**Էկոնոմետրիկա առարկան, մեթոդը և խնդիրները**

Էկոնոմետրիկան դա դասընթաց է, որը վիճակագրական տվյալների հիման վրա տալիս է տնտեսագիտական երևույթների և գործընթացների փոխկախվածությունների քանակական բնութագիրը: Էկոնոմետրիկա բառը առաջացել է 2 բառերից` տնտեսագիտություն և մետրիկա: Էկոնոմետրիկան դա գիտություն է տնտեսագիտական չափումների վերաբերյալ: Այն 3 գիտությունների համակցություն է.

1. Տնտեսագիտության տեսություն

2. Մաթեմատիկական և տնտեսական վիճակագրություն

3. Մաթեմատիկա

Էկոնոմետրիկ հետազոտման հիմնական առարկան հանդիսանում է զանգվածային տնտեսական երևույթները և գործընթացները: Վիճակագրություն և էկոնոմետրիկա առարկաները շատ նման են, այնպես որ վիճալագրությունը գործ ունի սոցիալ-տնտեսական երևույթների հետ: Էկոնոմետրիկայի խնդիրն է ամբողջությամբ քանակապես բնութագրել այն տնտեսական օրինաչափությունները, որոնք առաջ են քաշվել տնտեսագիտության տեսության կողմից և սահմանված է միայն ընդհանուր: Տնտեսական գործընթացների և երևույթների վերլուծությունը էկոնոմետրիկայում լուսաբանվում է մաթեմատիկական մոդելներով կառուցված փորձարարական տվյալների հիման վրա պրակտիկորեն: Տնտեսական օրինաչափությունների ուսումնասիրման բոլոր էկոնոմետրիկական մեթոդները և հնարքները սերտորեն շաղկապված են մաթեմատիկական վիճակագրության հետ: Էկոնոմետրիկայի յուրահատկությունը այն է, որ իր առաջ քաշած խնդիրը լուծում է արտահայտելով օրինաչափությունները վիճակագրության օգնությամբ: Մաթեմատիկական վիճակագրության մեթոդների կիրառման յուրահատկութունը էկոնոմետրիկայում կայանում է նրանում, որ պրակտիկորեն բոլոր տնտեսական ցուցանիշները հանդիսանում են պատահական մեծություններ, այլ ոչ թե փորձարկման, ստուգման արդյունք: Այդ պատճառով էլ գոյություն ունեն կատարելագործված և լրացուցիչ մեթոդներ, որոնք մաթեմատիկական վիճակագրությունում չեն օգտագործվում: Մասնավորապես տնտեսական տվյալները պարունակում են չափման սխալներ: Էկոնոմետրիկայում մշակում են վերլուծության հատուկ մեթոդներ, որոնք հնարավոր են դարձնում հեռացնել կամ իջեցնել այդ սխալի ազդեցությունը փորձերի, արդյունքների վրա: Այսպիսով` էկոնոմետրիկան մաթեմատիկական և վիճակագրական մեթոդների միջոցով վերլուծում է տնտեսագիտական օրինաչափությունները, որոնք ապացուցված են եղել տնտեսագիտության տեսության կողմից: Էկոնոմետրիկայի մոդելի օգնությամբ լուծվում է լայն շրջանի շատ տարբեր խնդիրներ: Դրանք կարելի է դասակարգել ըստ հետևյալ հատկանիշների`

1. Ըստ վերջնական կիրառական նպատակների

2. Ըստ մարզերի ուսումնասիրվող տնտեսական համակարգի

3. Ըստ խնդիրների, որոնք լուծվում են մակրո և միկրո մակարդակներում

4. Ըստ վերջավոր կիրառման նպատակի առանձնացվում է 2 հիմնական խնդիրներ`

ա. սոցիալ-տնտեսական ցուցանիշների կանխատեսումը բնութագրելով վերլուծվող համակարգի վիճակը և զարգացումը

բ. համակարգի սոցիալ-տնտեսական զարգացման մոդելավորման հնարավոր տարբերակները որոշելու այն պարամետրերը, որոնք ունեն ավելի հզոր ազդեցություն ամբողջ համակարգի վիճակի վրա:

**Էկոնոմետրիկական մոդելների հիմնական տեսակները**

Էկոնոմետրիկայի հիմնական գործիքը հանդիսանում են էկոնոմետրիկական մոդելները: Առանձնացվում է 3 դասեր`

*1) Ժամանակային շարքերի մոդել*- մոդելը իրենից ներկայացնում է արդյունքային հատկանիշի կախվածությունը ժամանակի փոփոխականից, որոնք վերաբերվում են այլ ժամանակի պահերին: Ժամանակային շարքերի մոդելում, որտեղ արդյունքային հատկանիշը կախված է ժամանակից վերաբերվում են`

√ տրենդի մոդելը (արդյունքային հատկանիշի կախվածություն տրենդային կոմպոնենտից)

√ սեզոնայնության մոդելը (արդյունքային հատկանիշի կախվածություն սեզոնային կոմպոնենտից)

√ տրենդի և սեզոնայնության մոդել

Ժամանակային շարքերի մոդելներում, որտեղ արդյունքային հատկանիշը կախված է փոփոխականներից և կախված է ժամանակի պահերից վերաբերվում են հետևյալ մոդելները.

▪ մոդել բաշխման լագով- որը բացատրվում է արդյունքային հատկանիշի կախվածությունը նախորդ գործոնային փոփոխականի արժեքի տատանումով

▪ ավտոռեգրեսիոն մոդել- որը բացատրվում է արդյունքային հատկանիշի կախվածությունը նախորդ արդյունքային փոփոխականներից տատանումով

▪ սպասման մոդել- դա բացատրվող տատանումն է արդյունքային հատկանիշի և ապագա գործոնային արժեքի կամ արդյունքային փոփոխականի միջև կախվածությունը: Ժամանակային շարքերի մոդելները կարող են լինել ստացիոնար և ոչ ստացիոնար: Ստացիոնար ժամանակային շարքերը բնութագրվում են հաստատուն միջին արժեքով, դիսպերսիայով և ավտոկոռելացիայով, այսինքն` ժամանակային շարքը չի պարունակում տրենդային և սեզոնային կոմպոնենտ: Ոչ ստացիոնար ժամանակային շարքերում շարքի բաշխման մակարդակը կախված է ժամանակի փոփոխականից, պարունակում է տրենդային և սեզոնային կոմպոնենտներ:

*2) Մեկ հավասարումով ռեգրեսիոն մոդել*- այդպիսի մոդելներում կախյալ և արդյունքային փոփոխականները սովորաբար բերկայացվում են գործոնային և անկախ X1 X2…Xn հատկանիշի ֆունկցիայի տեսքով. Y=f( X, β)=f(X1 X2…Xn , β1β2…βn )

որտեղ βi i=1,n ռեգրեսիայի հավասարման պարամետրն է:

Ռեգրեսիոն մոդելները լինում են զույգային և բազմակի ռեգրեսիա:

Կախված Y=f( X, β) ֆունկցիայի ձևից մոդելները լինում են գծային և ոչ գծային ռեգրեսիա: Գծային մոդելի օրինակ են`

Գնի ֆունկցիան` P=f(Q, PK)

որտեղ P-ն որոշակի ապրանքի գինն է կախված Q մատակարարման ծավալից և PK մրցակցող ապրանքի գնից

Պահանջարկի ֆունկցիա` Qd = f(P,Pk, I)

որտեղ Qd-ն որոշակի ապրանք-առաջարկի մեծությունն է կախված տվյալ ապրանքի գնից, մրցակցող ապրանքի գնից, ինչպես նաև սպառողի իրական եկամուտներից:

Արտադրական ֆունկցիա` Q=f(L,K)

*3) Միաժամանակյա հավասարումների համակարգ* – տրված մոդելները նկարագրվում են փոխկապակցված ռեգրեսիոն հավասարումների համակարգերով: Համակարգը կարող է կազմված լինել նույնության և ռեգրեսիոն հավասարումներով, որոնցից յուրաքանչյուրը կարող է իր մեջ ընդգրկել ոչ միայն փոփոխական գործոններ, այլ նաև արդյունքային փոփոխականներ համակարգի այլ հավասարումներից: Նույնության համար բնութագրականը այն է, որ դրանց ձևը և պարամետրերի արժեքները հայտնի են: Միաժամանակյա հավասարումների համակարգի օրինակ կարող է ծառայել պահանջարկի և առաջարկի մոդելը:

**Ռեգրեսիայի մոդելի որակի որոշումը**

Ռեգրեսիայի մոդելի որակը ադեկվատ է սկզբնական մոդելի կառուցմանը: Գծային զույգային ռեգրեսիայի որակը որոշվում է գծային կոռելացիայի գործակցի օգնությամբ, որը հավասար է`

rxy = xy – x y

δx δy

որտեղ δx և δy միջին քառակուսային շեղումներն են:

Զույգային կոռելացիայի գործակիցը ցոիյց է տալիս կապի դերտությունը ուսումնասիրվող հատկանիշների միջև: Այն փոփոխվում է -1-ից մինչև +1 սահմաններում: Եթե rxy-ը փոփոխվում է -1-ից 0-ի միջակայքում, ապա կապը կլինի հակադարձ: Եթե rxy=0` հատկանիշի միջև կապը բացակայում է: Եթե rxy= +1 կամ -1, ապա ուսումնասիրվող հատկանիշների միջև կապը ֆունկցիոնալ է: Որքան rxy-ը բացարձակ արժեքում մոտ է 1-ին, այնքան սերտ է կապը հատկանիշների միջև: Զույգային կոռելացիայի գործակիցը հաշվարկվում է քանակական ցուցանիշների համար: Եթե բարձրացնենք քառակուսի` կստանանք դետերմինացիայի գործակից: Այդ գործակիցը ցուց է տալիս, թե քանի %-ով է արդյունքային հատկանիշի տատանումը բացատրվում գործոնային հատկանիշի տատանումով տատանման ընդհանուր ծավալում:

rxy = 0.7 D = 0.72 × 100 % = 49 %

Եթե կոռելացիոն դաշտի բոլոր կետերը գտնվում են ռեգրեսիայի տեսական գծի վրա, ապա rxy-ը = 1, հետևաբար կապը ֆունկցիոնալ է:

Ռեգրեսիայի հավասարման միջին քառակուսային սխալը իրենից ներկայացնում է արդյունքյին հատկանիշի փաստացի արժեքի և տեսական արժեքից ունեցած շեղման միջին քառակուսային շեղումը: Միջին քառակուսային սխալի մեծությունը կարելի է համեմատել արդյունքային հատկանիշի միջին քառակուսային շեղման հետ: Եթե Se < δy

նշանակում է ռեգրեսիայի մոդելի օգտագործումը նպատակահարմար է:

Ապրոքսիմացիայի միջին սխալը որոշվում է հետևյալ բանաձևով.

A = Σ × 100

Որքան փոքր է փորձնական կետերի ցրվածությունը տեսական գծի շուրջը, այնքան փոքր է ապրոքսիմացիայի միջին սխալը: Եթե այն փոքր է 7-ից, ապա դա նշանակում է, որ մոդելը լավ որակի է:

Փոքրագույն քառակուսիների մեթոդի օգնությամբ կարելի է գնահատել միայն ռեգրեսիայի հավասարման պարամետրերը: Որպեսզի ստուգենք այդ պարամետրերի հավաստի կամ ոչ նշանակալի լինելը, օգտվում ենք վարկածի ստուգման վիճակագրական մեթոդներից: Պետք է կատարել ռեգրեսիայի պարամետրերի, կոռելացիայի գործակցի և ռեգրեսիայի հավասարման նշանակալիության մասին վարկածի ստուգումը ամբողջությամբ: Որպես հիմնական վարկած առաջ է քաշվում զրոյական վարկածը, որը նշանակում է H0, ոչ նշանակալիորեն ռեգրեսիայի իրական պարամետրերը կամ կոռելացիայի գործակիցները տարբերվում են 0-ից:

H0 : b = 0

H0 : r = 0

Առաջ է քաշվում նաև մրցակցող վարկածը` H1

H1 : b = 0

H1 : r = 0

Առաջ քաշված վարկածները ստուգվում են Ստյուդենտի t չափանիշի միջոցով: Մոդելի պարամետրերը համարվում են վիճակագրորեն նշանակալի, եթե tհաշվարկայինը > tաղյուսակային

Աղյուսակային արժեքը որոշվում է կախված α նշանակալիության մակարդակից և ազատության աստիճանների թվից (n - h):

**Երկչափ ռեգրեսիայի գծային մոդել**

Էկոնոմետրիկայի ուսումնասիրման առարկան վիճակագրական տվյալներն են, իսկ գործիքը ռեգրեսիայի վերլուծությունը: Էկոնոմետրիկան հիմնված է մաթեմատիկական վիճակագրության վրա, թե ինչպես եզրակացություններ անել համախմբության մասին ելնելով ընտրանքի տվյալներից:

Համախմբության ռեգրեսիայի ֆունկցիան արտահայտում է y կախյալ փոփոխականի միջին կամ սպասվող արժեքը յուրաքանչյուր x փոփոխականի համար: ՀՌՖ կարելի է ներկայացնել E = Y() = β0 + β1 xt տեսքով, որտեղ E = Y() -ն արտահայտում է y-ի միջին կամ սպասվող արժեքը պայմանավորված xt-ի տվյալ արժեքով: Ենթադրվում է, որ

y-ի յուրաքանչյուր սպասվող պայմանական արժեքը գծային ֆունկցիա է xt-ից:

Իրականում համախմբությունը հնարավոր չէ դիտարկել ամբողջությամբ, այն գնահատելու համար օգտվում ենք ընտրանքային տվյալներից: Ընդ որում էկոնոմետրիկան ենթադրում է, որ ընտրանքը պատահական է: Ընտրանքը իրական համախմբության մոտավորացում է: Համախմբության ռեգրեսիայի գիծը տեսական գաղափար է, նշանակում է, որ ՀՌՖ գործակիցները անհայտ են: Համախմբության յուրաքանչյուր տրված xt համար yt ստոխաստիկ փոփոխական է հավանականության պայմանական բաշխումով և Yt = β0 + β1 xt միջինով:

Ընտրանքը ռեգրեսիայի գիծ է, էմպիրիկ է և յուրաքանչյուր տրված xt համար ընտրանքի Y կախյալ փոփոխականը Y-ի դիտարկման կամ գնահատված արդյունքն է: Ընտրանքի ռեգրեսիայի գիծը կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով. Yt = b0 + b1 xt + et, որտեղ et ընտրանքի մնացորդն է: Ի տարբերություն սխալի` մնացորդը դիտարկելի է: Դա նշանակում է, որ սխալը գնահատվում է մնացորդի միջոցով կամ մոտավորացված է դրա միջոցով: Այսպիսով` կարելի է եզրակացնել, որ ռեգրեսիայի վերլուծության հիմնական նպատակը ընտրանքային ռեգրեսիայի գծի հիման վրա համախմբության ռեգրեսիայի գծի գնահատումն է:

**Փոքրագույն քառակուսիների մեթոդ**

Ինչպես համոզվեցինք, ՀՌԳ-ն կարելի է գնահատել ընտրանքի ռեգրեսիայի գծի հիման վրա: Գոյություն ունեն ընտրանքի ռեգրեսիայի գծի գնահատման տարբեր եղանակներ: Լավագույն մեթոդը դա փոքրագույն քառակուսիների մեթոդն է, որն ունի մեծ կիրառություն էկոնոմետրիկայում: Ենթադրենք երկչափ համախմբության ռեգրեսիայի ֆունկցիան ունի հետևյալ տեսքը.

Yt = β0 + β1 xt + t

Քանի որ այն գնահատելի չէ, ուստի դա գնահատում են ընտրանքի ռեգրեսիայի ֆունկցիայով.

Yt = b0 + b1 xt + et = Ŷt + et

et = Yt - Ŷt

et = Yt - b0 - b1 xt

Մնացորդը հավասար է իրական և գնահատված արժեքների տարբերությանը: Որպեսզի որոշենք b0 և b1 գործակիցները անհրաժեշտ է, որպեսզի Σet min կամ 0-ի: Այս երևույթը ստանալու համար օգտվում ենք ՓՔՄ, այսինքն մնացորդների քառակուսիների գումարը լինի մինիմալ. Σet2 = Σ (Yt - Ŷt)2  min

**Դասական գծային ռեգրեսիայի մոդելի ենթադրությունները**

Որոշված ռեգրեսիայի b0 և b1 գործակիցները անվանում են համահարթված OLS գործակիցներ, քանի որ հաշվարկված է փոքրագույն քառակուսիների չափանիշով: Դրանք կետային գործակիցներ են, քանի որ տվյալ ընտրանքի համար ունեն 1 ստույգ արժեք: OLS գործակիցները ստանալուց հետո հարց է առաջանում, թե որքանով է ընտրանքի ռեգրեսիայի գործակիցը ճիշտ ներկայացնում իրական համախմբության ռեգրեսիայի գործակիցը: Այստեղ պարզ է, որ y-ը կախյալ է ինչպես բացատրող փոփոխականից, այնպես էլ սխալից: X բացատրող փոփոխականը իր բնույթով ստոխաստիկ չէ, ի տարբերություն սխալի, որը մոդելում չբացահայտված փոփոխականների ազդեցության չափն է y-ի վրա: Անհրաժեշտ է որոշակի պատկերացում կազմել սխալի վերաբերյալ: Որպեսզի վստահ լինել, որ ԸՌՖ ճիշտ բնութագրի ՀՌՖ-ին: Այս նպատակով դասական գծային ռեգրեսիայի մոդելը որոշակի ենթադրություններ է կատարում ռեգրեսիայի ֆունկցիայի և սխալի վերաբերյալ: Ենթադրություններն են`

1) Ռեգրեսիայի մոդելը գծային է պարամետրերով` Yt = β0 + β1 xt + t

Այն կարող է լինել ոչ գծային փոփոխականներով, բայց գծային պարամետրերով

Yt = β0 + β1 xt2 + t

2)Սխալի միջինը կամ սպասվող արժեքը հավասար է 0` E = t) = 0

3) Xt ստոխաստիկ չէ

4) Սխալի դիսպերսիան համացրիվ է` Var t) = δ2

5) Սխալների միջև չկա ավտոկոռելացիա ` Cov t,t-1) = 0

6) Ռեգրեսիայի մոդելը ճիշտ է բնորոշված, այսինքն` մոդելը ընդգրկում է ճիշտ բացատրող փոփոխականներ և պարզ է դրա ֆունկցիոնալ ձևը:

7) Մոդելը չի պարունակում բազմակոլերիականություն, այսինքն` մոդելում ընդգրկված 2 փոփոխականների միջև չկա հաստատուն կախվածություն:

**Գաուս-Մարկովի թեորեմը**

Դասական գծային ռեգրեսիայի ենթադրությունների պայմաններում OLS մեթոդով հաշվարկված իրական գործակիցների վիճակագրական հատկությունները ձևավորվում է Գաուս-Մարկովի թեորեմում, որը հետևյալն է. *դասական գծային ռեգրեսիայի մոդելի ենթադրությունների պայմաններում OLS գործակիցները բոլոր անշեղ գծային գործակիցների միջև ունեն նվազագույն դիսպերսիա: Այսինքն` գծային անշեղելի գործակիցներ են:* Հետևաբար OLS-ում b0 և b1 գործակիցները գծային են և անշեղելի, այսինքն` E (b0) = β0  և E (b1) = β1, ունեն նվազագույն դիսպերսիա:

**Սխալի դիսպերսիայի գնահատումը**

ՓՔՄ-ով գնահատված գործակիցները բոլոր անշեղելի գծային գործակիցների միջև ունեն նվազագույն դիսպերսիա: Այսինքն` b0 և b1 լավագույն գծային անշեղելի գործակիցներ են: Սակայն b0 և b1 գործակիցների դիսպերսիան գնահատելու համար անհրաժեշտ է պարզել, թե ինչի է հավասար սխալի դիսպերսիան: ՓՔՄ սխալի դիսպերսիան, որը տրված է Xt-ի համար ներկայացնում է t և Yt պայմանական դիսպերսիան: Այն գտնելու համար օգտվում են հետևյալ հավասարումից.

δ2 = Var t) = E(t - Et))2 = Et2)

E(t) = 0

Se2 = df = n-2

Se2 իրական, բայց անհայտ δ2 կետային գործակիցն է, որի ստանդարտ սխալն է.

Se =

**Դետերմինացիայի գործակից**

Եթե բոլոր դիտարկումները ռեգրեսիայի գծի վրա է, ապա դետերմինացիայի գործակիցը հավասար է 1, հակառակ դեպքում հավասար է 0-ի: Այսինքն կարելի է եզրակացնել, թե որքան մոտ է մնացորդը ռեգրեսիայի գծին, այնքան մեծ է դետերմինացիայի գործակիցը:

D = r2 . 100

Դետերմինացիայի գործակիցը հաշվելու համար et=Yt-Ŷt, իսկ Yt հաշվելու համար`

et=Yt-b0 +b1t

Y1 = et+ Ŷt

Yt-y=Ŷ- y + et

Հավասարման 2 մասն էլ բարձրացնենք քառակուսի

(Yt-y)2 = (Ŷ- y + et)2

Σ(Yt-y)2 = Σ(Ŷ- y )2

Առաջին գումարը դա ընդհանուր դիսպերսիան է` TST: Մոդելում բացատրված դիսպերսիան նշանակում են ESS, իսկ մոդելում չբացահայտված դիսպերսիան նշանակում են` RSS: Դետերմինացիայի գործակիցը դրական է, եթե փոփոխվում է 0-ից 1 միջակայքում և գնահատում է y-ի այն մասը, որը բացատրված է ռեգրեսիայի մոդելում:

**Բազմակի փոփոխականներով ռեգրեսիայի մոդելի ընդհանուր բնութագիրը**

Ենթադրենք գոյություն ունի իրարից անկախ K փոփոխականներ, որոնք ազդում են մեկ այլ փոփոխականի վրա: Այդ տիպի մոդելը կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով`

Yt= β0 + β1 x1t + β2 x2t + … + βK xKt + et (1)

որտեղ Yt կախյալ փոփոխական է, իսկ x1, x1…,xK անկախ փոփոխական են:

β0 , β1 … βK  գործակիցներ են, et -մնացորդ

Պարզության համար բազմակի փոփոխականներով ռեգրեսիայի մոդելը ներկայացնենք 3 փոփոխականներով մոդելի տեսքով.

Yt= β0 + β1 x1t + β2 x2t + et (2)

Ընդունված է, որ այս գործակիցը ներկայացնում է որպես կախյալ փոփոխականի միջինացված արժեք, երբ անկախ փոփոխականը հավասար է 0 կամ ֆիքսված են: Անկախ փոփոխականի բազմապատկիչները կոչվում են մասնակի ռեգրեսիայի գործակիցներ: ՓՔՄ օգտագործման ռեգրեսիայի գործակիցների հաշվարկման ժամանակ ռեգրեսիայի մոդելի հիմնական ենթադրությունները պահպանվում են նաև բազմակի փոփոխականների դեպքում: Այդ ենթադրությունը հաշվի առնելով կարելի է պնդել, որ միջին պայմանական ազատվող արժեքը ներկայացվում է այսպես

E(Yt/ x1t, x2t) = β0 + β1 x1t + β2 x2t

Ռեգրեսիայի գործակիցների հաշվարկման համար մեծ կիրառություն ունի ՓՔՄ: Այս մեթոդը ենթադրում է մնացորդների քառակուսիների գումարը մինիմումի հասցնելը: Երկրորդ մոդելը կարելի է ներկայացնել

Yt= b0 + b1 x1t + b2 x2t + et (3)

(3) հավասարումից ` et = Yt- b0 - b1 x1t - b2 x2t (4)

(4) հավասարման 2 մասն էլ բարձրացնենք քառակուսի և տանելով գումարի նշանի տակ կստանանք. Σet2 =Σ( Yt- b0 - b1 x1t - b2 x2t )2

Որպեսզի ստանանք էքստրեմումի արժեքները, անհրաժեշտ է որոշել մասնակի ածանցյալները ըստ b0, b1 ,b2 պարամետրերի և դրանք հավասարեցնենք 0-ի:

ΣYt= nb0 + b1 Σx1t + b2Σx2t

ΣYtx1t= b0 Σx1t+ b1 Σx1t2+ b2Σx2tx1t

ΣYtx2t= b0 Σx2t+ b1 Σx1t x2t+ b2Σx2t2

Լուծելով հավասարումների համակարգը կստանանք b0, b1 ,b2 պարամետրերի թվային արժեքները: Այդ գործակիցները կարելի է ստանալ նաև մատրիցների միջոցով: Լուծումը կարելի է կատարել որոշիչների միջոցով, որտեղ ∆ (դելտան) համակարգի որոշիչն է, ∆b0, ∆b1 ,∆b2 : Ունենալով այդ որոշիչները կարող ենք հաշվել. b0 = , b1  = , b2 =

**Բազմակի ռեգրեսիայի հավասարման ներկայացումը ստանդարտացված մասշտաբում**

ty= β1 tx1 + β2 tx2 +…+ βp txp

t-ստանդարտացված փոփոխականներ, β-ռեգրեսիայի ստանդարտացված գործակիցներ:

Բազմակի ռեգրեսիայի գործակիցների և ստանդարտացված գործակիցների միջև գոյություն ունի հարաբերակցություն. bi = βi

Էլաստիկության միջին գործակիցը գծային ռեգրեսիայի համար հաշվարկվում է հետևյալ բանաձևով. Э = bj

Գործոնների միաժամանակյա ազդեցությունը արդյունքային հատկանիշի վրա գնահատվում է բազմակի կոռելյացիայի ինդեքսով. Ry x1, x2,…, xp =

Բազմակի կոռելյացիայի ինդեքսը ստանդարտացված մասշտաբով հավասարման համար ընդունում է հետևյալ տեսքը. Ry x1, x2,…, xp =

Կառուցված մոդելի որակը ամբողջությամբ գնահատում է դետերմինացիայի գործակիցը: Բազմակի դետերմինացիայի գործակիցը հաշվարկվում է որպես բազմակի կոռելյացիայի ինդեքսի քառակուսիով. R2y x1, x2,…, xp

Բազմակի ռեգրեսիայի հավասարման նշանակալիությունը ամբողջությամբ գնահատվում է Ֆիշերի F չափանիշի միջոցով: F= .

Բազմակի ռեգրեսիայի հավասարման կառուցման դեպքում կարող է առաջ գալ գործոնների մուլտիկոլինեարության պրոբլեմը դրանց միջև սերտ կապի առկայությամբ: 2 փոփոխականները ակնհայտորեն կոլինար են, եթե կապը Xi և Xj միջև մեծ է 0.7-ից:

Բազմագործոն ռեգրեսիայի ապարատի օգտագործումը դժվարանում է այն դեպքում, երբ ի հայտ է գալիս գործոնների մուլտիկոլինեարությունը: Որքան ուժեղ է մուլտիկոլինեարությունը, այնքան ցածր է բացատրող տատանման բաշխման գնահատականը ըստ առանձին գործոնների ՓՔՄ օգտագործման դեպքում: Գործոնի մուլտիկոլինեարությունը գնահատելու համար կարելի է օգտագործել փոփոխականների զույգային կոռելյացիայի գործակցի մատրիցայի որոշումը: Եթե գործոնները կոռելացված չեն իրար միջև, ապա գործոնների միջև կոռելյացիայի գործակիցը կարող է լինել միավոր մատրիցան, քանի որ Rxixj=0: Այսպես, եթե դիտարկում ենք 3 բացատրվող փոփոխականներով հավասարումը Y=a+bx+bx+ε, գործոնային հատկանիշների միջև կոռելյացիոն մատրիցան կարող է ունենալ որոշիչ, որը հավասար է 1-ի:

r11 r12 r13 1 0 0

D(R) = r21 r22 r23 .  0 1 0 = 1

r31 r32 r33 0 0 1

Եթե գործոնների միջև գոյություն ունենա գծային կապ և բոլոր գործակիցները հավասար են 1-ի, ապա մատրիցան կլինի. 1 1 1

D(R) = 1 1 1 =0

1 1 1

Որքան միջգործոնային կոռելյացիայի գործակիցների մատրիցան մոտ է 0-ին, այնքան ուժեղ է մուլտիկոլինեարությունը: Այսինքն` ոչ հուսալի է բազմակի ռեգրեսիայի արդյունքը: Հակառակը` որքան մոտ է 1-ին, այնքան փոքր է մուլտիկոլինեարության գործոնը: Գործոնի ստուգումը կարելի է կատարել անկախ փոփոխականների փորձարկված վարկածի մեթոդով.

H: D(R) = 1, եթե ჯգործ2 >ჯաղյուս2 : Եթե տեղի ունի այս պայմանը, ապա վարկածը հերքվում է, այսինքն` H: D(R) ≠ 1:

**Ավտոկոռելացիա**

Բազմաչափ ժամանակային շարքերը, որոնք արտահայտում են արդյունքային հատկանիշի կախվածությունը 1 կամ մի քանի գործոնային հատկանիշներից, կոչվում են դինամիկայի շարքեր: Դինամիկայի շարքերի մշակման համար ՓՔՄ կիրառումը չի պահանջում որևէ ենթադրություն նախնական տվյալների բաշխման օրենքների վերաբերյալ: Սակայն դինամիկայի կապակցված շարքերի մշակման ժամանակ ՓՔՄ կիրառելու դեպքում պետք է հաշվի առնել ավտոկոռելացիայի առկայությունը, որը հաշվի չի առնվում միաչափ դինամիկայի շարքերը մշակելիս: Քանզի դրա առկայությունը նպաստում է դիտարկվող սոցիալ-տնտեսական երևույթների զարգացման միտումը ժամանակի ընթացքում ավելի հստակ արտահայտվելուն: Տնտեսական գործընթացների դինամիկայի շարքերի մակարդակների դասավորվածության միջև գոյութուն ունի փոխադարձ կապ, հատկապես, երբ մակարդակները իրար մոտ են: Այն հարմար է ներկայացնել կոռելյացիոն փոխլապակցությունների տեսքով. Y1Y2…Yn շարքի ժամանակի h միավորով տեղաշարժված մակարդակների միջև` Y1+hY2+h…Yn+h

L քայլով ժամանակային տեղաբաշխումը կոչվում է տեղաշարժ, իսկ կապի երևույթը կոչվում է ավտոկոռելացիա: Ավտոկոռելացիայի փոխկախվածությունը հատկապես էական է դինամիկայի շարքին հաջորդող և նախորդող մակարդակների միջև: Տարբերվում է ավտոկոռելացիայի 2 տեսակ`

1. 1 կամ մի քանի փոփոխականների դիտարկման ավտոկոռելացիա

2. Սխալների կամ տրենդից շեղումների ավտոկոռելացիա:

Վերջինիս առկայությունը հանգեցնում է ռեգրեսիայի գործակիցների միջին քառակուսային սխալի արժեքների տարանջատմանը, որը իր հերթին դժվարացնում է ռեգրեսիայի գործակիցների վստահելիության միջակայքի կառուցումը և նշանակալիության ստուգումը: Հետազոտության համար առավել մեծ հնարավորություն է ներկայացնում առաջին կարգի ոչ ցիկլային գործակցի հաշվարկը, քանի որ վերլուծական արդյունքների ամենամեծ շեղումները ի հայտ են գալիս շարքի սկզբնական և ժամանակի 1 միավորով տեղաշարժված Yt-1  կամ Yt+1 մակարդակների միջև գոյություն ունեցող կոռելացիայի համար: Տվյալ դեպքում ավտոկոռելացիայի գործակիցը կարելի է ներկայացնել զույգային գծային կապի կոռելացիայի գործակցի միջոցով. Ra=

Ուսումնասիրվող դինամիկայի շարքում ավտոկոռելացիայի առկայության կամ բացակայության մասին հետևություն կատարելու համար ավտոկոռելացիայի գործակիցների փաստացի արժեքները համեմատում ենք աղյուսակային արժեքների հետ նշանակալիության մակարդակի համար: Եթե ավտոկոռելացիայի փաստացի արժեքը փոքր է աղյուսակային արժեքից, ապա ավտոկոռելացիայի բացակայության վարկածը ընդունվում է: Իսկ եթե ավտոկոռելացիայի գործակիցը մեծ է աղյուսակային արժեքից, նշանակում է դինամիկայի շարքում առկա է ավտոկոռելացիա: Ավտոկոռելացիայի փոքրացման համար կիրառվում է տարբեր մեթոդներ, որոնցից առավելապես տարածված է Դարբին-Ուոտսոնի մեթոդը:

**Բազմակի ռեգրեսիա և կոռելացիա**

Բազմակի ռեգրեսիան դա կապի հավասարում է մի քանի անկախ փոփոխականների համար

Y=f(X1X2…Xp)

Բազմակի ռեգրեսիայի հավասարման կառուցման համար հաճախ օգտվում են հետևյալ ֆունկցիաներից.

1. Գծային ֆունկցիա` Y=a+b1x1+b2x2+…+bpxp+ε

2. Աստիճանային ֆունկցիա` Y=ax1 b1. x2 b2+…+xpbp+ε

3. Էքսպոնենցիալ ֆունկցիա`

4. Հիպերբոլի ֆունկցիա`

Կարելի է օգտագործել նաև այլ ֆունկցիաներ, որոնք բերվում են գծային տեսքի:

Հավասարման պարամետրերի գնահատման համար կարելի է օգտվել ՓՔՄ և ոչ գծային հավասարումները բերելով գծային տեսքի կազմել նորմալ հավասարումների համակարգ, որոնց լուծումը թույլ է տալիս ստանալ ռեգրեսիայի պարամետրերի գնահատականը:

ΣY= na + b1 Σx1 + b2Σx2

ΣYx1= a Σx1+ b1 Σx12+ b2Σx2x1

ΣYx2= a Σx2+ b1 Σx1 x2+ b2Σx22

Որպեսզի 2-րդ հավասարումը բերենք գծային տեսքի, անհրաժեշտ է այդ հավասարումը լոգարիթմել 10 կամ բնական հիմքով: Բնական հիմքով` e=2.7182818284509

lnY=lna+ln x1 b1+…+lnxpbp=lna+ b1ln x1+…+

Այստեղ դարձյալ կազմում ենք հավասարումների համակարգ նույն սկզբունքով և հաշվարկում ենք գործակիցները:

3-րդ հավասարումը բերենք բնական հիմքի`

lnY=a+ b1x1+b2x2+…+bpxp.lnε

Հաջորդ տեսքը բազմակի ռեգրեսիայի հավասարման կազմումը կատարվում է ռեգրեսիայի հավասարման ստանդարտացված մասշտաբով` ty= β1 tx1 + β2 tx2 +…+ βp txp

Բազմակի կոռելացիայի ինդեքսի արժեքը փոփոխվում է 0-ից 1 սահմաններում և պետք է մեծ կամ հավասար լինի զույգային կոռելացիայի ինդեքսին: Մասնավոր կոռելացիայի գործակիցը, որոնք փոփոխվում են Xi գործոնի աղդեցությամբ y արդյունքային հատկանիշը հաստատուն պահելով մյուս գործոնների մակարդակը: Մասնակի կոռելացիայի գործոկիցը փոփոխվում է -1-ից +1 միջակայքում:

Կառուցված մոդելի որակը ամբողջությամբ գնահատվում է դետերմինացիայի գործակցի օգնությամբ: Բազմակի ռեգրեսիայի հավասարման նշանակությունը գնահատվում է Ֆիշերի չափանիշի օգնությամբ: : F= .

Համեմատելով Ֆիշերի հատկանիշի արժեքը աղյուսակային արժեքի հետ, եթե փաստացի արժեքը մեծ է աղյուսակային արժեքից, նշանակում է մեր ընդունած վարկածը հաստատվում է, հակառակ դեպքում բացառվում է:

**Բազմակոլինեարություն**

Համաձայն Գաուս-Մարկովի թեորեմի ՓՔՄ գնահատված գործակիցները բոլոր անշեղ գծային գործակիցների միջև ունեն նվազագույն դիսպերսիա, այսինքն` լավագույն գծային շեղելի գործակիցներ են: Նշենք, որ բազմակոլինեարության առկայության դեպքում թեորեմի պայմանները խախտվում են: Բազմակոլինեարությունը վկայում է անկախ փոփոխականների միջև լրիվ կոլինեարության առկայության մասին: Իրականում բացատրող փոփոխականների միջև հազվադեպ է լրիվ կոլինեարություն հանդիպում: Ավելի հաճախ փոփոխականների միջև ի հայտ են գալիս խիստ գծային կախվածություն: Եթե մոդելում առկա է բազմակոլինեարությունը, այսինքն` 2 անկախ փոփոխականներ ունեն հատուկ գծային կախվածություն, ապա դրանց դիսպերսիային հավասար ստանդարտ սխալները չափազանց մեծանում են: Արդյունքում մոդելի գործակիցների գնահատված Ստյուդենտի t չափանիշի արժեքները նշանակալի չեն և առաջարկված 0-ական վարկածը, ըստ որի իրական գործակիցը հավասար է 0-ի հաճախակի ընդունվում է: Բազմակոլինեարության հետևանքով մոդելի դետերմինացիայի գործակիցը կարող է բավականաչափ մեծ լինել այն դեպքում, երբ գործակիցների t վիճակագիրը լինի ոչ նշանակալից: Այստեղից կարող ենք եզրակացնել, որ բազմակոլինեարության առկայության մասին են վկայում դետերմինացիայի բարձր մակարդակը համապատասխանաբար գնահատված ժամանակի փոքր արժեքներով: Նշենք նաև, որ բազմակոլինեարության առկայության ժամանակ մոդելի գործակիցները կարող են սխալ նշան ունենալ: Բազմակոլինեարության առկայությունը ստուգելու նպատակով կարելի է յուրաքանչյուր Xt փոփոխականի համար կատարել ռեգրեսիա ըստ մնացած X անկախ փոփոխականների և գնահատել դետերմինացիայի գործակիցը` R2 կամ համապատասխան Xt-ի համար Rt2: Նշենք, որ այդ ռեգրեսիաներից յուրաքանչյուրը կոչվում է օժանդակ ռեգրեսիա: Գնահատված Rt արժեքը գնահատվում է k-2 և n-k-1 ազատության աստիճաններով F բաշխման: Եթե գնահատված F-ի արժեքը գերազանցում է Ft-ի աղյուսակային արժեքին, ապա X-երի միջև գոյություն ունի հստակ խիստ գծային կախվածություն: Հակառակ դեպքում X փոփոխականների միջև գծային կախվածություն գոյություն չունի: Բազմակոլինեարությունը կարելի է ստուգել, եթե յուրաքանչյուր օժանդակ ռեգրեսիայի դետերմինացիայի գերծակիցը չի գերազանցում ընդհանուր կամ նախնական ռեգրեսիայի դետերմինացիայի գործակիցը, ապա ռեգրեսիայի մոդելը բազմակոլինեարության խնդիր չի պարունակում:

**Հետերոսկեդաստիկություն**

Ռեգրեսիայի գործակիցների հաշվարկման փոքրագույն քառակուսիների մեթոդի հիմնական ենթադրություններից է մոդելի մնացորդների հավասար դիսպերսիայով տեղաբաշխումը.

E(ε 2t)=δ2 , որտեղ t=1-ից n: Այն երևույթը, երբ մնացորդների հավասար դիսպերսիայի ենթադրությունը չի պաշտպանվում, կոչվում է հետերոսկեդաստիկություն: Տնտեսագիտության տեսության մեջ հետերոսկեդաստիկ երևույթների համար կան բազմաթիվ նախապայմաններ, որոնք հիմնականում պայմանավորված են տվյալ մոդելի համար հիմք հանդիսացող տեսությամբ: Բացի այդ անհավասար դիսպերսիայի համար հիմք կարող է հանդիսանալ այսպես կոչված փոփոխականի տվյալների բազմությունից առանձնացված տվյալների առկայությունը: Գործնականում երբեմն հանդիպում են դեպքեր, երբ փոփոխականի տվյալների բազմությունից որոշ տվյալներ ունեն խիստ առանձնացված արժեք: Այս դեպքում տվյալ ցուցանիշը պարզապես կարելի է հեռացնել բազմությունից, երբ տվյալների բազմության անդամների թիվը խիստ փոքր չէ: Յուրաքանչյուր ռեգրեսիայի մոդելում հետերոսկեդաստիկության առկայության հետևանքները պատկերացնելու համար ենթադրենք ունենք պարզ ռեգրեսիայի մոդելը. Yt= b0 + b1 xt + et

ՓՔՄ հաշվարկենք ռեգրեսիայի b1 գործակիցը և դրա դիսպերսիան հետերոսկեդաստիկության պայմաններում. b1 = , իսկ դիսպերսիան` Var(b1)=

Ենթադրենք δt2 = Se2, ապա այս բանաձևերը կլինեն նույնը: Հետերոսկեդաստիկության դեպքում b1 գործակիցը անշեղելի է:

**Մուլտիկոլինեարություն**

Մուլտիկոլինեարությունը դա ոչ խիստ գծային կախվածություն է գործոնային հատկանիշների միջև, որը հակասում է բազմագործոն ռեգրեսիայի մոդելի գործողության, անկախության վերաբերյալ, որը առաջ է բերում ոչ ցանկալի հետևանքների`

1. Գնահատման պարամետրերը դառնում են ոչ հուսալի: Դրանք պարունակում են մեծ ստանդարտ սխալներ և փոքր նշանակալիության մակարդակ: Միաժամանակ այդ մոդելը ամբողջությամբ հանդիսանում է նշանակալի բազմագործոն կոռելացիայի գործակիցների արժեքները դառնում են իրարից կախված:

2. Նախնական տվյալների ոչ մեծ փոփոխությունը առաջ է բերում պարամետրերի գնահատման զգալի փոփոխություն:

3. Մոդելի պարամետրերի գնահատումը դառնում են ոչ ճիշտ, որի հետևանքով տվյալ մոդելը դառնում է ոչ պիտանի վերլուծության և կանխատեսման համար:

4. Անհնար է դառնում որոշել առանձնացված գործոնների ազդեցությունը արդյունքային ցուցանիշի վրա:

Չնայած գործոնների միջև կա գծային կախվածություն, պարտադիր չէ, որ նա տա ոչ բավարար գնահատական: Այս դեպքում այլ գործոնների ազդեցության պայմաններում, այսինքն` եթե դիտարկումների թիվը նշանակալի է, ընտրանքային դիսպերսիան դառնում է մեծ, իսկ պատահական բաղադրիչների դիսպերսիան փոքրանում է: Սակայն ընդհանրացման մեջ կարող է ստացվել լավ գնահատական: Այսպիսի պրոբլեմը սովորաբար հանդիսանում է ժամանակային շարքի ռեգրեսիայի դեպքում: Եթե անկախ փոփոխականները ունեն արտահայտված ժամանակային միտում, այդ դեպքում նրանք իրար հետ սերտ կոռելացված են և դա կարող է բերել մուլտիկոլինեարության: Պրակտիկայում մուլտիկոլինեարության առկայության մասին կարելի է դատել զույգային, գծային կոռելացիայի գործակիցների մատրիցայով: Առանձնացված կոռելացիայի գործակիցը, որը չափվում է հատկանիշի արժեքների կապը ինքն իր մեջ հավասար է միավորի և այս դեպքում ստացվում է ամենամեծ սերտ կապը: Կոռելացիոն մատրիցան հանդիսանում է սիմետրիկ գլխավոր անկյունագծի նկատմամբ: Եթե տեղի ունի մուլտիկոլինեարությունը, այդ դեպքում մոդելում պետք է վերցնել ոչ բոլոր գործոնները, այլ միայն նրանք, որ մոդելի որակը նվազում է ոչ էականորեն: Ամենաբարձր աստիճանի պատասխանատու են մուլտիկոլինեարության համար այն հատկանիշները, որոնք սերտ կապի մեջ են մյուս գործոնային հատկանիշների հետ մոդելում: Այսինքն` ավելի բարձր կոռելացիայի գործակից ունեն ըստ մոդուլի զույգային գծային կոռելացիայի դեպքում: Անհրաժեշտ է որոշել նաև դետերմինացիայի գործակիցը, որտեղ որոշվում է Xj-ի կապը մյուս գործոնային հատկանիշներից: Որքան մոտիկ են դետերմինացիայի գործակիցը միավորին, այնքան մեծ է մուլտիկոլինեարության ֆակտորի ազդեցությունը, որը հանդես է գալիս որպես կախյալ փոփոխական: Համեմատելով իրար հետ բազմագործոն դետերմինացիայի գործակիցները տարբեր գործոնների համար կարելի է փոփոխականները կարգավորել ըստ մուլտիկոլինեարության պատասխանատվության:

**Դարբին-Ուոտսոնի բանաձևը**

Դարբին-Ուոտսոնի d տեստը ավտոկոռելացիայի որոշման ամենատարածված տեստն է, որը բնութագրվում է. d=

Տվյալ տեստի համար ռեգրեսիայի մոդելը պետք է կայուն մեծություն ունենա: Տեստի առավելությունը այն է, որ իմնված է գնահատված մնացորդների կիրառման վրա, տվյալ առավելության շնորհիվ հնարավոր է ռեգրեսիայի վերլուծության ժամանակ մյուս գործակիցների հետ մեկտեղ ներկայացնել DW-ի d արժեքը: DW-ի միջոցով ավտոկոռելացիայի առկայությունը ստուգելու համար անհրաժեշտ է բացել հավասարման չակերտները. d==1-2P+1=2-2P=2(1-P)

1-ին ու 3-րդ գործակիցները կարող ենք մոտավորացնել 1-ի, քանի որ դրանք տարբերվում են դիտարկման 1 սխալի առկայությամբ, հետևաբար d=2(1-P): Եթե գնահատված P-ի արժեքը հավասար է 0-ի, ապա d համապատասխանաբար հավասար կլինի 2-ի, ապա մոդելը չունի ավտոկոռելացիա: Եթե գնահատված P-ի արժեքը հավասար է 1-ի և d=0, մոդելի սխալների միջև կա դրական կոռելացիա: Եթե P=-1, ապա d=4, մոդելի սխալների միջև կա բացասական կոռելացիա: d տեստը չի առաջարկում կոնկրետ կրիտիկական արժեք, որի հիման վրա կարելի է մերժել կամ ընդունել վարկածը:

Դարբինը և Ուոտսոնը առաջարկել են ստորին և վերին սահմանները, որոնք ամփոփված են աղյուսակում, կրիտիկական արժեքները այնպես են, որ գնահատված d-ի արժեքը ընկնում է այդ կրիտիկական արժեքներից դուրս, ապա մոդելը կարող է պարունակել դրական և բացասական կոռելացիա:

մերժել անորոշ անորոշ մերժել

վարկածը գոտի գոտի վարկածը

ընդունել վարկածը

0 d1 dսկզ 2 4+ dսկզ 4- dսկզ 4

**Դինամիկայի շարքերի կոռելացիա**

Երևույթի ըստ ժամանակի զարգացման ուսումնասիրության համար հարկ է լինում գնահատել տարբեր բովանդակություն ունեցող, սակայն միմյանց հետ կապակցված 2 կամ ավելի դինամիկայի շարքերի մակարդակների փոփոխության միջև եղած փոխկախվածության աստիճանը: Այս խնդիրը լուծվում է դինամիկայի շարքերի մակարդակների կոռելացման տրենդից` փաստացի մակարդակների շեղումների կոռելացիան հաջորդական տարբերությունների կոռելացիոն մեթոդով: Դինամիկայի շարքերի մակարդակների կոռելացիան միայն այն դեպքում է ցույց տալիս կապի խտության աստիճանի ստույգությունը դինամիկայի շարքերի միջև, երբ դրանցից յուրաքանչյուրում բացակայում է ավտոկոռելացիան: Տվյալ դեպքում կոռելացիայի գործակիցը հաշվարկվում է հետևյալ բանաձևով. Rxy=

Մինչև դինամիկայի շարքի կոռելացիայի որոշումը անհրաժեշտ է ստուգել ավտոկոռելացիայի առկայությունը կամ բացակայությունը շարքերից յուրաքանչյուրի ներքո: Շարքերից որևէ մեկի մակարդակների միջև ավտոկոռելացիայի առկայության դեպքում այն պետք է վերացվի: Այդ մեթոդով կոռելացվում են ոչ թե մակարդակները, այլ տրենդը արտացոլող հարթեցված մակարդակների շեղումները փաստացիներից, այսինքն` մնացորդային մեծությունները: Այդ նպատակով դինամիկայի յուրաքանչյուր շարքը հարթեցնում են որոշակի վերլուծական բանաձևով, դրանից հետո էմպիրիկ մակարդակներից 100 հարթեցված մակարդակները, այսինքն` գտնում ենք. dx=xi-x

dx և dy միջև եղած կապի խտությունը որոշվում է հետևյալ բանաձևով. Rdxdy=

Հաջորդական տարբերությունների համահարաբերակցությունը – ավտոկոռելացիայի ազդեցությունը կարելի է բացառել յուրաքանչյուր մակարդակից հանելով նրա նախորդ մակարդակը, այսինքն` գտնելով մակարդակների տարբերությունը. Yi-Yi-1

Հանրահաշվորեն հեշտ է ցույց տալ, որ մակարդակներից դրանց տարբերություններին անցում կատարելով բացառվում է ընդհանուր միտումի ազդեցությունը տատանման վրա: Ընդ որում մակարդակների ըստ ուղիղ գծի փոփոխության դեպքում կարելի է կոռելացնել առաջին տարբերությունները ըստ n-երորդ կարդի կորի փոփոխության դեպքում.

∆x=xi-xi-1

∆y=yi-yi-1 R∆x∆y=