116	—	142	$\Sigma S_j=428$
$T_j=\Sigma y_{ij}$	24	—	−16	—	−8	—	$\Sigma T_j=0$
T_j^2	576	—	256	—	64	—	$\Sigma T_j^2=896$

$$S_{\text{գործ}}=\frac{1}{q}\sum_{j=1}^{p}T_j^2-\frac{1}{pq}\left[\sum_{j=1}^{p}T_j\right]^2=\frac{896}{4}-0=224\text{։}$$

Գտնենք շեղումների քառակուսիների մնացորդային գումարը՝

$$S_{\text{մն}}=S_{\text{ընդ}}-S_{\text{գործ}}=428-224=204\text{։}$$

Գտնենք գործոնային դիսպերսիան, որի համար $S_{\text{գործ}}$ մեծությունը բաժանենք ազատության $p-1=3-1=2$ աստիճանի վրա՝

$$S^2_{\text{գործ}}=\frac{S_{\text{գործ}}}{p-1}=\frac{222}{2}=111,$$

Գտնենք մնացորդային դիսպերսիան, որի համար բաժանենք $S_{\text{մն}}$ մեծությունը ազատության $p(q-1)=3(4-1)=9$ աստիճանի վրա՝

$$S^2_{\text{մն}}=\frac{S_{\text{մն}}}{p(q-1)}=\frac{204}{9}=22{,}67\text{։}$$

Ֆիշեր-Սնեդեկորի չափանիշի օգնությամբ (տես գլ. XIII, § 2) համեմատենք գործոնային և մնացորդային դիսպերսիաները։ Դրա համար սկզբից հաշվենք չափանիշի դիտվող արժեքը՝

$$F_{դիտ} = \frac{S^2_{գործ}}{S^2_{մն}} = \frac{112}{22,67} = 4,94։$$

Նկատի ունենալով, որ համարիչի ազատության աստիճանը՝ $k_1=2$, հայտարարինը՝ $k_2=9$, և նշանակալիության մակարդակը՝ $\alpha=0,05$, աղյուսակից (հավելված 7) գտնում ենք $F_{կր}(0,05;\ 2;\ 9)=4,26$։

Քանի որ $F_{դիտ} > F_{կր}$, ապա խմբային միջինների հավասարության մասին զրոյական հիպոթեզը մերժում ենք։ Այլ կերպ ասած, խմբային միջինները «ամբողջությամբ» նշանակալի տարբերվում են։

597. F գործոնի 5 մակարդակներից յուրաքանչյուրում կատարված է 4-ական փորձ։ Դիսպերսիոն անալիզի մեթոդով, 0,05 նշանակալիության մակարդակի դեպքում, ստուգել խմբային $\overline{x}_{խj}$ միջինների հավասարության մասին զրոյական հիպոթեզը։ Ենթադրվում է, որ ընտրանքները վերցված են միատեսակ դիսպերսիաներով նորմալ համախմբություններից։ Փորձարկման արդյունքները բերված են աղյուսակ 46-ում։

Աղյուսակ 46

Փորձի համարը	Գործոնի մակարդակները			
i	F_1	F_2	F_3	F_4
1	36	56	52	39
2	47	61	57	57
3	50	64	59	63
4	58	66	58	61
5	67	66	79	65
$\overline{x}_{խj}$	51,6	62,6	61,0	57,0

Ցուցում։ Ընդունել $x_{ij} = y_{ij} - 58$։

Պատ.՝ $S_{\text{ընդ}} = 1850{,}55$; $S_{\text{գործ}} = 360{,}15$; $S_{\text{մն}} = 1490{,}40$; $S^2_{\text{գործ}} = 120$; $S^2_{\text{մն}} = 93$; $F_{\text{դիտ}} = 1{,}29$; $F_{\text{կր}}(0{,}05;\ 3;\ 16) = 3{,}24$։ *Խմբային միջինների հավասարության մասին զրոյական հիպոթեզի մերժման հիմքեր չկան։*

598. *Գործոնի 6 մակարդակներից յուրաքանչյուրում կատարված է 8-ական փորձ։ Դիսպերսիոն անալիզի մեթոդով, 0,01 նշանակալիության մակարդակի դեպքում, ստուգել խմբային միջինների հավասարության մասին զրոյական հիպոթեզը։ Ենթադրվում է, որ ընտրանքները վերցված են միատեսակ դիսպերսիաներով նորմալ համախմբություններից։ Փորձարկման արդյունքները բերված են աղյուսակ 47-ում։*

Աղյուսակ 47.

Փորձի համարը	Գործոնի մակարդակները					
i	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6
1	100	92	74	68	64	69
2	101	102	87	80	83	71
3	126	104	88	83	83	80
4	128	115	93	87	84	80
5	133	119	94	96	90	81
6	141	122	101	97	96	82
7	147	128	102	106	101	86
8	148	146	105	127	111	99
$\bar{x}_{\text{ի}j}$	128	116	93	93	89	81

Ցուցում։ Ընդունել $y_{ij} = x_{ij} - 100$։

Պատ.՝ $S_{\text{ընդ}} = 21567{,}48$; $S_{\text{գործ}} = 11945{,}60$; $S_{\text{մն}} = 9622$; $s^2_{\text{գործ}} = 2389$; $s^2_{\text{մն}} = 229$; $F_{\text{դիտ}} = 10{,}43$; $F_{\text{կր}}(0{,}01;\ 5;\ 42) = 2{,}44$։ *Խմբային միջինների հավասարության մասին զրոյական հիպոթեզը մերժվում է։*

599. *Երեք մակարդակներից յուրաքանչյուրում կատարված է 4-ական փորձ։ Դիսպերսիոն անալիզի մեթոդով, 0,05 նշանակալիության մակարդակի դեպքում, ստուգել խմբային միջինների հավասարության մասին հիպոթեզը։ Ենթադրվում է, որ ընտրանքները վերցված են միատեսակ դիսպերսիաներով նորմալ համախմբություններից։ Փորձարկման արդյունքները բերված են աղյուսակ 48-ում։*

Աղյուսակ 48

Փորձի համարը	Գործոնի մակարդակները		
i	F_1	F_2	F_3
1	35	30	21
2	32	24	22
3	31	26	34
4	30	20	31
$\bar{x}_{խj}$	32	25	27

Ցուցում։ Ընդունել $y_{ij}=x_{ij}-28$։

Պատ.՝ $S_{ընդ}=296$; $S_{գործ}=104$; $S_{մն}=192$; $s^2_{գործ}=52$; $s^2_{մն}=21,3$; $F_{դիտ}=2,44$; $F_{կր}(0,05;\ 2;\ 9)=4,26$։ *Խմբային միջինների հավասարության մասին զրոյական հիպոթեզի մերժման հիմքեր չկան։*

600. *Գործոնի չորս մակարդակներից յուրաքանչյուրում կատարված է 7 փորձ։ Դիսպերսիոն անալիզի մեթոդով, 0,05 նշանակալիության մակարդակի դեպքում, ստուգել խմբային միջինների հավասարության մասին զրոյական հիպոթեզը։ Ենթադրվում է, որ ընտրանքները վերցված են միատեսակ դիսպերսիաներով նորմալ համախմբություններից։ Փորձարկման արդյունքները բերված են աղյուսակ 49-ում։*

Փորձի համարը	*Գործոնի մակարդակները*			
i	F_1	F_2	F_3	F_4
1	51	52	56	54
2	59	58	56	58
3	53	66	58	62
4	59	69	58	64
5	63	70	70	66
6	69	72	74	67
7	72	74	78	69
$\bar{x}_{\text{խ}j}$	60,9	65,9	64,3	62,9

Ցուցում։ Ընդունել $y_{ij} = x_{ij} - 63$։ *Օգտվել դիտողություն 1-ից։*

Պատ.՝ $S_{\text{ընդ}} = 1539$; $S_{\text{գործ}} = 95$; $S_{\text{մն}} = 1444$; $s^2_{\text{գործ}} = 31{,}67$; $s^2_{\text{մն}} = 60{,}17$։ *Խմբային միջինների հավասարության մասին զրոյական հիպոթեզի մերժման հիմքեր չկան։*

601. *Գործոնի 3 մակարդակներից յուրաքանչյուրում կատարված է 4-ական փորձ։ Օգտվելով դիսպերսիոն անալիզի մեթոդից, 0,05 նշանակալիության մակարդակի դեպքում, ստուգել խմբային միջինների հավասարության մասին զրոյական հիպոթեզը։ Ենթադրվում է, որ ընտրանքները վերցված են միատեսակ դիսպերսիաներով նորմալ համախմբություններից։ Փորձարկման արդյունքները բերված են աղյուսակ 50-ում։*

Ցուցում։ Ընդունել $y_{ij} = x_{ij} - 27$։ *Օգտվել դիտողություն 1-ից։*

Պատ.՝ $S_{\text{ընդ}} = 334$; $S_{\text{գործ}} = 32$; $S_{\text{մն}} = 302$; $s^2_{\text{գործ}} = 16$; $s^2_{\text{մն}} = 33{,}56$։ *Խմբային միջինների հավասարության մասին զրոյական հիպոթեզի մերժման հիմքեր չկան։*

Փորձի համարը	Գործոնի մակարդակները		
i	F_1	F_2	F_3
1	27	24	22
2	23	20	21
3	29	26	36
4	29	30	37
$\bar{x}_{խj}$	28	25	29

§ 2. Տարբեր մակարդակներում փորձերի թիվը միատեսակ չէ

Եթե փորձերի թիվը F_1 մակարդակում հավասար է q_1, F_2 մակարդակում՝ q_2 ..., F_p մակարդակում՝ q_p, ապա շեղումների քառակուսիների ընդհանուր գումարը հաշվում են նույն ձևով, ինչպես բոլոր մակարդակներում միևնույն քանակի փորձերի դեպքում (տես § 1)։ Շեղումների քառակուսիների գործոնային գումարը հաշվում են

$$S_{գործ}=\frac{T_1^2}{q_1}+\frac{T_2^2}{q_2}+\dots+\frac{T_p^2}{q_p}-\frac{1}{n}\left[\sum_{j=1}^{p}T_j\right]^2$$

բանաձևով, որտեղ $n=q_1+q_2+\dots+q_p$ — *փորձերի ընդհանուր թիվն է։*

Մնացած հաշվումները կատարում են այնպես, ինչպես միևնույն քանակի փորձերի դեպքում՝

$$S_{մն}=S_{ընդ}-S_{գործ},$$

$$s^2_{գործ}=\frac{S_{գործ}}{p-1},\quad s^2_{մն}=\frac{S_{մն}}{n-p}.$$

602. *Կատարված է 13 փորձ, որոնցից 4-ը՝ գործոնի առաջին մակարդակում, 4-ը՝ երկրորդում, 3-ը՝ երրորդում և 2-ը՝ չորրորդում։ Դիսպերսիոն անալիզի մեթոդով, 0,05* նշանակալիության մակարդակի դեպքում, ստուգել խմբային միջինների հավասարության մասին զրոյական հիպոթեզը։ Ենթադրվում է, որ ընտրանքները վերցված են միատեսակ դիսպերսիաներով նորմալ համախմբություններից։ Փորձարկման արդյունքները բերված են աղյուսակ 51-ում։

Աղյուսակ 51

Փորձի համարը	Գործոնի մակարդակները			
i	F_1	F_2	F_3	F_4
1	1,38	1,41	1,32	1,31
2	1,38	1,42	1,33	1,33
3	1,42	1,44	1,34	—
4	1,42	1,45	—	—
$\bar{x}_{\text{խ}j}$	1,40	1,43	1,33	1,32

Լուծում։ Օգտվելով դիտողություն 2-ից (§ 1), անցնենք ամբողջ թվերին՝ $y_{ij}=x_{ij}100-138$։

Կազմենք հաշվարկային աղյուսակ 52-ը։ Օգտվելով աղյուսակի արդյունարար սյունակից և վերջին տողից հաշվենք շեղումների քառակուսիների ընդհանուր և գործոնային գումարները՝

$$S_{\text{ընդ}}=\sum S_j-\frac{1}{n}\left[\Sigma T_j\right]^2=293-\frac{9^2}{13}=293-6{,}23=286{,}77;$$

$$S_{\text{գործ}}=\frac{T_1^2}{q_1}+\frac{T_2^2}{q_2}+\frac{T_3^2}{q_3}+\frac{T_4^2}{q_4}-\frac{1}{n}\left[\Sigma T_j\right]^2=$$

$$=\frac{64}{4}+\frac{400}{4}+\frac{225}{3}+\frac{144}{2}-6{,}23=256{,}77\text{։}$$

Փորձի համարը	Գործոնի մակարդակները								Արդյունարար սյուն
	F_1		F_2		F_3		F_4		
i	y_{i1}	y_{ij}^2	y_{i2}	y_{i2}^2	y_{i3}	y_{i3}^2	y_{i4}	y_{i4}^2	
1	0	0	3	9	−6	36	−7	49	
2	0	0	4	16	−5	25	−5	25	
3	4	16	6	36	−4	16	—	—	
4	4	16	76	49	—	—	—	—	
$S_j=\Sigma y_{ij}^2$		32		100		77		74	$\Sigma S_j=293$
$T_j=\Sigma y_{ij}$	8		20		−15		−12		$\Sigma T_j=-9$
T_j^2	64		400		225		144		

Որոշենք շեղումների քառակուսիների մնացորդային գումարը՝

$$S_{մն}=S_{ընդ}-S_{գործ}=286{,}77-256{,}77=30։$$

Գտնենք գործոնային և մնացորդային դիսպերսիաները՝

$$S^2_{գործ}=\frac{S_{գործ}}{p-1}=\frac{256{,}77}{4-1}=\frac{256{,}77}{3}=85{,}59։$$

$$S^2_{մն}=\frac{S_{մն}}{n-p}=\frac{30}{13-4}=\frac{30}{9}=3{,}33։$$

Համեմատենք գործոնային և մնացորդային դիսպերսիաները F չափանիշի օգնությամբ (տես գլ. XIII, § 2)։ Դրա համար նախօրոք հաշվենք չափանիշի դիտվող արժեքը՝

$$F_{դիտ}=\frac{S^2_{գործ}}{S^2_{մն}}=\frac{85{,}59}{3{,}33}=25{,}7։$$

Հաշվի առնելով, որ համարիչի ազատության աստիճանը՝ $k_1 = p - 1 = 4 - 1 = 3$, *հայտարարինը՝* $k_2 = n - p = 13 - 4 = 9$ *և նշանակալիության մակարդակը՝* $\alpha = 0{,}05$, *աղյուսակից (հավելված 7) գտնում ենք* $F_{կր}(0{,}05;\ 3;\ 9) = 3{,}86$ *կրիտիկական կետը։*

Քանի որ $F_{դիտ} > F_{կր}$, *ապա խմբային միջինների հավասարության մասին զրոյական հիպոթեզը մերժում ենք։ Այլ կերպ ասած, խմբային միջինները նշանակալի են տարբերվում։*

603. *Կատարված է 14 փորձ, նրանցից 5-ը գործոնի առաջին մակարդակում, 3-ը՝ երկրորդում, 2-ը՝ երրորդում, 3-ը՝ չորրորդում, և մեկը՝ հինգերորդում։ Դիսպերսիոն անալիզի մեթոդով, 0,05 նշանակալիության մակարդակի դեպքում, ստուգել խմբային միջինների հավասարության մասին զրոյական հիպոթեզը։*

Ենթադրվում է, որ ընտրանքները վերցված են միատեսակ դիսպերսիաներով նորմալ համախմբություններից։ Դիտման արդյունքները բերված են աղյուսակ 53-ում։

Աղյուսակ 53

Փորձի համարը	*Գործոնի մակարդակները*				
i	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5
1 2 3 4 5	7,3 7,6 8,3 8,3 8,4	5,4 7,1 7,4 — —	6,4 8,1 — — —	7,9 9,5 9,6 — —	7,1 — — — —
$\bar{x}_{խj}$	7,98	6,63	7,25	9,0	7,1

Ցուցում։ Ընդունել $y_{ij} = 10x_{ij} - 78$։

Պատ.՝ $S_{ընդ} = 1570{,}43$, $S_{գործ} = 932{,}66$, $S_{մն} = 637{,}77$; $s^2_{գործ} =$

$=233,16$; $s^2_{մն}=70,86$; $F_{դիտ}=3,29$; $F_{կր}(0,05;\ 4;\ 9)=3,63$։ Խմբային միջինների հավասարության մասին զրոյական հիպոթեզի մերժման հիմքեր չկան։

604. Կատարված է 13 փորձ. Նրանցից 4-ը՝ գործոնի առաջին մակարդակում, 6-ը՝ երկրորդում և 3-ը՝ երրորդում։ Դիսպերսիոն անալիզի մեթոդով, 0,01 նշանակալիության մակարդակի դեպքում ստուգել խմբային միջինների հավասարության մասին զրոյական հիպոթեզը։ Ենթադրվում է, որ ընտրանքները վերցված են միատեսակ դիսպերսիաներով նորմալ համախմբություններից։ Փորձարկման արդյունքները բերված են աղյուսակ 54-ում։

Աղյուսակ 54

Փորձի համարը	Գործոնի մակարդակները		
i	F_1	F_2	F_3
1	37	60	69
2	47	86	100
3	40	67	98
4	60	92	
5		95	
6		98	
$\bar{x}_{խj}$	46	83	89

Ցուցում։ Ընդունել $y_{ij}=x_{ij}-73$։

Պատ.՝ $S_{ընդ}=6444$; $S_{գործ}=4284$; $S_{մն}=2160$; $s^2_{գործ}=2142$; $s^2_{մն}=216$; $F_{դիտ}=9,92$; $F_{կր}(0,01;\ 2;\ 10)=7,56$։ Զրոյական հիպոթեզը մերժվում է։ Խմբային միջինները նշանակալի են տարբերվում։

605. Կատարված է 14 փորձ. Նրանցից 7-ը՝ գործոնի առաջին մակարդակում, 3-ը՝ երկրորդում, 4-ը՝ երրորդում։

Դիսպերսիոն անալիզի մեթոդով, 0,01 նշանակալիության մակարդակի դեպքում, ստուգել խմբային միջինների հավասարության մասին զրոյական հիպոթեզը։ Ենթադրվում է, որ ընտրանքները վերցված են միատեսակ դիսպերսիաներով նորմալ համախմբություններից։ Փորձարկման արդյունքները բերված են աղյուսակ 55-ում։

Աղյուսակ 55

Փորձի համարը	Գործոնի մակարդակները		
i	F_1	F_2	F_3
1	30,56	43,44	31,36
2	32,66	47,51	36,20
3	34,78	53,80	36,38
4	35,50		42,20
5	36,63		
6	40,20		
7	42,28		
$\bar{x}_{խj}$	36,09	48,25	36,54

Ցուցում։ Ընդունել $y_{ij} = 100x_{ij} - 3900$։

Պատ.՝ $S_{ընդ}=5463442$; $S_{գործ} = 3399389$; $S_{մն}=2064053$; $s^2_{գործ} = 1699694$; $s^2_{մն}= 187641$; $F_{դիտ} = 9,06$, $F_{կր}$ $(0{,}01;\ 2;\ 11) = 7{,}21$, Զրոյական հիպոթեզը մերժվում է։ Խմբային միջինները նշանակալի են տարբերվում։

606. Կատարված է 26 փորձ. նրանցից 7-ը՝ գործոնի առաջին մակարդակում, 5-ը՝ երկրորդում, 8-ը՝ երրորդում և 6-ը՝ չորրորդում։ Դիսպերսիոն անալիզի մեթոդով, 0,05 նշանակալիության մակարդակի դեպքում, ստուգել խմբային միջինների հավասարության մասին զրոյական հիպոթեզը։ Ենթադրվում է, որ ընտրանքները վերցված են միատեսակ դիսպերսիաներով նորմալ համախմբություններից։ Դիտման արդյունքները բերված են աղյուսակ 56-ում։

Փորձի համարը	*Գործոնի մակարդակները*			
i	F_1	F_2	F_3	F_4
1	1600	1580	1460	1510
2	1610	1640	1550	1520
3	1650	1640	1600	1530
4	1680	1700	1620	1570
5	1700	1750	1640	1600
6	1700		1660	1680
7	1800		1740	
8			1820	
$\bar{x}_{\text{խմ}j}$	1677	1662	1638	1568

Ցուցում։ Ընդունել $y_{ij}=x_{ij}-1630$։

Պատ.՝ $S_{\text{ընդ}} = 192788$; $S_{\text{գործ}} = 45507$; $S_{\text{մն}} = 147281$; $S^2_{\text{գործ}} = 15169$; $S^2_{\text{մն}} = 6695$; $F_{\text{դիտ}} = 2{,}27$; $F_{\text{կր}} = (0{,}05;\ 3;\ 22) = 3{,}05$։

Խմբային միջինների հավասարության մասին զրոյական հիպոթեզը մերժելու հիմքեր չկան։

ՀԱՎԵԼՎԱԾՆԵՐ

ՀԱՎԵԼՎԱԾ 1

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$$ *ֆունկցիայի արժեքների աղյուսակ*

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
1,26	0,3962	1,59	0,4441	1,92	0,4726	2,50	0,4938
1,27	0,3980	1,60	0,4452	1,93	0,4732	2,52	0,4941
1,28	0,3997	1,61	0,4463	1,94	0,4738	2,54	0,4945
1,29	0,4015	1,62	0,4474	1,95	0,4744	2,56	0,4948
1,30	0,4032	1,63	0,4484	1,96	0,4750	2,58	0,4951
1,31	0,4049	1,64	0,4495	1,97	0,4756	2,60	0,4953
1,32	0,4066	1,65	0,4505	1,97	0,4761	2,62	0,4956
1,33	0,4082	1,66	0,4515	1,99	0,4767	2,64	0,4959
1,34	0,4099	1,67	0,4525	2,00	0,4772	2,66	0,4961
1,35	0,4115	1,68	0,4535	2,02	0,4783	2,68	0,4963
1,36	0,4131	1,69	0,4545	2,04	0,4793	2,70	0,4965
1,37	0,4147	1,70	0,4554	2,06	0,4803	2,72	0,4967
1,38	0,4162	1,71	0,4564	2,08	0,4812	2,74	0,4969
1,39	0,4177	1,72	0,4573	2,10	0,4821	2,76	0,4971
1,40	0,4192	1,73	0,4582	2,12	0,4830	2,78	0,4973
1,41	0,4207	1,74	0,4591	2,14	0,4838	2,80	0,4974
1,42	094222	1,75	0,4599	2,16	0,4846	2,82	0,4976
1,43	0,4236	1,76	0,4608	2,18	0,4854	2,84	0,4977
1,44	0,4251	1,77	0,4616	2,20	0,4861	2,86	0,4979
1,45	0,4265	1,78	0,4625	2,22	0,4868	2,88	0,4980
1,46	0,4279	1,79	0,4633	2,24	0,4875	2,90	0,4981
1,47	0,4292	1,80	0,4641	2,26	0,4881	2,92	0,4982
1,48	0,4306	1,81	0,4649	2,28	0,4887	2,94	0,4984
1,49	0,4319	1,82	0,4656	2,30	0,4893	2,96	0,4985
1,50	0,4332	1,83	0,4664	2,32	0,4898	2,98	0,4986
1,51	0,4345	1,84	0,4671	2,34	0,4904	3,00	0,49865
1,52	0,4357	1,85	0,4678	2,36	0,4909	3,20	0,49931
1,53	0,4370	1,86	0,4686	2,38	0,4913	3,40	0,49966
1,54	0,4382	1,87	0,4693	2,40	0,4918	3,60	0,499841
1,55	0,4394	1,88	0,4699	2,42	0,4922	3,80	0,499928
1,56	0,4406	1,89	0,4706	2,44	0,4927	4,00	0,499968
1,57	0,4418	1,90	0,4713	2,46	0,4931	4,50	0,499997
1,58	0,4429	1,91	0,4719	2,48	0,4934	5,00	0,499997

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$ *ֆունկցիայի արժեքների աղյուսակ*

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
0,00	0,0000	0,32	0,1255	0,64	0,2389	0,96	0,3315
0,01	0,0040	0,33	0,1293	0,65	0,2422	0,97	0,3340
0,02	0,0080	0,34	0,1331	0,66	0,2454	0,98	0,3365
0,03	0,0120	0,35	0,1368	0,67	0,2486	0,99	0,3389
0,04	0,0160	0,36	0,1406	0,68	0,2517	1,00	0,3413
0,05	0,0199	0,37	0,1443	0,69	0,2549	1,01	0,3438
0,06	0,0239	0,38	0,1480	0,70	0,2580	1,02	0,3461
0,07	0,0279	0,39	0,1517	0,71	0,2611	1,03	0,3485
0,08	0,0319	0,40	0,1554	0,72	0,2642	1,04	0,3508
0,09	0,0359	0,41	0,1591	0,73	0,2673	1,05	0,3531
0,10	0,0398	0,42	0,1628	0,74	0,2703	1,06	0,3554
0,11	0,0438	0,43	0,1664	0,75	0,2734	1,07	0,3577
0,12	0,0478	0,44	0,1700	0,76	0,2764	1,08	0,3599
0,13	0,0517	0,45	0,1736	0,77	0,2794	1,09	0,3621
0,14	0,0557	0,46	0,1772	0,78	0,2823	1,10	0,3643
0,15	0,0596	0,47	0,1808	0,79	0,2852	1,11	0,3665
0,16	0,0636	0,48	0,1844	0,80	0,2881	1,12	0,3686
0,17	0,0675	0,49	0,1879	0,81	0,2910	1,13	0,3708
0,18	0,0714	0,50	0,1915	0,82	0,2939	1,14	0,3729
0,19	0,0753	0,51	0,1950	0,83	0,2967	1,15	0,3749
0,20	0,0793	0,52	0,1985	0,84	0,2995	1,16	0,3770
0,21	0,0832	0,53	0,2019	0,85	0,3023	1,17	0,3790
0,22	0,0871	0,54	0,2054	0,86	0,3051	1,18	0,3810
0,23	0,0910	0,55	0,2088	0,87	0,3078	1,19	0,3830
0,24	0,0948	0,56	0,2123	0,88	0,3106	1,20	0,3849
0,25	0,0987	0,57	0,2157	0,89	0,3133	1,21	0,3869
0,26	0,1026	0,58	0,2190	0,90	0,3159	1,22	0,3883
0,27	0,1064	0,59	0,2224	0,91	0,3186	1,23	0,3907
0,28	0,1103	0,60	0,2257	0,92	0,3212	1,24	0,3925
0,29	0,1141	0,61	0,2291	0,93	0,3238	1,25	0,3944
0,30	0,1179	0,62	0,2324	0,94	0,3264		
0,31	0,1217	0,63	0,2357	0,95	0,3289		

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

ՀԱՎԵԼՎԱԾ 3

$t_\gamma = t(\gamma, n)$ *Արժեքների աղյուսակ*

n \ γ	0,95	0,99	0,999	n \ γ	0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,47	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,991	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

ՀԱՎԵԼՎԱԾ 4

$q = q(\gamma, n)$ *Արժեքների աղյուսակ*

n \ γ	0,95	0,99	0,999	n \ γ	0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162

ՀԱՎԵԼՎԱԾ 5

χ^2 բաշխման կրիտիկական կետերը

Ազատության աստիճանը՝ k	α–նշանակալիության մակարդակը					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

Ստյուդենտի բաշխման կրիտիկական կետերը

Ազատության աստիճանը՝ k	α-նշանակալիության մակարդակը (երկկողմ կրիտիկական տիրույթ)					
	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	6,31	12,7	31,82	63,7	318,3	637,0
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,96
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,49	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,74
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,72
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,44	3,71
27	1,71	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29
	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
	α նշանակալիության մակարդակը (միակողմ կրիտիկական տիրույթ)					

ՀԱՎԵԼՎԱԾ 7

Ֆիշեր-Սնեդեկորի F բաշխման կրիտիկական կետերը

k_1—*մեծ դիսպերսիայի ազատության աստիճանը*

k_2—*փոքր դիսպերսիայի ազատության աստիճանը*

Նշանակալիության մակարդակը՝ $\alpha=0,01$

k_2 \ k_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	4052	4999	5403	5625	5764	5889	5928	5981	6022	6056	6082	6106
2	98,49	99,01	90,17	99,25	99,33	99,30	99,34	99,36	99,36	99,40	99,41	99,42
3	34,12	30,81	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,34	27,23	27,13	27,05
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,54	14,45	14,37
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,45	10,27	10,15	10,05	9,96	9,89
6	13,74	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,79	7 72
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	7,00	6,84	6,71	6,62	6,54	6,47
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,19	6,03	5,91	5,82	5,74	5,67
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,62	5,47	5,35	5,26	5,18	5,11
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,21	5,06	4,95	4,85	4,78	4,71
11	9,86	7,20	6,22	5,67	5,32	5,07	4,88	4,74	4,63	4,54	4,46	4,40
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,65	4,50	4,39	4,30	4,22	4,16
13	9,07	6,70	5,74	5,20	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	4,02	3,96
14	8,86	6,51	5,56	5,03	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,86	3,80
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,73	3,67
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,61	3,55
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,52	3,45

Նշանակալիության մակարդակը՝ $\alpha=0,05$

k_2 \ k_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,36	19,37	19,38	19,39	19,40	19,41
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,88	8,84	8,81	8,78	8,76	8,74
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,93	5,91
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,78	4,74	4,70	4,68
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,63	3,60	3,57
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,34	3,31	3,28
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,13	3,10	3,07
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,97	2,94	2,91
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,86	2,82	2,79
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,92	2,85	2,80	2,76	2,72	2,69
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,84	2,77	2,72	2,67	2,63	2,60
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,77	2,70	2,65	2,60	2,56	2,53
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,70	2,64	2,59	2,55	2,51	2,48
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,45	2,42
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,62	2,55	2,50	2,45	2,41	2,38

Կոչրենի բաշխման կրիտիկական կետերը
(K—ազատության աստիճան, l—ընտրանքների թիվը)

Նշանակալիության մակարդակը՝ $\alpha=0{,}01$

l \ k	1	2	3	4	5	6	7
2	0,9999	0,9950	0,9794	0,9586	0,9373	0,9172	0,8988
3	9933	9423	8831	8335	7933	7606	7335
4	9676	8643	7814	7212	6761	6410	6129
5	0,9279	0,7885	0,6957	0,6329	0,5875	0,5531	0,5259
6	8828	7218	6258	5635	5195	4866	4608
7	8376	6644	5685	5080	4659	4347	4105
8	0,7945	0,6152	0,5209	0,4627	0,4226	0,3932	0,3704
9	7544	5727	4810	4251	3870	3592	3378
10	7175	5358	4469	3934	3572	3308	3106
12	0,6528	0,4751	0,3919	0,3428	0,3099	0,2861	0,2680
15	5747	4069	3317	2882	2593	2386	2228
20	4799	3297	2654	2288	2048	1877	1748
24	0,4247	0,2871	0,2295	0,1970	0,1759	0,1608	0,1495
30	3632	2412	1913	1635	1454	1327	1232
40	2940	1915	1508	1281	1135	1033	0957
60	0,2151	0,1371	0,1069	0,0902	0,0796	0,0722	0,0668
120	1225	0759	0585	0489	0429	0387	0357
∞	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000

Նշանակալիության մակարդակը՝ $\alpha=0{,}01$

l \ k	8	9	10	16	36	144	∞
2	0,8823	0,8674	0,8539	0,7949	0,7067	0,6062	0,5000
3	7107	6912	6743	6059	5153	4230	3333
4	5897	5702	5536	4884	4057	3251	2500
5	0,5037	0,4854	0,4697	0,4094	0,3351	0,2644	0,2000
6	4401	4229	4084	3529	2858	2229	1667
7	3911	3751	3616	3105	2494	1929	1429
8	0,3522	0,3373	0,3248	0,2779	0,2214	0,1700	0,1250
9	3207	3067	2950	2514	1992	1521	1111
10	2945	2813	2704	2297	1811	1376	1000
12	0,2535	0,2419	0,2320	0,1961	0,1535	0,1157	0,0833
15	2104	2002	1918	1612	1251	0934	0667
20	1646	1567	1501	1248	0960	0709	0500
24	0,1406	0,1338	0,1283	0,1060	0,0810	0,0595	0,0417
30	1157	1100	1054	0867	0658	0480	0333
40	0898	0853	0816	0668	0503	0363	0250
60	0,0625	0,0594	0,0567	0,0461	0,0344	0,0245	0,0167
120	0334	0316	0302	0242	0178	0125	0083
∞	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000

Նշանակալիության մակարդակը՝ $\alpha=0,05$

l \ k	1	2	3	4	5	6	7
2	0,9985	0,9750	0,9392	0,9057	0,8772	0,8534	0,8332
3	9669	8709	7977	7457	7071	6771	6530
4	9065	7679	6841	6287	5895	5598	5365
5	0,8412	0,6338	0,5981	0,5440	0,5063	0,4783	0,4564
6	7808	6161	5321	4803	4447	4184	3980
7	7271	5612	4800	4307	3974	3726	3535
8	0,6798	0,5157	0,4377	0,3910	0,3595	0,3362	0,3185
9	6385	4775	4027	3584	3286	3067	2901
10	6020	4450	3733	3311	3029	2823	2666
12	0,5410	0,3924	0,3624	0,2880	0,2624	0,2439	0,2299
15	4709	3346	2758	2419	2195	2034	1911
20	3894	2705	2205	1921	1735	1602	1501
24	0,3434	0,2354	0,1907	0,1656	0,1493	0,1374	0,1286
30	2929	1980	1593	1377	1237	1137	1061
40	2370	1576	1259	1082	0968	0887	0827
60	0,1737	0,1131	0,0895	0,0765	0,0682	0,0623	0,0583
120	0998	0632	0495	0419	0371	0337	0312
∞	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000

Նշանակալիության մակարդակը՝ $\alpha=0,05$

l \ k	8	9	10	16	36	144	∞
2	0,8159	0,8010	0,7880	0,7341	0,6602	0,5813	0,5000
3	6333	6167	6025	5466	4748	4031	3333
4	5175	5017	4884	4366	3720	3093	2500
5	0,4387	0,4241	0,4118	0,3645	0,3066	0,2013	0,2000
6	3817	3682	3568	3135	2612	2119	1667
7	3384	3259	3154	2756	2278	1833	1429
8	0,3043	0,2926	0,2829	0,2462	0,2022	0,1616	0,1250
9	2768	2659	2568	2226	1820	1446	1111
10	2541	2439	2353	2032	1655	1308	1000
12	0,2187	0,2098	0,2020	0,1737	0,1403	0,1100	0,0833
15	1815	1736	1671	1429	1144	0889	0667
20	1422	1357	1303	1108	0879	0675	0500
24	0,1216	0,1160	0,1113	0,0942	0,0743	0,0567	0,0417
30	1002	0958	0921	0771	0604	0457	0333
40	0780	0745	0713	0595	0462	0347	0250
60	0,0552	0,0520	0,0497	0,0411	0,0316	0,0234	0,0167
120	0292	0279	0266	0218	0165	0120	0083
∞	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Նախաբան 3

Առաջին մաս . . . .
Պատահույթներ 5

Առաջին գլուխ—Հավանականության սահմանումը 5

§ 1. *Հավանականության դասական և վիճակագրական սահմանումը* 5
§ 2. *Երկրաչափական հավանականություններ* 13

Երկրորդ գլուխ—Հիմնական թեորեմներ 24

§ 1. *Հավանականությունների գումարման և բազմապատկման թեորեմները* 24
§ 2. *Գոնե մեկ պատահույթի հանդես գալու հավանականությունը* 42
§ 3. *Լրիվ հավանականության բանաձևը* 45
§ 4. *Բայեսի բանաձևը* 48

Երրորդ գլուխ—Փորձերի կրկնությունը 56

§ 1. *Բեռնուլիի բանաձևը* 56
§ 2. *Լապլասի լոկալ և ինտեգրալ թեորեմները* 60
§ 3. *Հարաբերական հաճախության շեղումը հաստատուն հավանականությունից՝ անկախ փորձերում* 66
§ 4. *Անկախ փորձերում պատահույթի հանդես գալու ամենահավանական թիվը* 72
§ 5. *Արտադրող ֆունկցիա* 78

Երկրորդ մաս
Պատահական մեծություններ . . . .

Չորրորդ գլուխ — *Դիսկրետ պատահական մեծություններ* 82

§ 1. *Դիսկրետ պատահական մեծության հավանականությունների բաշխման օրենքը։ Բինոմական և Պուասոնի օրենքները* 82

§ 2. Պատահույթների պարզագույն հոսք 93
§ 3. Դիսկրետ պատահական մեծությունների թվային բնութագրիչները 97
§ 4. Տեսական մոմենտները 124

Հինգերորդ գլուխ—Մեծ թվերի օրենքը 130

§ 1. Չեբիշևի անհավասարությունը 130
§ 2. Չեբիշևի թեորեմը 134

Վեցերորդ գլուխ—Պատահական մեծությունների հավանականությունների բաշխման ֆունկցիաները 140

§ 1. Պատահական մեծության հավանականությունների բաշխման ինտեգրալ ֆունկցիան 140
§ 2. Անընդհատ պատահական մեծության հավանականությունների բաշխման դիֆերենցիալ ֆունկցիան 146
§ 3. Անընդհատ պատահական մեծությունների թվային բնութագրիչները 153
§ 4. Հավասարաչափ բաշխում 172
§ 5. Նորմալ բաշխում 178
§ 6. Ցուցչային բաշխում և նրա թվային բնութագրիչները 178
§ 7. Հուսալիության ֆունկցիան 194

Յոթերորդ գլուխ—Մեկ և երկու պատահական արգումենտների ֆունկցիայի բաշխումը 199

§ 1. Մեկ պատահական արգումենտի ֆունկցիա 199
§ 2. Երկու պատահական արգումենտների ֆունկցիա . . . 218

Ութերորդ գլուխ—Երկու պատահական մեծությունների համակարգեր 227

§ 1. Երկչափ պատահական մեծության բաշխման օրենք . 227
§ 2. Դիսկրետ երկչափ պատահական մեծության բաղադրիչների հավանականությունների պայմանական բաշխման օրենքները 235
§ 3. Անընդհատ երկչափ պատահական մեծության բաղադրիչների դիֆերենցիալ և պայմանական դիֆերենցիալ ֆունկցիաների որոշումը 238
§ 4. Երկու անընդհատ պատահական մեծությունների համակարգի թվային բնութագրիչները 242

Երրորդ մաս 250

Մաթեմատիկական վիճակագրության տարրերը 250

Իններորդ գլուխ—Ընտրանքային եղանակ 250

§ 1. Ընտրանքի վիճակագրական բաշխումը 250
§ 2. Ընտրանքային բաշխման ֆունկցիա 251
§ 3. Պոլիգոն և հիստոգրամ 253

Տասներորդ գլուխ—Բաշխման պարամետրերի վիճակագրական գնահատականները 260

§ 1. Կետային գնահատականներ 260
§ 2. Միջակայքային գնահատականներ 270

Տասնմեկերորդ գլուխ 278

Ընտրանքի տեղեկատու բնութագրիչների հաշվառման մեթոդները . 278

§ 1. Ընտրանքային միջինի և դիսպերսիայի հաշվառման արտադրյալների մեթոդը 278
§ 2. Ընտրանքային միջինի և դիսպերսիայի հաշվման գումարների մեթոդը 284
§ 3. Էմպիրիկ բաշխման ասիմետրիան և էքսցեսը 288

Տասներկուերորդ գլուխ—Կոռելյացիայի տեսության տարրերը 296

§ 1. Գծային կոռելյացիա 296
§ 2. Կորագիծ կոռելյացիա 305

Տասներեքերորդ գլուխ—Վիճակագրական հիպոթեզների վիճակագրական ստուգումը 312

§ 1. Հիմնական տեղեկություններ 312
§ 2. Նորմալ գլխավոր համախմբությունների երկու դիսպերսիաների համեմատումը 314
§ 3. Նորմալ համախմբության գլխավոր հիպոթետիկ և ուղղված ընտրանքային դիսպերսիաների համեմատումը 319
§ 4. Հայտնի դիսպերսիաներով երկու գլխավոր համախմբությունների միջինների համեմատումը (մեծ ծավալի անկախ ընտրանքներ) 325
§ 5. Անհայտ, բայց հավասար դիսպերսիաներով երկու նորմալ գլխավոր համախմբությունների միջինների համեմատումը (փոքր անկախ ընտրանքներ) 328

§ 6. Նորմալ համախմբության գլխավոր հիպոթետիկ միջինի համեմատումը ընտրանքային միջինի հետ 333
§ 7. Անհայտ դիսպերսիաներով նորմալ գլխավոր համախմբությունների երկու միջինների համեմատումը (ոչ անկախ ընտրանքներ) 339
§ 8. Պատահույթի հիպոթետիկ հավանականության և դիտվող հարաբերական հաճախության համեմատումը . . . 343
§ 9. Մի քանի նորմալ համախմբությունների դիսպերսիաների համեմատումը տարբեր ծավալի ընտրանքների դեպքում։ Բարտլետի չափանիշը 347
§ 10. Մի քանի նորմալ համախմբությունների դիսպերսիաների համեմատումը միատեսակ ծավալի ընտրանքների դեպքում։ Կոչրենի չափանիշը 354
§ 11. Կոռելյացիայի գործակցի նշանակալիության մասին հիպոթեզի ստուգումը 358
§ 12. Գլխավոր համախմբության նորմալ բաշխվածության մասին հիպոթեզի ստուգումը Պիրսոնի չափանիշով . . 366
§ 13. Գլխավոր համախմբության նորմալ բաշխվածության մասին հիպոթեզի գրաֆիկական ստուգումը։ Ուղղված դիագրամների մեթոդը։ 379
§ 14. Գլխավոր համախմբության ցուցչային բաշխվածության մասին հիպոթեզի ստուգումը 392
§ 15. Գլխավոր համախմբության բինոմական օրենքով բաշխվածության մասին հիպոթեզի ստուգումը 398
§ 16. Գլխավոր համախմբության հավասարաչափ օրենքով բաշխվածության մասին հիպոթեզի ստուգումը 403
17. Գլխավոր համախմբության Պուասոնի օրենքով բաշխված լինելու մասին հիպոթեզի ստուգումը 411

Տասնչորսերորդ գլուխ—Միագործոն դիսպերսիոն անալիզ

§ 1. Նույն թվով փորձարկումներ բոլոր մակարդակներում 417
§ 2. Տարբեր մակարդակներում փորձերի թիվը միատեսակ չէ 426
Հավելվածներ 433
Բովանդակություն 443

Վ. Ե. Գմուրման

ՀԱՎԱՆԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ՎԻՃԱԿԱԳՐՈՒԹՅԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՁԵՌՆԱՐԿ

Թարգմանիչներ՝ Ֆ. Ն. Գալստյան
Ս. Մ. Մկրտչյան
Մասն. խմբագիր՝ Տ. Վ. Ղազարյան
Խմբագիր՝ Մ. Ա. Մարգարյան, Ս. Ս. Հակոբյան
Գեղ. խմբագիր՝ Բ. Վ. Մազմանյան
Տեխ. խմբագիր՝ Մ. Ն. Դավթյան
Վերստուգող սրբագրիչ՝ Վ. Ն. Վարդանյան

Պատվեր 1589 *Տպաքանակ 5000*

Հանձնված է շարվածքի 22. 2. 79 թ.
Ստորագրված է տպագրության 20. 12. 79 թ.
Թուղթ № 3,84$\times$108$^{1}/_{32}$, բարձր տպագրություն, տառատեսակը՝ գրքի սովորական, հրատ. 20,54 մամ., տպագր. 14,0 մամ. պայմ. 23,5 մամ.։
Գինը 1 ռ.։

ИБ—№ 476
«Լույս» հրատարակչություն, Երևան—9, Կիրովի 19ա
Издательство «Луйс», Ереван-9, ул. Кирова, 19а.

Полиграфкомбинат им. Акопа Мегапарта Госкомитета по делам издательств, полиграфии и книжной торговли Арм. ССР, Ереван-9, ул. Теряна, 91.